

Die Energiebilanz eines Wasserstoffbogens
im axialen Magnetfeld

U. Heidrich

IPP 3/13

Dezember 1963

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

GARCHING BEI MÜNCHEN

I. Die Energie

1. Druckverteilung im Wasserstoffbogen infolge des überlagerten Magnetfeldes 1

2. Aufgabe Die Energiebilanz eines Wasserstoffbogens in der Hellschicht Differentialgleichung und deren Transformationseigenschaften 5

3. Lösung der Ebenbaas-U. Heidrich Differentialgleichung durch das sog. Zweizug-Verfahren 7

4. Durchführung der Ebenbaas-Heller'schen Differentialgleichung durch Iteration 11
IPP 3/13 Dezember 1963

5. Zusammenfassung der in folgenden benötigten Größen und der Vorgehensweise von Messwerten 15

6. Berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff 16

7. Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit von Wasserstoff parallel zum Magnetfeld 19

8. Ergebnisse 21

9. Diskussion der Temperaturprofile und der Charakteristik des Bogens 23

Literaturverzeichnis 26

Abbildungen I-XI

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

<p>I. <u>Die Energiebilanz ohne Abstrahlung</u></p>	
1. Druckerhöhung im Wasserstoffbogen infolge des überlagerten Magnetfeldes	1
2. Aufstellung der Energiebilanz des Bogens (Elenbaas-Heller'sche Differentialgleichung) und deren Transformationseigenschaften	5
3. Lösung der Elenbaas-Heller'schen Differentialgleichung durch das sog. Zweizug-Verfahren	7
4. Überführung der Elenbaas-Heller'schen Differentialgleichung in eine Integralgleichung und deren Lösung durch Iteration	11
5. Zusammenfassung der im folgenden benötigten Grössen und der Umrechnung von Masseinheiten	15
6. Berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff	16
7. Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit von Wasserstoff parallel zum Magnetfeld	19
8. Ergebnisse	21
9. Diskussion der Temperaturprofile und der Charakteristik des Bogens	23
Literaturverzeichnis	26
Abbildungen	I-XI

II. Der Einfluss der Strahlung auf die Energiebilanz

1. Einleitung	28
2. Linienstrahlung der H-Atome	31
3. Kontinuumsstrahlung der H-Atome	39
4. H^- -Strahlung und die Zyklotronstrahlung	41
5. Übersicht über die Strahlungsenergiebilanz pro Volumen- element für die Lyman-Serie	42
6. Bestimmung eines mittleren Linienabsorptionskoeffizien- ten	44
7. Mittelung der Strahlungsintensität über dem vollen Raumwinkel	48
8. Numerische Lösung der um die Strahlungsenergiebilanz erweiterten Elenbaas-Heller'schen Differentialglei- chung	52
9. Ergebnisse und ihre Diskussion	54
Literaturverzeichnis	62
Abbildungen	I-VII

1. Direktwirkung im Wasserstoffbogen infolge des überlagerten Magnetfeldes

1.1. Da auch teilweise im Titel erwähnt, sollen in der vorliegenden Arbeit zunächst folgende Annahmen gemacht werden:

- a) Stationarität des Bogens.
- b) Bei Einführung von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) Unabhängigkeit der Bogenkonfiguration vom Winkel φ und der axialen Koordinate z (Zylindersymmetrie)

I. Die Energiebilanz ohne Abstrahlung

- Dieser Ansatz dürfte den Verlauf der Bogenachse gut beschreiben, während er für die Kathoden- und Anodenfallgebiete nicht mehr zutrifft.
- c) Die Schwerpunktschwerachse des Bogenplasmas ist verschwenkt und klein.
 - d) Vernachlässigung der Nennstromdichte (was tiefer soll im zweiten Teil der Arbeit betrachtet werden).
 - e) Ein gleichmäßiges, in die Bogenachse gerichtete Magnetfeld H_0 wird angenommen, das parallel zur Bogenachse verläuft. Die Richtung des Magnetfeldes soll die Richtung der Bogenachse mit der Zeit veränderlich sein.

- f) Stationarität des Bogenplasmas (gleichzeitige stationarität des Stromfeldes, des Magnetfeldes, des Gleichgewichts, also Gültigkeit der Ohm'schen Formel).

$$\frac{F_{i0}}{P_0} = \frac{F_{i0}}{P_0} \left(\frac{V_0}{V_0} \right) \left(\frac{Y_0}{kT} \right)$$

F_{i0}, F_{e0}, P_0 sind die Flussdichte der Ionen, Elektronen und Wärme, V_0 die Geschwindigkeit der Ionen, T_0 die Temperatur; Ferner abgesehen zur Richtung nach φ .

- g) Quantifizierung des Bogenplasmas (Anzahlanteile der Ionen n_i, n_e der Elektronen).
- h) Infolge der φ -Richtung von einem überlagerten Magnetfeldes H_0 ergibt sich durch den Induktions des Stromfeldes H_0 ein Zusatzfeld H_1 im Bogenplasma.

1. Druckerhöhung im Wasserstoffbogen infolge des überlagerten Magnetfeldes

1.1. Wie schon teilweise im Titel erwähnt, sollen in der vorliegenden Arbeit zunächst folgende Annahmen gemacht werden:

- a) Stationarität des Bogens.
- b) Bei Einführung von Zylinderkoordinaten (r, φ, z) Unabhängigkeit der Bogenkonfiguration vom Winkel φ und der axialen Koordinate z (Zylindersymmetrie).
Dieser Ansatz dürfte den Bereich der Bogensäule gut beschreiben, während er für die Kathoden- und Anodenfallgebiete nicht mehr zutrifft.
- c) Die Schwerpunktgeschwindigkeit \dot{m} des Bogenplasmas ist verschwindend klein.
- d) Vernachlässigung der Strahlungsverluste (auf diese soll im zweiten Teil der Arbeit eingegangen werden).
- e) Entsprechend dem axialen elektrischen Feld \mathcal{E} , das über dem Bogenquerschnitt und gemäss b) in z -Richtung konstant sein soll, fliesst ein elektrischer Strom mit der Flächendichte

$$\mathbf{j} = \sigma \mathcal{E} \quad (1.1)$$

(Ohmsches Gesetz; σ = elektrische Leitfähigkeit).

- f) Vorhandensein lokalen thermischen Gleichgewichts, also Gültigkeit der Saha-Gleichung:

$$\frac{p_i p_e}{p_o} = \frac{2}{Z_o} \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi_i}{kT}} \equiv U(T) \quad (1.2)$$

(p_i , p_e , p_o sind die Partialdrücke der Ionen, Elektronen und Atome, Z_o die Zustandssumme der (H-)Atome, T die Temperatur; siehe ansonsten zur Notation auch 5.)

- g) Quasineutralität des Bogenplasmas (Anzahldichte der Ionen $n_i = n_e$ der Elektronen)
- h) Infolge des in z -Richtung von aussen überlagerten Magnetfeldes \mathcal{H}_z steigt mit zunehmender Ionisation des Bogenplasmas sein Gesamtdruck. Diese Druckerhöhung ist

(für Wasserstoff und Helium) bei gegebenem Aussendruck p_A und gegebenem \mathcal{L}_z als Funktion der Temperatur T berechnet worden [1]. (Siehe Abb. 1a)

Für die expliziten Rechnungen nehmen wir Wasserstoff mit $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$ und $|\mathcal{L}_z| = 20kT$ an.

1.2. Zum besseren Verständnis der Physik des Bogens soll hier die Druckerhöhung infolge des überlagerten Magnetfeldes in enger Anlehnung an [1] quantitativ dargestellt werden.

Ausgangspunkt sind dabei die Schlüter'schen Bewegungsgleichungen für das Drei-Komponenten-Plasma [7] (in üblicher Notation, vgl. auch 5.):

$$\rho_i \frac{dn_i}{dt} + n_i n_e \epsilon_{ie} (n_i - n_e) + n_i n_0 \epsilon_{io} (n_i - n_0) = -\text{grad } p_i + n_i e \mathcal{E} + n_i e n_i \times \mathcal{L} \quad (1.3)$$

$$\rho_e \frac{dn_e}{dt} + n_i n_e \epsilon_{ie} (n_e - n_i) + n_e n_0 \epsilon_{eo} (n_e - n_0) = -\text{grad } p_e - n_e e \mathcal{E} - n_e e n_e \times \mathcal{L} \quad (1.4)$$

$$\rho_0 \frac{dn_0}{dt} + n_0 n_i \epsilon_{io} (n_0 - n_i) + n_0 n_e \epsilon_{eo} (n_0 - n_e) = -\text{grad } p_0 \quad (1.5)$$

(Die Wasserstoffionen sind nur einfach geladen.) Eine der drei Bewegungsgleichungen für Elektronen (Index e), Ionen (Index i) und Atome (Index 0) kann näherungsweise durch die Bewegungsgleichung des Gesamtplasmas ersetzt werden, indem (1.3) ÷ (1.5) addiert werden.

$$\rho \frac{dn}{dt} = -\text{grad } p + j \times \mathcal{L} \quad (1.6)$$

mit

$$j = e n_i (n_i - n_e) \quad (1.7)$$

$$\rho = 2\rho_i + \rho_0 \quad (1.8)$$

$$\rho n = \rho_e n_e + \rho_i n_i + \rho_0 n_0 = m_0 \left(n_i \frac{m_e}{m_i} n_e + n_i n_i + n_0 n_0 \right) = 0 \quad (1.9)$$

Führt man noch die Schwerpunktsgeschwindigkeit n_L der Ladungsträger ein:

$$(\rho_e + \rho_i) n_L = \rho_e n_e + \rho_i n_i \quad (1.10)$$

so kann man wegen (1.7), (1.9) und (1.10) schreiben:

$$n_e = n_L - \frac{j}{n_i e} \quad (1.11)$$

$$n_i = n_L + \frac{m_e - j}{m_i n_i e} \quad (1.12)$$

$$n_o = -\frac{n_i}{n_o} \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) n_L \quad (1.13)$$

Die letzten drei Gleichungen ergeben eingesetzt in (1.4) und (1.5):

$$-\frac{j}{e} (n_i \epsilon_{ie} + n_o \epsilon_{eo}) + n_i (n_o + n_i) \epsilon_{eo} n_L = -\text{grad } p_i - n_i e (\xi + n_L \times \mathcal{L}) + j \times \mathcal{L} \quad (1.14)$$

$$-\frac{j}{e} (\epsilon_{eo} - \frac{m_e}{m_i} \epsilon_{io}) n_o - n_i (n_o + n_i) (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) n_L = -\text{grad } p \quad (1.15)$$

und deren Kombination (Elimination von n_L):

$$-\frac{j}{e} (n_i + n_o) [n_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + n_o \epsilon_{io} \epsilon_{eo}] = - (n_i + n_o) (\epsilon_{io} - \epsilon_{eo}) \text{grad } p_i + [(n_i + n_o) \epsilon_{io} - n_o \epsilon_{eo}] j \times \mathcal{L} - n_i (n_i + n_o) (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) e \xi - e \text{grad } p_o \times \mathcal{L} \quad (1.16)$$

Die φ -Komponente von (1.16) lautet dann umgeformt (mit $j_r = 0$ infolge der ambipolaren Diffusion)

$$j_\varphi = - \frac{e^2 B_z}{(n_i + n_o) [n_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + n_o \epsilon_{io} \epsilon_{eo}]} \frac{dp_o}{dr} \quad (1.17)$$

Andererseits gibt die r-Komponente von (1.6), sofern wir das Eigenmagnetfeld von j_z vernachlässigen:

$$\frac{dp}{dr} = j_\varphi B_z \quad (1.18)$$

sowie (1.18) in (1.17):

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{e^2 B_z^2}{(n_i + n_o) [n_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + n_o \epsilon_{io} \epsilon_{eo}]} \frac{dp_o}{dr} \quad (1.19)$$

Mittels der Saha-Gleichung (1.2), der Quasineutralität und (1.8) erhalten wir:

$$p_o = p + 2U - 2\sqrt{pU + U^2} = p_o(p, T) \quad (1.20)$$

$$p_i = \sqrt{pU + U^2} - U = p_i(p, T) \quad (1.21)$$

Die totale Differentiation von (1.20) führt dann zu

$$\begin{aligned} \frac{dp_o}{dr} &= \left(\frac{\partial p_o}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dr} + \left(\frac{\partial p_o}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dr} \\ &= \frac{p_o}{p_i + p_o} \frac{dp}{dr} - \frac{p_o^2}{p_i (p_i + p_o)} \frac{dU}{dT} \frac{dT}{dr} \end{aligned} \quad (1.22)$$

(1.22) in (1.19) ergibt ferner

$$\frac{dp}{dr} = \frac{n_o^2 e^2 B_z^2 \frac{dU}{dT} \frac{dT}{dr}}{n_i (n_o + n_i)^2 [n_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) + n_o \epsilon_{io} \epsilon_{eo}] + n_i n_o e^2 B_z^2} \quad (1.23)$$

Drückt man die Teilchendichten n_L durch die Partialdrücke $p_L = n_L kT$ und schliesslich die p_L mittels (1.20) und (1.21) durch p und T aus, dann geht (1.23) über in:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= (p + 2U - 2\sqrt{pU + U^2}) e^2 B_z^2 \frac{dU}{dT} \frac{dT}{dr} / \\ &\left\{ \sqrt{pU + U^2} \frac{(p + U - \sqrt{pU + U^2})}{(kT)^2} [(\sqrt{pU + U^2} - U) \epsilon_{ie} (\epsilon_{io} + \epsilon_{eo}) \right. \\ &\left. + (p + 2U - 2\sqrt{pU + U^2}) \epsilon_{io} \epsilon_{eo}] + (\sqrt{pU + U^2} - U) e^2 B_z^2 \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Wegen

$$\frac{dp}{dr} = \frac{dp}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (1.25)$$

stellt (1.24) eine Differentialgleichung in p und T dar, da die Reibungskoeffizienten nur von T abhängen (vgl. 6.).

Berücksichtigen wir noch das von j_φ in z -Richtung erzeugte Magnetfeld, so ist B_z in (1.24) kleiner als $|\mathcal{L}_z|$ des von aussen überlagerten Magnetfeldes. Mit der Maxwell'schen Gleichung

$$\text{rot } \mathcal{L} = \mu_o j \quad (1.23)$$

wird (1.6) bekannterweise:

$$\text{grad } p = \frac{\text{rot } \mathcal{L} \times \mathcal{L}}{\mu_o} = -\frac{1}{\mu_o} \text{grad } \frac{B_z^2}{2} + \frac{1}{\mu_o} (\mathcal{L} \text{ grad}) \mathcal{L} \quad (1.26)$$

Da der letzte Term in (1.26) für unsere Bogenkonfiguration Null wird, gibt die Integration von (1.26):

$$B_z^2 = |\mathcal{L}_z|^2 + 2\mu_o (p_A - p) \quad (1.27)$$

mit p_A als dem Aussendruck, d.h. dem Druck ausserhalb der Leitfähigkeitszone. (1.27) ist in (1.24) einzusetzen.

Aufgrund der vorstehenden Ausführungen kann man das Entstehen eines Druckgradienten folgendermassen verstehen: Beim Einschalten des überlagerten Magnetfeldes werden die radial nach aussen diffundierenden Elektronen und Ionen in φ -Richtung abgelenkt, was einen elektrischen Strom in φ -Richtung zur Folge hat, der das von aussen angelegte Magnetfeld schwächt. Im Gleichgewichtszustand wird der Gradient des Magnetfeldes durch einen Druckgradienten kompensiert.

2. Aufstellung der Energiebilanz des Bogens (Elenbaas-Heller'sche Differentialgleichung) und deren Transformationseigenschaften

2.1. Zur Aufstellung der Energiebilanz betrachten wir ein Volumenelement

$$d\tau = 2\pi r \cdot dr \cdot dz \quad (2.1)$$

Ihm wird pro Zeiteinheit durch den elektrischen Strom die Joule'sche (oder Ohm'sche) Wärme

$$j 2\pi r dr \cdot \xi dz = j \xi d\tau = \sigma(T) E^2 d\tau \quad (2.2)$$

zugeführt.

Diese Leistung geht erstens durch Wärmeleitung verloren.

Mit κ_N als Wärmeleitfähigkeit beträgt der Energieverlust pro Zeiteinheit für das betrachtete Volumenelement.

$$d\tau \cdot \operatorname{div}(-\kappa_N(T) \operatorname{grad} T) = -d\tau \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \left(\kappa_N(T) \frac{dT}{dr} \right) \quad (2.3)$$

Zweitens wandern durch die ambipolare Diffusion Elektronen und Ionen radial nach aussen, während die neutralen Atome nach innen kommen. Infolge der Konvektion von Teilchenenthalpie und Ionisationsenergie ist damit ebenfalls ein Energieverlust verbunden. Er kann analog zu (2.3) erfasst werden, indem die sogenannte Reaktionswärmeleitfähigkeit κ_R eingeführt wird, die aber keine echte Wärmeleitfähigkeit (ohne Massentransport!) ist [2]. κ_R muss zu κ_N addiert werden.

Im folgenden wollen wir nun unter Wärmeleitung κ die Summe

$$\kappa = \kappa_N + \kappa_R \quad (2.4)$$

verstehen. Gleichsetzen von (2.2) und (2.3) mit κ_N ersetzt durch κ ergibt schliesslich als Energiebilanz die sogenannte Elenbass-Heller'sche Gleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \kappa(T) \frac{dT}{dr} + \sigma(T) E^2 = 0 \quad (2.5)$$

2.2. Bezeichnen wir den Gesamtbogenradius mit R und führen wir den dimensionslosen relativen Radius

$$\varrho \equiv \frac{r}{R}$$

ein, so können wir (2.5) folgendermassen umschreiben:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \varrho \kappa(T) \frac{dT}{d\varrho} + \sigma(T) (ER)^2 = 0 \quad (2.6)$$

Für Bögen mit gleichen Randbedingungen, aber mit verschiedenem R folgt aus (2.6) unmittelbar:

$$E(R) = \frac{E(R=1)}{R} \quad (2.7)$$

Dieser Schluss ist allerdings wie der folgende nur erlaubt, wenn die Materialfunktionen σ und κ als reine Temperaturfunktionen vorliegen. Das ist für unser Bogenmodell erfüllt. σ und κ hängen zwar im allgemeinen vom Teilchendruck und der Temperatur ab (vgl. 6. und 7.), doch wie die Rechnung in 1.2. zeigt, können der Gesamtdruck p und damit auch die Partialdrücke durch Lösen der Differentialgleichung (1.24) mit (1.25) und (1.27) als Funktion der Temperatur ermittelt werden.

Der Gesamtbogenstrom J ergibt sich dann unter Ausnutzung der Zylindersymmetrie und unter Verwendung von (1.1) und (2.7) zu:

$$\begin{aligned} J(R) &= \int_0^R j df = \int_0^R \sigma E df \\ &= E(R) \int_0^R \sigma(T(r)) 2\pi r dr \\ &= \frac{E(R=1)}{R} \cdot R^2 \int_0^1 \sigma(T(\varrho)) 2\pi \varrho d\varrho \\ &= R \cdot J(R=1) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Während also E und J dem Gesamtbogenradius R indirekt bzw. direkt proportional sind, ist die pro Säulenlänge aufzubringende elektrische Leistung

$$W = E \cdot J \quad (2.9)$$

unabhängig von R . Für das radiale Temperaturprofil gilt natürlich

$$T(r) = T(\varrho \cdot R) \quad (2.10)$$

Zusammenfassend kann man feststellen, dass es keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn die Elenbaas-Heller'sche Gleichung (2.5) bei gleichen Randbedingungen nur für einen bestimmten Wert von R integriert wird. Mittels der Formeln dieses Abschnitts können die interessierenden Bogenwerte für beliebiges R ermittelt werden.

3. Lösung der Elenbaas-Heller'schen Differentialgleichung durch das sog. Zweizug-Verfahren

3.1. Zur Integration der Energiegleichung (2.5) müssen natürlich die Materialfunktionen $\sigma(T)$ und $\alpha(T)$ bekannt sein. Wir setzen ihre Kenntnis vorläufig voraus, in den Abschnitten 6. und 7. sollen sie genauer behandelt werden. Ausserdem wird die Lösung durch die Randbedingungen bestimmt. Da α und σ relativ komplizierte Funktionen von T bzw. r sind, schliessen wir uns bei der Integration zunächst einem in [3] beschriebenen Näherungssystem an, das hier kurz Zweizug-Verfahren genannt werden soll.

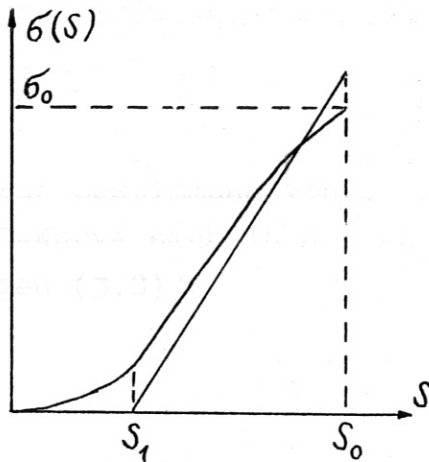
Führen wir die sogenannte Wärmeleitfunktion S

$$S = \int_0^T \alpha(T) dT, \quad dS = \alpha dT \quad (3.1)$$

ein, dann schreibt sich (2.5):

$$\sigma E^2 = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dS}{dr} \quad (3.2)$$

3.2. Nun nähern wir σ (T) bzw. σ (S) durch einen z w e i fachen Polygonzug an (wie, wird in Absatz 3.3. behandelt werden), der dem Verfahren den Namen gibt.



$$\sigma = \begin{cases} 0 & 0 \leq S \leq S_1 \\ \tilde{B}(S - S_1) & S_1 \leq S \leq S_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

$S_0 = S$ auf der Bogenachse

Durch den Ansatz (3.3) wird der Bogen in zwei Bereiche eingeteilt, in einen inneren mit und einen äusseren ohne elektrische Leitfähigkeit.

$$\underline{S_1 \leq S \leq S_0} :$$

Wegen (3.3)
$$\frac{dS}{dr} = \frac{dS}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dr} = \frac{1}{\tilde{B}} \frac{d\sigma}{dr} \quad (3.4)$$

(3.4) in (3.2):

$$\sigma E^2 = -\frac{1}{\tilde{B}r} \frac{dr}{dr} \frac{d\sigma}{dr} \quad \text{oder mit} \quad x \equiv r E \sqrt{\tilde{B}} \quad (3.5)$$

$$\sigma = -\frac{1}{x} \frac{dx}{dx} \frac{d\sigma}{dx} \quad \text{gleich} \quad x^2 \frac{d^2\sigma}{dx^2} + x \frac{d\sigma}{dx} + x^2 \sigma = 0 \quad (3.6)$$

(3.6) hat als Lösung die Besselfunktion nullter Ordnung J_0 (die Neumann'sche Funktion nullter Ordnung N_0 als zweite Lösung des Fundamentalsystems scheidet aus, da sie für $x = 0$ divergiert):

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = J_0(x) = \frac{S - S_1}{S_0 - S_1} \quad (3.7)$$

Wegen der allgemeinen Relation $\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x)$ gilt für $x = 2,405 = x_0$ (1. Nullstelle von $J_0(x)$)

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)_{x_0} = -(S_0 - S_1) J_1(x_0) \quad \text{sowie} \quad x_0 \left(\frac{dS}{dx}\right)_{x_0} = -(S_0 - S_1) \underbrace{x_0 J_1(x_0)}_{\tilde{z} = 1,2484} \quad (3.8)$$

$0 \leq S \leq S_1$:

(3.2) wird:
$$0 = \frac{d}{dx} x \frac{dS}{dx} \quad (3.9)$$

Die 1. Integration führt zu:

$$x \frac{dS}{dx} = c_1 \quad (3.10)$$

Zur Bestimmung von c_1 fordern wir, dass innere und äussere S-Kurve sich in der Ableitung stetig anschliessen, also wegen (3.8)

$$x \frac{dS}{dx} = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \quad (3.11)$$

Die weitere Integration ergibt:

$$S = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \cdot \ln x + c_2 \quad (3.12)$$

und wegen $S = S_1$ für $x = x_0$

$$\frac{S - S_1}{S_0 - S_1} = -\tilde{z} \cdot \ln \frac{x}{x_0} \quad (3.13)$$

Machen wir die Substitution (3.5) rückgängig und fordern $S = 0$ für $r = R$ (Rohrwand), so folgt aus (3.13):

$$\frac{S_1}{S_0 - S_1} = \tilde{z} \cdot \ln \frac{RE\sqrt{B}}{x_0} > E = \frac{2,405}{R\sqrt{B}} e^{\frac{S_1}{\tilde{z}(S_0 - S_1)}} \quad (3.14)$$

Ferner folgt aus (3.13):

$$S - S_1 = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \cdot \ln \frac{r}{r_0} \quad (3.15)$$

$$-S_1 = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \cdot \ln \frac{R}{r_0} \quad (3.16)$$

(3.15) - (3.16):

$$S = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \cdot \ln \frac{r}{R} = -(S_0 - S_1) \tilde{z} \cdot \ln \varrho \quad (3.17)$$

für den äusseren Bereich (mit $\varrho = r/R$).

Durch (3.7) und (3.17) ist also $S(r)$ und damit $T(r)$, das Temperaturprofil des Bogens festgelegt. Der Spannungsabfall pro Bogenlänge E errechnet sich nach (3.14). Die Leistung W pro Bogenlänge, die durch Joule'sche Wärme zugeführt wird, ist gleich dem Wärmeleitungsstrom an der Stelle $r = R$:

$$W = -2 \pi r \kappa \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R} = -2 \pi r \left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=R} \quad (\text{mit (3.17) für } r=R) \quad 2 \pi \tilde{z} (S_0 - S_1) \quad (3.18)$$

Bei gegebenem W , E folgt für J bekanntlich:

$$J = \frac{W}{E} \quad (3.19)$$

3.3. Eine ziemlich gute Anpassung der Geraden $\tilde{\sigma} = \tilde{B}(S - S_1)$ an die tatsächliche $\sigma(S)$ -Kurve kann durch die Anwendung des Gauß'schen Minimalprinzips erzielt werden, d.h. das Integral über das Quadrat des Abstandes von Polygonzug und Kurve soll ein Minimum sein. Die etwas langwierige Rechnung (sie ist in [3] angedeutet, und ihre Ergebnisse konnten verifiziert werden) ergibt:

$$(S_0 - S_1) = 3 f_1 S_0 \quad , \quad \tilde{B} = \frac{2 f_1 \sigma_0}{9 f_1^2 S_0} \quad (3.20)$$

$$\text{mit } f = \frac{\int_0^{S_0} \sigma dS}{\sigma_0 S_0} \quad (3.21), \quad f_1 = - \frac{\int_0^{S_0} \left(\int_0^{S'} \sigma dS \right) dS'}{S_0 \int_0^{S_0} \sigma dS} \quad (3.22)$$

3.4. Zusammenfassung:

Mit den Resultaten der Abschnitte 3.2. und 3.3. erhält man ($\tilde{z} = 1,2484$):

$$W = 6 \pi \tilde{z} f_1 S_0 \quad (3.23)$$

$$J = 7,27 R \sqrt{2 f \sigma_0 S_0} e^{-\frac{1}{3 \tilde{z} f_1}} \quad (3.24)$$

$$E = \frac{3,24}{R} f_1 \sqrt{\frac{S_0}{2 f \sigma_0}} e^{\frac{1}{3 \tilde{z} f_1}} \quad (3.25)$$

3.5. Eine etwas bessere Näherung erhält man, wenn $\sigma(S)$ durch einen d r e i fachen Polygonzug approximiert wird. Der Aufwand an numerischer Rechnung wird dann erheblich grösser, die Genauigkeit nimmt aber nur wenig zu (einige Prozent Abweichung gegenüber dem Zweizug-Verfahren). Darum soll hier davon abgesehen werden.

3.6. Ausführung der Rechnung:

Zur Lösung der Energiegleichung (2.5) nach dem Zweizug-Verfahren musste als erstes die Funktion $S(T) = \int_0^T \alpha(T) dT$ bestimmt werden. Da abgesehen vom Bereich schwacher Ionisation eine analytische Integration nicht möglich ist, wurde $\alpha(T)$ in der logarithmischen Darstellung durch einen Polygonzug angenähert (Abbildung 1). Die sich so ergebenden Näherungsexponentialfunktionen konnten leicht integriert werden. Wegen des starken Abfalls von α für vollionisiertes Plasma gegenüber teilionisiertem nimmt $S(T)$ im dazugehörigen Temperaturbereich nur schwach zu (Abbildung 2).

Bei bekanntem $S(T)$ kann nun $\sigma(T)$ als $\sigma(S)$ dargestellt werden (Abbildung 4). Wie schon $\alpha(T)$, so wurde auch $\sigma(S)$ (in doppeltlogarithmischer Darstellung) durch einen Polygonzug approximiert, um $\int \sigma dS$ und $\int (\int \sigma dS) dS$ bilden können.

4. Überführung der Elenbaas-Heller'schen Differentialgleichung in eine Integralgleichung und deren Lösung durch Iteration

- 4.1. Für das in Abschnitt 3. beschriebene Zweizug-Verfahren spricht sein geringer Bedarf an rechnerischen Hilfsmitteln. Besteht jedoch die Möglichkeit der Benutzung einer elektronischen Rechenmaschine, so ist es zweckmässig, nach einem anderen Lösungsverfahren zu sehen, mit dem eine Steigerung der Genauigkeit und ein erheblicher Zeitgewinn (Variation der Bogenparameter !) erzielt werden kann. Ferner ist das Zweizug-Verfahren kaum verwendbar, wenn in der Differentialgleichung (2.5) zusätzlich Terme (z.B. Strahlungsverlust) auftreten, da diese dann durch lineare Funktionen in S approximiert werden müssten.

Die besondere Schwierigkeit bei der numerischen Lösung der Elenbaas-Heller'schen Dgl. besteht darin, dass es sich um ein Rand- und Eigenwertproblem und nicht etwa um ein Anfangswertproblem handelt. Es werden drei Randbedingungen vorgegeben, durch die dritte Randbedingung wird die elektrische Feldstärke E festgelegt, die den Eigenwert darstellt.

Es erwies sich als nützlich, die Differentialgleichung in eine Integralgleichung umzuwandeln, ein lineares Temperaturprofil vorzugeben, und dann zu iterieren. Die Konvergenz dieses Verfahrens, das nun genauer beschrieben werden soll, ist nach den bisherigen Erfahrungen zufriedenstellend.

In der Form (2.5) könnte die Energiebilanz allerdings auch als Anfangswertproblem behandelt werden, in dem man mit vorgegebenem $E(r)$, $T(0)$ und $\frac{dT}{dr} = 0$ die Integration bei $r = 0$ beginnt und bis zum Erreichen der Randtemperatur fortführt. Mit dem so gewonnenen Wert von R können dann über die Transformationsgleichungen (2.7) und (2.8) die elektrische Feld- und Stromstärke für beliebigen Gesamtbogenradius gewonnen werden. Allerdings ist dieses Verfahren bei Auftreten zusätzlicher Terme in (2.5) nicht mehr anwendbar, weil keine einfachen Transformationsregeln mehr gelten. Im Hinblick auf die Strahlungsberücksichtigung wurde daher die iterative Lösung der Integralgleichung vorgezogen, für den Fall ohne Strahlung lagen bereits die mit dem Zweizug-Verfahren gewonnenen Werte vor.

4.2. Integrieren wir die Energiegleichung (2.5)

$$\frac{d}{dr} r \kappa(T) \frac{dT}{dr} = -r \sigma(T) E^2$$

über r von 0 bis r' , so folgt:

$$r' \kappa(T(r')) \frac{dT}{dr'} = -E^2 \int_0^{r'} \sigma(T(\varrho)) d\varrho \quad (4.1)$$

Bei der Integration wird als erste Randbedingung $(\frac{dT}{dr})_{r=0} = 0$ gesetzt. Diese Forderung ist vernünftig, weil sonst keine physikalisch brauchbare Lösung der Differentialgleichung existiert, wie man an dem Verhalten der Dgl. für $r \rightarrow 0$ erkennt:

$$- \kappa \frac{dT}{dr} = -r \frac{d}{dr} \left(\kappa \frac{dT}{dr} \right) - r \sigma E^2 \rightarrow 0$$

(4.1) ergibt umgeformt:

$$\frac{dT}{dr'} = -E^2 \frac{\int_0^{r'} \sigma(T(\varrho)) d\varrho}{r' \kappa(T(r'))}$$

Eine erneute Integration über r' von 0 bis r führt zu:

$$T(r) = T(0) - E^2 \int_0^r \left(\int_0^{r'} \frac{\rho \delta(T(\rho)) d\rho}{r' \alpha(T(r'))} \right) dr' \quad (4.2)$$

$T(0)$ ist die vorgegebene Achsentemperatur, also eine weitere Randbedingung.

Da wir iterieren wollen, müssen wir (4.2) als Rekursionsformel schreiben, wobei L den Iterationsindex bezeichnen soll.

$$T_{L+1}(r) = T(0) - E_L^2 \int_0^r \left(\int_0^{r'} \frac{\rho \delta(T_L(\rho)) d\rho}{r' \alpha(T_L(r'))} \right) dr' \quad (4.3)$$

Die letzte Randbedingung, $T(R) = 0$, führt zur Bestimmung von E (der allgemeinere Ansatz $T(R) \neq 0$ ändert die Rechnung nur unwesentlich, vermeidet aber bei der weiteren Rechnung eine Singularität):

$$E_L^2 = \frac{T(0)}{\int_0^R \left(\int_0^{r'} \frac{\rho \delta(T_L(\rho)) d\rho}{r' \alpha(T_L(r'))} \right) dr'} \quad (4.4)$$

Durch Einsetzen von (4.4) in (4.3) ist also das Temperaturprofil bestimmt.

(Es sei bemerkt, dass nach der Regel von l'Hospital für $r' \rightarrow 0$

$$\frac{\int_0^{r'} \rho \delta(T_L(\rho)) d\rho}{r' \alpha(T_L(r'))} \rightarrow 0$$

strebt.)

4.3. Zur numerischen Behandlung der Formeln (4.3) und (4.4) müssen die Integrale in Summen überführt werden, also

$$dr \rightarrow \Delta R, \quad r \rightarrow k \cdot \Delta R, \quad r = 0 \rightarrow k = 0$$

$$r = R \rightarrow k = N, \quad T(r) \rightarrow T(k)$$

Die Approximation der Integration durch Summation wurde mit der Sehnen- bzw. Trapezformel vorgenommen (die genauere Simpson-Formel ist nur für eine gerade Anzahl von Intervallen

len benutzbar !):

$$\int_0^{r'} \rho \sigma(T_L(\rho)) d\rho \rightarrow S1_L(m) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m [k \cdot \sigma(T_L(k)) + (k-1) \cdot \sigma(T_L(k-1))] \quad (4.5)$$

$$\int_0^r \left(\frac{\int_0^{r'} \rho \sigma(T_L(\rho)) d\rho}{r' \alpha(T_L(r'))} \right) dr' \rightarrow$$

$$S2_L(i) \equiv \frac{1}{2} \frac{S1_L(1)}{\alpha(T_L(1))} + \frac{1}{2} \sum_{m=2}^i \left(\frac{S1_L(m)}{m \alpha(T_L(m))} + \frac{S1_L(m-1)}{(m-1) \alpha(T_L(m-1))} \right) \quad (4.6)$$

Mit (4.5) und (4.6) wird aus (4.4) und (4.3)

$$E_L = \sqrt{\frac{T(0)}{(\Delta R)^2 S2_L(N)}} \quad (4.7)$$

$$T_{L+1}(i) = T(0) \left(1 - \frac{S2_L(i)}{S2_L(N)} \right) \quad (4.8)$$

Schliesslich erhält man für die Leistung W pro Säulenlänge nach (3.18)

$$W = 2\pi(N-0,5) \cdot \alpha \left(\frac{T(N-1) + T(N)}{2} \right) \cdot (T(N-1) - T(N)) \quad (4.9)$$

4.4. Die eben beschriebenen Rechnungen wurden auf der IBM 7090 in Garching vorgenommen. Die iterative Lösung der Integralgleichung wurde mit einem linearen Temperaturprofil begonnen. Die Anzahl der Iterationen wurde durch die relativ strenge Genauigkeitsforderung $|(T_{L+1}(k) - T_L(k))/T_L(k)| < 10^{-4}$ festgelegt, wobei $N = 1000$ war: die durch das numerische Verfahren bedingte Unsicherheit ist damit völlig unerheblich. Um das Temperaturprofil, E und W für ca. 20 verschiedene Achsentemperaturen zu bestimmen, war eine Maschinenzeit von ca. 30 min nötig. Das Rechenprogramm ist so angelegt, dass die Materialfunktionen in einem Unterprogramm zusammengefasst sind. Das hat den Vorteil, dass bei Änderung der Bogenparameter das Hauptprogramm keine Änderung erfährt.

5. Zusammenfassung der im folgenden benötigten Grössen und der Umrechnung von Masseinheiten

Es wird im allgemeinen das CGS-System verwendet. In die jeweiligen zugeschnittenen Grössengleichungen sind die physikalischen Grössen in CGS-Einheiten einzusetzen.

5.1. Ladung des Elektrons	$e = 4,803 \cdot 10^{-10}$ el.st.c.g.s.
Masse des Elektrons	$m_e = 9,108 \cdot 10^{-28}$ g
Masse des H-Atoms	$m_o = 1,673 \cdot 10^{-24}$ g
Planck'sches Wirkungsquant	$h = 6,625 \cdot 10^{-27}$ erg sec $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-27}$ erg sec
Boltzmann-Konstante	$k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/grd

5.2. 1 Atm = 760 mm Hg	$= 1,013 \cdot 10^6$ dyn/cm ²
1 eV	$= 1,6 \cdot 10^{-12}$ erg
1 W	$= 10^7$ erg/sec
1 A	$= 3 \cdot 10^9$ cm ^{3/2} g ^{1/2} s ⁻²
1 V	$= \frac{1}{300}$ cm ^{1/2} g ^{1/2} s ⁻¹

5.3. Ionisationsenergie des Wasserstoffes:

$$\chi_i = 13,54 \text{ eV} = 2,17 \cdot 10^{-11} \text{ erg,}$$

Stossquerschnitt Q_{oo} für Stösse zwischen H-Atomen:

$$Q_{oo} = 4\pi \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2,$$

6. Stossquerschnitt Q_{oe} für Stösse zwischen H-Atomen und Elektronen:

$$Q_{oe} = 130 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2,$$

Stossquerschnitt Q_{oi} für Stösse zwischen H-Atomen und Protonen:

$$Q_{oi} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2,$$

Stossquerschnitt Q_{ie} für Stösse zwischen Protonen und Elektronen:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(KT)^2} \ln \lambda = \frac{2,78 \cdot 10^{-6}}{T^2} \ln \lambda \text{ [cm}^2\text{]}$$

Für einfach ionisierte Plasmen:

$$\lambda \text{ (nach Spitzer)} = \frac{3}{2} \frac{k^3 T^3}{e^3 \pi n_i}^{1/2} \quad (5.1)$$

Mit $p \approx 2 p_1 = 2 n_1 kT$ (exakt für vollionisiertes Plasma, aber wegen $Q_{ie} \sim \ln \lambda \sim \ln n_1^{-1/2}$ auch für schwächer ionisiertes Plasma in guter Näherung) wird:

$$\lambda = \frac{2,09 \cdot 10^4}{\sqrt{p}} \left(\frac{T}{10^4} \right)^2 \quad (5.2)$$

$$\lambda \text{ (nach [5])} = \frac{kT}{e^2 n_i^{1/3}} \quad (5.3)$$

Für einfach vollionisierte Plasmen wird (5.3)

$$\lambda = 3,9 \frac{1}{\left(\frac{p}{10^3} \right)^{1/3}} \cdot \left(\frac{T}{10^3} \right)^{4/3} \quad (5.4)$$

Reibungskoeffizienten:

$$\epsilon_{12} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi} kT \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} Q_{12} >$$

$$\epsilon_{io} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi} kT \frac{m_o}{2}} Q_{io}$$

$$\epsilon_{eo} = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi} kT m_e} Q_{eo}$$

6. Die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit κ von Wasserstoff (siehe auch Abbildung 1)

Zu beachten ist, daß durch den Einfluß des Magnetfeldes \mathcal{H} , Es soll noch einmal bemerkt werden, daß hier unter Wärmeleitfähigkeit κ die Summe von (normaler) Wärmeleitfähigkeit ohne Massentransport κ_N und der Reaktionswäremeleitfähigkeit κ_R verstanden wird.

6.1. Bei schwacher Ionisation kann κ_N für Neutralgas verwendet werden (nach [3]):

$$\alpha_N = \frac{3k}{2\sqrt{2} a_{00}} v_0 \quad \text{mit} \quad v_0 = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} \quad (6.1)$$

also

$$\alpha_N = 1,652 \cdot 10^5 \left(\frac{T}{10^4}\right)^{1/2} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec}}\right] \quad (6.2)$$

Für unsere Parameter (Anfangsdruck $p_A = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$ und $|\mathcal{L}_z| = 20 \text{ kG}$) beträgt der Ionisationsgrad $\alpha \approx 3\%$ für $T = 9 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{K}$ und $\alpha \approx 9\%$ für $T = 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$.

Ferner ist α_R ziemlich klein gegenüber α_N .

6.2. Im Temperaturbereich zwischen schwacher und Vollionisation dominiert α_R . Nach [2] ergibt sich der für alle Temperaturen gültige Ausdruck (allerdings ohne Berücksichtigung der Dissoziationsenergie der H_2 -Moleküle):

$$\alpha_R = \frac{1}{1+A} \frac{dp_i}{dT} \frac{(kT + 8,68 \cdot 10^{-12}) \sqrt{kT}}{(p_i + p_0) 2,88 \cdot 10^{-27}} \quad (6.3)$$

mit

$$A = \frac{e^2 |\mathcal{L}_z|^2 k^2 T^2}{(p_0 + p_i) [p_i \epsilon_{ie} (\epsilon_{i0} + \epsilon_{e0}) + p_0 \epsilon_{i0} \epsilon_{e0}]} \quad (6.8)$$

Zu beachten ist, daß durch den Einfluß des Magnetfeldes \mathcal{L}_z der Gesamtdruck p mit steigender Temperatur größer als der Anfangsdruck p_A wird und sich asymptotisch einem Wert p_∞ für vollionisiertes Plasma nähert (in unserem Fall $p_\infty \approx 1,2 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$) (nach [1]).

(Die Werte von p_0 , p_i , $\frac{dp_i}{dT}$ und A sind (unveröffentlichten) Tabellen entnommen, die Dr. Wienecke berechnen ließ.)

6.3. Die normale Wärmeleitfähigkeit κ_N senkrecht zum Magnetfeld für teil- und vollionisiertes Plasma wurde [4] entnommen.

κ_N ist die Summe der Elektronen-, Ionen- und Neutralatomleitfähigkeit ($\kappa_e, \kappa_i, \kappa_o$). Es ergibt sich:

$$\kappa_e = \frac{5}{2} \frac{k T_e \rho_e}{m_e} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_e^2} \quad (6.4)$$

$$\kappa_i = \frac{5}{2} \frac{k T_i \rho_i}{m_o} \frac{1 + \tau_o / \tau_{io}}{1 + \Omega^2 \tau_i^2} \quad (6.5)$$

$$\kappa_o = \frac{5}{2} \frac{k T_o \rho_o}{m_o} + \frac{\tau_o}{\tau_{io}} \kappa_i \quad (6.6)$$

τ bezeichnet die jeweiligen Stoßzeiten (siehe [4]), Ω und ω die Zyklotronfrequenz der Protonen und Elektronen.

Für vollionisiertes Plasma speziell gilt:

$$\kappa_o \rightarrow 0$$

$$\kappa_e = (6.4)$$

$$\kappa_i = \frac{5}{2} \frac{k T_i \rho_i}{m_o} \frac{1}{1 + \Omega^2 \tau_i^2} \quad (6.7)$$

mit $\frac{1}{\tau_e} = 1,866 \cdot \nu_{ei}$ $\nu_{ei} = \frac{4 \sqrt{2\pi} e^4 n_i \ln \lambda}{3 \sqrt{m_e} (k T)^{3/2}}$ (6.8)

$$\frac{1}{\tau_i} = 0,4 \nu_{ii} \quad \nu_{ii} = \sqrt{\frac{2 m_e}{m_o}} \nu_{ei} \quad (6.9)$$

Da für vollionisiertes Plasma (Ionisationsgrad $\alpha = 95\%$ für $T = 1,7 \cdot 10^4$ °K) κ_R keine Rolle mehr spielt, hängen das Temperaturprofil und die Charakteristik entscheidend von $\frac{\kappa_N}{T^{5/2} \log(T^2 \cdot \text{const})}$ ab. Während beim Bogen ohne äußeres Magnetfeld $\kappa_N \sim \frac{\kappa_N}{\log(T^2 \cdot \text{const})}$ ist, also mit zunehmender Temperatur stark ansteigt, ist in unserem Fall κ_N nahezu konstant, ja es nimmt sogar leicht ab. Daher wird zur Erreichung gleicher Achsentemperaturen viel

weniger elektrische Leistung gebraucht als für den Bogen ohne Magnetfeld.

7. Die Berechnung der elektrischen Leitfähigkeit σ von Wasserstoff parallel zum Magnetfeld (siehe auch Abbildung 3).

Die elektrische Leitfähigkeit σ parallel zum Magnetfeld ist etwa gleich derjenigen ohne Vorhandensein von Magnetfeld.

7.1. Für sehr schwache Ionisation setzen wir nach [3] :

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{3/4} e^2 m_e^{1/4} (kT)^{3/4}}{\sqrt{3} h^{3/2} Q_{oe} \sqrt{p}} e^{-\frac{\chi_i/2}{kT}} \quad (7.1)$$

$$= \frac{1,665 \cdot 10^{19}}{\sqrt{p}} \left(\frac{T}{10^4}\right)^{3/4} e^{-\frac{7,9}{T/10^4}} \quad [\text{cm}^{-1}]$$

Speziell mit $p = 5 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$ wird

$$\sigma = 7,43 \cdot 10^{16} \left(\frac{T}{10^4}\right)^{3/4} e^{-\frac{7,9}{T/10^4}} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (7.2)$$

oder in CGS-Einheiten:

7.2. Für den Bereich zwischen sehr schwacher und starker Ionisation nehmen wir nach [5] die Formel:

$$\sigma = \frac{e^2 (n_i + n_e)}{n_o Q_{oe} + (n_i + n_e) Q_{ei}} \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2kT m_e}} \quad (7.3)$$

$$\sigma = \frac{3,05 \cdot 10^{14}}{0,6 \frac{n_o}{n_i} + \frac{2,78 \ln \lambda}{(T/10^4)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{T/10^4}} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (7.4)$$

Formel (7.3) ist nach [5] allgemein gültig. Zur Berechnung von σ für das vollionisierte Plasma wurde aber dem Spitzer'schen Ausdruck der Vorzug gegeben. Sowohl bei Verwendung von λ nach Spitzer als auch von λ nach [5] geht (7.4) für vollionisiertes Plasma nicht in (7.6) über, sondern für unsere Parameter erhält man:

$$\left. \begin{aligned} (7.6) &= \frac{1,38}{1,1} \cdot \{(7.4) \text{ mit } (5.2)\} \\ (7.6) &= \frac{1}{1,17} \cdot \{(7.4) \text{ mit } (5.4)\} \end{aligned} \right\} (7.5)$$

Um einen stetigen Übergang zum Spitzer'schen σ für vollionisiertes Plasma zu gewährleisten, muß also (7.4) mit einem entsprechenden Faktor nach (7.5) korrigiert werden, je nachdem, welcher Ausdruck für λ benutzt wird.

Es zeigt sich hier deutlich, daß die Unsicherheit in den Stoßquerschnitten eine beträchtliche Unsicherheit in der elektrischen Leitfähigkeit bedingt.

7.3. Die elektrische Leitfähigkeit σ für einfach vollionisiertes Plasma beträgt nach Spitzer [6]:

$$\frac{1}{\sigma} = 6,53 \cdot 10^3 \frac{\ln \lambda}{T^{3/2}} \quad [\Omega \cdot \text{cm}]$$

oder in CGS-Einheiten:

$$\sigma = \frac{1,38 \cdot 10^{14}}{\ln \lambda} \left(\frac{T}{10^4} \right)^{3/2} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (7.6)$$

Für $p = 1,2 \cdot 10^5 \text{ dyn/cm}^2$ wird (7.6)

$$\sigma = \frac{1,38 \cdot 10^{14}}{\ln 62,4 \left(\frac{T}{10^4} \right)^2} \cdot \left(\frac{T}{10^4} \right)^{3/2} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (7.7)$$

8. Ergebnisse

In der folgenden Tabelle 1 sind in Abhängigkeit von der Achsentemperatur $T(0)$ die für einen Bogenradius von 1 cm ermittelten E- und J-Werte sowie die radiusunabhängigen Leistungen W aufgetragen. Die erste Spalte gibt jeweils die mit dem Zweizug-Verfahren, die zweite die durch Lösen der Integralgleichung bestimmten Werte an.

Die Charakteristiken-Werte von Tabelle 1 sind in Abb. 9 graphisch dargestellt.

Die nach beiden Verfahren für die Achsentemperaturen $T(0) = 2 \cdot 10^4$, $4 \cdot 10^4$ und 10^5 °K errechneten Temperaturprofile sind in den Abbildungen 5, 6 und 7 eingezeichnet.

$T(0)$ [K]	E	J	W
$2 \cdot 10^4$	137	136	5,7
$4 \cdot 10^4$	343	285	6,5
10^5	407	342	6,8
	467	416	
	457	457	
	518	493	
	570	527	
	627	562	
	685	601	
	743	641	
8,0	801	681	3,88
9,0	859	721	3,75
10,0	897	761	

Tabelle 1

$T(0) [10^4 \text{ } ^\circ\text{K}]$	$J [\text{A}]$	$E [\frac{\text{V}}{\text{cm}}]$	$W [\frac{\text{kW}}{\text{cm}}]$
1,2	137	6,48	0,89
1,4	285	5,72	1,63
1,5	343	5,7	1,93
1,7	407	5,58	2,27
2,0	467	5,28	2,47
3,0	518	5,01	2,6
4,0	570	4,77	2,72
5,0	627	4,47	2,8
6,0	683	4,18	2,86
7,0	680	4,25	2,89
8,0	738	3,77	3,0
9,0	792	3,88	3,08
10,0	897	3,49	3,13

9. Diskussion der Temperaturprofile und der Charakteristik des Bogens

9.1. Wie die Tabelle in Abschnitt 8. und die Abbildungen 5, 6, 7 und 9 zeigen, ist die Ubereinstimmung der durch die Zweizug-Methode gewonnenen Bogengrössen mit denen durch Lösen der Integralgleichung ermittelten erstaunlich gut. Die relative Abweichung in E, J und W überschreitet nicht 10%. Bei den Temperaturprofilen ist die Differenz allerdings etwas grösser, sie geht bis ca. 20%.

Den durch Iteration der Integralgleichung bestimmten Werten haftet aber auch noch eine gewisse Unsicherheit an, die kaum im Lösungsverfahren zu suchen ist. Sie ist zum grössten Teil auf die ungenaue Kenntnis der Materialfunktionen σ und α zurückzuführen, wie Abschnitt 7.2. wohl deutlich erkennen lässt. Besonders ins Gewicht fällt die Unsicherheit in der Grösse der Stossquerschnitte Q der einzelnen Teilchensorten zueinander. Deshalb erschien es mir gerechtfertigt, auch bei der Iteration der Integralgleichung σ und α teilweise durch Polygonzüge in ihrer logarithmischen Darstellung zu approximieren (die dadurch verursachte relative Abweichung blieb im allgemeinen unter 10%, die Unsicherheit in den Materialfunktionen ist sicher grösser).

9.2. Wir wollen uns nun noch einmal mit den Temperaturprofilen beschäftigen. Dazu formen wir die Elenbaas-Heller'sche Energiegleichung (2.5) etwas um:

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \alpha \frac{dT}{dr} =$$

$$-\frac{\alpha}{r} \frac{dT}{dr} - \frac{d\alpha}{dr} \frac{dT}{dr} - \alpha \frac{d^2T}{dr^2} =$$

$$\left(\frac{\alpha}{r} + \frac{d\alpha}{dr}\right) \left|\frac{dT}{dr}\right| + \alpha \frac{d}{dr} \left|\frac{dT}{dr}\right| = \sigma E^2 \quad (9.1)$$

(Das vorletzte Gleichheitszeichen wird durch $\frac{dT}{dr} \leq 0$ im Bogen möglich).

Jetzt betrachten wir ein Volumenelement in der Nähe der Bogenachse. Durch die (sehr hohe) Temperatur an seinem Ort ist σ bestimmt. Die dem Volumenelement zugeführte Joule'sche Leistung σE^2 (und damit E) wird allein durch die linke Seite von (9.1) festgelegt. Das so ermittelte E gilt darüber hinaus voraussetzungsgemäß für den ganzen Bogen.

Gehen wir zu einem weiter außen liegenden Volumenelement über, wo T etwa zwischen 10^4 und $2 \cdot 10^4$ °K liegt, dann sinkt σ beträchtlich. Wenn die gleiche elektrische Feldstärke E wie auf der Bogenachse auftreten soll, so muß wegen σE^2 die linke Seite von (9.1) ebenfalls abnehmen. Andererseits ist für den Fall des Bogens im äußeren Magnetfeld \mathcal{H} trotz wesentlich verringerter Temperatur konstant geblieben bzw. gestiegen (siehe Abbildung 1). Daher bleibt zur Herstellung der Energiebilanz (abgesehen vom Faktor r^{-1}) nur eine beträchtliche Verringerung von $\left| \frac{dT}{dr} \right|$ gegenüber den Werten in Achsennähe übrig. Dieser eben angedeutete Verlauf des Temperaturgradienten ist natürlich um so ausgeprägter, je höher die Achsentemperatur ist, was die drei gezeichneten Temperaturprofile bestätigen. In der Randzone des Bogens ($T \lesssim 10^4$ °K), wo \mathcal{H} abnimmt, kann $\left| \frac{dT}{dr} \right|$ wieder größer werden, was gleichfalls in den Temperaturprofilen zum Ausdruck kommt.

9.3. Zur Unterstreichung der bisherigen Ausführungen wollen wir einen Vergleich mit dem Temperaturprofil und der Charakteristik eines H-Bogens ohne äußeres Magnetfeld durchführen (Abbildungen 8 und 10). Die Berechnung wurde mittels Iteration der Integralgleichung vorgenommen, als Bogenradius ebenfalls $R = 1$ cm gewählt.

Bei Fehlen des äußeren Magnetfeldes zeigt \mathcal{H} für das vollionisierte Plasma eine entgegengesetzte Tendenz, d.h. es wächst gemäß der Spitzer'schen Formel stark an ($\mathcal{H} \sim T^{5/2}$). Daraus resultiert ein gegenüber dem Bogen im äußeren Magnetfeld umgekehrtes Verhalten des Temperaturgradienten, das in der Zeichnung schön zu sehen ist.

9.4. Die Unterschiede zwischen den Bögen mit und ohne Magnetfeld werden noch deutlicher in ihren Charakteristiken. Während beim Bogen ohne äusseres Magnetfeld die elektrische Leistungsaufnahme mit der Achsentemperatur enorm ansteigt, nimmt sie beim Bogen mit Magnetfeld nur schwach zu. Die Erklärung dafür mittels (9.1) lautet etwa so: Gegeben sei ein bestimmtes Temperaturprofil. Plötzlich werde α im Bogenkern reduziert, indem wir z.B. ein starkes Magnetfeld einschalten. Um die Energiebilanz im Innern zu gewährleisten, stellt sich ein kleineres E ein. Dadurch wird σE^2 auch weiter aussen geringer, dort sei α aber im wesentlichen unverändert ($T < 2 \cdot 10^4$ OK). Also muss in diesem Gebiet $\left| \frac{dT}{dr} \right|$ kleiner werden, der Bogenkern wird enger und E muss wieder etwas ansteigen. Insgesamt gesehen ist E jedoch kleiner als ohne äusseres Magnetfeld. Denn würde E konstant bleiben, indem im Innern die Abnahme von α durch eine Zunahme von $\left| \frac{dT}{dr} \right|$ gerade kompensiert würde, so müsste $\left| \frac{dT}{dr} \right|$ weiter aussen abnehmen, dann würde das unverändert gebliebene σE^2 die Wärmeleitung übertreffen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die geringere aufzubringende elektrische Leistung beim Bogen mit Magnetfeld primär durch eine Abnahme von α für das vollionisierte Plasma und sekundär durch eine Verminderung von E und die Einschnürung des heissen Bogenkerns (mit grossem σ !) erreicht wird. (6), S. 346.

[6] Spitzer, L.: "Physics of Fully Ionized Gases" (1956) S. 72, S. 84.

[7] ... Z. Naturf. 5a, ... 6a, 73, 1951

Literaturverzeichnis:

- [1] Wienecke, R.: "Druckerhöhung in der zylindersymmetrischen Lichtbogensäule bei überlagertem axialen Magnetfeld", Laborbericht des IPP 3/3, Dezember 1962.
- [2] Wienecke, R.: "Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium in einer zylindersymmetrischen Entladung mit überlagertem axialen Magnetfeld", Laborbericht des IPP 3/9, September 1963.
- [3] Maecker, H.: "Über die Charakteristiken zylindrischer Bögen", ZS f. Physik 157, 1 - 29 (1959).
- [4] Feneberg, W.: "Die Transporteigenschaften eines teilweise ionisierten Plasmas im Magnetfeld", VIème Conférence internationale sur les Phénomènes d'Ionisation dans les Gas, Paris 1963, (und unveröffentlichte Tabellen).
- [5] Finkelburg, W., Maecker, H.: "Elektrische Bögen und thermisches Plasma", Hdb. d. Physik, BDXXII (1956), S. 346.
- [6] Spitzer, L.: "Physics of fully ionized gases" (1956) S. 72, S. 84.
- [7] Schlüter, A.: Z. Naturf. 5a, 72, 1950; 6a, 73, 1951

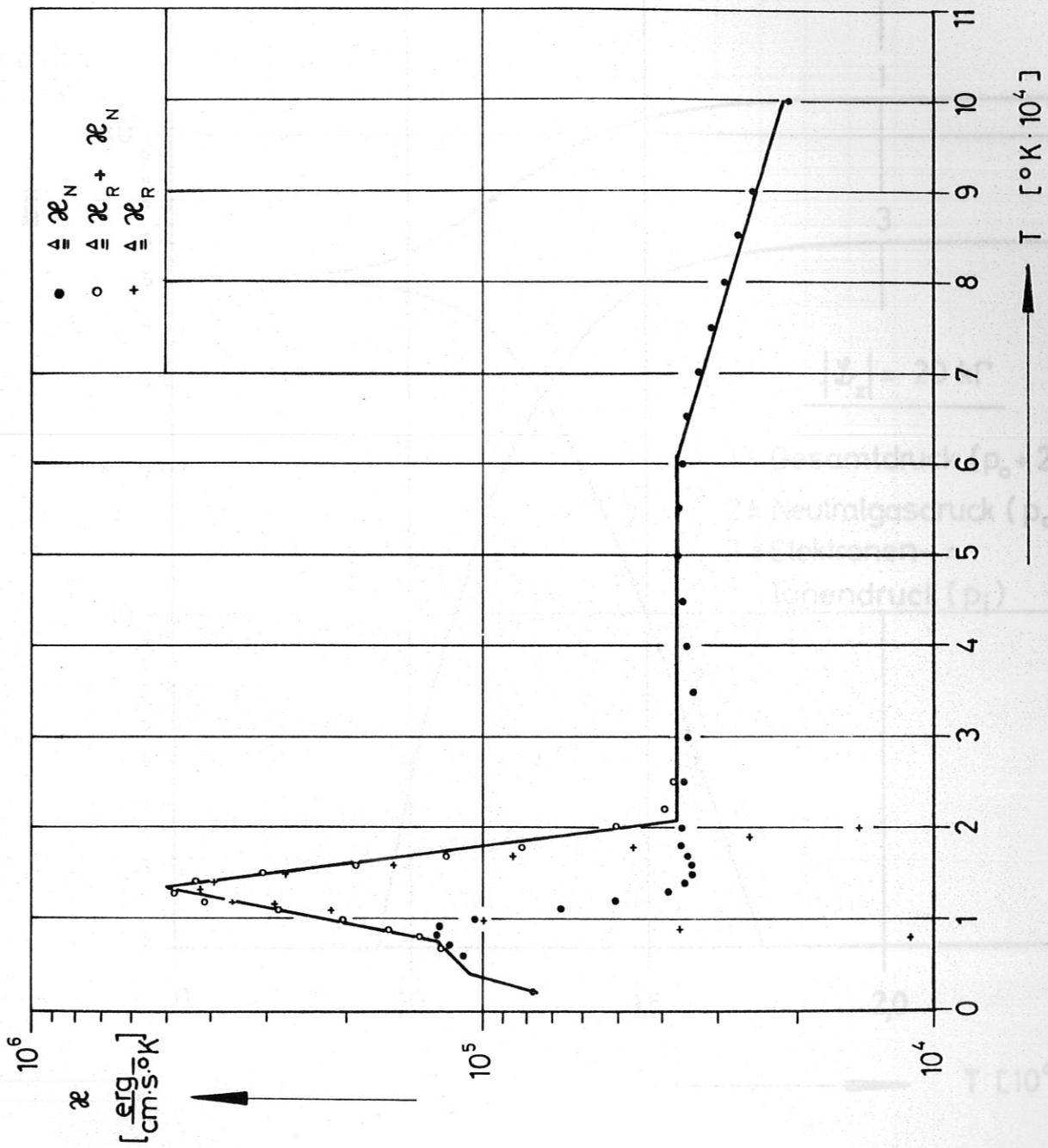


Abb. 1a

Abb. 1

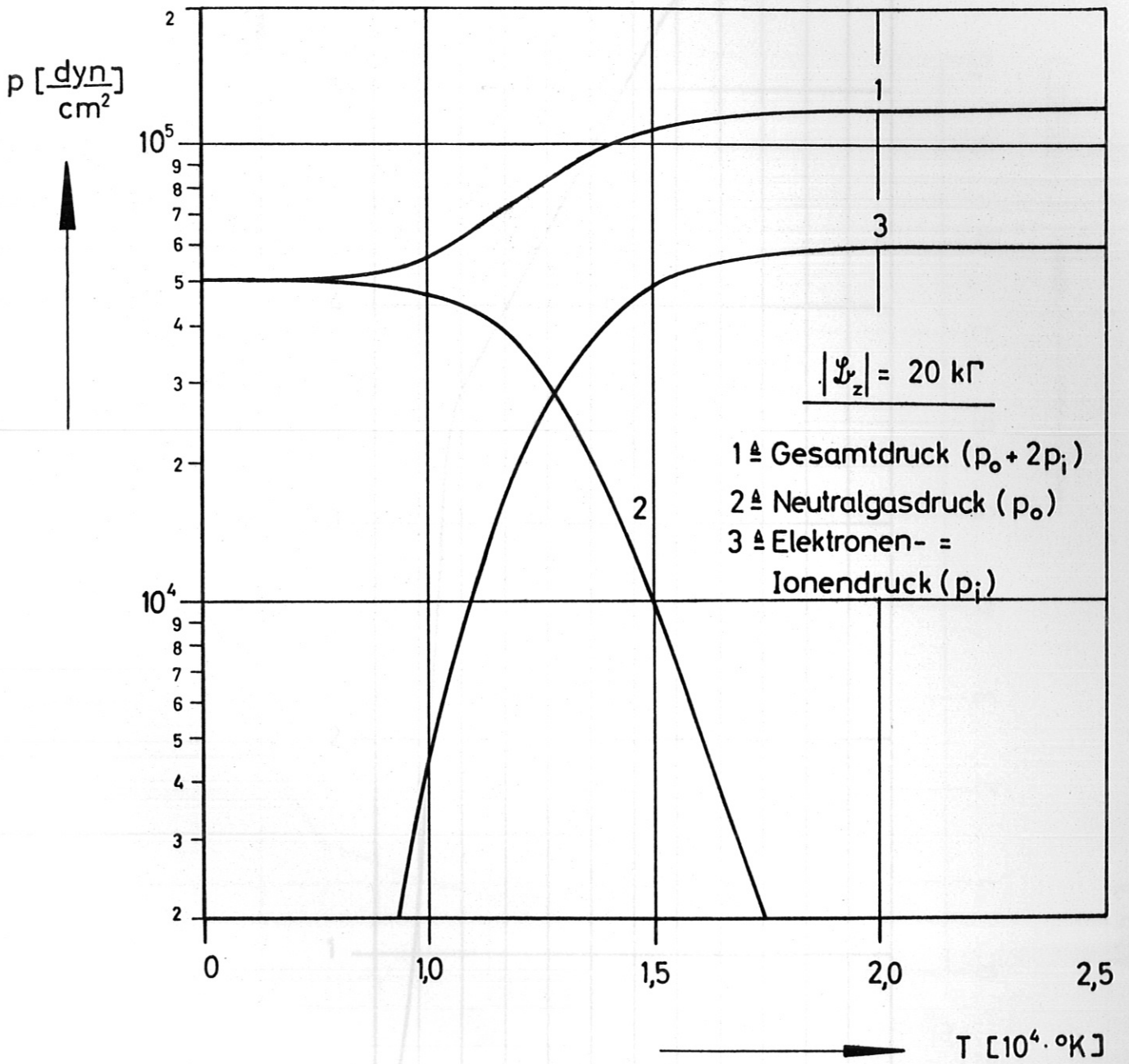


Abb. 1a

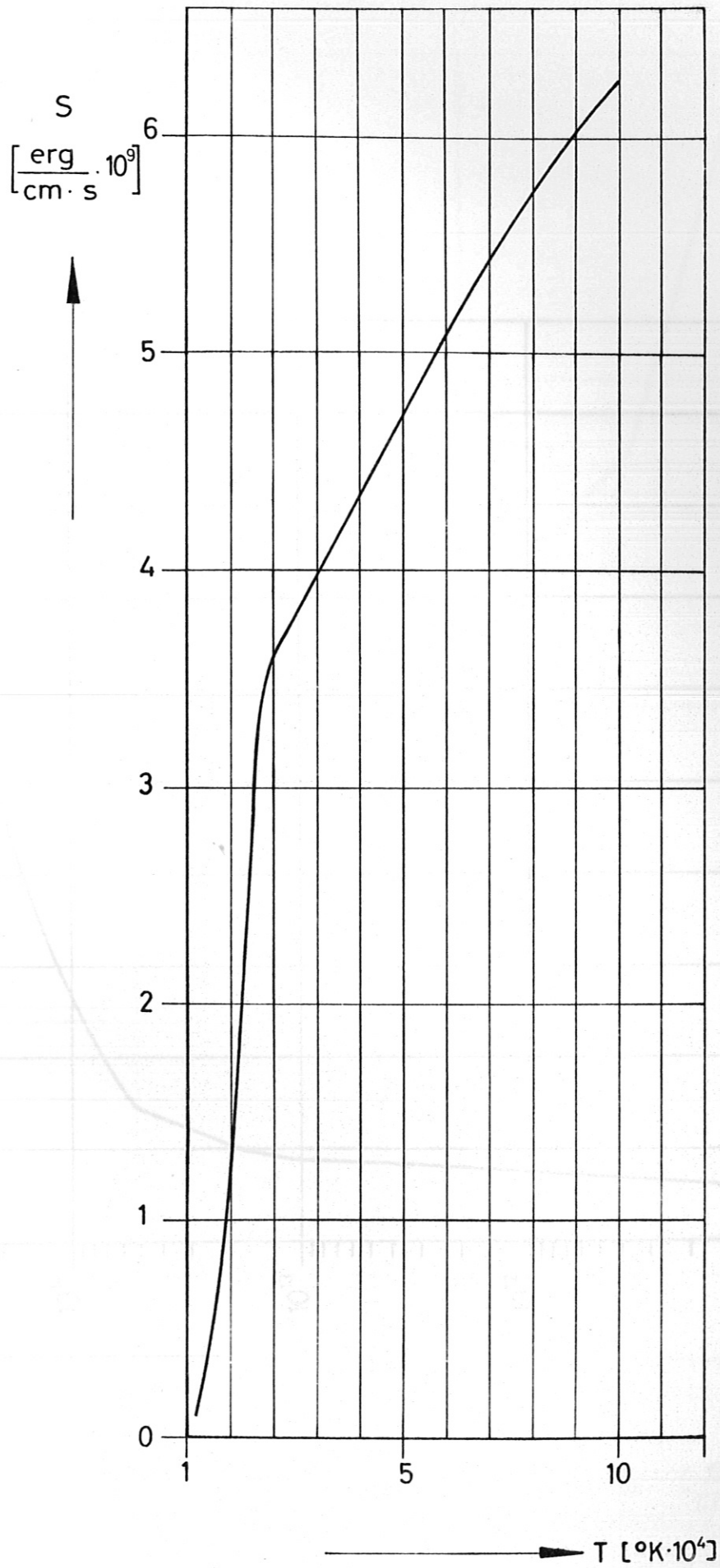


Abb. 2

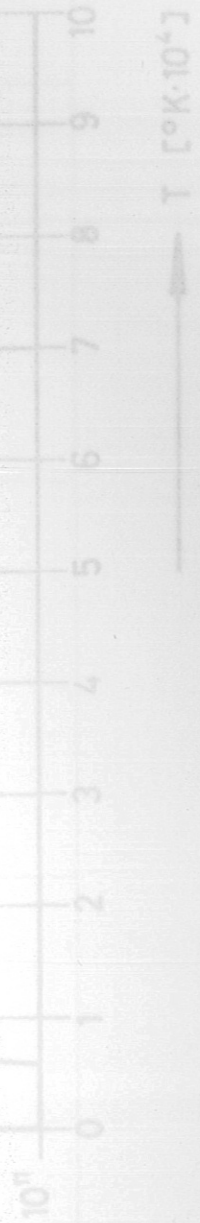


Abb. 3

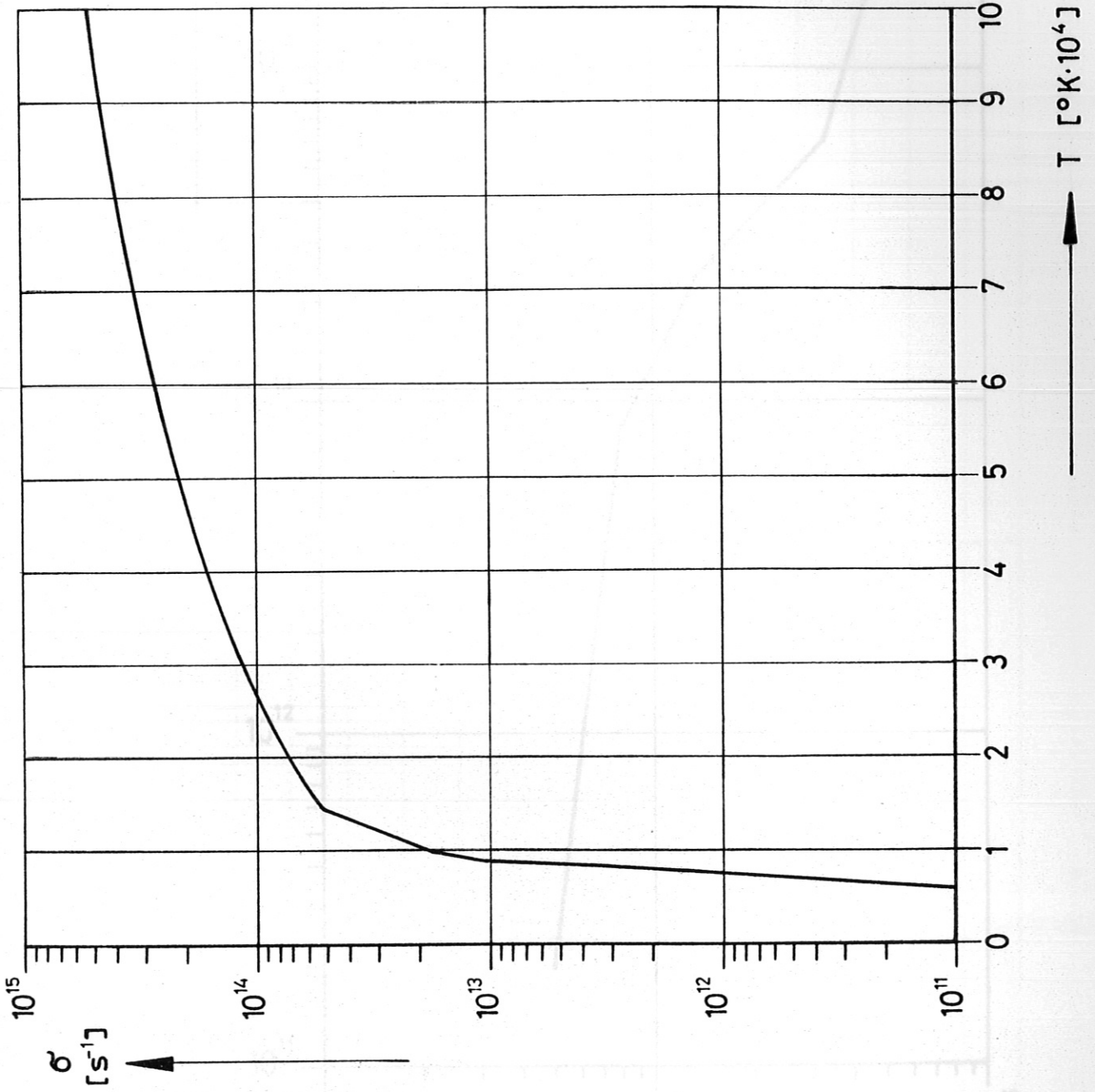


Abb. 3

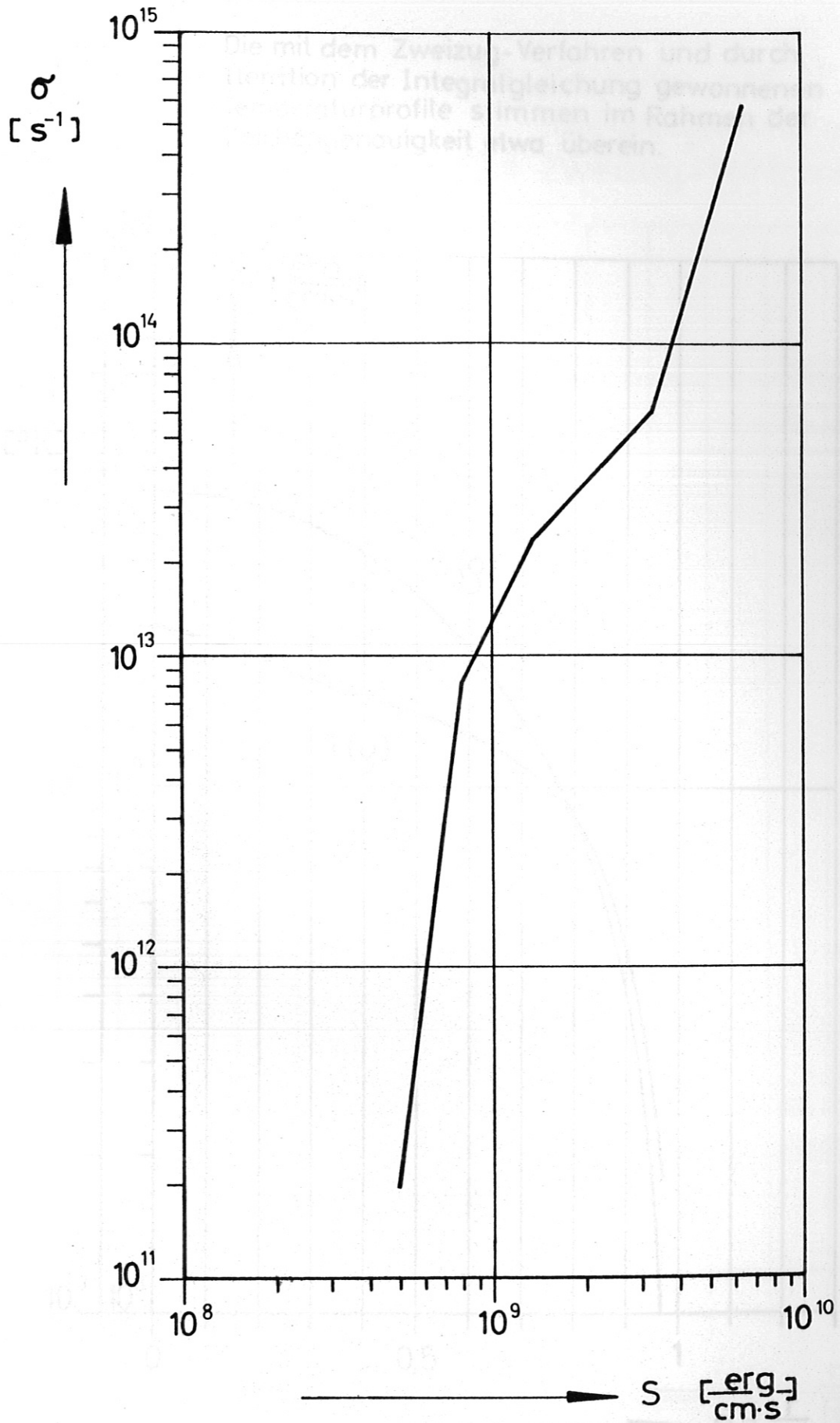


Abb. 4

Die mit dem Zweizug-Verfahren und durch Iteration der Integralgleichung gewonnenen Temperaturprofile stimmen im Rahmen der Zeichengenauigkeit etwa überein.

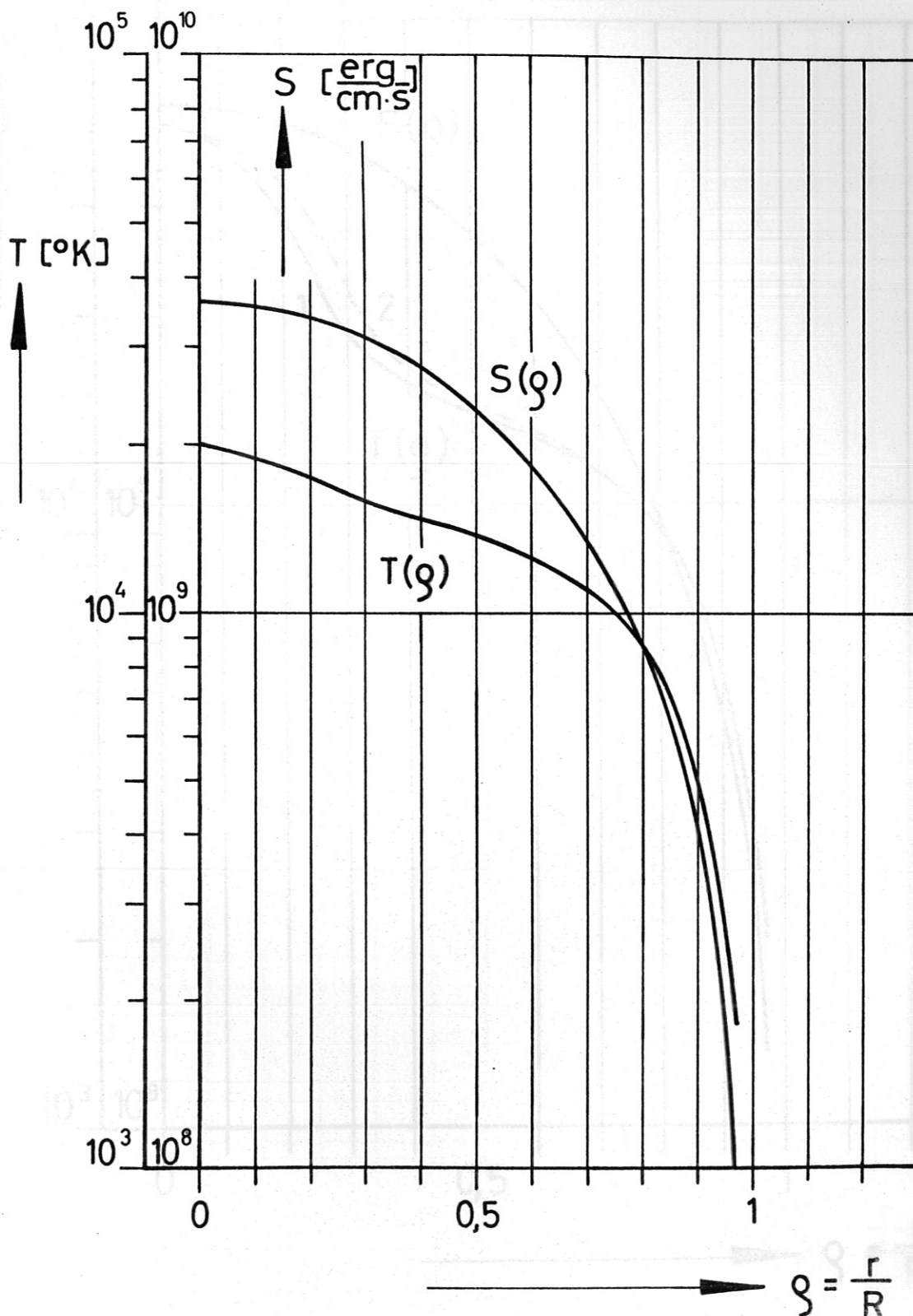


Abb. 5

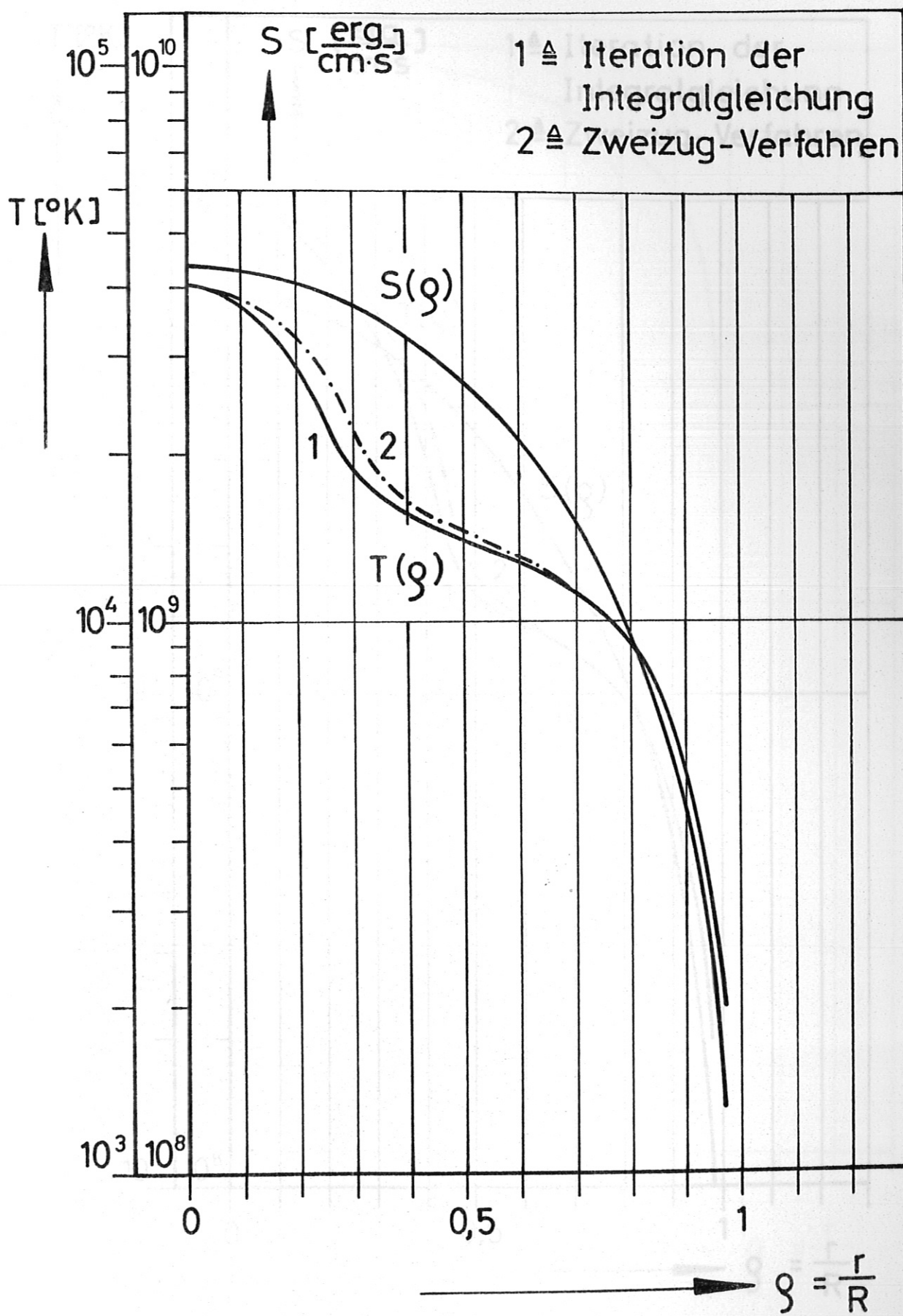


Abb. 6

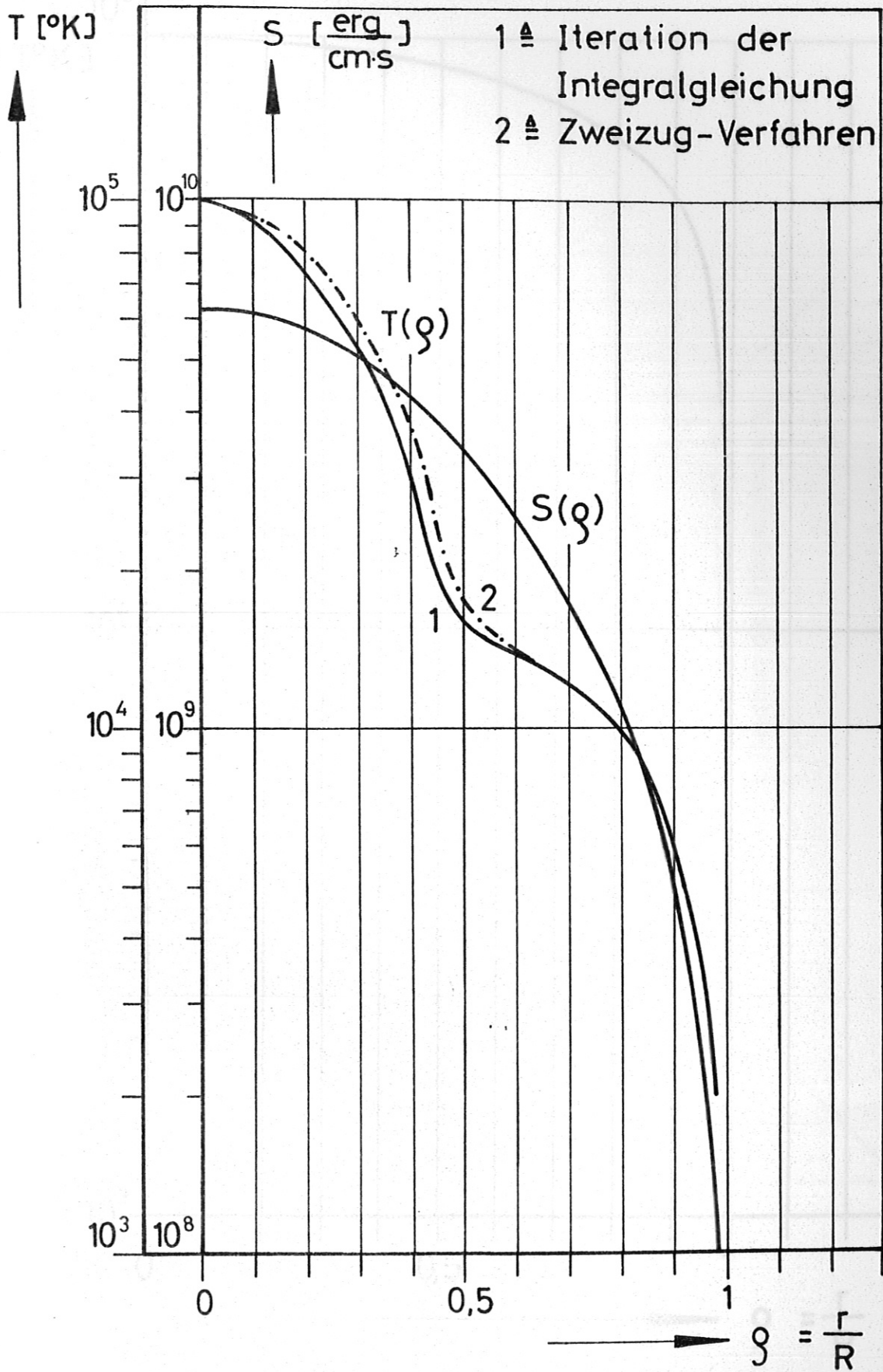


Abb. 7

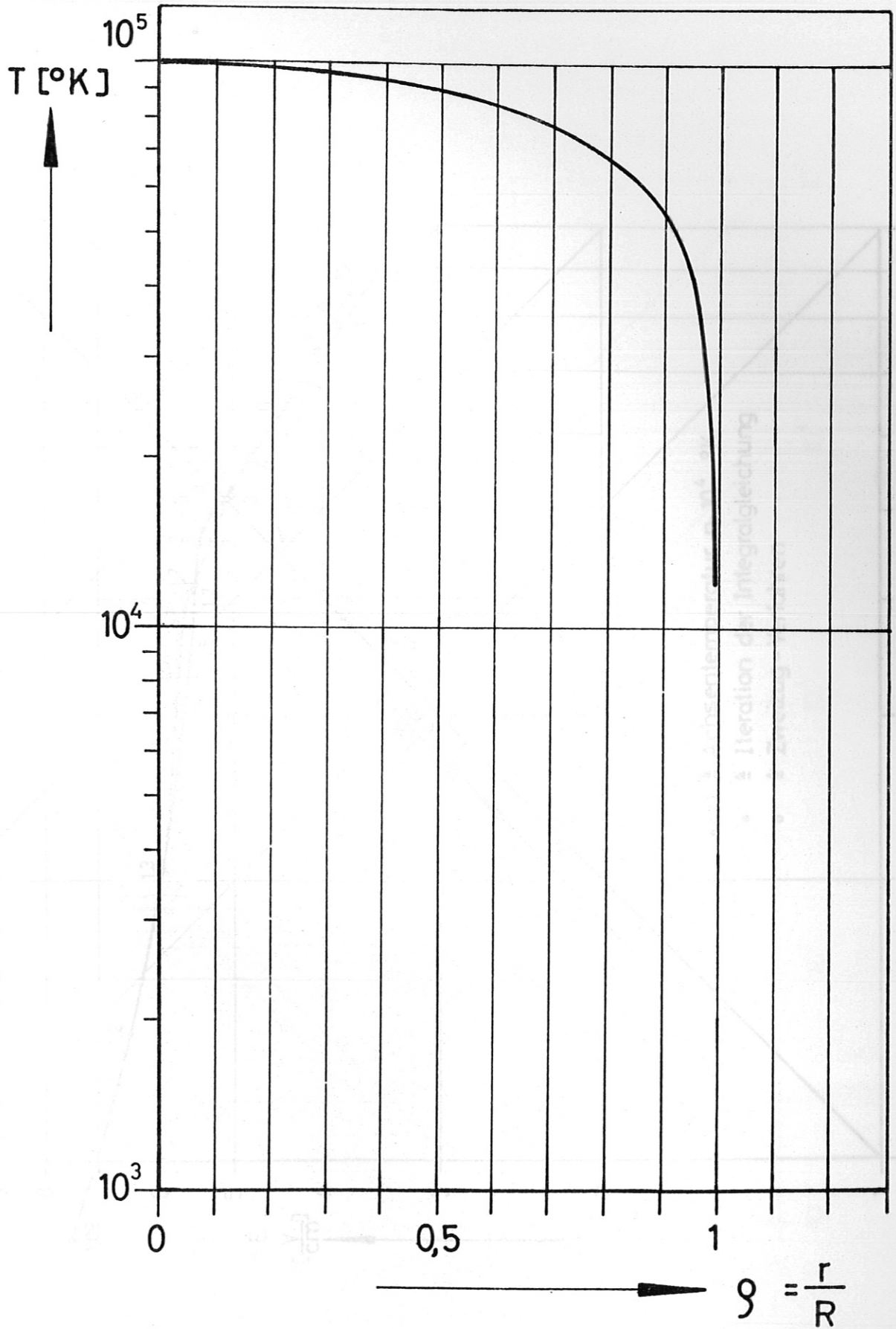


Abb. 8

Abb. 9
 Iteration der Integralgleichung
 Lösung

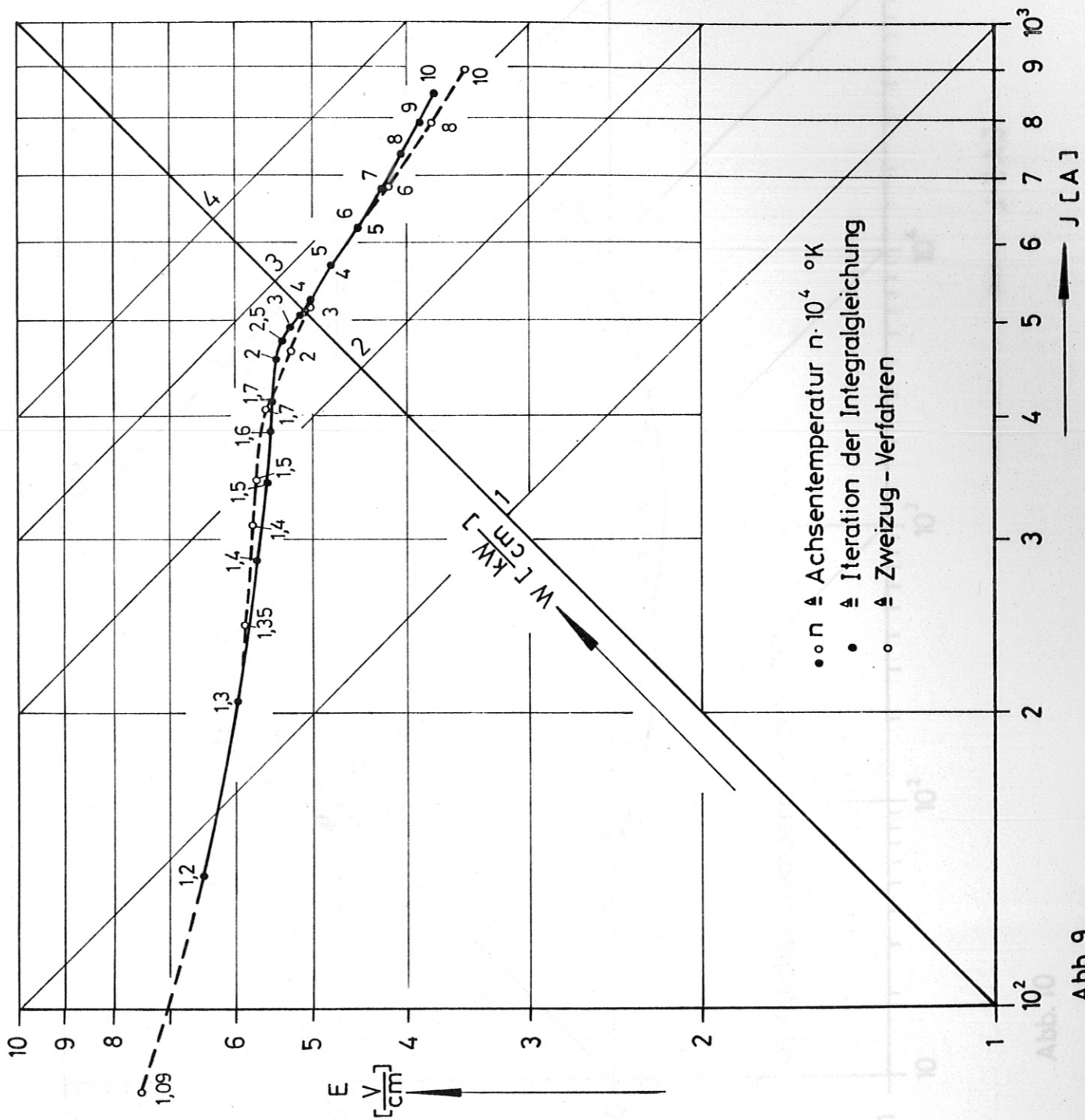


Abb. 9

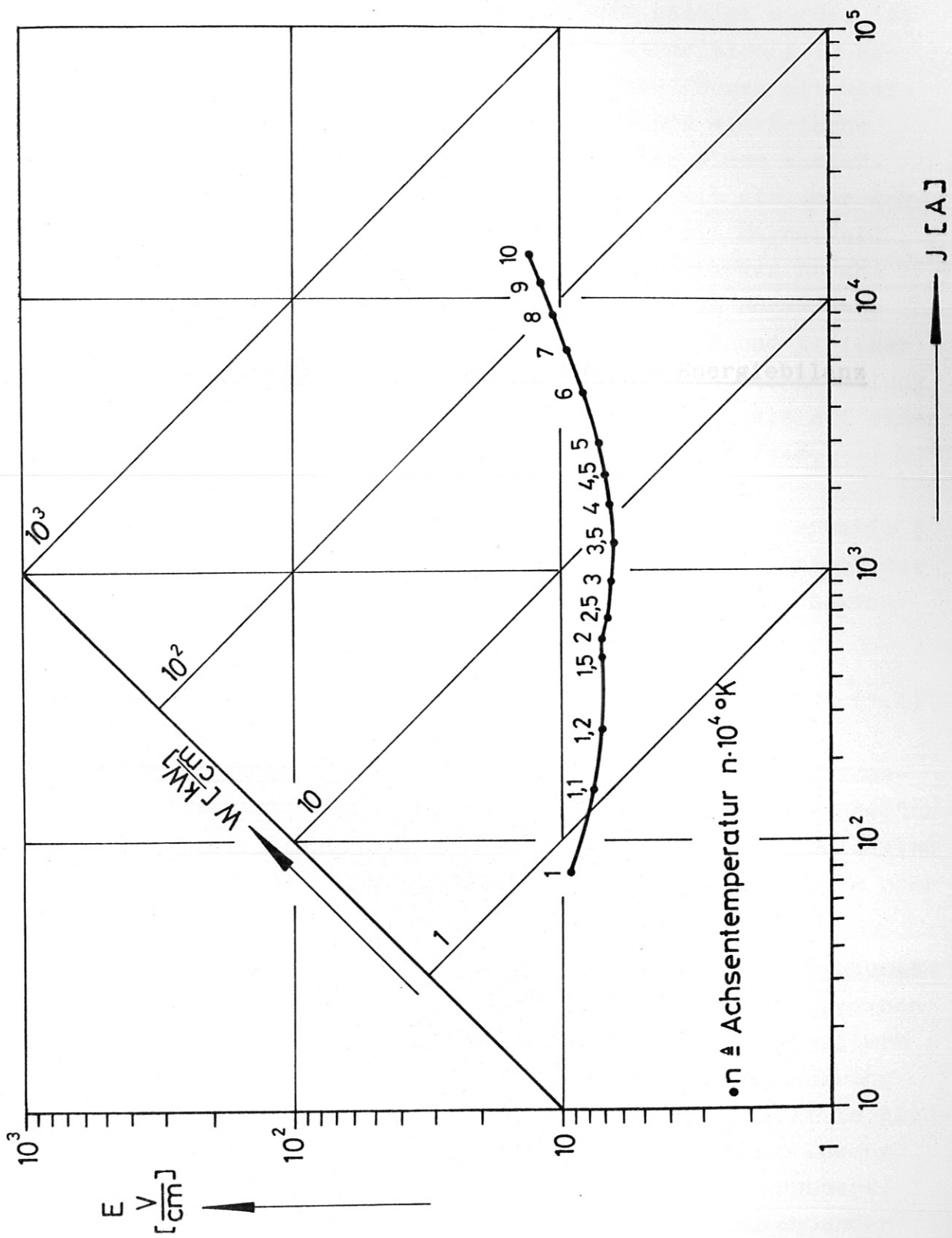


Abb. 10

...folgenden Arbeit gezeigt wurde, ist die Beeinträchtigung der Wärmeleitung im erdennahen Wasserstoffbogen mit überlagertem Magnetfeld aufzuwendende elektrische Leistung gegenüber einem Wasserstoffbogen ohne Magnetfeld mit gleicher Achsenlänge und gleichem Bogenradius R und gleicher

II. Der Einfluss der Strahlung auf die Energiebilanz

...hier betrachtet werden können sein als auf einen vergleichbaren Bogen ohne Magnetfeld.

...frequenzintervall ν :
...Materialschicht der
...des bekannten

$$\dots \dots \dots (1.1)$$

...Absorptions-
...Teil I eingeführ-
...Wärmeleitfähigkeit κ verwendet werden, deshalb wird hier der Absorptionskoeffizient μ anstelle des Index ν oder λ versehen !)

Gl. (1.1) ist nur dann streng gültig, wenn das Strahlungsfeld als isotrop und scharf richtungswise angesehen werden darf, falls man in Betracht der ein Integralterm ... mit einer Frequenzänderung ... die betrachtete Rich- ... Aufwand zur Lösung ... vergrößert. ... mit zunehmender ... durch Teil- ... gestört. Wir wollen da- ... Gebrauch machen

1. Einleitung

1.1. Wie in Teil I der vorliegenden Arbeit gezeigt wurde, ist bei alleiniger Berücksichtigung der Wärmeleitung im erweiterten Sinne die für einen Wasserstoffbogen mit überlagertem axialen Magnetfeld aufzuwendende elektrische Leistung im allgemeinen gering gegenüber einem Wasserstoffbogen ohne überlagertes Magnetfeld mit gleicher Achsentemperatur. Ausserdem ist beim Bogen mit Magnetfeld im radialen Temperaturprofil das Gebiet starken Strahlungsaustausches weiter ausgedehnt als beim Bogen ohne Magnetfeld mit gleichem Gesamtbogenradius R und gleicher Achsentemperatur. Daher dürfte der Einfluss der Strahlung auf den hier betrachteten Bogen grösser sein als auf einen vergleichbaren Bogen ohne überlagertes Magnetfeld.

1.2. Ein Lichtstrahl der Intensität J_ν im Frequenzintervall $\nu \div \nu + d\nu$ erfährt beim Durchlaufen einer Materieschicht der Dicke ds eine Intensitätsänderung dJ_ν gemäss der bekannten Formel

$$dJ_\nu = (\epsilon_\nu - \kappa_\nu J_\nu) ds \quad (1.1)$$

Dabei bedeuten ϵ_ν den Emissions- und κ_ν den Absorptionskoeffizienten. (κ_ν darf nicht mit der in Teil I eingeführten Wärmeleitfähigkeit κ verwechselt werden, deshalb wird hier der Absorptionskoeffizient immer mit dem Index ν oder L versehen !)

Gl. (1.1) ist nur dann streng gültig, wenn das Strahlungsfeld J_ν als isotrop und scharf monochromatisch angesehen wird. Anderenfalls muss im wesentlichen ein Integralterm hinzugefügt werden, der die (mit einer Frequenzänderung verbundene) Streuung der Strahlung in die betrachtete Richtung erfasst, was den mathematischen Aufwand zur Lösung der Strahlungstransportgleichung erheblich vergrössert. Allerdings geht der Anteil der Streuung mit zunehmender Teilchendichte zurück, die Photonenstreuung wird durch Teilchenstösse auf die streuenden Atome gestört. Wir wollen daher im folgenden durchgehend von (1.1) Gebrauch machen (vgl. auch 9.4.).

Für den Fall der Hohlraumstrahlung besteht zwischen ϵ_ν und α_ν eine einfache Beziehung, der sogenannte Kirchhoff'sche Satz:

$$\epsilon_\nu = \alpha_\nu B_\nu \quad (1.2)$$

mit

$$B_\nu = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.3)$$

als der Intensität der Hohlraumstrahlung (z.B. [1]). ϵ_ν ist aus zwei Anteilen zusammengesetzt, den Koeffizienten für spontane ϵ_ν' und die durch das Strahlungsfeld induzierte Emission ϵ_ν'' . Oft jedoch gilt $\epsilon_\nu' \approx \epsilon_\nu$ wegen

$$\epsilon_\nu'' = \frac{\epsilon_\nu'}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \cdot \frac{J_\nu}{B_\nu} \quad (1.4)$$

Entweder ist $\exp(h\nu/kT) \gg 1$, oder ϵ_ν' ist ohnehin klein und daraus folgt $J_\nu \ll B_\nu$ (zumindest für Bogendimensionen). Die alleinige Berücksichtigung der spontanen Emission in unseren Berechnungen ist also mit einem vernachlässigbar kleinen Fehler behaftet.

Unter gewissen Bedingungen geht die Anwendbarkeit der Kirchhoff'schen Satzes (1.2) über den idealisierten Fall des Hohlraumes hinaus, nämlich z.B. dann, wenn die statistische Verteilung der angeregten Atome der Boltzmann-Formel (1.5) gehorcht, wie man sich bei mikroskopischer Betrachtung von ϵ_ν und α_ν klarmachen kann:

$$n_m = n_0 \frac{g_m}{Z_0} e^{-\frac{E_m}{kT}} \quad (1.5)$$

Zur Notation in (1.5): n_m = Anzahl der (H-)Atome im Zustand mit der Hauptquantenzahl m und der Energie E_m (bezogen auf den Grundzustand mit $E_1 = 0$) pro Volumen, n_0 = Gesamtzahl der (H-)Atome pro Volumen, g_m = statistisches Gewicht des m -ten Zustands, $Z_0 = \sum_l g_l \exp(-E_l/kT)$ = atomare Zustandssumme.

Da wir für unser Bogenmodell lokales thermisches Gleichgewicht annehmen, soll bei allen Rechnungen (1.2) zugrundegelegt werden. Wir können deshalb die Strömungsgleichung der Strahlung (1.1) umschreiben in

$$dJ_v = \kappa_v (B_v - J_v) ds \quad (1.6)$$

1.3. Bei der Aufstellung der Strahlungsenergiebilanz im Bogen kann man zwei Grenzfälle unterscheiden, je nachdem ob das Bogenplasma für die betreffende Strahlungsart optisch dick oder dünn ist:

$$\begin{aligned} \text{optisch dick:} & \quad \int \kappa_v ds \gg 1 \quad \hat{=} \quad J_v \approx B_v \\ \text{optisch dünn:} & \quad \int \kappa_v ds \ll 1 \quad \hat{=} \quad J_v \ll B_v \end{aligned} \quad (1.7)$$

Vernachlässigt man der Einfachheit halber in (1.1) ϵ_v , so ergibt die Integration für die Intensität nach Durchlaufen eines Weges s $J_v(s) = J_v(0) \cdot \exp(-\int_0^s \kappa_v ds)$. (Die Äquivalenz von linker und rechter Seite in (1.7) lässt sich durch Integration von (1.6) zeigen.)

Man sieht, wenn das Plasma optisch dick ist, dann wird die Strahlung vollkommen absorbiert und stellt keinen Energieverlust dar. Ist das Plasma optisch dünn, so geht praktisch die ganze Strahlungsenergie verloren. Im allgemeinen wird jedoch die optische Weglänge $\int \kappa_v ds$ den Ungleichungen (1.7) nicht genügen, ausserdem wird für eine bestimmte Strahlungsart die Grössenordnung von $\int \kappa_v ds$ von dem Weg, über den integriert wird, abhängen, so dass z.B. Strahlung, die aus Bogenzonen hoher Temperatur fast vollständig emittiert wird, in kälteren Gebieten eine starke Absorption erleidet.

Während die Einführung von optisch dünner Strahlung in die Elenbaas-Heller'sche Differentialgleichung (I 2.5) nur ein zusätzliches funktionales Glied ähnlich $\sigma(T)E^2$ verursacht, verwandelt die Berücksichtigung von Strahlungsabsorption sie in eine Integrodifferentialgleichung, da die Absorption eines Volumenelements von den Strahlungsaustauschprozessen der übrigen Volumenelemente des Bogens mitbestimmt wird. Darauf soll in 5. noch ausführlicher eingegangen werden.

1.4. Zunächst einmal werden die in einem Wasserstoffbogen mit überlagertem Magnetfeld auftretenden Strahlungsarten zusammengestellt, ihre jeweiligen Emissions- und Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von der Temperatur errechnet und die Grössenordnung der zugehörigen optischen Weglängen abgeschätzt.

Dabei wird ein Gesamtbogenradius R von ca. $1 \div 2$ cm angenommen (was die Bogenexperimente im IPP in Garching nahelegen), und es werden die in Teil I ohne Strahlungsberücksichtigung gewonnenen Ergebnisse (Temperaturprofil und elektrische Feldstärke) näherungsweise benutzt. Ferner wird untersucht werden, in welchem grössenordnungsmässigen Verhältnis die lokalen Strahlungsenergieverluste zu den Wärmeleitungsverlusten ($= \sigma E^2$ in Teil I) stehen bzw. stehen könnten.

Bei den zu betrachtenden Strahlungsarten handelt es sich um die Linien- und Kontinuumsstrahlung der H-Atome, die Linien- und Kontinuumsstrahlung der H⁻-Ionen sowie die Zyklotronstrahlung.-Es sei darauf hingewiesen, dass, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, wie in Teil I alle Rechnungen im cgs-Maßsystem durchgeführt werden, so dass für die physikalischen Grössen in zugeschnittenen Grössengleichungen cgs-Einheiten zu verwenden sind.

2. Linienstrahlung der H-Atome

2.1. Durch das überlagerte starke Magnetfeld erfolgt eine Linienaufspaltung $\Delta \nu_B$ infolge Zeeman-Effekts. $\Delta \nu_B$ hat die Grössenordnung der Larmorfrequenz.

$$\nu_{La} = \frac{1}{2\pi} \frac{e}{2c} \frac{|\mathcal{L}_z|}{m_e} \quad (2.1)$$

Für $|\mathcal{L}_z| = 20 \text{ k}\Gamma$ wird $\nu_{La} = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ sec}^{-1}$. Damit ist $\Delta \nu_B$ im allgemeinen klein gegen die sonstige Linienverbreiterung (siehe 2.4. und 2.5.).

2.2. Bezeichnen wir mit A_{mn} die Übergangswahrscheinlichkeiten für spontane Emission vom Energiezustand m in den Zustand n des H-Atoms und mit ν_{mn} die Frequenz der dabei ausgesandten Strahlung (im übrigen gilt die Notation in (1.5)), so ergibt sich für den zugehörigen Emissionskoeffizienten ϵ'_{mn} :

$$\epsilon'_{mn} = \frac{1}{4\pi} A_{mn} n_m h \nu_{mn} = \frac{1}{4\pi} A_{mn} h \nu_{mn} \frac{n_0}{Z_0} g_m e^{-\frac{E_m}{kT}} \quad (2.2)$$

Das zweite Gleichheitszeichen entsteht mittels (1.5). Das statistische Gewicht g_m errechnet sich quantenmechanisch unter Berücksichtigung des Spins und des Bahndrehimpulses der Elektronen (Quantenzahl l) zu

$$g_m = 2 \sum_{l=0}^{m-1} (2l+1) = 2 \{2 \sum l + m\} = 2 \left\{ 2m \frac{(m-1)}{2} + m \right\} = 2m^2 \quad (2.3)$$

Die Grössen A_{mn} wurden [1], die Werte von E_m und λ_{mn} [2] entnommen. (Es wurden die beobachteten (und z.T. gerundeten) λ_{mn} verwendet.) Sie sind in Tabelle 1 aufgeführt.

- 2.3. Um eine obere Grenze für die pro Volumen und Zeit emittierte Energie zu erhalten, wird ϵ'_{mn} , das ja per definitionem auf die Raumwinkeleinheit bezogen ist, mit dem vollen Raumwinkel 4π multipliziert:

$$L'_{mn} \equiv 4\pi \cdot \epsilon'_{mn} \quad (2.4)$$

Die Absorption der von aussen auf das Volumenelement treffenden Strahlung reduziert natürlich den Strahlungsenergieverlust, daher ist der Verlust im allgemeinen kleiner als L'_{mn} . Sie kann so stark sein, dass sie die Emission übertrifft.

L'_{mn} der wichtigsten Übergänge ist für die einzelnen Temperaturzonen des betrachteten Bogens in Tabelle 2 angegeben. Man sieht sofort, dass die Lyman-Serie (Übergänge zum Grundzustand) und H α dominieren, die restlichen Linien werden für die Energiebilanz uninteressanter. In der gleichen Tabelle findet man noch L'_K für die Kontinuumsstrahlung der H-Atome und zum Vergleich die in Teil I errechnete elektrische Leistung σE^2 für drei verschiedene Achsentemperaturen.

- 2.4. Wie Tabelle 2 zeigt, liegt L'_{mn} der ersten Glieder der Lyman-Serie im Temperaturbereich $10^4 \text{ }^\circ\text{K} < T < 3 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ teilweise beträchtlich über σE^2 oder in dessen Grössenordnung. Es wurde deshalb notwendig, die Grösse der zugehörigen Absorptionskoeffizienten zu bestimmen und zwar möglichst genau. Man muss nämlich bedenken, dass die Emission und Absorption der Spektrallinien nicht streng monochromatisch erfolgt,

Tabelle 1 : Übergangswahrscheinlichkeiten und zugehörige Wellenlängen von Wasserstoff

$m \rightarrow n$	$A_{mn} [10^8 \text{ sec}^{-1}]$	$\lambda_{mn} [\text{Å}]$
2 \rightarrow 1 (Ly α)	4,69	1215,7
3 \rightarrow 1 (Ly β)	0,55	1026,0
3 \rightarrow 2 (H α)	0,43	6563
4 \rightarrow 1 (Ly γ)	0,128	972,5
4 \rightarrow 2 (H β)	0,083	4861,3
4 \rightarrow 3	0,089	18751
5 \rightarrow 1 (Ly δ)	0,040	950
5 \rightarrow 2 (H γ)	0,025	4340,5
5 \rightarrow 3	0,022	12818
5 \rightarrow 4	0,027	40500
6 \rightarrow 1	0,0162	936
6 \rightarrow 2	0,0092	4101,7
6 \rightarrow 3	0,0077	10938
6 \rightarrow 4	0,0077	62300
6 \rightarrow 5	0,0101	74000

Tabelle 2: Zusammenstellung von $L'_{mn} = 4\pi \cdot \epsilon'_{mn} \left[\text{Watt/cm}^2 \right]$ der wichtigsten Linien und des Kontinuums von Wasserstoff und Vergleich mit der in Teil I für $R=1\text{cm}$ ermittelten Joule'schen Leistung $\delta E^2 \left[\text{Watt/cm}^2 \right]$ ($m \rightarrow n, k, l \dots \Delta$ Summe der Strahlungsübergänge vom Niveau mit der Hauptquantenzahl m zu den Niveaus mit $n, k, l \dots$; $T(0) = \text{Achsentemperatur}$)

$T \left[10^4 \text{ }^\circ\text{K} \right]$:	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	10,0
2 \rightarrow 1	54	794	3600	5710	4250	2660	1480	463	189	50	19	1
3 \rightarrow 1	1	27	185	381	340	248	156	61	28	9	4	
4 \rightarrow 1		5	42	95	90	72	47	19	10	3	1	
5 \rightarrow 1		2	16	37	37	29	20	9	4	1		
6 \rightarrow 1			8	19	20	15	11	5	2			
3 \rightarrow 2		3	23	47	42	30	19	7	3	1		
4 \rightarrow 2,3			7	16	15	12	8	3	1			
5 \rightarrow 2,3,4			3	7	7	5	4	2				
6 \rightarrow 2,3,4,5				4	4	3	2					
L_K (Kontinuum)		6	67	206	258	226	184	109	71	35	21	4
$\sum_{n \neq l} L'_{mn}$		10	100	279	326	277	217					
$\sum L'_{mn}$								676	309	100	45	5
δE^2 ($T(0) = 2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$)			900				2500					
δE^2 ($T(0) = 5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$)			650				1800		2600	3300	4400	
δE^2 ($T(0) = 10^5 \text{ }^\circ\text{K}$)			390				1100		1500	2000	2700	7700

sondern ein Profil aufweist, das im wesentlichen erstens durch Doppler-Effekt infolge der ungeordneten thermischen Bewegung der strahlenden Atome und zweitens durch Stark-Effekt, hervorgerufen von elektrischen Mikrofeldern der Ionen und Elektronen (Druckverbreiterung), zustandekommt. (Wegen der Gültigkeit des Kirchhoff'schen Satzes (1.2) für unseren Bogen ist das Emissions - gleich dem Absorptionsprofil.) Diese Einflüsse lassen wohl den Emissionskoeffizienten der Linie insgesamt, also auch L'_{mn} unverändert, dagegen verringert sich der monochromatische Absorptionskoeffizient um die Größenordnung der Linienbreite, d.h. um ca. $11 \div 12$ Zehnerpotenzen.

Bezeichnen wir mit $\Delta\nu$ den Frequenzabstand von der Linienmitte ν und mit m die Atommasse, dann lautet nach [1] die Intensitätsverteilung $J(\Delta\nu)$ der emittierten Strahlung für reine Doppler-Verbreiterung (mit der Normierung $\int J(\Delta\nu') d\nu' = 1$):

$$J(\Delta\nu) = \frac{e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_D}\right)^2}}{\sqrt{\pi} \Delta\nu_D} \quad (2.5)$$

mit

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad (2.6)$$

Setzt man in (2.6) die Frequenz der Linie Lyman α ein, $\nu_{21} = 2,465 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$, so wird

$$\Delta\nu_D = 1,057 \cdot 10^{11} \sqrt{\frac{T}{10^4}} \text{ [sec}^{-1}\text{]} \quad (2.6a)$$

und weiter

$$J_{21}(\Delta\nu) = \frac{0,534 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \exp\left(-\left(\frac{\Delta\nu/10^{11}}{1,055 \sqrt{\frac{T}{10^4}}}\right)^2\right) \text{ [sec]} \quad (2.7)$$

Während beim monochromatischen $\sigma(\nu' - \nu)$ -Profil der relative Absorptionskoeffizient eins beträgt, ist er nun in der Linienmitte auf

$$\frac{0,534 \cdot 10^{-11}}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}}$$

abgefallen.

Wird dem Doppler-Profil das Druckverbreiterungsprofil überlagert, dann verkleinert sich der Absorptionskoeffizient noch etwas.

2.5. Die Druckverbreiterungsprofile der Linien Ly α , Ly β , H α -H liegen mit der Ionen- bzw. Elektronendichte n_i als Parameter und mit $\alpha = \frac{\Delta\lambda[\text{\AA}]}{F}$ als unabhängiger Variablen fertig gezeichnet vor, wobei $F = 2,61 \cdot e \cdot n_i^{2/3}$ [el.stat.c.g.s.cm $^{-2}$] die sogenannte Normalfeldstärke ist [3]. Unter den Bedingungen unseres Bogens wurde das Verhältnis von Doppler- zu Druckverbreiterungshalbwertsbreite für Ly α ≈ 7 , für Ly β < 1 und für H α $\ll 1$. Diese Tendenz ist verständlich, denn mit zunehmendem Abstand der beim Strahlungsübergang beteiligten Niveaus vom Atomkern können die Mikrofelder der Störteilchen stärker einwirken. Um das tatsächliche ϵ_ν - bzw. κ_ν - Profil ($\equiv J_R(\Delta\nu)$) zu erhalten, wurde für Ly α und Ly β das gegebene Druckverbreiterungsprofil ($\equiv J_{Dr}(\Delta\nu)$) mit dem Doppler-Profil ($\equiv J_{Do}(\Delta\nu)$) nach (2.5) (auf der IBM 7090) gefaltet:

$$J_R(\Delta\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_{Dr}(\Delta\nu') \cdot J_{Do}(\Delta\nu - \Delta\nu') d(\Delta\nu') \quad (2.8)$$

(Alle Profile sind normiert: $\int_{-\infty}^{+\infty} J(\Delta\nu') d\nu' = 1$)

(Unterhalb von ca. 10^4 °K, wo das Bogenplasma kaum ionisiert ist, ist $J_R(\Delta\nu)$ in seinem Kern durch das Doppler-Profil und in seinen Flügeln durch die Druckverbreiterung bestimmt; für Ly β ist im Vergleich zu Ly α der Einfluss der Doppler - gegenüber der Starkverbreiterung bedeutend geringer. Für den Temperaturbereich $T > 10^4$ °K wurde das resultierende Emissions- bzw. Absorptionsprofil beider Linien durch den Ansatz

$$J_A(\Delta\nu) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|\Delta\nu|}{a}} \quad (2.9)$$

approximiert ($\int_{-\infty}^{+\infty} J_A(\Delta\nu') d\nu' = 1$), wobei a ungefähr die Halbwertsbreite $v \cdot J_R(\Delta\nu)$ darstellt und in Einheiten der für die Doppler-Verbreiterung charakteristischen Grösse $\Delta\nu_D$ (2.6) ausgedrückt wird.

$$\text{Ly}\alpha : \quad a = \Delta v_D = 1,057 \cdot 10^{11} \sqrt{\frac{T}{10^4}} \text{ [sec}^{-1}] \quad (2.10)$$

$$\text{Ly}\beta : \quad a = \frac{3 \cdot \Delta v_D}{\ln 2} = 4,5 \cdot 10^{11} \sqrt{\frac{T}{10^4}} \text{ [sec}^{-1}] \quad (2.11)$$

Zur Bekräftigung der vorangegangenen Ausführungen ist Tabelle 3 gedacht, in der J_{D_0} , J_R und J_A miteinander verglichen werden. Die dort aufgeführten Werte sind speziell für $T=1,4 \cdot 10^4$ °K ermittelt worden, sie können aber auf Grund der Rechnungen als repräsentativ für $T > 10^4$ °K angesehen werden.

Tabelle 3 :

	Δv [10^{11} sec^{-1}]	$J_{D_0}(\Delta v)$ [sec]	$J_R(\Delta v)$ [sec]	$\int_{-\Delta v}^{+\Delta v} J_R dv'$	$J_A(\Delta v)$ [sec]	$\int_{-\Delta v}^{+\Delta v} J_A dv'$
Ly α :	0,06	$4,5 \cdot 10^{-12}$	$3,4 \cdot 10^{-12}$	0,039	$3,8 \cdot 10^{-12}$	0,046
	1,62	$8,3 \cdot 10^{-13}$	$1,1 \cdot 10^{-12}$	0,758	$1,1 \cdot 10^{-12}$	0,728
	2,7	$4,1 \cdot 10^{-14}$	$3,8 \cdot 10^{-13}$	0,896	$4,6 \cdot 10^{-13}$	0,885
	4,26	$3,8 \cdot 10^{-17}$	$1,2 \cdot 10^{-13}$	0,963	$1,3 \cdot 10^{-13}$	0,967
	5,94	$6,1 \cdot 10^{-21}$	$4,2 \cdot 10^{-14}$	0,988	$3,4 \cdot 10^{-14}$	0,991
	7,62	$2,6 \cdot 10^{-28}$	$1,4 \cdot 10^{-14}$	0,995	$8,7 \cdot 10^{-15}$	0,997
Ly β :	0,2	$3,7 \cdot 10^{-12}$	$5,0 \cdot 10^{-13}$	0,017	$9,0 \cdot 10^{-13}$	0,036
	5,0	$4,1 \cdot 10^{-17}$	$5,3 \cdot 10^{-13}$	0,521	$3,7 \cdot 10^{-13}$	0,608
	9,0	$3,2 \cdot 10^{-28}$	$2,5 \cdot 10^{-13}$	0,771	$1,7 \cdot 10^{-13}$	0,815
	12,6	10^{-38}	$1,3 \cdot 10^{-13}$	0,885	$8,8 \cdot 10^{-14}$	0,906
	16,2	10^{-38}	$6,7 \cdot 10^{-14}$	0,940	$4,5 \cdot 10^{-14}$	0,952
	19,8	10^{-38}	$2,2 \cdot 10^{-14}$	0,968	$2,3 \cdot 10^{-14}$	0,975

Der Ansatz (2.9) mit (2.10) bzw. (2.11) hat also den Vorteil, dass er als relativ einfache Funktion der Temperatur das resultierende Profil von ϵ_ν bzw. κ_ν ziemlich genau beschreibt.

2.6. Die detaillierte Bestimmung von κ_{mn} zeigte, dass im Rahmen der Bogendimensionen (die Achsenrichtung selbstverständlich ausgeschlossen) für alle Linien ausserhalb der Lyman-Serie das gesamte Bogenplasma als optisch dünn angesehen werden kann.

Für $H\alpha$ gilt diese Aussage nicht ganz so gut, aber noch hinreichend genau. Bei den Lyman-Linien sind die Absorptionsverhältnisse bedeutend komplizierter. Zur Illustration ist in Tabelle 4 der Verlauf von α_{21} in der Linienmitte (Doppler-Profil !) angegeben. Die anderen Lyman-Linien weisen die gleiche Tendenz auf, nur ist α_{mn} mehr oder weniger kleiner. Da grosses ϵ_{mn} von grossem α_{mn} begleitet ist, muss eine genauere Untersuchung des Strahlungsaustausches zumindest von $Ly\alpha$ und $Ly\beta$ erfolgen (siehe 5.).

Tabelle 4 :

T [10^4 °K]	0,2	1,0	1,4	1,6
$\alpha'_{21} (\Delta\nu = 0)$ [cm^{-1}]	$2,2 \cdot 10^4$	$2,02 \cdot 10^3$	$4,36 \cdot 10^2$	$1,04 \cdot 10^2$
T [10^4 °K]	2,0	2,5	3,0	4,5
$\alpha'_{21} (\Delta\nu = 0)$ [cm^{-1}]	7,38	0,63	0,105	$3,45 \cdot 10^{-3}$

2.7. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die Streuung der Strahlung an freien Elektronen (Thomson-Streuung) im Bogen unbedeutend ist. Sie kommt erst bei sehr hohen Temperaturen ($> 10^5$ °K) in die Grössenordnung der wahren Absorption, die dann jedoch selbst verschwindend klein ist. Nach [1] lautet nämlich der Streukoeffizient σ_{Th} :

$$\sigma_{Th} = 0,665 \cdot 10^{-24} n_e \quad [\text{cm}^{-1}]$$

Noch geringer als die Thomson-Streuung ist die sogenannte Rayleigh-Streuung durch die (Wasserstoff-)Atome.

3. Kontinuumsstrahlung der H-Atome

3.1. Bei der Berechnung der Kontinuumsstrahlung der H-Atome, entstanden durch frei-frei (f-f) und frei-gebunden (f-g) Übergänge der Elektronen, wollen wir uns zunächst an [4] halten. Danach besteht das Kontinuum aus einem ziemlich frequenzunabhängigen und einem stark frequenzabhängigen Anteil (im folgenden mit (1) bzw. (2) indiziert).

3.2. Setzen wir die Energiedifferenz im Termschema von der Ionisierungsgrenze (E_1) bis zu dem Term, der den Abschluss einer hinreichend dichten Termfolge bildet, gleich $h\nu_G$, wobei ν_G Grenzfrequenz heissen soll, dann hat das Kontinuum einschliesslich der f-f-Übergänge (Bremsstrahlung) im Frequenzbereich

$$(\text{Plasmafrequenz } \nu_p) < \nu < \nu_G$$

einen einigermaßen konstanten Verlauf, und es gilt:

$$\epsilon_\nu^{(1)'} = 6,36 \cdot 10^{-47} \frac{n_e n_i}{\sqrt{kT}} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sterad}} \right] \quad (3.1)$$

Mit der Quasineutralität des Plasmas ($n_i = n_e$) errechnet sich der maximal mögliche Strahlungsverlust pro Volumen, Zeit und Frequenzeinheit zu:

$$L_\nu^{(1)'} = 4\pi \epsilon_\nu^{(1)'} = 6,80 \cdot 10^{-8} \frac{(n_i / 10^{16})^2}{\sqrt{T / 10^4}} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right] \quad (3.2)$$

Durch triviale ν -Integration von (3.2) erhält man für den frequenzunabhängigen Teil des Kontinuums:

$$\int_{\nu_p}^{\nu_G} L_\nu^{(1)'} d\nu \equiv L_K^{(1)'} = 6,80 \cdot 10^{-8} \frac{(n_i / 10^{16})^2 (\nu_G - \nu_p)}{\sqrt{T / 10^4}} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right] \quad (3.3)$$

Ferner wird festgesetzt:

$$\nu_G = (E_i - E_6) / h = 7,82 \cdot 10^{13} \text{ sec}^{-1} \quad (3.4)$$

(Die Formel von Inglis-Teller [1])

$$7,5 \cdot 10 \log n_G = 23,26 - 10 \log n_L, \quad n_L = \begin{cases} n_i & \text{für } T > \frac{4,6 \cdot 10^5}{n_G} \\ 2n_i & \text{für } T < \frac{4,6 \cdot 10^5}{n_G} \end{cases} \quad (3.5)$$

gibt für das vorliegende Plasma die Hauptquantenzahl $n_G = 9 \div 10$ für das Abbrechen der Spektralserie, d.h. für den Übergang vom Linien- zum kontinuierlichen Spektrum an.)

Man braucht sich aber im Rahmen unserer Untersuchungen keine grossen Gedanken über die Grenzfrequenz ν_G zu machen. Einerseits nimmt die Intensität der Linienstrahlung mit zunehmender Hauptquantenzahl des Ausgangsniveaus schnell ab, andererseits ist das Balmer- und Lyman-Kontinuum bedeutend grösser, was weiter unten bewiesen werden soll. Ebenso ist es unerheblich, ob in (3.3) für die untere Integrationsgrenze [5]

$$\nu_p = 8,97 \cdot 10^{11} \sqrt{n_i / 10^{16}} \quad [\text{sec}^{-1}]$$

oder Null angenommen wird, da $\nu_G \approx 10^2 \nu_p$ ist.

(3.4) in (3.3) ergibt schliesslich

$$L_K^{(1)'} \approx 5,3 \cdot 10^6 \frac{(n_i / 10^{16})^2}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \quad \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} \right] \quad (3.6)$$

3.3. Für den frequenzabhängigen Teil des Kontinuums, also für $\nu > \nu_G$ gilt:

$$L_\nu^{(2)'} \equiv 4\pi \cdot \epsilon_\nu^{(2)'} =$$

$$4\pi \cdot 6,36 \cdot 10^{-47} \frac{n_i n_e}{\sqrt{kT}} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \left\{ e^{\frac{h\nu_G}{kT}} + \frac{2E_i}{kT} \sum_n \frac{e^{-\frac{E_n'}{kT}}}{n^3} \right\} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \cdot \text{sec}} \right] \quad (3.7)$$

$(h\nu_G \leq E_n' \leq h\nu)$

mit $E_n' = E_i - E_n$. Die Summation \sum_n ist jeweils über alle Grenzkontinua zu erstrecken, die jenseits von ν_G an der Stelle ν beitragen, d.h. der Bedingung $h\nu_G \leq E_n' \leq h\nu$ genügen.

Die ν -Integration von (3.7) zwischen den Grenzen ν_G und $\nu \rightarrow \infty$ führt unter Berücksichtigung der Quasineutralität auf

$$\int L_{\nu}^{(2)'} d\nu \equiv L_K^{(2)'} =$$

$$1,42 \cdot 10^7 \left(\frac{n_i}{10^{16}}\right)^2 \sqrt{\frac{T}{10^4}} \left\{ 1 + \frac{37,4}{T/10^4} \left(\frac{1}{216} + \frac{1}{125} + \frac{1}{64} + \frac{1}{27} + \frac{1}{8} + 1 \right) \right\}$$

also

$$L_K^{(2)'} = 1,42 \cdot 10^7 \frac{(n_i/10^{16})^2}{\sqrt{T/10^4}} \left\{ \frac{T}{10^4} + 37,4 \right\} \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right] \quad (3.8)$$

Die Bestimmung des Absorptionskoeffizienten für die Frequenz maximaler Emission des (Lyman-)Kontinuums zeigte, dass die Absorption im Bogen sehr gering ist. Daher geben (3.6) und (3.8) ungefähr den tatsächlichen Energieverlust pro Volumen und Zeit durch Kontinuumsstrahlung der H-Atome an. Vergleicht man (3.8) mit (3.6), dann sieht man, dass

$$L_K^{(1)'} \leq 10^{-2} L_K^{(2)'}$$

ist, also $L_K^{(1)'}$ in der Energiebilanz praktisch keine Rolle spielt. Der Energieverlust durch Kontinuumsstrahlung, im folgenden L_K genannt, ist ebenfalls in Tabelle 2 zu finden.

4. H⁻-Strahlung und die Zyklotron-Strahlung

4.1. Als Berechnungsgrundlage für die H⁻-Strahlung wurde [1] benutzt. Dort stösst man auf Tabellen mit den Absorptionskoeffizienten κ_{ν}' für die Kontinuums- und Linienstrahlung der H⁻-Ionen für $T \leq 10^4$ °K. Daraus wurden für $T = 10^4$ °K die Emissionskoeffizienten ermittelt.

Zur Abschätzung des H⁻-Strahlungsverlustes wurde ein gemittelter Emissionskoeffizient mit 4π und der ungefähren Breite des Frequenzbereichs $\Delta \bar{\nu}_{H^-}$ multipliziert:

$$L_{H^-} \approx 4\pi \cdot \underbrace{1,5 \cdot 10^{-10}}_{\bar{\epsilon}_{\nu H^-}} \cdot \underbrace{1,5 \cdot 10^{15}}_{\Delta \bar{\nu}_{H^-}} \approx 3 \cdot 10^6 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right]$$

Zum Vergleich, für $T=10^4$ OK beträgt $L_k = 6,3 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right] \ll 6E^2$.

Da die H^- -Strahlung zudem bei mässigem Ionisationsgrad des Plasmas ihr Maximum erreicht, braucht sie in der Energiebilanz des Bogens nicht berücksichtigt zu werden.

- 4.2. Die Zyklotronstrahlung, die bekanntlich durch die Gyration von Ladungsträgern um die Magnetfeldlinien entsteht, ist in unserem Fall ebenfalls vernachlässigbar klein. [6] gibt für den Strahlungsverlust L_z durch die gyrierenden Elektronen allein an (wegen ihrer 1850 mal grösseren Masse bewegen sich die Protonen viel langsamer und strahlen deshalb bedeutend weniger ab):

$$L_z = 62 \cdot \frac{n_i}{10^{16}} \cdot \frac{T}{1,16 \cdot 10^4} |\mathcal{L}_z [k\Gamma]|^2 \left[\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3 \text{sec}} \right]$$

Für unsere Werte von $n_i \approx 10^{16} \text{cm}^{-3}$, $|\mathcal{L}_z| = 20k\Gamma$, $T \approx 5 \cdot 10^4 \text{OK}$ hat L_z die Grössenordnung von $10^5 \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{sec}^{-1}$.

5. Übersicht über die Strahlungsenergiebilanz pro Volumenelement für die Lyman-Serie

- 5.1. Wie in 2. gezeigt wurde, kann der Bogen im allgemeinen nicht als optisch dünn für die Lyman-Serie angesehen werden, die Absorption muss berücksichtigt werden.

Betrachtet man die aus einer bestimmten Richtung (im Raumwinkelintervall $\omega \div \omega + d\omega$) auf ein (Einheits-)Volumenelement (am Ort mit dem Radius r) fallende Strahlung einer Linie (L), dann lautet seine Strahlungsenergiebilanz $\text{Rad}_L(r, \omega)$ für diese Richtung:

$$\text{Rad}_L(r, \omega) = \left(\int_L \epsilon_\nu(r) d\nu - \int_L \alpha_\nu(r) J_\nu(r, \omega) d\nu \right) d\omega = \left(\epsilon_L(r) - \int_L \alpha_\nu(r) J_\nu(r, \omega) d\nu \right) d\omega \quad (5.1)$$

Die ν -Integrationen sind dabei über den Linienbereich zu erstrecken.

(5.1) ist mittels der Definition der Strahlungsintensität und (1.1) zu verifizieren. (Ausserdem soll jetzt ϵ_L anstelle von ϵ_{mn} geschrieben werden.)

Die Strahlungsenergiebilanz über alle Richtungen $\text{Rad}_L(r)$ entsteht aus (5.1) durch Integration über dem vollen Raumwinkel 4π :

$$Rad_L(r) = 4\pi \epsilon_L(r) - \int (\int \kappa_\nu(r) J_\nu(r, \omega) d\nu) d\omega \quad (5.2)$$

In (5.2) ist die Isotropie der spontanen Emission verwendet, die induzierte Emission fällt ja für die Lyman-Strahlung unseres Bogens nicht ins Gewicht.

5.2. Nehmen wir das radiale Temperaturprofil des Bogens als bekannt an, so kann $Rad_L(r)$ exakt in Form eines fünffachen Integrals angegeben werden. Die numerische Durchführung dieser Lösungsmethode nur für eine Linie würde aber selbst bei Benutzung einer leistungsfähigen elektronischen Rechenmaschine sehr viel Zeit erfordern, daher musste darauf verzichtet werden. Um durch vernünftige Vereinfachungen eine bedeutende Reduzierung der Rechenmaschinenzeit zu erreichen, wurde folgendes Programm aufgestellt:

- a) Beschränkung auf die ersten beiden Linien der Lyman-Serie, $Ly\alpha$ und $Ly\beta$, da sie die bei weitem grössten Emissionskoeffizienten aufweisen und deshalb die stärkste Störung der Energiebilanz verursachen könnten. (Siehe auch Tabelle 2 !)
- b) Ausserdem kommt durch ihre approximative Behandlung eine Unsicherheit in die Rechnung, die die Berücksichtigung von weiteren Linien aus Konsistenzgründen nicht ratsam erscheinen lässt.
- b) Zunächst Einführung eines mittleren Absorptionskoeffizienten $\bar{\kappa}_L$, der an einem bestimmten Ort über dem ganzen Frequenzbereich der Linie (L) konstant sein soll. (Siehe 6.!)
Damit machen wir die Umformung:

$$\int \kappa_\nu J_\nu d\nu \approx \bar{\kappa}_L \int J_\nu d\nu \equiv \bar{\kappa}_L J_L \quad (5.3)$$

mit $J_L = \int_L J_\nu d\nu$ als der Gesamtintensität der Linie. Die Integration der spektralen Strahlungstransportgleichung (1.1) über dem Frequenzbereich der Linie ergibt folgende Näherungsdifferentialgleichung für J_L :

$$\frac{dJ_L}{ds} = \epsilon_L - \bar{\kappa}_L J_L \quad (5.4)$$

Auf diese Weise gewinnen wir einen Überblick über den

Einfluss der Lyman-Strahlung auf die Energiebilanz des Bogens in Abhängigkeit von Achsentemperatur und Gesamtbogenradius R . Ferner soll die Empfindlichkeit und die Konvergenz des numerischen Lösungsverfahrens untersucht werden.

Später wird zur genaueren Analyse eine Hälfte des (symmetrischen) frequenzabhängigen Profils von Emissions- und Absorptionskoeffizient durch eine fünfstufige Treppenkurve approximiert (vgl. 9.3.) und für die fünf Frequenzintervalle die Strahlungstransportgleichung einzeln gelöst. (Wir wollen hier den zum i -ten Frequenzintervall gehörenden Anteil von ϵ_L mit $\epsilon_{L,i}$, von J_L mit $J_{L,i}$ und den (arithmetisch) gemittelten Absorptionskoeffizienten mit $\bar{\kappa}_{L,i}$ bezeichnen.)

- c) Näherungsweise Bildung des über dem vollen Raumwinkel 4π genommenen Integralmittelwertes $\bar{J}_L^\omega(r)$ bzw. $\bar{J}_{L,i}^\omega$ der Strahlungsintensität einer Anzahl von Aufpunkten. (Siehe 7.!)
Zu diesem Zweck wird die Strömungsgleichung der Strahlung für verschiedene ausgewählte Richtungen vom Bogenrand bis zum Aufpunkt integriert.
- d) Überführung der Energiebilanz (5.2) in

$$Rad_L(r) = 4\pi (\epsilon_L(r) - \bar{\kappa}_L(r) \bar{J}_L^\omega(r)) \quad (5.5)$$

bzw.

$$Rad_L(r) = 8\pi \sum_{i=1}^5 (\epsilon_{L,i}(r) - \bar{\kappa}_{L,i}(r) \bar{J}_{L,i}^\omega(r)) \quad (5.6)$$

mit $L \hat{=} Ly\alpha, Ly\beta$.

6. Bestimmung eines mittleren Linienabsorptionskoeffizienten

6.1. Theoretische Grundlagen

Wir wollen uns an Rosseland [1] anlehnen, der eine Vorschrift zur Ermittlung eines mittleren Absorptionskoeffizienten, den er Opazitätskoeffizienten nennt, angibt. Die Herleitung, die für unsere Bedürfnisse modifiziert wurde, beruht auf dem Vergleich des Austausches spektral zerlegter Strahlung mit dem der Gesamtstrahlung unter Einbeziehung gewisser Mittelwerte

über dem vollen Raumwinkel. Ausserdem müssen über das Strahlungsfeld gewisse Aussagen gemacht werden.

Zunächst führen wir im Bogenplasma irgendeine Gerade ein, die als l -Koordinatenachse dienen soll. Jedes Wegelement ds kann dann ausgedrückt werden durch:

$$ds = \frac{dl}{\cos \theta} \quad (6.1)$$

θ ist dabei der Neigungswinkel zwischen ds und einer parallel zur l -Achse durch das Wegelement gehenden Geraden. Zusammen mit dem zweiten sphärischen Winkel ψ erhalten wir für das Raumwinkelement $d\omega = \sin \theta \cdot d\psi \cdot d\theta$.

Nun vergleichen wir:

ν -Strahlung der Linie:

Gesamtstrahlung der Linie:

$$\cos \theta \frac{dJ_\nu}{dt} = \epsilon_\nu - \kappa_\nu J_\nu \quad (6.2a)$$

$$\cos \theta \frac{dJ_L}{dt} = \epsilon_L - \bar{\kappa}_L J_L \quad (6.2b)$$

(6.2a) bzw. (6.2b) sind nichts anderes als die Gleichungen (1.1) bzw. (5.4) mit ds aus (6.1).

Jetzt bilden wir verschiedene Mittelwerte über alle Richtungen:

$$H_\nu \equiv \int J_\nu \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} \quad (6.3a)$$

$$H \equiv \int J_L \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} \quad (6.3b)$$

$$K_\nu \equiv \int J_\nu \cos^2 \theta \frac{d\omega}{4\pi} \quad (6.4a)$$

$$K \equiv \int J_L \cos^2 \theta \frac{d\omega}{4\pi} \quad (6.4b)$$

(6.3a) und (6.3b) bedeuten physikalisch den Strahlungsstrom durch das sich am laufenden Punkt senkrecht zur l -Richtung befindende (Einheits-)flächenelement.

Die Multiplikation von (6.2a,b) mit $\cos \theta$ und anschliessende Integration über $\frac{d\omega}{4\pi}$ bringt (ϵ_ν ist isotrop!):

$$\frac{dK_\nu}{dt} = -\kappa_\nu H_\nu \quad (6.5a)$$

$$\frac{dK}{dt} = -\bar{\kappa}_L H \quad (6.5b)$$

Offensichtlich gilt weiter

$$\int H_\nu d\nu = H \quad (6.6)$$

wegen
$$H \equiv \int J_L \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} = \int (\int J_\nu d\nu) \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} = \int \left(\int J_\nu \cos \theta \frac{d\omega}{4\pi} \right) d\nu$$

(6.6) kann unter Verwendung von (6.5a,b) umgeschrieben werden in:

$$\int_L \frac{1}{\bar{\kappa}_\nu} \frac{dK_\nu}{dL} d\nu = \frac{1}{\bar{\kappa}_L} \frac{dK}{dL} \quad (6.7)$$

Zur Berechnung von $\bar{\kappa}_L$ aus (6.7) nehmen wir nun an, dass im Linienbereich $J_\nu(\omega) \approx \tilde{J}_\nu = \text{const.}$ ist, indem sich z.B. die Strahlungsintensität der Hohlraumstrahlung nähert ($\tilde{J}_\nu \approx B_\nu$). (Im Gegensatz zum eigentlichen Rosseland'schen Verfahren, das sich mit der Mittelung des Absorptionskoeffizienten über sehr grosse Frequenzintervalle befasst, tritt hier eine zusätzliche Unsicherheit dadurch auf, was man unter Linienbereich versteht (vgl. 6.2).) Diese Voraussetzung dürfte für die Linien $\text{Ly}\alpha, \beta$ einigermaßen gültig sein, wenn wir ihr Strahlungsfeld in denjenigen Temperaturzonen des Bogens betrachten, die das Übergangsgebiet zwischen schwacher und voller Ionisation darstellen und damit den grössten Strahlungsaustausch aufweisen (vgl. auch 9.4. mit Tabelle 6!). Mit obiger Annahme (\tilde{J}_ν ist isotrop!) werden (6.4a,b):

$$K_\nu = \frac{2}{3} \tilde{J}_\nu \quad (6.8a)$$

$$K = \frac{2}{3} \int_L \tilde{J}_\nu d\nu = \frac{2}{3} \tilde{J}_\nu \Delta\nu_L \quad (6.8b)$$

$\Delta\nu_L$ bezeichnet die Linienbreite (siehe 6.2.!). Sie ist im Gegensatz zu $\tilde{J}_\nu (\approx B_\nu)$ nur schwach vom Ort im Bogen abhängig. Während die Intensität um Zehnerpotenzen variiert, ist ungefähr $\Delta\nu \sim \sqrt{T}$. Das Einsetzen von (6.8a,b) in (6.7) und die Vernachlässigung der L -Abhängigkeit von $\Delta\nu_L$ führt schliesslich zu:

$$\bar{\kappa}_L = \frac{\Delta\nu_L}{\int_L \frac{d\nu}{\kappa_\nu}} \quad (6.9)$$

Ist J_ν im Linienbereich nicht konstant, sondern fällt es nach aussen ab, so gibt (6.9) einen im Sinne der Forderung (5.3) zu niedrigen Wert an. Man kann sich das qualitativ klar machen, indem man in (6.7) für κ_ν und K_ν irgendwelche mit zunehmendem Abstand von der Linienmitte abfallende Funktionen

(z.B. Gauss-Profil) einsetzt.

Natürlich hätte man gleich zu Beginn, in (5.3) annehmen können, dass J_ν im Linienbereich konstant ist, um damit zu einem anderen \bar{x}_L zu gelangen.

Es wurde dagegen (6.9) vorgezogen, weil bei dieser Mittelung die Linienflügel massgeblicher sind und so den Wert von \bar{x}_L kleiner werden lassen.

6.2. Berechnung von \bar{x}_L für Ly α , Ly β

6.2.1. Um \bar{x}_L nach (6.9) für die jeweilige Linie auszurechnen, muss das x_ν -Profil bekannt sein. Ausserdem muss $\Delta\nu_L$ beschränkt werden, da sonst \bar{x}_L offensichtlich gegen Null strebt. Der Bestimmung haftet also eine gewisse Willkür an. Die Profiltbreite $\Delta\nu_L$ soll durch die Forderung parametrisiert werden, dass für den Frequenzabstand $\Delta\nu_L / 2$ von der Linienmitte x_ν der Linienmitte auf den m-ten Teil abgeklungen ist.

Es wurden $m=5$ und $m=10$ ausgewählt. Die Ergebnisse in Tabelle 5 (Abschnitt 9.3.) lassen erkennen, dass für $R=1$ cm und eine Achsentemperatur von $2 \cdot 10^4$ °K der mit den beiden m-Werten ermittelte Einfluss der Ly-Strahlung mehr als in der gleichen Grössenordnung liegt. Für höhere Achsentemperaturen ist das Verhältnis ähnlich, doch wurde auf eine Wiedergabe von Werten verzichtet, da der Einfluss der Strahlung insgesamt abnimmt.

6.2.2. Ly α : Zur Mittelung des Absorptionskoeffizienten wurde das Doppler-Profil (2.7) zugrunde gelegt. Eine einfache Rechnung ergibt dann:

$$\frac{\Delta\nu_L(m)}{2} = \sqrt{\ln m} \Delta\nu_D = 1,057 \cdot 10^{11} \sqrt{\ln m} \sqrt{\frac{T}{10^4}} \quad [\text{sec}^{-1}] \quad (6.10)$$

und weiter (in üblicher Notation):

$$\bar{x}_{21}(m) = \frac{\sqrt{\ln m}}{\int_0^{\infty} dx e^{-x^2}} \frac{1,65 \cdot 10^2}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0 / 10^{15}}{Z_0} \quad [\text{cm}^{-1}] \quad (6.11)$$

Für $m=5$ und $m=10$ wird (6.11):

$$\bar{\alpha}_{21}(m=5) = \frac{60}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0/10^{15}}{Z_0}, \quad \bar{\alpha}_{21}(m=10) = \frac{41,8}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0/10^{15}}{Z_0} \quad [cm^{-1}]$$

$$\int_{-\Delta v_L(m)/2}^{\Delta v_L(m)/2} J_{D_0}(\Delta v') dv' \text{ beträgt für } m=5 \quad 0,93 \text{ und für } m=10 \quad 0,97.$$

6.2.3. Ly β : Es wurde in (6.9) das Approximationsprofil (2,9) mit (2.11) eingesetzt.

Man erhält

$$\frac{\Delta v_L(m)}{2} = a \cdot \ln m = 4,5 \cdot 10^{11} \ln m \sqrt{\frac{T}{10^4}} \quad [sec^{-1}] \quad (6.12)$$

und

$$\bar{\alpha}_{31}(m) = \frac{\ln m}{m-1} \frac{4,6}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0/10^{15}}{Z_0} \quad [cm^{-1}] \quad (6.13)$$

Speziell:

$$\bar{\alpha}_{31}(m=5) = \frac{1,85}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0/10^{15}}{Z_0}, \quad \bar{\alpha}_{31}(m=10) = \frac{1,18}{\sqrt{\frac{T}{10^4}}} \frac{n_0/10^{15}}{Z_0} \quad [cm^{-1}]$$

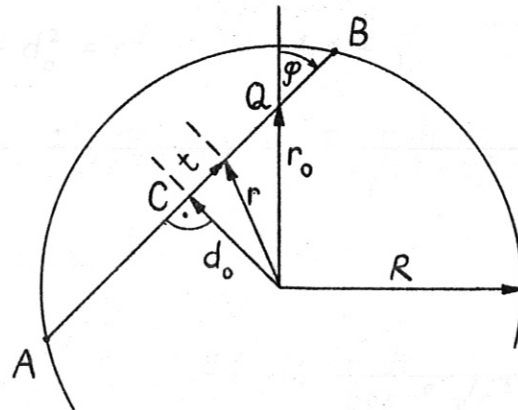
$$\int_{-\Delta v_L(m)/2}^{\Delta v_L(m)/2} J_A(\Delta v') dv' \text{ beträgt für } m=5 \quad 0,8 \text{ und für } m=10 \quad 0,9.$$

7. Mittlung der Strahlungsintensität über dem vollen Raumwinkel

7.1. Wir greifen uns ein beliebiges Volumenelement des Bogens heraus, an dessen Ort Q mit dem Radius r_0 die über dem vollen Raumwinkel gemittelte Intensität einer Linie berechnet werden soll. Als erstes muss ein zweckmässiges Koordinatensystem zur Beschreibung der Richtung der durch Q gehenden Strahlen eingeführt werden.

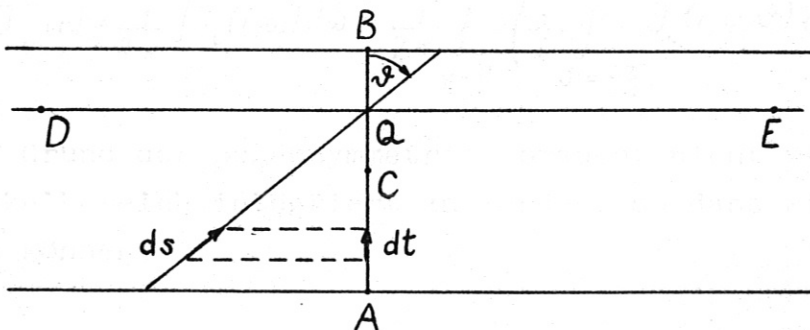
Zu diesem Zweck ziehen wir durch Q eine Gerade DE parallel zur Bogenachse. Durch die Gerade DE und die Bogenachse legen wir eine Ebene. Dann kann die Lage jeder weiteren, ebenfalls die Gerade DE enthaltenden Ebene durch den Schnittwinkel φ mit der ersteren, durch die Bogenachse gehenden Ebene angegeben werden. Die folgende Skizze 1, ein Schnitt durch Q senkrecht zur Achse,

soll das veranschaulichen.



Skizze 1

Die Orientierung eines durch Q gehenden Strahles wird also erstens durch den Winkel φ beschrieben, der die Lage derjenigen Ebene angibt, in der der Strahl verläuft. Zur vollständigen Festlegung der Richtung wird innerhalb der laufenden Ebene der Winkel ψ eingeführt. ψ bestimmt die Abweichung von der Geraden AB, die durch Q geht, ebenfalls in der Ebene liegt und senkrecht auf der Geraden DE steht. Siehe Skizze 2 !



Skizze 2

7.2. In diesem Zusammenhang soll gleich das Wegelement ds in der Strömungsgleichung der Strahlung (1.1) als Funktion von φ , ψ , r und dr ausgedrückt werden.

Wir führen auf der Geraden AB die Koordinate t ein, deren Nullpunkt im Punkt C (Skizze 1) liegt. Man sieht unmittelbar:

$$ds = \frac{dt}{\cos \psi} \quad (7.1)$$

Ferner gilt:

$$d_o = r_o \sin \varphi \quad (7.6)$$

$$t^2 + d_o^2 = r^2 \quad > \quad t = \pm \sqrt{r^2 - d_o^2}$$

$$dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - d_o^2}} = \pm \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - r_o^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7.2)$$

(7.1) mit (7.2):

$$ds = \pm \frac{r dr}{\cos \vartheta \sqrt{r^2 - r_o^2 \sin^2 \varphi}} \quad (7.3)$$

7.3. Für das Raumwinkelement $d\omega$ erhalten wir bekannterweise (sphärische Winkel !):

$$d\omega = (\cos \vartheta \cdot d\varphi) d\vartheta = d(\sin \vartheta) d\varphi \quad (7.4)$$

Der Integralmittelwert der Linienintensität $\bar{J}_L^\omega(r)$ (bzw. $\bar{J}_{L,i}^\omega$) über dem vollen Raumwinkel 4π errechnet sich dann am Aufpunkt mit dem Radius r zu:

$$\bar{J}_L^\omega(r) = \frac{1}{4\pi} \int J_L(r, \omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} J_L(r, \varphi, \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta \right) d\varphi$$

Auf Grund der Bogensymmetrie braucht nicht über dem vollen Winkelbereich integriert zu werden, so dass wir weiter schreiben können:

$$\bar{J}_L^\omega(r) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi=0}^{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} J_L(r, \varphi, \vartheta) d(\sin \vartheta) \right) d\varphi \quad (7.5)$$

(Die Symmetrie in ϑ soll erst später Verwendung finden !)

Da wir die Strahlungstransportgleichung (1.1) mit ds nach (7.4) nur für einige Richtungen lösen wollen, geht das Doppelintegral (7.5) zwangsläufig in eine Doppelsumme über.

Um mit möglichst geringem numerischem Aufwand eine möglichst grosse Genauigkeit von $\bar{J}_L^\omega(r)$ zu erreichen, soll bei der Integration ein von Gauss stammendes Verfahren [1] benutzt werden. Danach wird die Integration folgendermassen ersetzt:

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^i a_k f(x_k) \quad (7.6)$$

Die Werte für die Stützstellen x_k und die zugehörigen Gewichte a_k hängen von der Anzahl i der Stützstellen ab. Der Vorteil der Gauß'schen Methode besteht darin, dass die mit i Stützstellen erreichte Genauigkeit die gleiche ist, als wenn $f(x)$ bei der Integration durch ein Polynom $(2i-1)$ -ten Grades approximiert worden wäre.

Die Stützstellen x_k und Gewichte a_k betragen z.B. für $i = 4$:

$$\begin{aligned} x_{1,3} &= \mp 0,3400 & x_{2,4} &= \mp 0,8611 \\ a_{1,3} &= 0,6521 & a_{2,4} &= 0,3479 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Für die Integration über φ und ϑ in (7.5) wurden jeweils vier Stützstellen genommen, d.h. $i=4$ gesetzt. Während für das Integral $\int_{-1}^{+1} J_L(r, \varphi, \vartheta) d(\sin \vartheta)$ Formel (7.6) mit (7.7) sofort angewendet werden kann ($x = \sin \vartheta$), muss das φ -Intervall $(0, \pi)$ auf das x -Intervall $(-1, +1)$ transformiert werden. Die Transformation lautet:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}(x+1) \quad , \quad d\varphi = \frac{\pi}{2} dx \quad ,$$

und wir erhalten als φ -Stützstellen:

$$\varphi_1 = 1,037 \quad \varphi_2 = 0,218 \quad \varphi_3 = 2,105 \quad \varphi_4 = 2,923$$

(7.5) geht also über in :

$$\bar{J}_L^\omega(r) = \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} \sum_{l=1}^4 a_l \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k J_L(r, \varphi_l, \vartheta_k) \right) \quad (7.8)$$

Wegen (7.7) und $J_L(r, \varphi_l, \vartheta_k) = J_L(r, \varphi_l, -\vartheta_k)$ infolge der Bogensymmetrie vereinfacht sich (7.8) zu

$$\bar{J}_L^\omega(r) = \frac{1}{4} \left(\sum_{l=1}^4 a_l \cdot 2 \sum_{k=1}^2 a_k J_L(r, \varphi_l, \vartheta_k) \right) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 a_l \sum_{k=1}^2 a_k J_L(r, \varphi_l, \vartheta_k) \quad (7.9)$$

(Setzt man zur Probe in (7.9) ein isotropes J_L an, so ergibt sich mit (7.7) $\bar{J}_L^\omega = J_L$!)

Zusammenfassend kann man sagen, dass der Integralmittelwert der Intensität über dem vollen Raumwinkel hier an sich aus der Intensität von 32 verschiedenen Richtungen gebildet wird, was aber durch die Symmetrieeigenschaften des Bogens auf die Lösung der Strahlungstransportgleichung für nur 8 Richtungen (an jeweils einem Aufpunkt) reduziert werden kann. Diese 8 Richtungen kommen letzten Endes dadurch zustande, dass innerhalb von zwei verschiedenen Ebenen durch den Aufpunkt die Strahlung von vier verschiedenen Richtungen betrachtet wird. Mitbestimmend für diese Auswahl war, dass die optische Weglänge bei alleiniger Variation von ν stärkeren Schwankungen unterliegt als bei alleiniger Variation von φ .

8. Numerische Lösung der um die Strahlungsenergiebilanz erweiterten Elenbaas-Heller'schen Differentialgleichung

8.1. Bezeichnen wir die Gesamtstrahlungsenergiebilanz pro Volumen und Zeit mit $\text{Rad}(T)$, so wird durch ihre Berücksichtigung die Elenbaas-Heller'sche Gleichung (I 2.5) folgendermassen erweitert:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \kappa(T) \frac{dT}{dr} + \sigma(T) E^2 - \text{Rad}(T) = 0 \quad (8.1)$$

($\text{Rad}(T)$ ist positiv, wenn Strahlungsenergie verloren geht.) $\text{Rad}(T)$ hat im allgemeinen die Form von (5.2). Da die Intensität am Ort eines Volumenelements von der Emission und Absorption der übrigen Volumenelemente des Bogens abhängt, geht die Energiebilanz von einer Differential- in eine Integrodifferentialgleichung über. Zur Lösung von (8.1) muss deshalb ein radiales Temperaturprofil vorgegeben bzw. (8.1) zunächst ohne den Strahlungsterm integriert werden. Das führt wieder auf ein iteratives Lösungsverfahren, wie es schon für (I 2.5) verwandt wurde.

Solange die Strahlungsabsorption eines Volumenelements vernachlässigt werden kann, lautet $\text{Rad}(T)$:

$$\text{Rad}(T) = 4\pi \sum_L \varepsilon_L(T) + L_K(T) = \sum_L L_L(T) + L_K(T) \quad (8.2)$$

In der Form (8.2) wurde $\text{Rad}(T)$ für Volumenelemente mit einer Temperatur von mehr als $2,5 \cdot 10^4$ °K verwendet. Für $T < 2,5 \cdot 10^4$ °K wurde die Lyman-Serie bei der Summation in (8.2) ausgeklammert. Diese Abgrenzung wurde durch Bestimmung von $\text{Rad}_L(T)$ (5.2) für $\text{Ly}\alpha$ nahegelegt. Während im "optisch dünnen" Bogenmodell die Lyman-Serie unterhalb von $2,5 \cdot 10^4$ °K nicht weiter berücksichtigt wurde, wurde beim "optisch dicken" Bogenmodell Rad_L nach (5.5) bzw. (5.6) für $\text{Ly}\alpha$, $\text{Ly}\beta$ an maximal 15 Aufpunkten gebildet und dazwischen linear interpoliert. Aufpunkte mit Temperaturen unterhalb von ca. $1,1 \cdot 10^4$ °K haben wenig Sinn, da einerseits im Linienkern wegen des grossen Absorptionskoeffizienten kein Strahlungstransport mehr stattfindet und andererseits wegen des nahezu Doppler-Absorptionsprofils in diesem Temperaturbereich keine Absorption der aus heisseren Zonen stammenden Strahlung, wo das Emissionsprofil wesentlich breiter ist, erfolgt.

8.2. Mit $\text{Rad}(T)$ als Temperaturfunktion verläuft die Umwandlung von (8.1) in eine Integralgleichung, die iterativ zu lösen ist, analog zur Behandlung der einfachen Elenbaas-Heller'schen Gleichung in 4. von Teil I. Es sollen deshalb gleich die Ergebnisse mitgeteilt werden, die leicht zu bestätigen sind:

$$T(R) = 0 >$$

$$E^2 = \frac{T(0) + \int_0^R \left(\frac{1}{r' \kappa(T(r'))} \int_0^{r'} \rho \text{Rad}(T(\rho)) d\rho \right) dr'}{\int_0^R \left(\frac{1}{r' \kappa(T(r'))} \int_0^{r'} \rho \sigma(T(\rho)) d\rho \right) dr'} \quad (8.3)$$

$$T(r) = T(0) - E^2 \int_0^r \left(\frac{1}{r' \kappa(T(r'))} \int_0^{r'} \rho \sigma(T(\rho)) d\rho \right) dr' + \int_0^r \left(\frac{1}{r' \kappa(T(r'))} \int_0^{r'} \rho \text{Rad}(T(\rho)) d\rho \right) dr' \quad (8.4)$$

Gegenüber Teil I der Arbeit muss auch der Ausdruck für die elektrische Leistung pro Säulenlänge W abgeändert werden,

die im dortigen Modell gleich dem Verlust durch Wärmeleitung ist. Mit (I 2.2) ergibt sich:

$$W = 2 \pi E^2 \int_0^R \sigma(T(r')) r' dr' \quad (8.5)$$

Die Umschreibung von (8.3), (8.4) und (8.5) in Summen mit Hilfe der Trapezformel geht ähnlich wie in I 4. vor sich.

8.3. Das Rechenmaschinenprogramm für das optisch dünne Bogenmodell unterscheidet sich nicht wesentlich vom Programm für den Bogen ohne Strahlung. Dagegen ist das Programm für das optisch dicke Bogenmodell ziemlich erweitert und demgemäss zeitlich aufwendiger. Das im Hauptprogramm errechnete radiale Temperaturprofil, das mit dem Ergebnis des optisch dünnen Modells identisch ist, wird der Integration der Strahlungstransportgleichungen zugrunde gelegt. Die eigentliche Integration wird dabei in der Subroutine IROUT vorgenommen, die von K. Hain und F. Hertweck im IPP Garching entwickelt wurde. Insgesamt besteht das Programm für das optische dicke Bogenmodell aus einem Haupt- und sechs Unterprogrammen.

9. Ergebnisse und ihre Diskussion

9.1. Für die Lösungen der erweiterten Elenbaas-Heller'schen Gleichung (8.1) existieren natürlich keine einfachen Transformationsgesetze, die es gestatten würden, analog zu den Formeln in I 2. von den für einen Bogen mit bestimmtem Gesamtbogenradius R bekannten Werten von elektrischer Feldstärke, Strom und Leistung auf die entsprechenden Grössen eines Bogens mit beliebigem R zu schliessen. Daher wurde die Integration von (8.1) für zwei verschiedene Radien, $R=1\text{cm}$ und $R=2\text{cm}$, vorgenommen. Auf Grund der bisherigen Bogenexperimente im IPP Garching stellt $R=2\text{cm}$ schon eine obere Grenze dar.

9.2. Die sich für das optisch dünne Bogenmodell ergebende Stromfeldstärke - Charakteristik ist für $R=1\text{cm}$ in Abb.1 und für $R=2\text{cm}$ in Abb. 2 zu sehen. Zum Vergleich ist ausserdem beide Male die in Teil I errechnete Charakteristik für das Bogenmodell ohne

Strahlungsverlust eingezeichnet.

In Abb. 3 ist die pro Säulenlänge aufzubringende elektrische Leistung W über der Achsentemperatur aufgetragen und zwar für den strahlungsfreien Bogen, bei dem W unabhängig von R ist, sowie für den optisch dünnen Bogen mit $R=1\text{cm}$ und $R=2\text{cm}$. Die Abb. zeigt, dass alle drei Kurven bei einer Achsentemperatur von ca. 10^4 °K ineinander übergehen, da dann der Strahlungsverlust gegenüber der Wärmeleitung keine Rolle mehr spielt. Bei festgehaltener Achsentemperatur ist die durch die Strahlung bedingte Leistungserhöhung für $R=2\text{cm}$ etwa viermal so gross als für $R=1\text{cm}$, was dem Verhältnis der Bogenquerschnitte bzw. -volumina entspricht. Ferner kann man deutlich erkennen, dass die Leistungskurve bei Vernachlässigung des Strahlungsverlustes monoton mit der Achsentemperatur anwächst, während die beiden übrigen Kurven ein relatives Maximum aufweisen. Sicher ist das Maximum gegenüber der Leistung für höhere Achsentemperaturen als am Ort des Maximums etwas überhöht, denn die Annahmen des optisch dünnen Bogenmodells sollten mit wachsender Achsentemperatur noch besser erfüllt sein, weil dann (bei konstant gehaltenem R) die radiale Ausdehnung der stärker emittierenden und absorbierenden Bogenzonen kleiner wird.

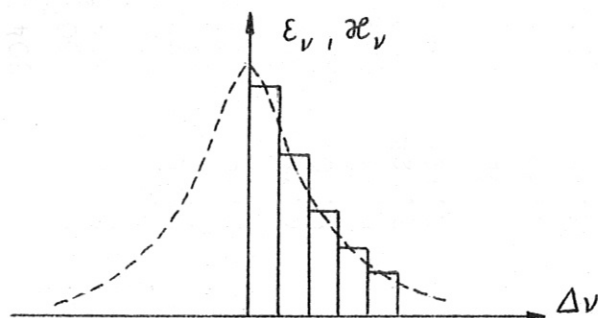
Das zunächst überraschende Ergebnis der Leistungsbilanz kann vielleicht dahingehend interpretiert werden, dass in praxi die Einstellung einer höheren Achsentemperatur mit einer Verbreiterung des Bogens verknüpft ist, wodurch ein steigender Verbrauch elektrischer Leistung zustandekommt. (Die Garching-Experimente scheinen nicht dagegen zu sprechen.)

9.3. Die Berücksichtigung der Lyman-Strahlung auch für Temperaturen $T < 2,5 \cdot 10^4$ °K nach dem in 8.1. angegebenen Vorgehen, d.h. der Übergang vom optisch dünnen zum optisch dicken Bogenmodell, war mit einem erheblich grösseren Aufwand an Rechenmaschinenzeit verbunden. (Für eine Iteration wurde auf der IBM 7090 grössenordnungsmässig eine Stunde benötigt.) Daher wurde diese Rechnung nur für die Achsentemperaturen von $2 \cdot 10^4$, $5 \cdot 10^4$ und 10^5 °K durchgeführt.

Gemäss dem Programm von 5.2. wurde die Integration der Strahlungstransportgleichung zuerst unter Benutzung eines mittleren Absorptionskoeffizienten für den ganzen Linienbereich vorgenommen. Die sich so ergebenden Bogenwerte sind in Tabelle 5

zusammengefasst.

Ausserdem wurde das Emissions- und Absorptionskoeffizientenprofil für Ly α und Ly β unter Verwendung des Approximationsansatzes (2.9) mit (2.10) bzw. (2.11) durch eine fünfteilige Treppenkurve angenähert.



Für jedes Frequenzintervall wurde die Strahlungstransportgleichung einzeln gelöst und daraus (5.6) ermittelt. Die Grösse der Frequenzintervalle wurde so bestimmt, dass das Profil am Intervallende jeweils ungefähr $1/3$ seines Wertes am Intervallanfang hatte. Die Grenzen der Intervalle gleichen etwa den $\Delta\nu$ in Tabelle 3 von 2.5. Weiter sieht man dort, dass der durch die Treppenkurve nicht mehr erfasste Teil der Linienflügel des resultierenden Profils (J_R) für Ly α 0,5 % und für Ly β 3 % der gesamten Linienemission ausmacht. Dem entspricht nach Tabelle 2 eine maximale Strahlungsleistung von ca. 30 W/cm^3 für Ly α und ca. 10 W/cm^3 für Ly β . Setzen wir voraus, dass das Bogenplasma für die Strahlung des nicht erfassten Profilanteils optisch dünn wäre, und berücksichtigen wir die Ausdehnung der stark strahlenden Bogenzone, dann dürften für $R=1\text{cm}$ 40W pro cm Säulenlänge eine obere Grenze für die zusätzlich aufzubringende elektrische Leistung darstellen. (Für $R=2\text{cm}$ entsprechend ca. 150 W/cm .) Der Fehler ist also im Vergleich mit der Gesamtleistung unerheblich. Die Ergebnisse der Profilaufspaltung sind ebenfalls in Tabelle 5 zu finden.

Aus der Tabelle 5 ist erstens ersichtlich, dass das iterative Lösungsverfahren zufriedenstellend konvergiert, daher müsste im allgemeinen eine Iteration genügen.

Analog zu den Ergebnissen des optisch dünnen Bogenmodells ist der Einfluss der Lyman-Strahlung auf die Energiebilanz bei einer Achsentemperatur von $2 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ bedeutend grösser als bei $5 \cdot 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ und erst recht als bei $10^5 \text{ }^\circ\text{K}$, da mit steigender Ach-

Tabelle 5 :

T(0) = Achsentemperatur

T(0) = $2 \cdot 10^4$ °K: R=1cm:

ohne Strahlung
mit opt. dünner Strahlung

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=5) für Ly α , Ly β

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=10) für Ly α , Ly β

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=10) für Ly α

mit Profilaufspaltung für Ly α , Ly β

mit Profilaufspaltung für Ly α

R=2cm:

ohne Strahlung

mit opt. dünner Strahlung

mit Profilaufspaltung für Ly α , Ly β

T(0) = $5 \cdot 10^4$ °K: R=1cm:

ohne Strahlung

mit opt. dünner Strahlung

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=10) für Ly α , Ly β

T(0) = 10^5 °K : R=1cm:

ohne Strahlung

mit opt. dünner Strahlung

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=10) für Ly α , Ly β

R=2cm:

ohne Strahlung

mit opt. dünner Strahlung

mit $\bar{\alpha}_L$ (m=10) für Ly α , Ly β

mit Profilaufspaltung für Ly α , Ly β

Zahl der Iterationen	E [$\frac{V}{cm}$]	J [A]	W [$\frac{kW}{cm}$]
	5,46	458	2,50
	5,84	493	2,88
1	5,87	516	3,03
1	5,88	525	3,09
2	5,89	527	3,10
1	5,84	504	2,94
1	5,91	530	3,13
1	5,86	514	3,01
	2,73	915	2,50
	3,44	1177	4,05
1	3,48	1337	4,65
	4,76	568	2,71
	5,10	581	2,96
1	5,118	589,3	3,016
2	5,124	590,1	3,023
3	5,124	590,2	3,024
	3,75	843	3,16
	3,95	828	3,27
1	3,958	831,1	3,290
2	3,949	832,4	3,287
3	3,950	832,3	3,288
	1,88	1686	3,16
	2,30	1555	3,58
2	2,29	1580	3,62
1	2,29	1577	3,61

sentemperatur (R sei fest!) die Ausdehnung der stark strahlenden Schichten abnimmt. Für Achsentemperaturen $\geq 5 \cdot 10^4$ °K dürfte also das optisch dünne Bogenmodell dem optisch dicken an Genauigkeit kaum überlegen sein.

Eine recht gute Übereinstimmung zeigt ferner der Vergleich der unter verschiedenen Bedingungen ($T(0)=2 \cdot 10^4$ °K, $R=1\text{cm}$; $T(0)=10^5$ °K, $R=2\text{cm}$) gewonnenen Werte, die einerseits mit einem mittleren Absorptionskoeffizienten und andererseits durch Profilaufspaltung errechnet wurden. Aus diesem Grunde wurde von der Anwendung der Profilaufspaltung für die übrigen Fälle abgesehen. Wenn man allerdings den Anteil von $\text{Ly}\alpha$ und $\text{Ly}\beta$ an den Veränderungen der Bogenwerte gesondert betrachtet (siehe bei $T(0)=2 \cdot 10^4$ °K, $R=1\text{cm}$!), dann ergeben sich grössere Unterschiede zur Profilaufspaltung. In der Rechnung mit einem mittleren α_ν ist der Einfluss von $\text{Ly}\alpha$ zu klein gegenüber $\text{Ly}\beta$. Das sollte u.a. an der Benutzung des Doppler-Profils bei der α_ν -Mittelung seine Ursache haben.

Die Zunahme der elektrischen Leistung auf Grund der Lymanstrahlung ist beim Übergang von $R=1\text{cm}$ zu $R=2\text{cm}$ kleiner als die damit verbundene Volumenvergrößerung (Faktor 4!), zumindest für nicht zu hohe Achsentemperaturen. Das deuten die zu $T(0) = 2 \cdot 10^4$ °K gehörenden Werte an.

Einen Überblick über das Verhältnis von $L_L=4\pi\epsilon_L$ zu Rad_L nach (5.6) erlaubt Abb. 4 ($T(0) = 10^5$ °K, $R=2\text{cm}$).

- 9.4. Es bleibt jetzt noch übrig zu untersuchen, welche Fehlerquellen bei der Berücksichtigung der Lymanstrahlung eine Rolle spielen. Als erstes wäre die Vernachlässigung der (Resonanz)Streuung zu erwähnen. Durch deren wiederholtes Auftreten wird ein "Abwandern" der Photonen vom Linienkern in die Linienflügel möglich, so dass sie dem Plasma verlorengelangen. Dieser sogenannte Zanstra-Effekt ist in verschiedenen astrophysikalischen Arbeiten behandelt worden (z.B. [7]). Da die interstellaren Verhältnisse sich von den hier untersuchten Bedingungen stark unterscheiden: einerseits ist die Teilchendichte im Bogen um mehr als zehn Zehnerpotenzen grösser, andererseits sind unsere räumlichen Dimensionen bedeutend kleiner, ist ein Vergleich nur schwer möglich. Nach [7] beginnen die $\text{Ly}\alpha$ -Photonen bei einer optischen Schichtdicke (τ_0) für die Kante des Lyman-Kontinuums

von ≈ 20 aus dem Plasma zu entweichen. Für unseren Bogen ist $\tau_0 \ll 1$, jedoch wird durch Teilchenstöße auf die emittierenden Atome, was in [7] infolge der geringen Dichte nicht berücksichtigt zu werden brauchte, das zitierte Ergebnis beeinflusst.

Zweitens ist auch die Profilaufspaltung bei der Integration der Strahlungstransportgleichung kein exaktes Lösungsverfahren. Auf eine damit zusammenhängende Ursache höherer Leistungszuführung war schon in 9.3. hingewiesen worden. Die dort abgeschätzte zusätzliche Strahlungsgleichung von ca. 40 W/cm Säulenlänge für $R=1\text{cm}$ dürfte grössenordnungsmässig auch für die unterhalb von $2,5 \cdot 10^4$ °K vernachlässigten Glieder der Lyman-Serie in Frage kommen. Diese Unsicherheit zählt also nicht sehr.

Drittens könnte ein grösserer Fehler evtl. durch die Mittelung der Strahlungsintensität über dem vollen Raumwinkel entstehen. Um einen Eindruck von der Strahlungsintensitätsverteilung über den Richtungen und den Frequenzen im Linienbereich zu bekommen, sollen für den Bogen mit $T(0) = 2 \cdot 10^4$ °K und $R=1\text{cm}$ in Tabelle 6 einige Werte aufgeführt werden. Es wurden die Aufpunkte mit den Temperaturen $2 \cdot 10^4$ und $1,4 \cdot 10^4$ °K ausgewählt. Bei ersterem ist der Verlust, bei letzterem die Absorption von Lyman-Strahlungsenergie maximal.

Was unter den Richtungen in Tabelle 6 verstanden wird, soll kurz erläutert werden. In 7. waren die Winkel φ und ψ eingeführt worden. Die Richtungen 1 ÷ 4 und 5 ÷ 8 liegen jeweils in einer Ebene, haben also ein gemeinsames φ . Das zu den Richtungen 1 ÷ 4 gehörende φ ist dabei das kleinere von beiden. Innerhalb einer Ebene geht die Zuordnung von ψ nach folgender Skizze vor sich (Q ist der Aufpunkt):

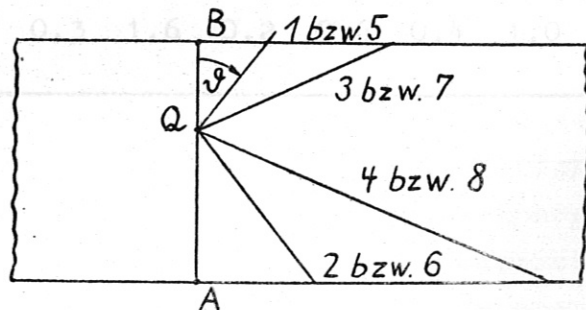
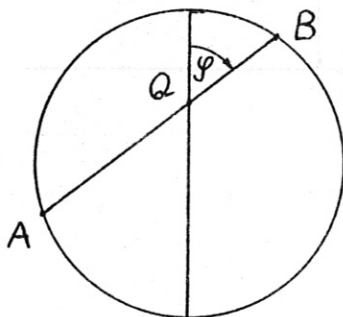


Tabelle 6 : (Die angegebenen Zahlen bedeuten Strahlungsintensität $\left[10^{-5} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sterad}} \right]$)

Richtung Frequ. intervall	1	2	3	4	5	6	7	8
<u>Lyα:</u>								
T=2 \cdot 10 ⁴ OK: 1	40,7		47,3					
2	29,0		36,1					
3	19,8		26,1					
4	10,7		15,1					
5	4,6		7,3					
<hr/>								
T=1,4 \cdot 10 ⁴ OK: 1	4,6	4,9	4,7	4,8	4,7	4,8	4,7	4,8
2	4,5	5,2	4,6	4,9	4,6	4,9	4,6	4,8
3	4,1	6,8	4,3	5,6	4,3	5,3	4,5	5,0
4	2,9	9,9	3,6	9,0	3,4	5,7	3,9	5,6
5	1,4	6,6	2,1	9,0	1,8	4,1	2,6	5,2
<hr/>								
<u>Lyβ:</u>								
T=2 \cdot 10 ⁴ OK: 1	5,0		7,2					
2	3,0		4,5					
3	1,8		2,8					
4	1,0		1,8					
5	0,6		1,0					
<hr/>								
T=1,4 \cdot 10 ⁴ OK: 1	1,1	3,7	1,3	3,0	1,3	2,1	1,4	1,9
2	0,8	3,5	1,1	3,9	1,0	2,0	1,2	2,1
3	0,5	2,6	0,8	3,5	0,7	1,5	0,9	1,9
4	0,3	1,6	0,5	2,5	0,4	1,0	0,6	1,5
5	0,2	0,9	0,3	1,6	0,2	0,6	0,4	1,0

Es dürfte damit klar sein, dass bei der Wahl des Aufpunktes auf der Bogenachse (in unserem Falle $T=2 \cdot 10^4$ °K) sich die ursprünglich acht verschiedenen Richtungen auf zwei reduzieren.

Die Aufspaltung des Frequenzbereichs der Linien wurde gemäss der Beschreibung in 9.3. vorgenommen. Die Frequenzintervalle sind von innen nach aussen numeriert.

Die Zahlen in Tabelle 6 geben die auf die Frequenzeinheit bezogene mittlere Intensität im betreffenden Frequenzintervall und der entsprechenden Richtung an.

Man sieht zunächst, dass für $T=2 \cdot 10^4$ °K die Strahlungsintensität beider Linien ziemlich isotrop ist und zwar in der Linienmitte mehr als in den Linienflügeln. Das ist nicht verwunderlich, denn in der Linienmitte wird die Strahlung wegen der grösseren Emission und Absorption eher optisch dick und kommt damit eher in die Grössenordnung der isotropen Hohlraumstrahlung als in den Linienflügeln. Ähnliches trifft auch für die Intensitätsverteilung (besonders von $Ly\alpha$) bei $T=1,4 \cdot 10^4$ °K zu. Ausserdem kann man für diesen Aufpunkt eine Selbstumkehr der Linie $Ly\alpha$ beobachten, wenn sich die Strahlung vom Bogeninnern (Richtungen 2,4,6,8) und nicht vom Bogenrand nähert; d.h. die Strahlungsintensität hat ihr Maximum ausserhalb der Linienmitte. (Für $Ly\beta$ ist die Selbstumkehr hier nicht so ausgeprägt, sie macht sich wegen kleineren ϵ_v und κ_v erst bei tieferen Temperaturen deutlicher bemerkbar.) Die Selbstumkehr ist um so stärker, je grösser die zur Richtung gehörende optische Weglänge ist, was zu erwarten war. Ebenso ist zu erklären, dass die vom Bogenrand auftreffenden Strahlen eine mit der optischen Weglänge zunehmende Konstanz des Linienprofils aufweisen.

- 9.5. In der radialen Temperaturverteilung bewirkt der Strahlungsverlust eine Einschnürung des Bogenkerns, wie die Abbildungen 5,6,7 zeigen. In den Bogenzonen mit starker Abstrahlung wird nämlich der Temperaturgradient kleiner, um so teilweise den Strahlungsverlust in der lokalen Energiebilanz auszugleichen. Ausserdem wird durch Erhöhung von E mehr elektrische Energie $\epsilon(T) \cdot E^2$ zugeführt, was gleichzeitig den stärkeren Temperaturabfall im Inneren ermöglicht. Die Veränderung des Temperaturprofils durch die Lyman-Strahlung bewegt sich bei den Abbildungen 6 und 7 etwa im Rahmen der Zeichengenauigkeit.

Literaturverzeichnis:

- [1] Unsöld, A.: "Physik der Sternatmosphären" (1955)
- [2] Schpoliski, E.W.: "Atomphysik I" (1960)
- [3] Griem, Kolb, Shen: "Stark Broadening of Hydrogen Lines
in Plasma",
NRL Report 5455 (1960)
- [4] Finkelnburg, W.,
Maecker, H.: "Elektrische Bögen und thermisches
Plasma",
Hdb. d. Physik, Bd. XXII (1956)
- [5] Spitzer, L.: "Physics of fully ionized gases" (1956)
- [6] Rose, Clark, jr.: "Plasmas and Controlled Fusion" (1961)
- [7] Fröbel, F.: "Strahlungstransport von Lyman α in
einer statischen HII-Region"
Diplomarbeit an der Universität
München (1964)

Für die Anregung dieser Arbeit sowie das stetige Interesse und die Hilfe bei ihrer Durchführung möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Schlüter und Herrn Priv.-Doz. Dr. R. Wienecke herzlich danken. Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern des Instituts für Plasmaphysik in Garching bei München, die mir Unterstützung zukommen liessen, vor allem Herrn Dr. W. Kegel und Herrn Dipl.-Phys. H. Fisser. Besonderen Dank schulde ich Frä. E. Waldherr für die druckreife Anfertigung der meisten Abbildungen sowie Frä. Heidecker für das sorgfältige Schreiben des Manuskripts.

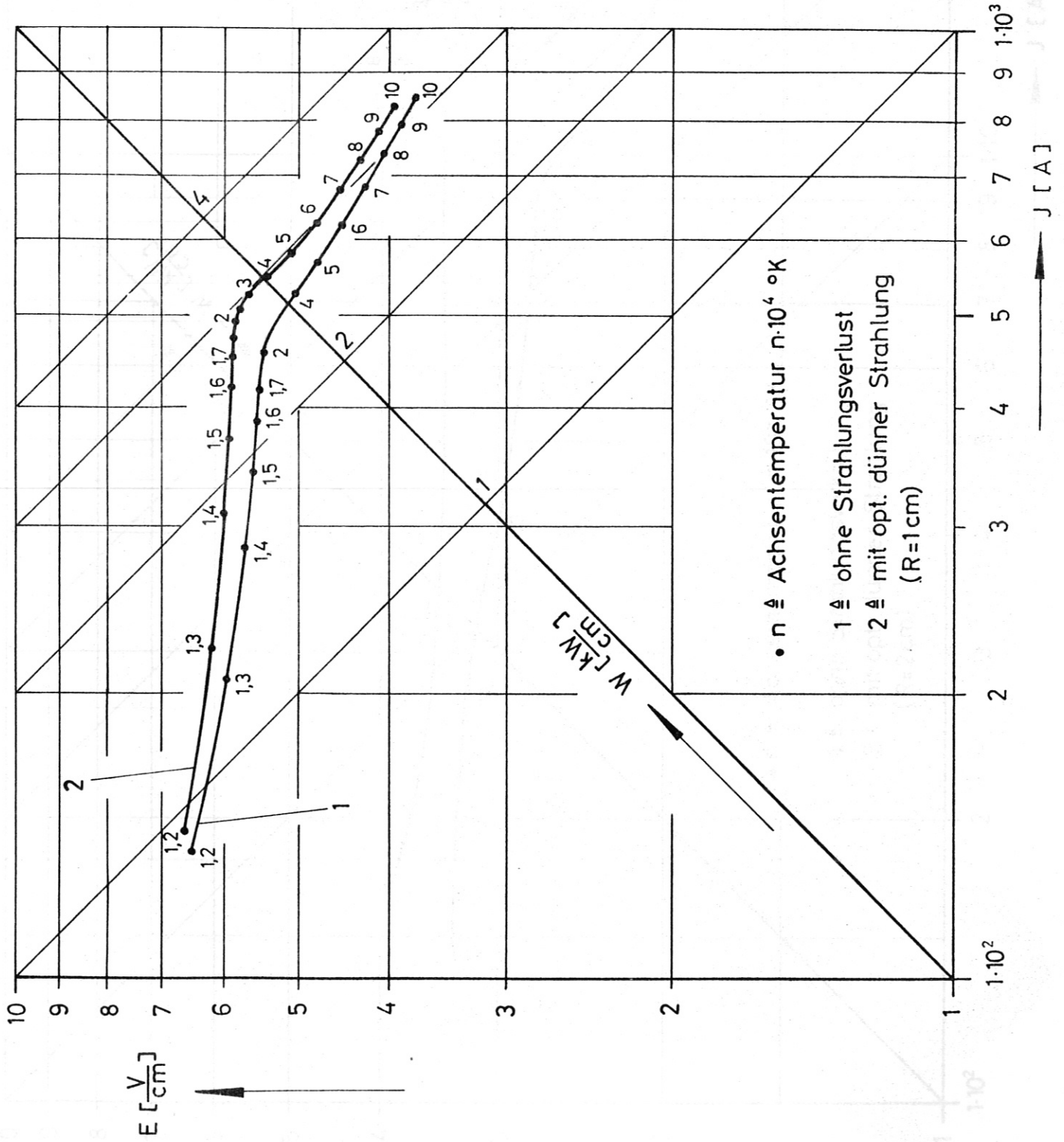


Abb. 1

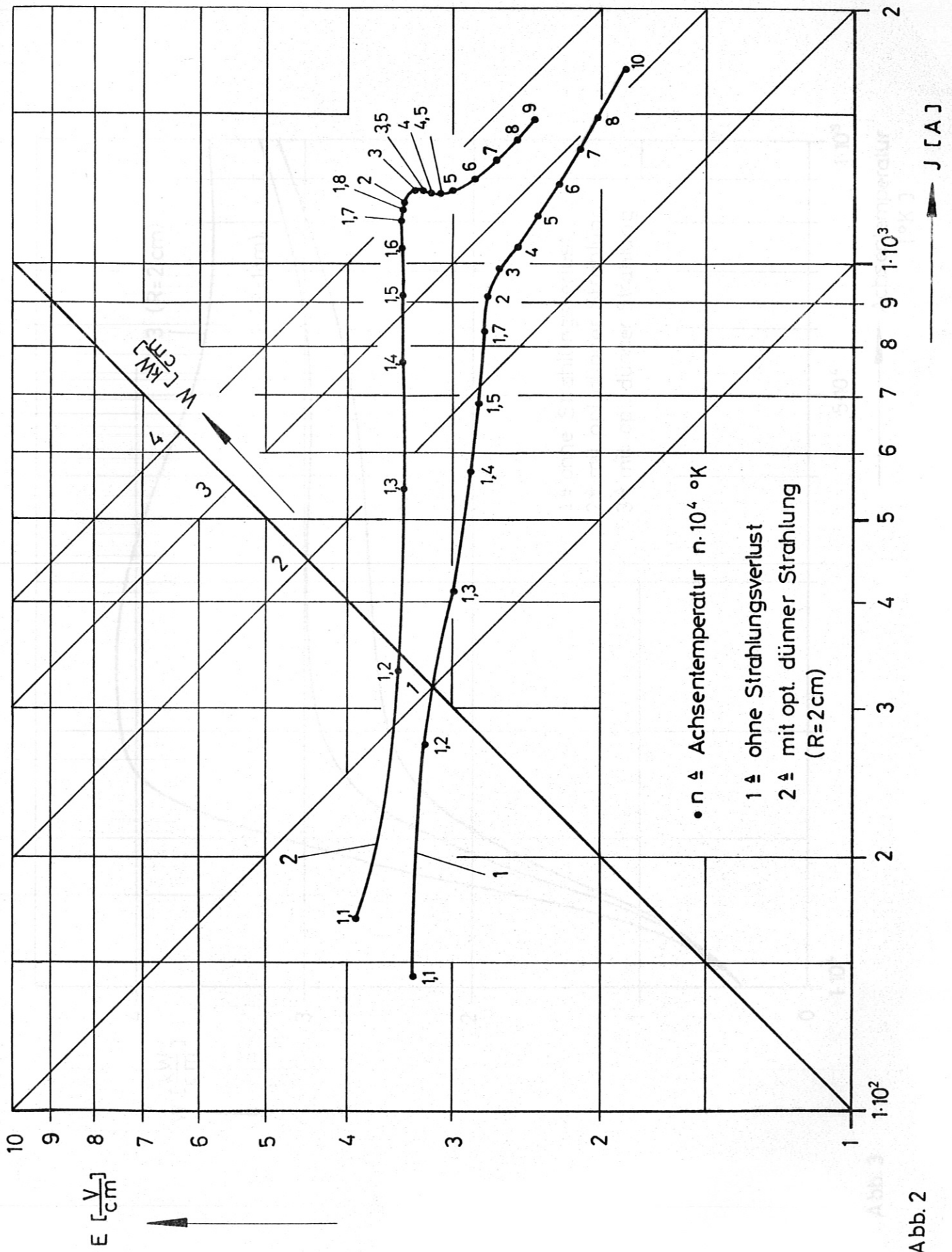


Abb. 2

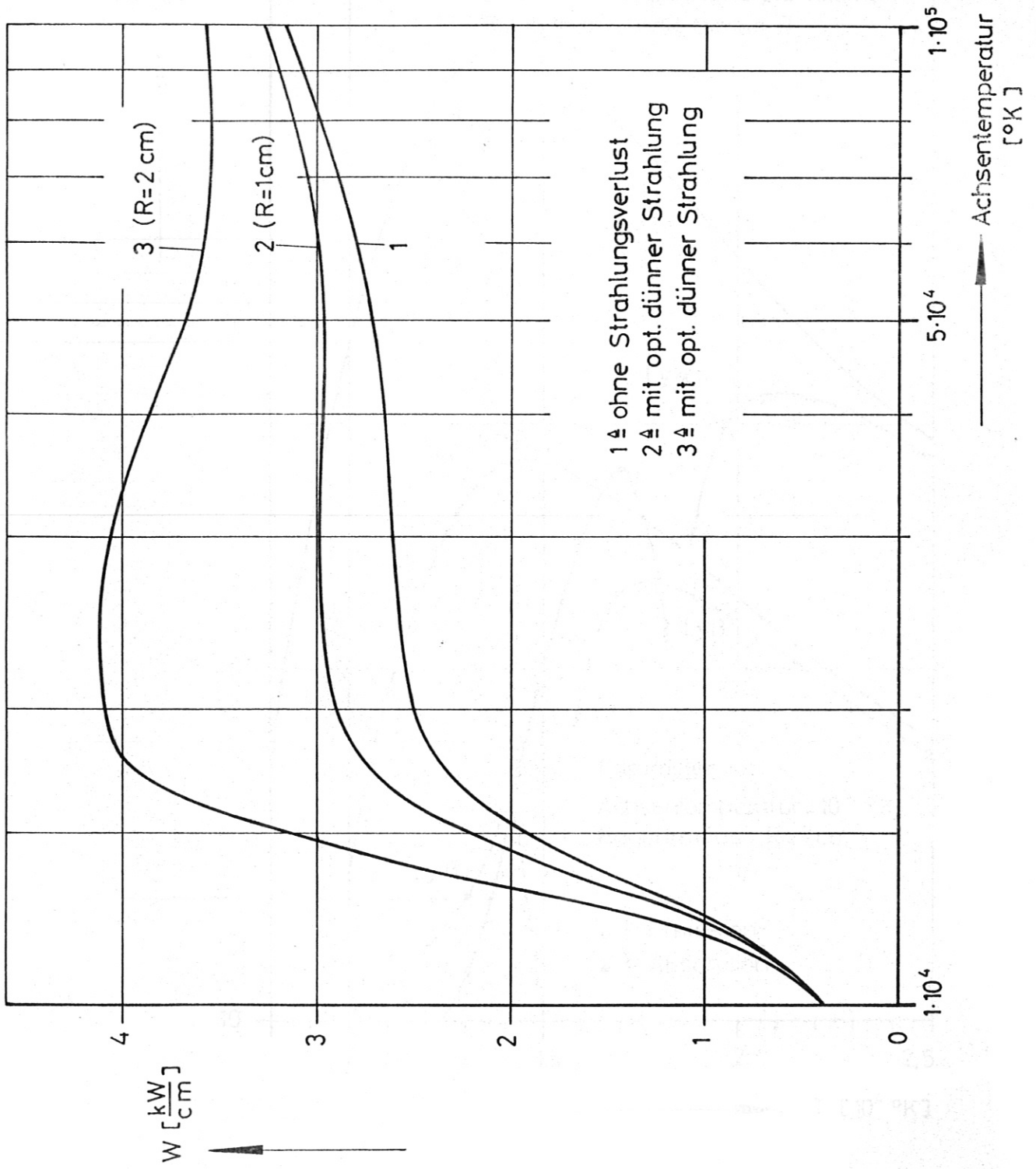


Abb. 3

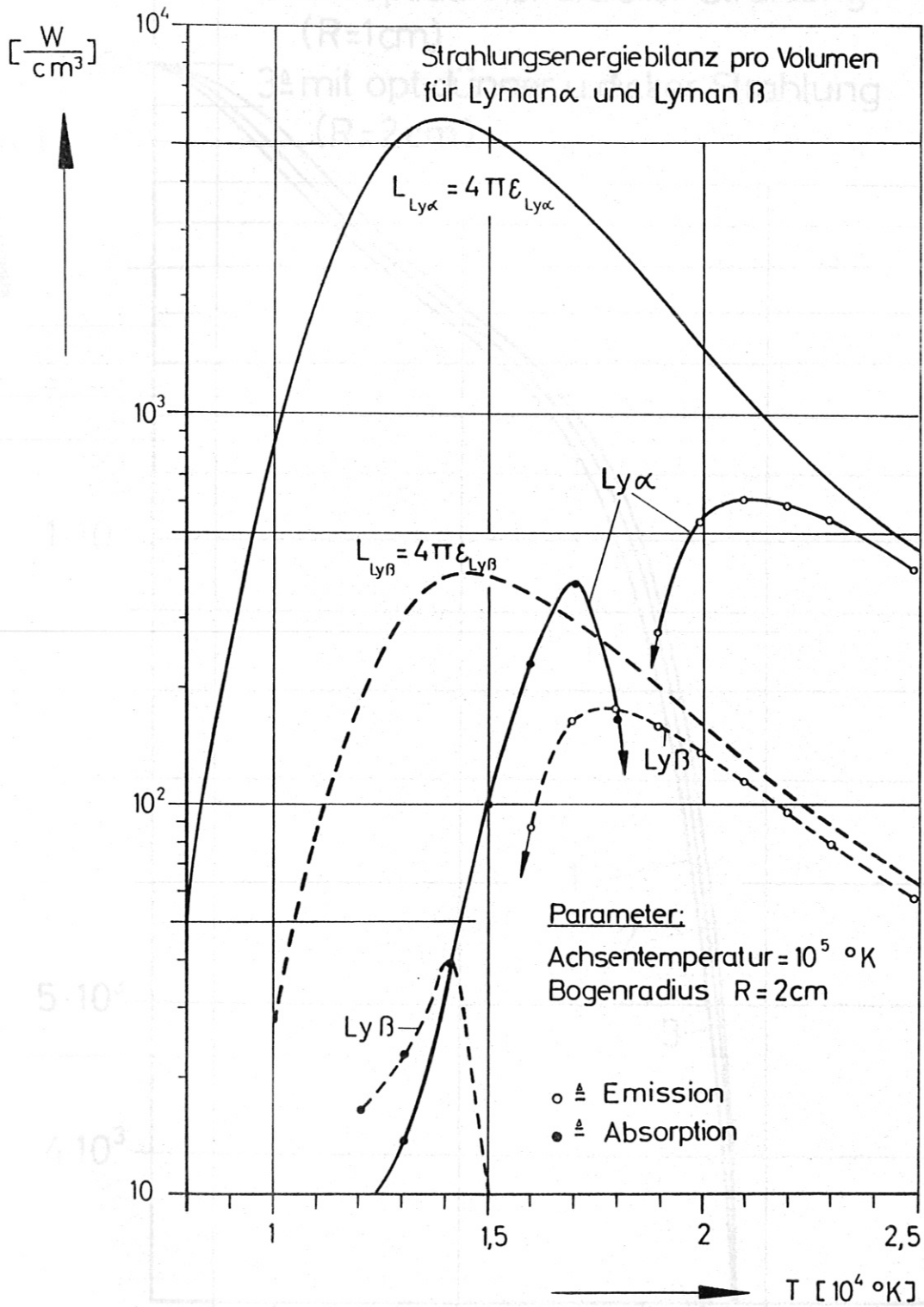


Abb. 4

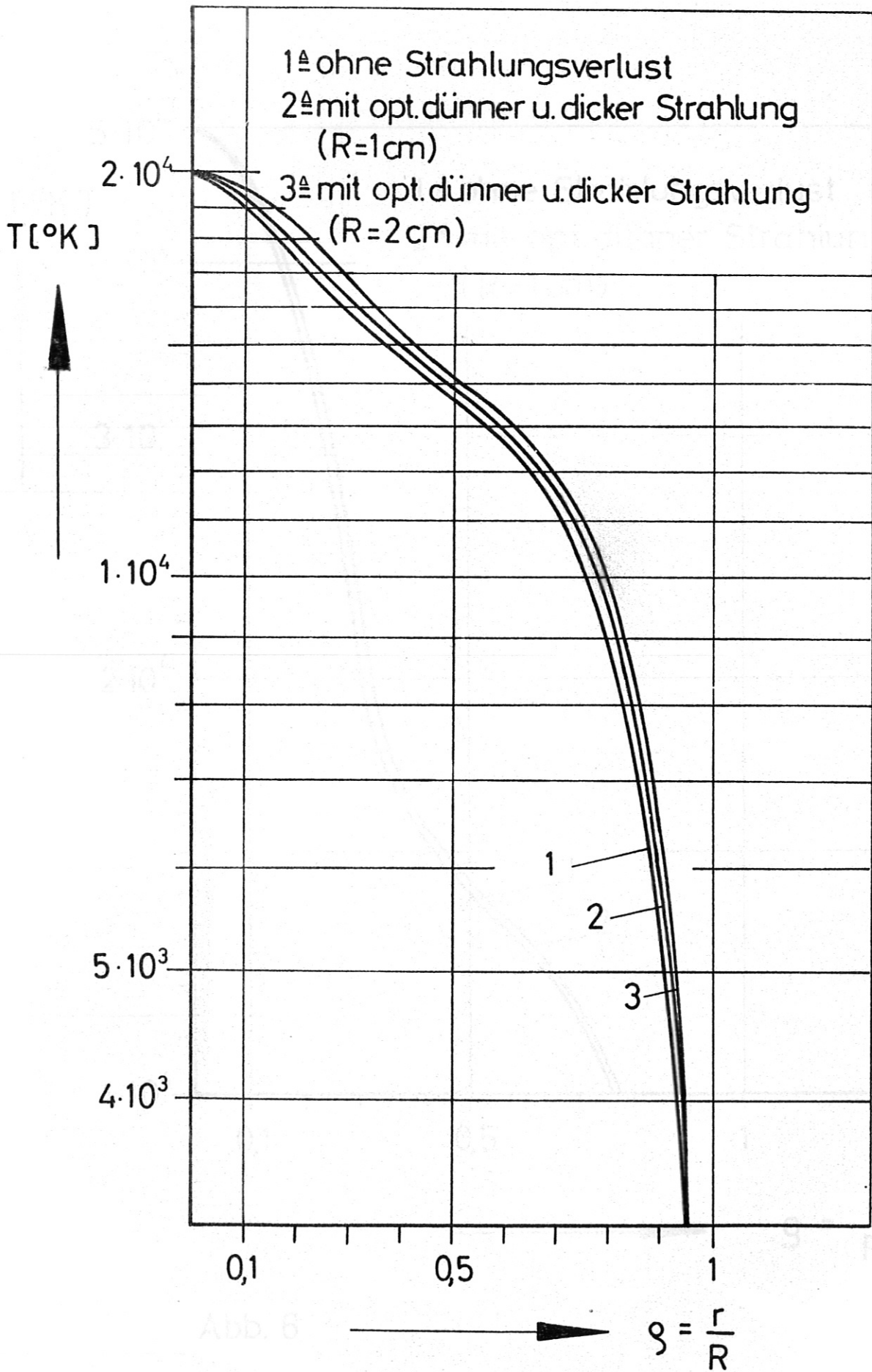


Abb. 5

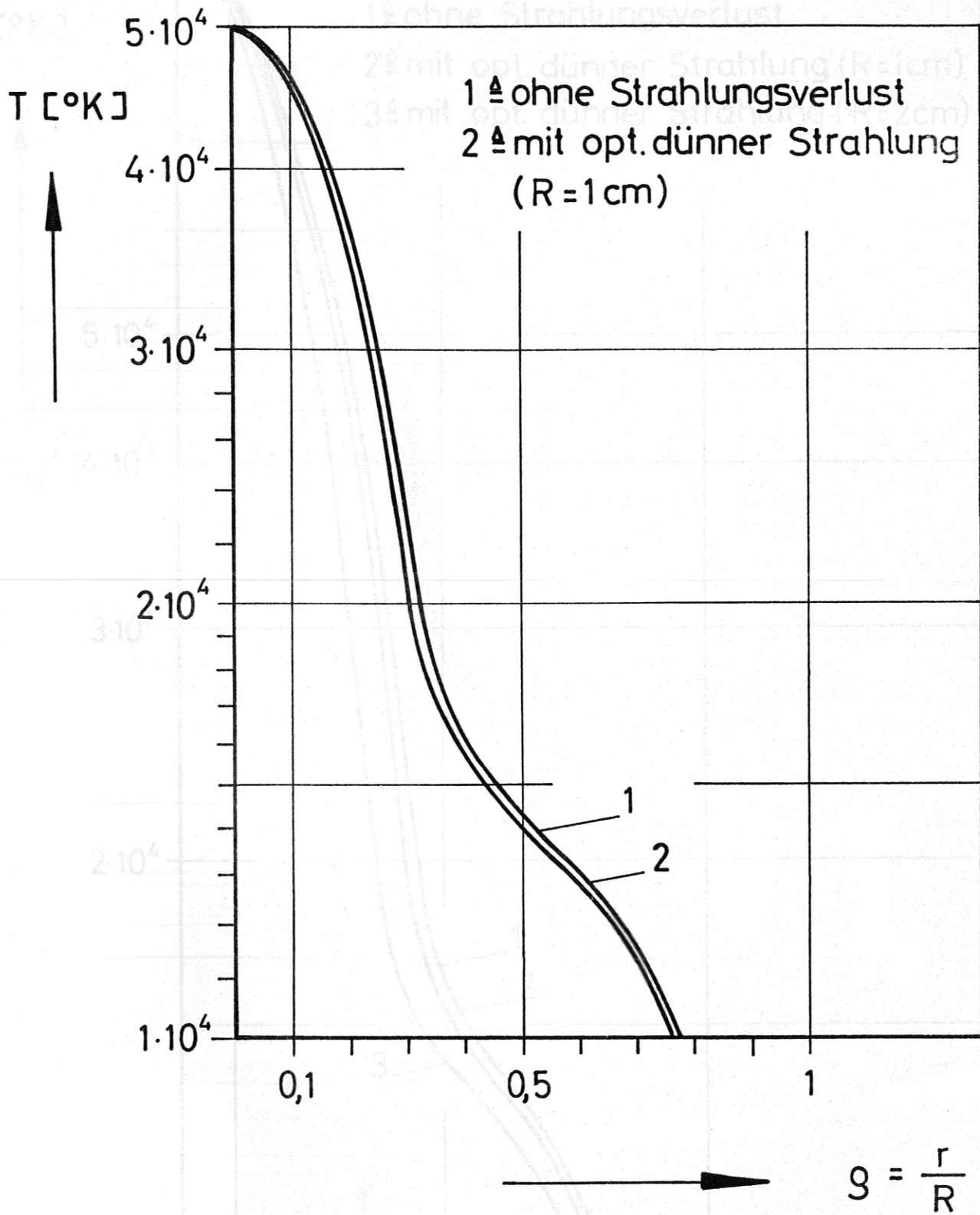


Abb. 6

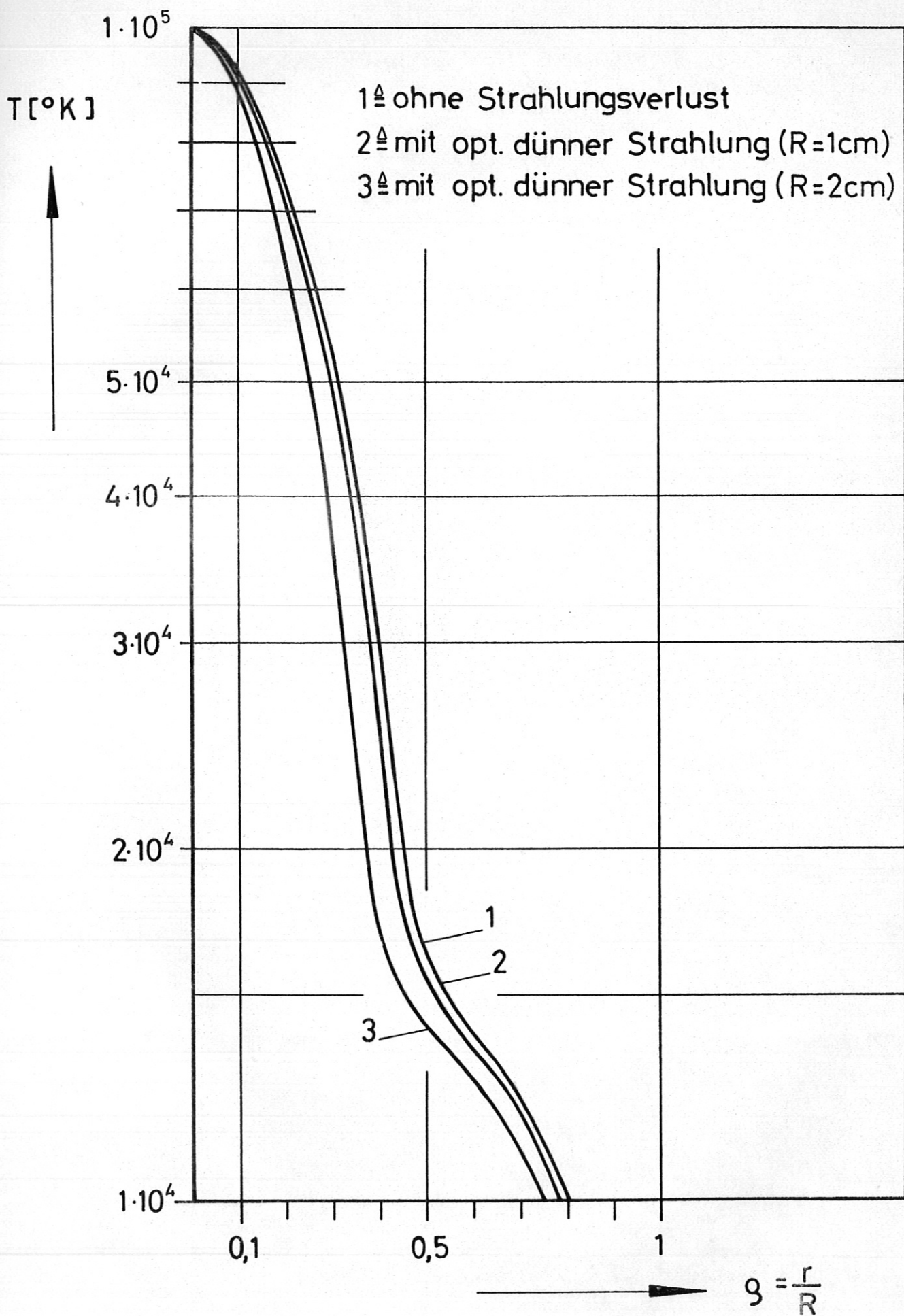


Abb. 7