

Reaktionswärmeleitfähigkeit von  
Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium  
in einer zylindersymmetrischen Entladung  
mit überlagertem axialen Magnetfeld

R. Wienecke

IPP 3/9

September 1963

**I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K**

**G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N**

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Reaktionswärmeleitfähigkeit von  
Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium  
in einer zylindersymmetrischen Entladung  
mit überlagertem axialen Magnetfeld

R. Wienecke

IPP 3/9

September 1963

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right) + \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right) = - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \quad (1)$$

Man sei vorausgesetzt, daß sich das Gasplasma in  
Ruhe befindet, die Schwerpunktschwindigkeit  $w$  identisch  
verschwindet.

Wenn es gelingt,  $\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right) = - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right)$  zu schreiben, so läßt

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut  
für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die  
Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

## I. Einführung

In einer zylindersymmetrischen Lichtbogensäule wird unter normalen Bedingungen die dem Plasma zugeführte elektrische Energie ganz überwiegend durch Wärmeleitung in radialer Richtung abgeführt. Hierbei spielt neben der auf der Molekularbewegung beruhenden normalen Wärmeleitfähigkeit die Reaktionswärmeleitfähigkeit eine wichtige Rolle. Sie kommt dadurch zustande, daß die in radialer Richtung sich ausbildenden stationären Diffusionsströme von Elektronen und Ionen nach außen und von neutralen Gasatomen nach innen mit einem Enthalpiestrom verbunden sind. So tragen insbesondere die nach außen diffundierenden Ionen die Ionisierungsenergie des Mutteratoms als potentielle Energie mit sich, die sie bei der Rekombination in kälteren Gebieten in Freiheit setzen, während umgekehrt die nach innen diffundierenden Atome bei ihrer Ionisation dem Plasma mindestens die Ionisierungsenergie entziehen. (Die gleichen Überlegungen gelten naturgemäß auch für das Gebiet der Mehrfachionisation bzw. der Dissoziation). Bezeichnet man mit  $w_e, w_1, w_0$  die Strömungsgeschwindigkeiten von Elektronen, Ionen und Neutralteilchen und mit  $h_e, h_1, h_0$  die Enthalpien pro Gramm der einzelnen Komponenten, so läßt sich der Energiestrom durch Transport von Reaktionsenergie schreiben:

$$w_R = \sum_j \rho_j h_j w_j = -\alpha_R \cdot \text{grad } T \quad (1)$$

$j = e, 1, 0$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß sich das Gesamtplasma in Ruhe befindet, die Schwerpunktsgeschwindigkeit  $w$  identisch verschwindet.

Wenn es gelingt,  $w = -\alpha_R \cdot \text{grad } T$  zu schreiben, so läßt sich in Analogie zur normalen Wärmeleitfähigkeit  $\alpha_K$  die Reaktionswärmeleitfähigkeit  $\alpha_R$  definieren. Der Gesamtenergiestrom ist dann:

$$\mathcal{W}_G = -\alpha_G \cdot \text{grad } T = -(\alpha_K + \alpha_R) \cdot \text{grad } T \quad (2)$$

Überlagert man der Säule des Lichtbogens ein achsenparalleles Magnetfeld, so wird wie in einer vorangehenden Arbeit (1) beschrieben wurde, die Diffusion der Ladungsträger nach außen zunächst gehemmt, während die Neutralteilchen nach innen ungehemmt weiter diffundieren können. Es kommt zu einem Druckanstieg in der Umgebung der Achse der Entladung, bis wieder die nach innen und außen gerichteten Massenströme gleich werden. Die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenströme können sich aber trotzdem verändert haben, sodaß sich andere Werte für die Reaktionswärmeleitfähigkeit ergeben werden. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es die Reaktionswärmeleitfähigkeit in einem teilweise ionisierten Wasserstoff- und Heliumplasma in Abhängigkeit vom Außendruck und vom Überlagerten Magnetfeld zu berechnen. Dabei werden die Bezeichnungen und Ergebnisse der vorangehenden Arbeit zugrunde gelegt.

## II. Allgemeine Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit

Für die Enthalpien der einzelnen Komponenten kann man schreiben:

$$h_e = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_e}$$

$$h_1 = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_o} + \frac{E_1}{m_o} + \frac{D}{2m_o}$$

$$E_1 = \text{Ionisierungsenergie des Atoms} \quad (3)$$

$$h_o = \frac{5}{2} \frac{kT}{m_o} + \frac{D}{2m_o}$$

$$D = \text{Dissoziationsenergie des Moleküls.}$$

Vernachlässigt worden sind die Beiträge der inneren Zustände zur Enthalpie, was bei Atomen und Ionen fast immer gestattet ist. Unter Annahme von Quasineutralität ( $n_1 = n_e$ ) und der Bedingung, daß keine radialen Ströme fließen dürfen:

$$j_r = n_i e (v_{ir} - v_{er}) = 0 \quad (4)$$

$$v_{ir} = v_{er} = v_{Lr} \quad \text{ist mit Gl. (3)}$$

$$\mathcal{D}_r = (5 k T + E_i + \frac{D}{2}) n_i v_{Lr} + (\frac{5}{2} k T + \frac{D}{2}) n_o v_{or} \quad (5)$$

Da die Schwerpunktgeschwindigkeit verschwinden soll, gilt

$$\rho v_r = 0 = \rho_e v_{er} + \rho_i v_{ir} + \rho_o v_{or} = n_i (m_i + m_e) v_{Lr} + n_o m_o v_{or} \quad (6)$$

$$\text{oder mit } m_i + m_e = m_o$$

$$n_o v_{or} = - n_i v_{Lr} \quad (6a)$$

Damit wird:

$$\mathcal{D}_r = (\frac{5}{2} k T + E_i) n_i v_{Lr} = - \alpha_R \text{ grad}_r T \quad (5a)$$

In (I, Gl. 20) war abgeleitet worden:

$$n_i v_{Lr} = \frac{1}{(n_o + n_i)(\epsilon_{i0} + \epsilon_{eo})} \left\{ \frac{1}{e} (\epsilon_{eo} - \frac{m_e}{m_i} \epsilon_{i0}) n_o + \text{grad } \rho_o \right\}$$

Bildet man hiervon die r-Komponente, so ist mit  $j_r = 0$

$$n_i v_{Lr} = \frac{1}{(n_o + n_i)(\epsilon_{i0} + \epsilon_{eo})} \text{ grad}_r \rho_o \quad (7a)$$

Mit Gl. I, 25:

$$I, 25 \text{ grad } \rho_o = \frac{\rho_o}{\rho_i + \rho_o} \text{ grad } \rho - \frac{\rho_o^2}{\rho_i (\rho_i + \rho_o)} \frac{dS}{dT} \cdot \text{grad } T$$

und

$$I, 26 \text{ grad}_r \rho = \frac{n_o^2 e^2 B_z^2 \cdot \frac{dS}{dT} \cdot \text{grad}_r T}{n_i (n_o + n_i)^2 [n_i \epsilon_{ie} [\epsilon_{i0} + \epsilon_{eo}] + n_o \epsilon_{i0} \epsilon_{eo}] + n_i n_o e^2 B_z^2}$$

erhält man für  $n_i v_{Lr}$  den Ausdruck:

$$n_1 \alpha_r = \frac{k T}{(\rho_1 + \rho_0)(\epsilon_{i0} + \epsilon_{e0})\rho_1} \cdot \frac{\rho_0^2}{\rho_1 + \rho_0(1+A)} \cdot \frac{dS}{dT} \cdot \frac{dT}{dr} \quad (7b)$$

mit

$$A = \frac{e^2 Bz^2}{(kT)^2 [\rho_1 \epsilon_{ie} (\epsilon_{i0} + \epsilon_{e0}) + \rho_0 \epsilon_{i0} \cdot \epsilon_{e0}]} \quad (8)$$

Damit kann man für  $\alpha_r$  schreiben:

$$\alpha_r = \frac{(\frac{5}{2} kT + E_1) \cdot kT}{(\rho_1 + \rho_0)(\epsilon_{i0} + \epsilon_{e0}) \cdot \rho_1} \cdot \frac{\rho_0^2}{\rho_1 + \rho_0(1+A)} \cdot \frac{dS}{dT} \cdot \frac{dT}{dr} \quad (5b)$$

oder

$$\alpha_r = \frac{(\frac{5}{2} kT + E_1) \cdot kT}{(\rho_1 + \rho_0)(\epsilon_{i0} + \epsilon_{e0}) \cdot \rho_1} \cdot \frac{\rho_0^2}{\rho_1 + \rho_0(1+A)} \cdot \frac{dS}{dT} \quad (9)$$

Direkt kommt der Einfluß des Magnetfeldes nur im Ausdruck A zur Wirkung. Man muß aber berücksichtigen, daß durch das Magnetfeld der Gesamtdruck  $\rho$  mit wachsender Temperatur ansteigt und dadurch auch die Partialdrücke  $\rho_0$  und  $\rho_1$  verändert werden. Daneben nimmt bei festgehaltener Temperatur der Ionisationsgrad mit wachsendem Druck ab und damit das Verhältnis  $\frac{\rho_0}{\rho_1}$  entsprechend zu. Dies zeigt schon, daß die Verhältnisse recht kompliziert und verwickelt sind und eine einfache Deutung der Wirkung des Magnetfeldes nicht möglich ist. Zu bemerken ist noch, daß die so bestimmte Reaktionswärmeleitfähigkeit nicht nur von der Temperatur und dem angelegten magnetischen Feld sondern auch noch vom Ausendruck  $\rho_A$  (außerhalb der Leitfähigkeitszone) abhängt.

### III. Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit bei Wasserstoff

Zur Bestimmung von  $\alpha_R$  bei Wasserstoff wurden mit Hilfe der in I berechneten Abhängigkeit des Gesamtdruckes von der Temperatur bei gegebenen Werten für den Außendruck  $p_A$  und die angelegte magnetische Induktion  $B_A$  die Partialdrucke  $p_i$  und  $p_o$  in Abhängigkeit von T bestimmt. Die Ionisationsenergie  $E_i$  wurde mit  $E_i = 13,54$  eV.

Für die Reibungskoeffizienten  $\xi_{JK}$  wurden die gleichen Ausdrücke wie in I benutzt. Als Wirkungsquerschnitte wurden verwandt:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n_e^{1/3}} = \frac{2,78 \cdot 10^{-6}}{T^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2 \cdot p_e^{1/3}} \text{ cm}^2$$

$$Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

Mit  $\frac{dS}{dT} = \frac{S}{T} \left( \frac{5}{2} + \frac{E_i}{kT} \right)$  sind die in den Figuren 1 - 4 berechneten Reaktionswärmeleitfähigkeiten berechnet worden.

Fig.1 gibt für verschiedene Außendrucke und einer magnetischen Induktion von 0 kΓ die Abhängigkeit von  $\alpha_R$  mit der Temperatur wieder. Bei hohen Drucken (Fig.1a) sieht man kaum einen Einfluß von B auf den Absolutwert von  $\alpha_R$ . Daß die Maxima sich mit steigendem Druck zu höheren Temperaturen verschieben, hängt mit der Abhängigkeit des Ionisierungsgrades  $\alpha$  vom Druck zusammen. Das Maximum von  $\alpha_R$  wird dort etwa erreicht, wo die Änderung von  $\alpha$  mit der Temperatur maximal ist. Im Druckbereich zwischen  $5 \cdot 10^3$  und  $5 \cdot 10^4$  dyn cm<sup>-2</sup> ist ein deutlicher Einfluß von B auf die Absolutwerte festzustellen. Daß die Maxima von  $\alpha_R$  für kleinere Drücke hier bei höheren Temperaturen liegen - in Fig.2 ist es gerade umgekehrt - kommt durch den Druck-

anstieg im Magnetfeld zustande. ( $p_A$  gibt hier nur den Druck ausserhalb des Leitfähigkeitsbereiches an).

In Fig. 3 sind für die gleichen Aussendrucke die  $\alpha_R$  gegen T aufgetragen. Allerdings beträgt hier die magnetische Induktion  $B_z$  30 k $\Gamma$ . Qualitativ findet man das gleiche Verhalten wie in Fig. 1. Die Absolutwerte sind jedoch für gleiches  $p_A$  niedriger. Dies ist besonders gut in Fig. 4 zu sehen, wo für den Aussendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn  $\text{cm}^{-2}$   $\alpha_R$  über T für verschiedene magnetische Induktionen aufgetragen ist. Man sieht deutlich den Einfluss von B auf  $\alpha_R$ , der jedoch nicht so hoch ist, wie ursprünglich erwartet wurde.

#### IV. Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums

---

Die gleichen Rechnungen wie für Wasserstoff wurden für das einfach ionisierte Helium durchgeführt.

Als Wirkungsquerschnitte wurden hier benutzt:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n_e^{1/3}} = \frac{2,78}{T^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2 p_e^{1/3}} \text{ cm}^2$$

$$Q_{eo} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

$$Q_{io} = 100 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2$$

In Fig. 5 ist die Reaktionswärmeleitfähigkeit für ein Magnetfeld von 10 k $\Gamma$  für die Aussendrucke  $p_A = 5 \cdot 10^3$ ,  $1 \cdot 10^4$ ,  $6 \cdot 10^4$  und  $1 \cdot 10^5$  dyn/cm $^2$  wiedergegeben.

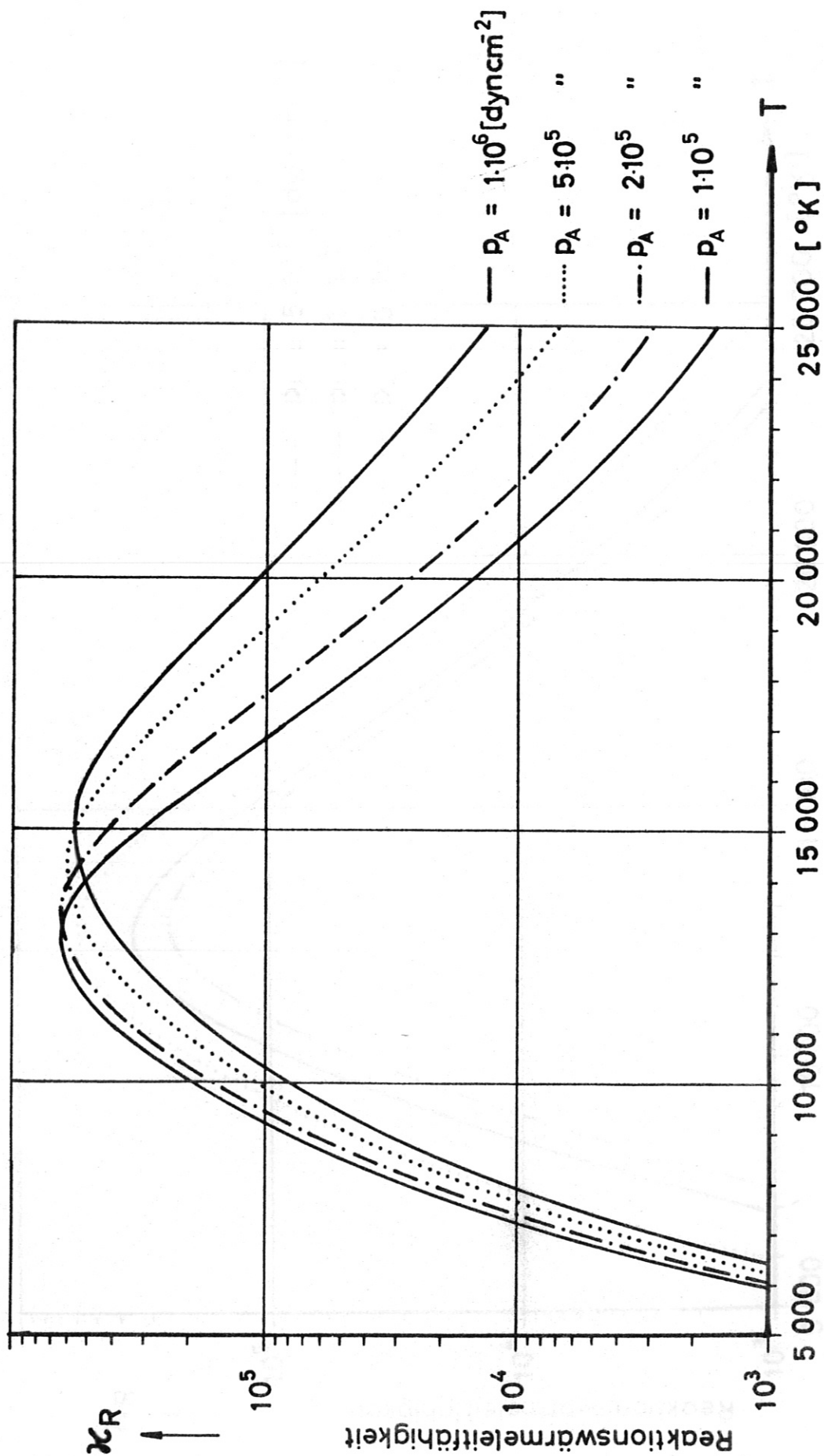
In Fig. 6 ist  $\alpha_R$  für dieselben Aussendrucke bei einem Magnetfeld von 30 k $\Gamma$  dargestellt. Man sieht in beiden Darstellungen, dass die Reaktionswärmeleitfähigkeit bei festem Magnetfeld mit fallendem Druck abnimmt. Die dabei auftretende Verschiebung des Maximums zu höheren Temperaturen wird auch hier durch den sich ausbildenden Druckanstieg hervorgerufen.



In Fig.7 ist für den Aussendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> die Reaktionswärmeleitung für verschiedene Magnetfelder über der Temperatur aufgetragen. Man sieht hier einen starken Einfluss von B. Bei einer Induktion von 50 k $\Gamma$  ist das Maximum von  $\alpha_R$  um fast eine Zehnerpotenz niedriger als bei B=0.

### Literaturverzeichnis

- (1) Laborbericht IPP 3/3, Dezember 1962

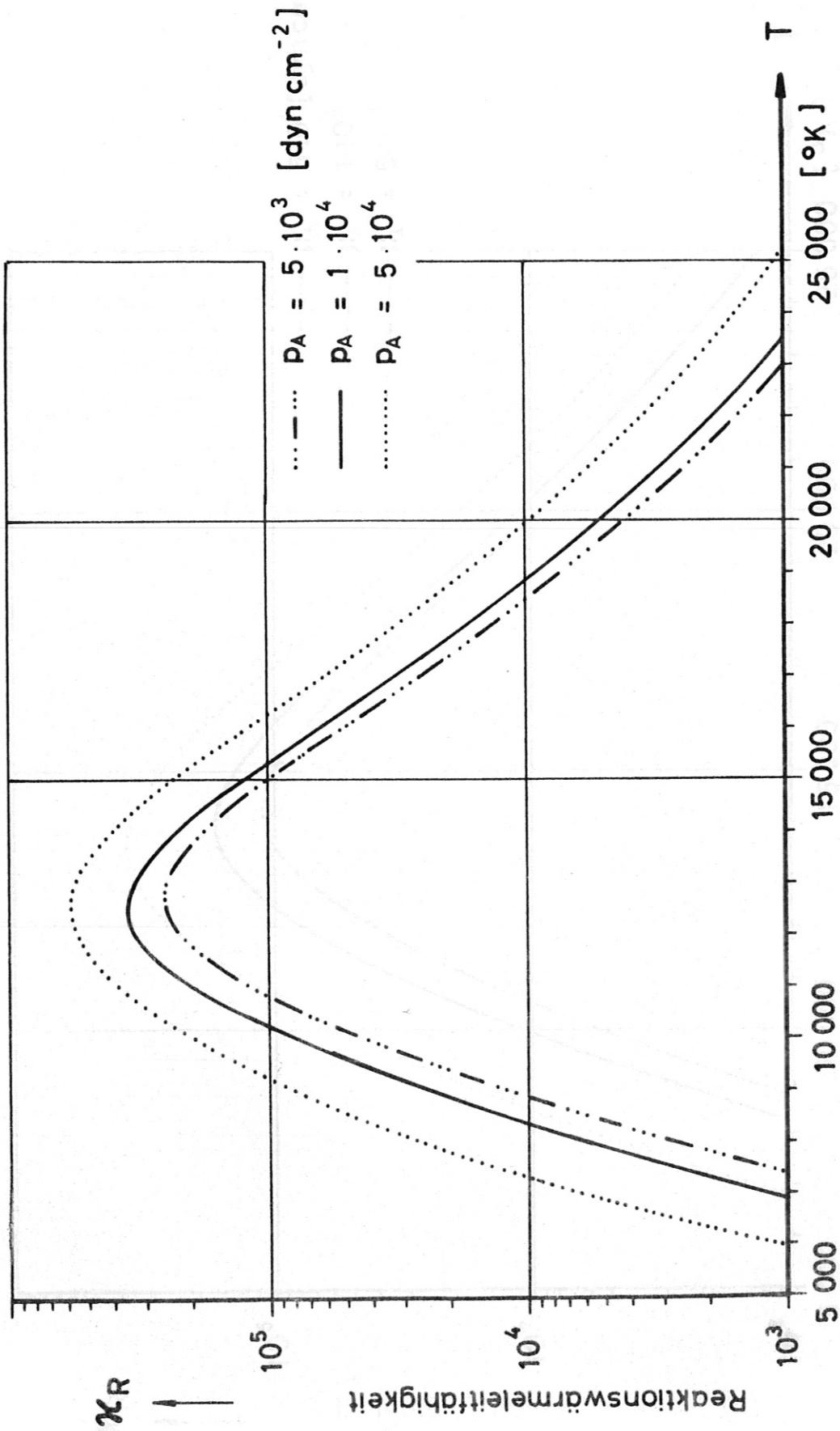


$$Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} [\text{cm}^2]$$

$$Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16}$$

$$B = 10 \text{ kG}$$

FIG.1 Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 10 kGauß

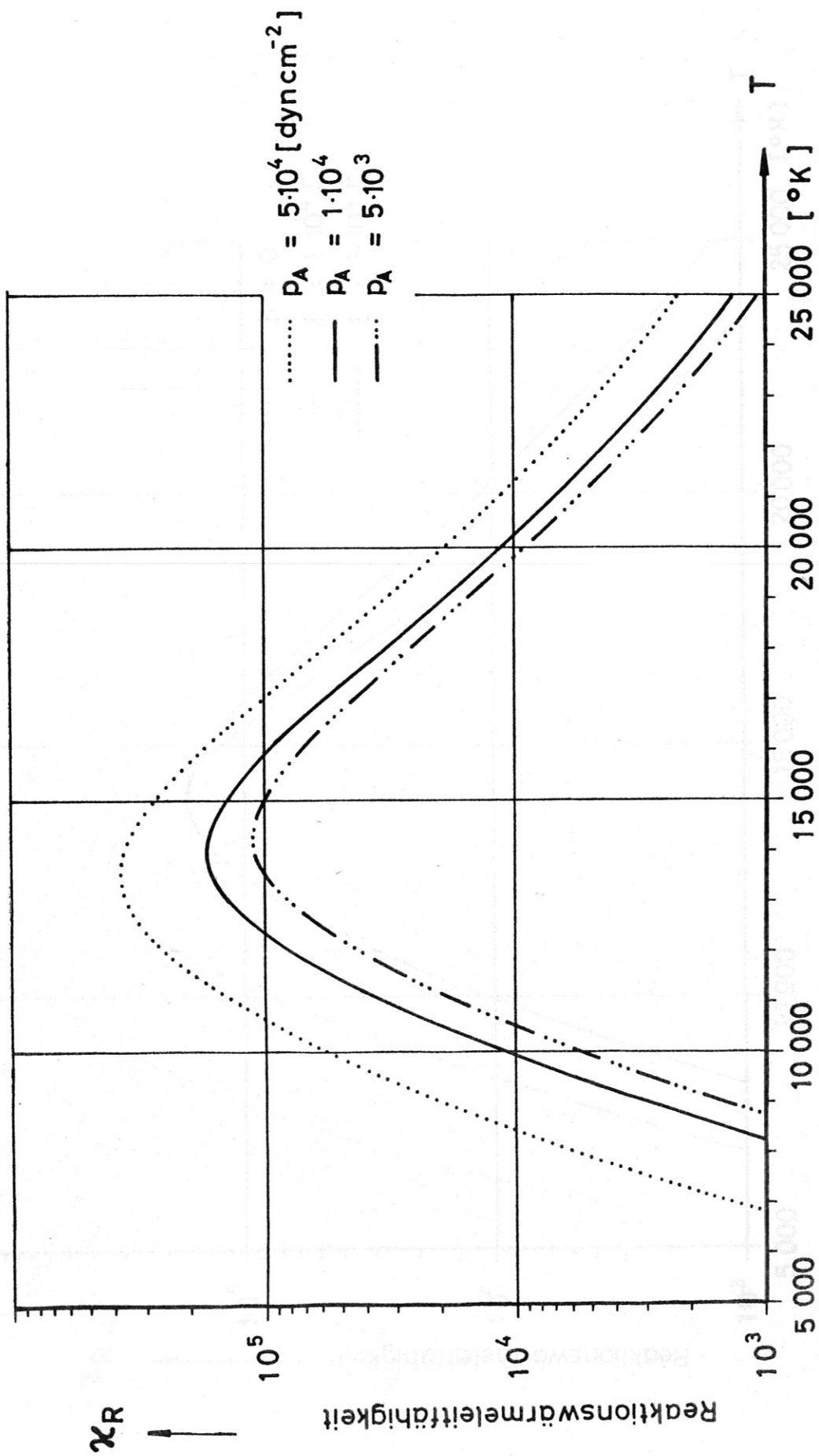


$$Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ [cm}^2 \text{ ]}$$

$$Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16} \text{ "}$$

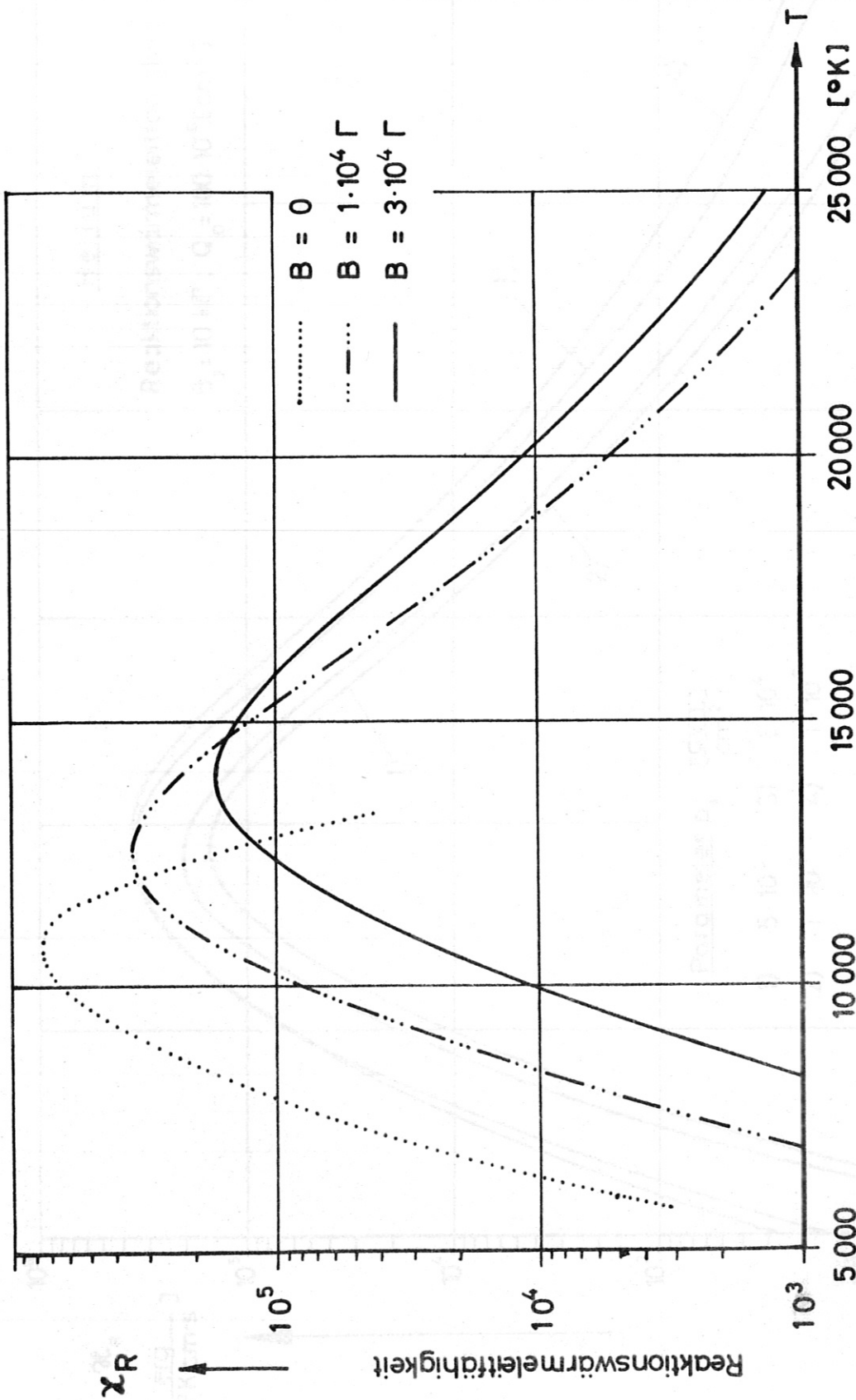
$$B = 10 \text{ k}\Gamma$$

Fig. 2 Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 10 kGauß



$B = 30 \text{ kG}$   
 $Q_{io} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ [cm}^2\text{]}$   
 $Q_{eo} = 120 \cdot 10^{-16}$

Fig. 3 Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 30 kGauß



$P_A = 1 \cdot 10^4 \text{ [dyn cm}^{-2}\text{]}$   
 $Q_{i0} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ [cm}^2\text{]}$   
 $Q_{e0} = 120 \cdot 10^{-16}$

Fig. 4 Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Aussendruck  $P_A = 1 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$  für verschiedene magnetische Induktionen

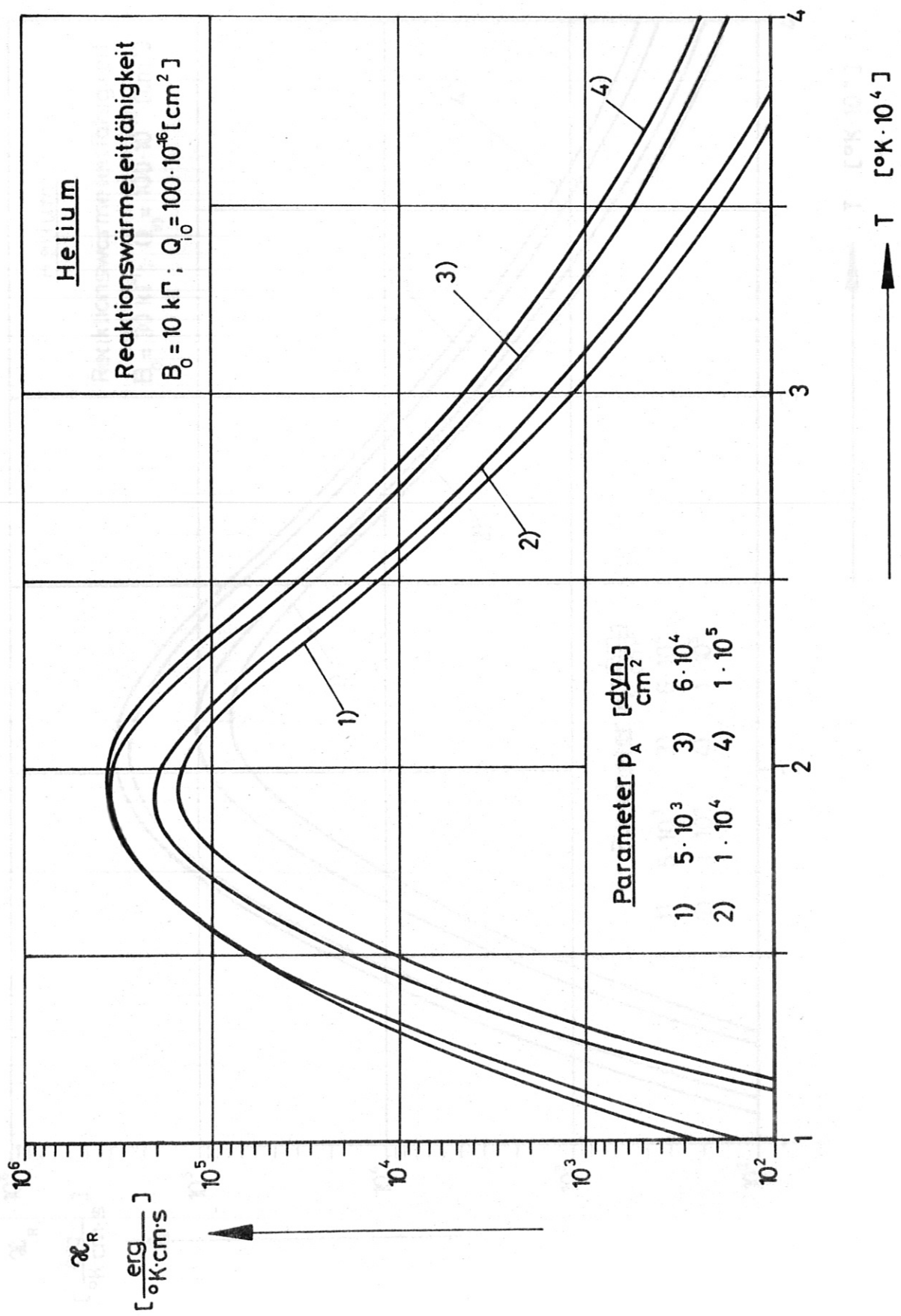


Fig.5 Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Magnetfeld von 10 kGauß

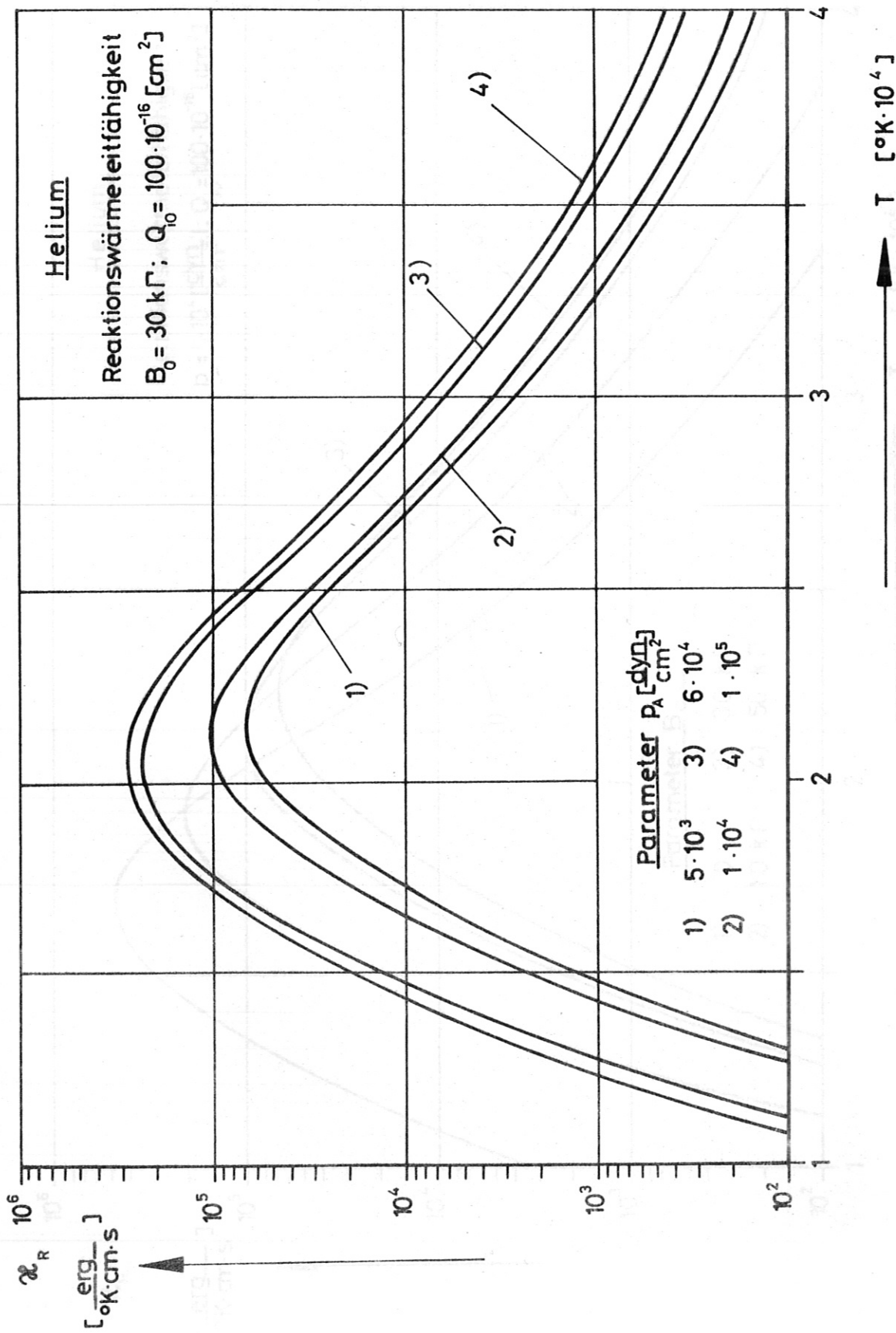


Fig. 6 Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Magnetfeld von 30 kGauß

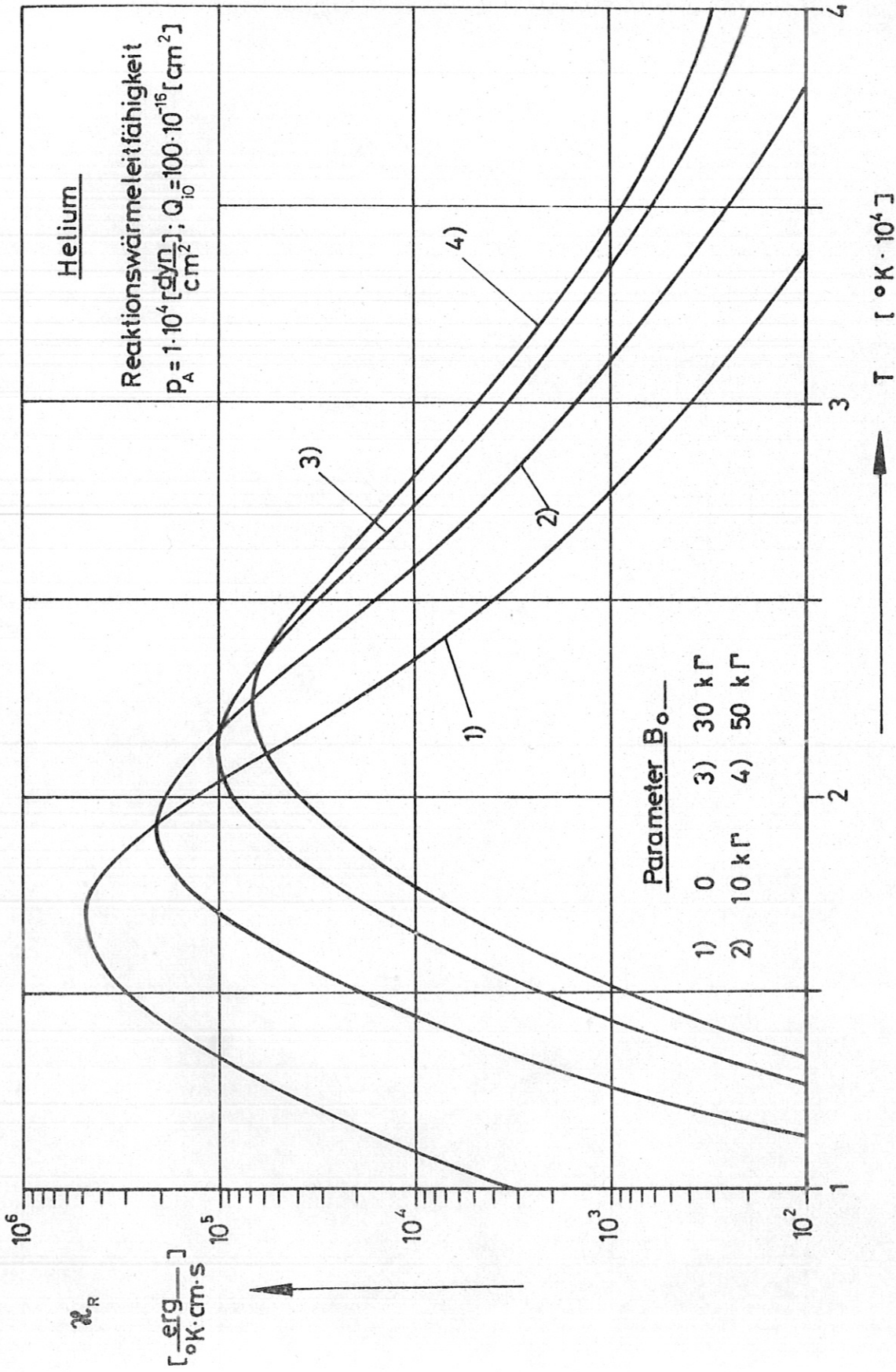


FIG. 7 Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Aussendruck  $P_A = 1 \cdot 10^4 \text{ dyn/cm}^2$  bei verschiedenen Magnetfeldern