

Eindimensionale Plasmaströmung
in gekreuzten elektrischen und
magnetischen Feldern.

E. Rebhan

IPP 3/6

Juni 1963

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Eindimensionale Plasmaströmung in gekreuzten elektrischen und magnetischen Feldern.

E. Rebhan

IPP 3/6

Juni 1963

Die Arbeit behandelt die stationäre Rohrströmung ionisierter Gase quer zu den Kraftlinien elektromagnetischer Felder. Wechselwirkungen zwischen der Strömung und den Feldern führen zu einer Reihe von Stoßfeldern. Dabei kommt der Schallgeschwindigkeit eine dominierende Rolle zu, sie trennt, als wesentlich unterschieden, die Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit von denen mit Überschallgeschwindigkeit. Jene werden im allgemeinen beschleunigt, diese gebremst, bei geeigneter Kombination der zueinander verhältnissmäßig elektrischen und magnetischen Felder können sich die Verhältnisse aber auch umkehren. Das praktische Interesse wird hauptsächlich bei jenen Strömungen liegen, die zu hohen Gasgeschwindigkeiten und zu hohen Temperaturen führen. Im letzten Fall ist es besonders günstig, das Gas zuerst stark zu beschleunigen und dann seine kinetische Energie in einem Stoß in thermische zu verwandeln. Diese Möglichkeit wird in Abschnitt 8 untersucht, Abschnitt 7 bringt die hierzu erforderlichen Stoßbedingungen.

In Abschnitt 1 - 4 werden die Grundbeziehungen zusammengestellt, mit denen sich der Strömungsverlauf diskutieren läßt. Abschnitt 5 bringt alle Lösungen ohne Singularitäten. Für diese bildet die Schallgeschwindigkeit eine Grenze, die nicht unter- und nicht überschritten werden kann. Im Gegensatz dazu gehen die in Abschnitt 6 diskutierten Lösungen stetig durch die Schallgeschwindigkeit. Besonders wichtig ist hier der als "elektromagnetische Lavaldüse" behandelte Spezialfall der Beschleunigung von Unter- auf Überschall. Hierzu wurde ein praktisches Beispiel gerechnet (Anhang III). Schließlich bilden die in Abschnitt 8 behandelten stehenden Stöße eine zweite Möglichkeit für einen Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit, diesmal in einem unstetigen Vorgang. In Abschnitt 9 wird gezeigt, wie man durch Maßstabveränderung aus einer bekannten Lösung eine ganze Schar weiterer Lösungen gewinnen kann.

Anhang I bringt eine Abschätzung für die Wirkung des Streufelds am Rande des Magneten, Anhang II eine thermodynamische Umrechnung.

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Übersicht

Die Arbeit behandelt die stationäre Rohrströmung ionisierter Gase quer zu den Kraftlinien elektromagnetischer Felder. Wechselwirkungen zwischen der Strömung und den Feldern führen zu einer Reihe von Strömungsbildern. Dabei kommt der Schallgeschwindigkeit eine dominierende Rolle zu, sie trennt, als wesentlich unterschieden, die Strömungen mit Unterschallgeschwindigkeit von denen mit Überschallgeschwindigkeit. Jene werden im allgemeinen beschleunigt, diese gebremst, bei geeigneter Kombination der zueinander senkrechten elektrischen und magnetischen Felder können sich die Verhältnisse aber auch umkehren. Das praktische Interesse wird hauptsächlich bei jenen Strömungen liegen, die zu hohen Gasgeschwindigkeiten und zu hohen Temperaturen führen. Im letzten Fall ist es besonders günstig, das Gas zuerst stark zu beschleunigen und dann seine kinetische Energie in einem Stoß in thermische zu verwandeln. Diese Möglichkeit wird in Abschnitt 8 untersucht, Abschnitt 7 bringt die hierzu erforderlichen Stoßbedingungen.

In Abschnitt 1 - 4 werden die Grundbeziehungen zusammengestellt, mit denen sich der Strömungsverlauf diskutieren läßt. Abschnitt 5 bringt alle Lösungen ohne Singularitäten. Für diese bildet die Schallgeschwindigkeit eine Grenze, die nicht unter- und nicht überschritten werden kann. Im Gegensatz dazu gehen die in Abschnitt 6 diskutierten Lösungen stetig durch die Schallgeschwindigkeit. Besonders wichtig ist hier der als "elektromagnetische Lavaldüse" behandelte Spezialfall der Beschleunigung von Unter- auf Überschall. Hierzu wurde ein praktisches Beispiel gerechnet (Anhang III). Schließlich bilden die in Abschnitt 8 behandelten stehenden Stöße eine zweite Möglichkeit für einen Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit, diesmal in einem unstetigen Vorgang. In Abschnitt 9 wird gezeigt, wie man durch Maßstabveränderung aus einer bekannten Lösung eine ganze Schar weiterer Lösungen gewinnen kann.

Anhang I bringt eine Abschätzung für die Wirkung des Streufelds am Rande des Magneten, Anhang II eine thermodynamische Umrechnung.

1. Zur Geometrie der Anordnung.

Inhaltsverzeichnis

Rohrquerschnitt

Schraffuransicht

Polschuh

	Seite:
1. Zur Geometrie der Anordnung	1
2. Ansatz und Grundgleichungen	2
3. Diskussion der Anfangs- und Randwerte	6
4. Strömungsgleichung für v und T, Fallunterscheidungen	8
5. Stetige Unter- und Überschallströmungen	11
1. Fall $E = 0$	11
2. Fall $E < 0$	14
3. Fall $E > 0$	15
6. Stetiger Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit	18
7. Stoßbedingungen und Rolle der Schallgeschwindigkeit	24
8. Stehende Stöße	26
9. Ähnlichkeitstransformationen.	30

Anhang: I	Das Streufeld	33
II	Umrechnung für ds und dT	36
III	Numerisches Beispiel zur "elektromagnetischen Lavaldüse".	38

Die experimentelle Anordnung, an die gedacht ist, besteht aus einem nichtleitenden Rohr quadratischen Querschnitts, einem Elektromagneten und aus zwei leitfähigen Metallplatten, die ein Stück weit die Wandung zweier Gegenseiten des Rohres bilden. Über einen Widerstand R bzw. eine Batterie sind diese leitend verbunden. In dem Raum zwischen den Metallplatten erzeugt der Magnet ein homogenes Feld (z-Richtung), sodaß die Plasmastromung aus einem feldfreien Gebiet vor x_1 senkrecht in gekreuzte elektrische und magnetische Felder hineinfließt.

Infolge induzierter Ströme und elektromagnetischer Kräfte kommt es zur Wechselwirkung zwischen den Feldern und der Strömung. Die Verhältnisse sind gerade so gewählt, daß

1. Zur Geometrie der Anordnung.

Rohrquerschnitt

Schrägansicht

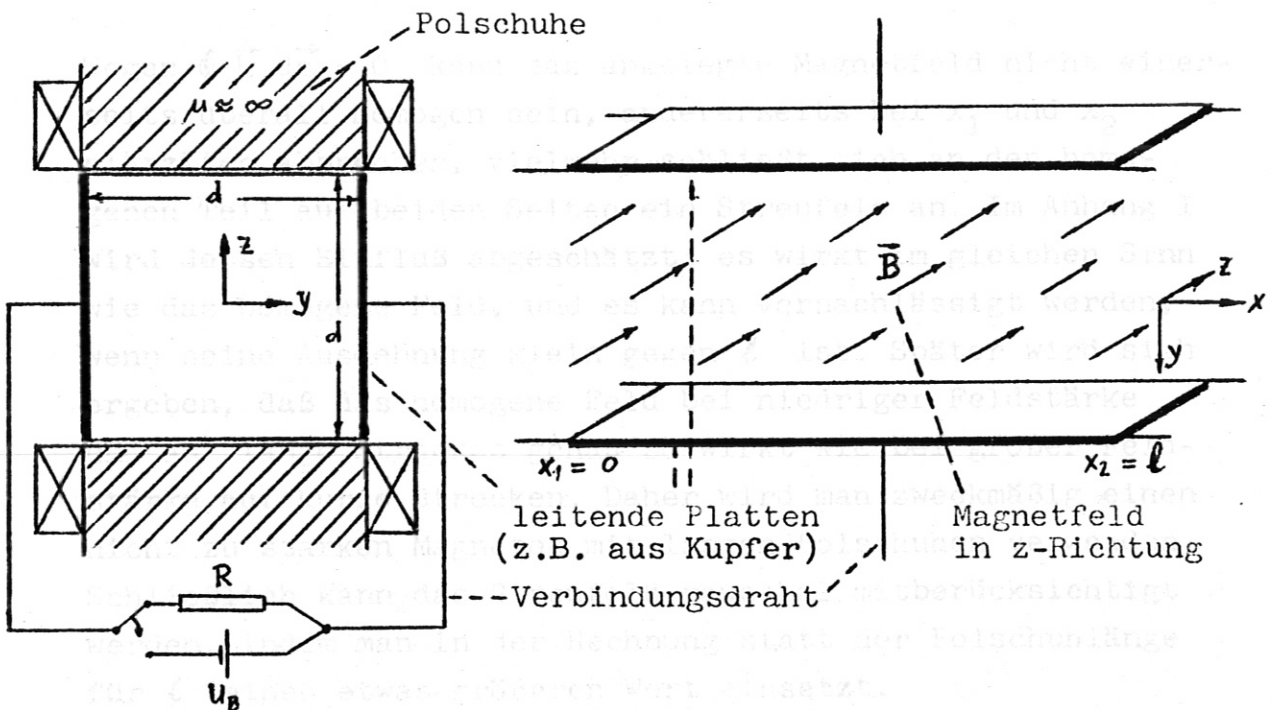


Fig. 1

Die experimentelle Anordnung, an die gedacht ist, besteht aus einem nichtleitenden Rohr quadratischen Querschnitts, einem Elektromagneten und aus zwei leitfähigen Metallplatten, die ein Stück weit die Wandung zweier Gegenseiten des Rohres bilden. Über einen Widerstand R bzw. eine Batterie sind diese leitend verbunden. In dem Raum zwischen den Metallplatten und parallel zu diesen erzeugt der Magnet ein homogenes Feld (z -Richtung), sodaß die Plasmaströmung aus einem feldfreien Gebiet vor x_1 senkrecht in gekreuzte elektrische und magnetische Felder hineinläuft.

Infolge induzierter Ströme und elektromagnetischer Kräfte kommt es zur Wechselwirkung zwischen den Feldern und der Strömung. Die Verhältnisse sind gerade so gewählt, daß

diese Kräfte auf eine ebene Strömung in Flußrichtung wirken und sie daher eben lassen: \vec{j} fließt zwischen den Kupferplatten in y-Richtung, das durch \vec{j} induzierte Magnetfeld hat wie das angelegte Feld die z-Richtung, und $\vec{j} \times \vec{B}$ hat daher x-Richtung.

Wegen $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$ kann das angelegte Magnetfeld nicht einerseits überall homogen sein, andererseits bei x_1 und x_2 plötzlich abbrechen, vielmehr schließt sich an den homogenen Teil auf beiden Seiten ein Streufeld an. Im Anhang I wird dessen Einfluß abgeschätzt: es wirkt im gleichen Sinn wie das homogene Feld, und es kann vernachlässigt werden, wenn seine Ausdehnung klein gegen ℓ ist. Später wird sich ergeben, daß das homogene Feld bei niedriger Feldstärke und auf lange Strecken genau so wirkt wie bei großer Feldstärke auf kurze Strecken. Daher wird man zweckmäßig einen nicht zu starken Magneten mit langen Polschuhen verwenden. Schließlich kann das Streufeld pauschal mitberücksichtigt werden, indem man in der Rechnung statt der Polschuhlänge für ℓ einen etwas größeren Wert einsetzt.

2. Ansatz und Grundgleichungen.

Zur mathematischen Behandlung wird ein eindimensionales Modell benutzt, bei dem alle Größen nur von x abhängen und seitliche Begrenzungen ins Unendliche gerückt sind. Die Randbedingungen sind wie bei der endlichen Anordnung zu stellen. Eine in x-Richtung quadratisch herausgeschnittene Strömungsröhre entspricht dann angenähert den experimentellen Gegebenheiten.

Da nur stationäre Lösungen gesucht werden, entfällt zeitliche Abhängigkeit. Reibung und Wärmeleitung werden ver-

nachlässigt, als Ohmsches Gesetz wird benutzt:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Dieser Ansatz ist vernünftig, solange die Gyrationfrequenz der Elektronen klein bleibt gegenüber der Stoßfrequenz zwischen Elektronen und Ionen [6].

Weiter wird angenommen, daß das Plasma quasineutral ist. Seine Leitfähigkeit ist endlich und hängt von Druck und Temperatur ab. Über sein thermodynamisches Verhalten werden im allgemeinen keine speziellen Annahmen gemacht, alles Weitere gilt deshalb, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, auch bei nicht vollständiger Ionisation.

Der elektrische Strom fließt außer im Plasma auch längs der Metallplatten, sodaß in x-Richtung ein Potentialgefälle zu erwarten ist. Bedenkt man aber, daß z.B. die Leitfähigkeit von Kupfer fast 10^3 mal größer ist als die eines Gases der in Frage kommenden Temperaturen, so kann man die Kupferplatten praktisch als Äquipotentialflächen behandeln. Im mathematischen Modell wird die Feldstärke daher als Konstante angesetzt.

Für Geschwindigkeit \vec{v} , Stromdichte \vec{j} , Magnetfeld \vec{B} und elektrisches Feld \vec{E} versucht man nun den Ansatz:

$$\vec{v} = \{v(x), 0, 0\}, \quad \vec{j} = \{0, j(x), 0\}, \quad \vec{B} = \{0, 0, B(x)\}, \\ \vec{E} = \{0, E, 0\}, \quad E = \text{const.}$$

Die Annahme $\vec{B} = \{0, 0, B(x)\}$ bedarf noch einer näheren Erläuterung. \vec{B} setzt sich zusammen aus dem angelegten homogenen Feld \vec{B}_a in z-Richtung und einem durch \vec{j} induzierten Feld \vec{B}_i : $\vec{B} = \vec{B}_a + \vec{B}_i$. Das zu der obigen Stromverteilung "passende" Magnetfeld bestimmt sich im Prinzip durch die Lösung einer Potentialgleichung und wird erst durch die Vorgabe von Randwerten eindeutig festgelegt. Mit dem Ansatz

$\vec{B} = \{0, 0, B(x)\}$ ist über diese Randwerte schon verfügt:
 \vec{B} hat nur eine z-Komponente und mündet daher senkrecht auf den Rändern, d.h. den Magnetpolschuhen. Wegen $\text{div } \vec{B} = 0$ sind die Feldlinien in deren Inneres stetig fortzusetzen, andererseits gilt dort auch:

$$\text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu} = \vec{j} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dx} \frac{B(x)}{\mu} = -j(x),$$

und das Innere des Magneten kann nur stromfrei sein, wenn $\mu = \infty$ ist.

Zum Ansatz hinzu tritt noch die Bedingung: die vertikalen Begrenzungen des Magnetfeldes müssen unendliche Permeabilität haben (Weicheisenpolschuhe).

Ausdrücklich wird angemerkt, daß ohne diese Zusatzbedingung der Ansatz nicht mehr gilt. B_z kann dann auch x-Komponenten haben, und diese können an den Rändern die z-Komponente sogar überwiegen [8]. Auch in diesem Fall läßt sich das Problem der ebenen Plasmaströmung behandeln, allerdings nur, solange das induzierte Magnetfeld vernachlässigt werden darf [9].

Der Ansatz muß die folgenden Gleichungen erfüllen:

a) Massen-, Impuls- und Energiebilanz [1], $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\text{div } \rho \vec{v} = 0,$$

$$\rho(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = -\text{grad } p + \vec{j} \times \vec{B},$$

$$\rho \vec{v} \text{ grad} \left(h + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad *).$$

$h = h(\rho, p)$ ist die spezifische Enthalpie des Gases.

Eine Bemerkung zum Energiesatz: sind \vec{j} und \vec{E} parallel, so wird dem Gas Energie zugeführt, sind sie antiparallel, so wird Energie entzogen.

*) $\vec{j} \cdot \vec{E}$ ist die gesamte Energiezufuhr durch die Felder. Mit $\vec{E} = \vec{j} / \sigma - \vec{v} \times \vec{B}$ aus c) läßt sich dafür schreiben: $\vec{j} \cdot \vec{E} = j^2 / \sigma + \vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$. Nach dem Impulssatz ist $\vec{v} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})$ der Beitrag zur kinetischen Energie, daher sind die Ohmschen Verluste j^2 / σ der (stets positive) Beitrag zur inneren Energie des Gases.

b) die Maxwell'schen Gleichungen:

Von ihnen bleibt nur $\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j}$,

alle übrigen sind durch den Ansatz von selbst befriedigt.

c) Ohmsches Gesetz: $\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$.

Der Ansatz liefert:

für b) $B' = -\mu j$

und damit für a) $(\rho v)' = 0$,

$$\rho v v' + p' + \frac{B}{\mu} B' = 0,$$

$$\rho v \left(h + \frac{v^2}{2} \right)' + \frac{EB'}{\mu} = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen kann man sofort integrieren und erhält mit den Integrationskonstanten, F, P und W:

$$\rho v = F, \tag{1}$$

$$Fv + p + \frac{B^2}{2\mu} = P, \tag{2}$$

$$F \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + \frac{EB}{\mu} = W. \tag{3}$$

Gl.b) wird mit dem Ohmschen Gesetz kombiniert und liefert:

$$B' = \mu \sigma (vB - E). \tag{4}$$

Gl.(1)-(4) sind aufzufassen als die Grundgleichungen des vorliegenden Problems. Es sind gerade 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten v, B, ρ, p. Das elektrische Feld E spielt dabei neben F, P und W die Rolle eines Parameters.

$$j = \frac{U_B - E_d}{R_B} \tag{5}$$

(R_B = Innenwiderstand der Batterie)

3. Diskussion der Anfangs- und Randwerte.

Nach ihrer Integration bildet Gl.(4) zusammen mit (1)-(3) das Integrationsergebnis von 4 gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Daher sind die Lösungen von (1)-(4) im allgemeinen eindeutig festgelegt, wenn man die 4 Anfangswerte v_1, B_1, ρ_1, p_1 und außerdem natürlich den Parameter E vorgibt. (Ausnahme s. Abschnitt 8).

Nun lassen sich physikalisch zwar nicht B_1 und E einstellen, sondern das angelegte Magnetfeld B_a und die EMK U_B der Batterie bzw. der Widerstand R. Kennt man aber die Lösung zu den oben genannten Parametern, so lassen sich B_a und U_B bzw. R nachträglich berechnen, und das eigentlich vorliegende Randwertproblem ist umgangen.

Die Formeln, nach denen das geschehen kann, werden jetzt abgeleitet. U_B werde positiv gerechnet, wenn sie in y-Richtung abfällt. Der gesamte im Plasma fließende Strom ist

$$J = \int \vec{j} \, d\vec{f} ,$$

wobei über die Fläche einer Kupferplatte zu integrieren ist.

Mit $\vec{j} = \text{rot } \frac{\vec{B}}{\mu}$ ergibt dies:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{\mu} \oint \vec{B} \, ds \\ &= \frac{d}{\mu} (B_1 - B_2) . \end{aligned} \quad (5)$$

Dies ist derselbe Strom, der über die Batterie bzw. den Widerstand R fließt. Da die Spannung E_d der beiden Kupferplatten auch über den Außenkreis abfällt, gilt dort

$$J = \frac{U_B - E_d}{R_B} , \quad (6)$$

(R_B = Innenwiderstand der Batterie)

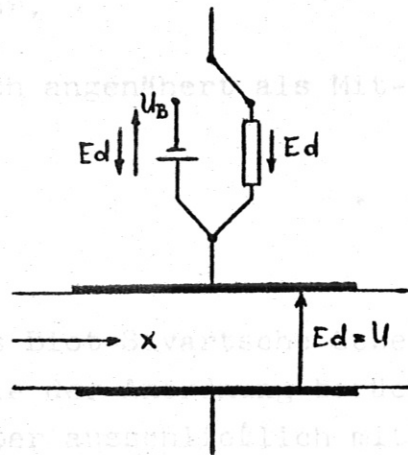


Fig. 2

und der Vergleich von (5) und (6) ergibt:

$$\frac{U_B - Ed}{R_B} = \frac{d}{\mu} (B_1 - B_2) \quad (7)$$

Befindet sich im Außenkreis der Widerstand R , so ist hierin $U_B = 0$ und $R_B = R$ zu setzen. (7) erlaubt die nachträgliche Berechnung von U_B bzw. R .

Mit $U = Ed = U_B - \frac{R_B d}{\mu} (B_1 - B_2)$ aus (7) und mit (5) ergibt sich übrigens sofort eine Formel für die dem Gas zugeführte Leistung $L = U J$:

$$L = \frac{U_B d}{\mu} (B_1 - B_2) - R_B d^2 \left(\frac{B_1 - B_2}{\mu} \right)^2 \quad (8a)$$

Befindet sich im Außenkreis der Widerstand R , so gilt:

$$L = - R d^2 \left(\frac{E_1 - B_2}{\mu} \right)^2 \quad (8b)$$

und die Anordnung wirkt als Generator.

Das angelegte Magnetfeld B_a läßt sich angenähert als Mittelwert von B_1 und B_2 berechnen:

$$B_a = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) \quad (9)$$

Für ein exakteres Ergebnis müßte das Biot-Savartsche Gesetz herangezogen und die genaue Geometrie der Anordnung berücksichtigt werden. Im Weiteren wird aber ausschließlich mit B_1 gerechnet, und für experimentelle Zwecke ist in Anbetracht der übrigen Näherungen eine höhere Genauigkeit als die von (9) kaum lohnend.

Bewiesen wird diese Gleichung in Anhang IIa. Sie enthält noch keinerlei Annahmen über den vorliegenden Spezialfall. Berechnet man nun dp und dq aus (1) - (3) und setzt das Ergebnis in (11) ein, so bedeutet Tds diejenige Entropieänderung, die eine kleine Gasmenge auf einem kurzen Stück ihres Stromangeleges erfährt.

4. Strömungsgleichungen für v und T, Fallunterscheidungen.

Kennt man den funktionalen Zusammenhang zwischen h , p und ρ , so läßt sich das System (1) - (4) im Prinzip nach einer Unbekannten auflösen und die entstehende Differentialgleichung integrieren. Aber selbst der einfachste Fall vollständiger Ionisation ($h = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} + \text{const}$) mit der zusätzlichen Annahme konstanter Leitfähigkeit führt auf elliptische Integrale aller drei Gattungen. Es gelingt jedoch auch ohne Integration, die Lösungen zu diskutieren. Der im Folgenden eingeschlagene Weg bietet zusätzlich den Vorteil, daß auf spezielle Annahmen über die Funktion $h(p, \rho)$ verzichtet wird. Die damit verbundene Unkenntnis kann in die Materialkoeffizienten des Gases gesteckt werden, von denen nur das nach thermodynamischen Gesetzen bekannte Vorzeichen interessieren wird.

Mit

$$dh = T ds + \frac{dp}{\rho} \quad (10)$$

wird in (3) auf die spezifische Entropie übergegangen. Bei Änderungen von p und ρ befolgt diese die Gleichung:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho} dp + \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right)_{p} d\rho$$

Dafür läßt sich auch schreiben:

$$Tds = \frac{c}{\rho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}} \cdot \left(\frac{dp}{c^2} - d\rho \right) \quad (11)$$

$$(c = \text{Schallgeschwindigkeit, } \gamma = \frac{c_p}{c_v})$$

Bewiesen wird diese Gleichung in Anhang IIa. Sie enthält noch keinerlei Annahmen über den vorliegenden Spezialfall. Berechnet man nun dp und $d\rho$ aus (1) - (3) und setzt das Ergebnis in (11) ein, so bedeutet Tds diejenige Entropieänderung, die eine kleine Gasmenge auf einem kurzen Stück ihres Strömungsweges erfährt.

$$\text{aus (1):} \quad dp = - \frac{\rho}{v} dv \quad , \quad (12)$$

$$\text{aus (2):} \quad Fdv + dp = - \frac{B}{\mu} dB \quad , \quad (13)$$

$$(3) \text{ mit (10):} \quad Tds + \frac{1}{\rho} (dp + Fdv) = - \frac{E}{\mu F} dB \quad . \quad (14)$$

Aus (13) und (14) kann dB eliminiert werden:

$$dp = - \rho v dv - \frac{\rho v B}{vB-E} T ds \quad . \quad (15)$$

(12) und (15) in (11) eingesetzt ergibt schließlich:

$$Tds = c \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}} \frac{(1 - \frac{v^2}{c^2})(vB-E)}{(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}})vB-E} \frac{dv}{v} \quad . \quad (16)$$

Setzt man andererseits (13) in (14) und benutzt jetzt auch Gl.(4) mit $dB = \mu \delta(vB-E)dx$, so erhält man:

$$Tds = \frac{\delta}{F} (vB - E)^2 dx \quad . \quad (17)$$

(17) zeigt, daß die Entropie des Gases im Strömungsverlauf stets zunimmt. (Der Spezialfall $E = vB = \text{const}$ bedeutet ungestörte Strömung und daher gleichbleibende Entropie). Um ein thermodynamisch abgeschlossenes System zu erhalten, müssen nun auch die Batterie bzw. der äußere Widerstand R mit in die Betrachtung einbezogen werden. In beiden kann die Entropie jedoch nur zunehmen, denn entweder wird in ihnen elektrische Energie in Wärme umgewandelt und die Behauptung versteht sich von selbst, oder aber die Batterie gibt Arbeit an das Gas ab und die Richtigkeit der Behauptung folgt aus der Bemerkung, daß Arbeitsabgabe einen adiabatischen Prozeß bedeutet. Insgesamt nimmt also die Entropie des Systems zu und man hat das Ergebnis: die stationäre Durchströmung eines Magnetfeldes bzw. gekreuzter elektrischer und magnetischer Felder ist irreversibel.

Eine Interpretation findet dieses Ergebnis, wenn man in (17)

$j = \sigma (E - vB)$ einführt und $F = \rho v = \rho \frac{dx}{dt}$ einsetzt:

$$Tds = \frac{j^2}{\sigma} \cdot \frac{dx}{F} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{j^2}{\sigma} \right) dt$$

$\frac{j^2}{\sigma}$ sind die Ohmschen Verluste pro Volumen und Zeit, $\frac{1}{\rho} \left(\frac{j^2}{\sigma} \right)$ diejenigen pro Masse und Zeit. Die Entropiezunahme rührt also von der inneren Reibung der Ladungsträger her.

Da nach (17) stets $Tds \geq 0$ ist, muß dv in (16) das Vorzeichen wechseln, wenn v die Schallgeschwindigkeit durchschreitet. Dadurch wird der Schallgeschwindigkeit, deren Einführung zunächst nur formalen Charakter hatte, eine besondere Rolle im Strömungsverlauf zugewiesen. Genaueres ergibt sich durch den quantitativen Vergleich von (16) und (17) (Gleichsetzen der rechten Seiten):

$$Fv' = \frac{\sigma}{c} \sqrt{\frac{\gamma-1}{c_p T}} \frac{v(vB-E) \left[\left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}}\right) vB-E \right]}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (18)$$

Nach Art der Herleitung sind alle Gleichungen (1)-(4) an (18) beteiligt. Wegen $Fv' = \frac{d}{dx}(\rho v^2)$ bedeutet (18) bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$ die Änderung der kinetischen Energiedichte.

Für die Temperatur T gilt nach Anhang II b die Identität:

$$dT = \gamma \frac{Tds}{c_p} + (\gamma-1) \frac{c}{c_p} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \frac{dp}{\rho}$$

Mit (12) und (16) wird daraus:

$$dT = \gamma \frac{c}{c_p} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \left[\frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(vB-E)}{\left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}}\right)vB-E} - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \right] \frac{dv}{v}$$

Schließlich erhält man mit $dv = v'dx$ und mit (18):

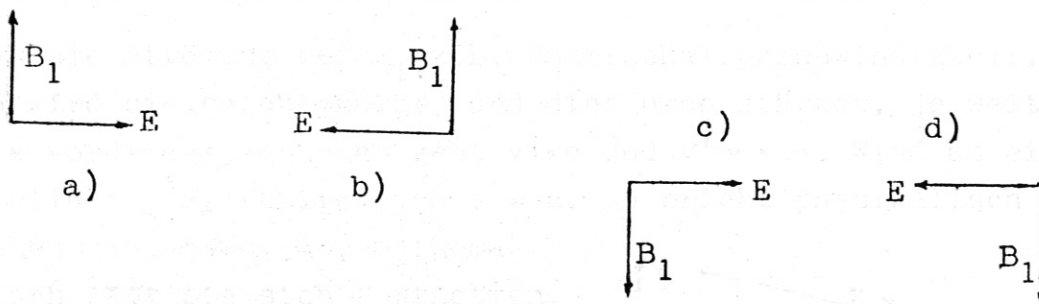
$$T' = \gamma \cdot \frac{\sigma}{F c_p} (vB-E) \left[vB-E - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}}\right)vB-E}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right] \quad (19)$$

(4), (18) und (19) bilden die Grundlage aller weiteren Untersuchungen. Dabei lassen sich, nach den Anfangsbedingungen geordnet, einige Fälle unterscheiden. $E = 0$ wird als erster behandelt, B_1 kann dabei positiv oder negativ sein, man kann sich jedoch auf positives B_1 beschränken. (20)

Ist $E \neq 0$, so gibt es die Möglichkeiten

B_1	+	+	-	-	+ = positiv - = negativ
E	+	-	+	-	

Sie sind in dieser Reihenfolge nach den Vorzeichenbestimmungen der Abb.1 aufgezeichnet:



Durch Drehen geht c) in a), d) in b) über, physikalisch sind also nur zwei Fälle unterschieden. Im Weiteren wird B_1 stets positiv genommen, und die damit gewählten Anordnungen a) und b) unterscheiden sich durch das Vorzeichen von E.

5. Stetige Unter- und Überschallströmungen.

1. Fall $E = 0$

Die beiden Metallplatten am Rande der Strömung sind kurzgeschlossen, und der Strom wird nur durch die elektromotorische Kraft des Magnetfeldes angetrieben.

Gl.(4) lautet jetzt $B' = \mu \delta v B$, und B wächst mit x , da v und B_1 positiv sind.

(18) vereinfacht sich zu:

$$F v' = \frac{\delta}{c^2} (1+c \sqrt{\frac{\gamma-1}{c_p T}}) \frac{v^3 B^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (20)$$

Der Faktor vor dem Bruchstrich hängt zwar vom genaueren Verlauf der Strömung ab, hier genügt es aber zu wissen, daß er ebenso wie $v^3 B^2$ positiv ist. Das Vorzeichen von v' ist daher durch $1-\frac{v^2}{c^2}$ bestimmt:

$$\begin{aligned} (1) \quad v < c &: v' \text{ positiv, } v' \rightarrow \infty \text{ mit } v \rightarrow c \\ v > c &: v' \text{ negativ, } v' \rightarrow -\infty \text{ mit } v \rightarrow c \end{aligned} \quad (21)$$

Hat die Strömung bei x_1 z.B. Unterschallgeschwindigkeit, so wird sie beschleunigt, und dies umso stärker, je weiter sie vordringt, denn es geht $v \rightarrow c$ und $v' \rightarrow +\infty$. Wird an einer Stelle $x = x_k$ schließlich $v = c$, so bricht physikalisch gesehen die Lösung ab, mathematisch läßt sie sich fortsetzen, indem man die Schallgeschwindigkeit überschreitet und bei wachsendem v wieder zu kleineren x übergeht (s. Fig.3). Die mathematische Doppeldeutigkeit der Lösung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Gleichungen (1)-(3) quadratisch sind und bei gegebenen F, P, W von zwei verschiedenen Kombinationen v, B, ρ, p erfüllt werden. Physikalisch gehört der obere Lösungszweig zu einer Überschallströmung, die von x_1 ausgehend bis x_k gebremst wird und dort denselben Endzustand erreicht wie die Unterschallströmung.

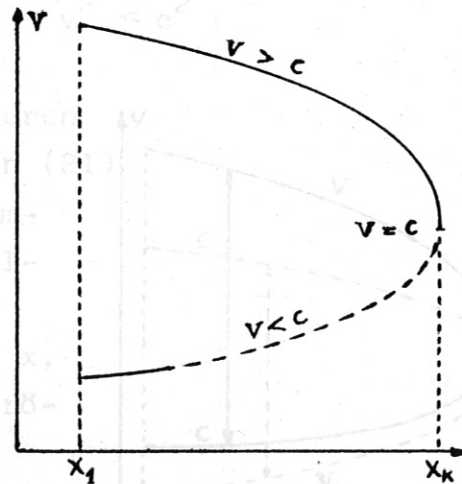


Fig. 3

Wie ist es zu verstehen, daß die Lösungen bei x_k abbrechen? Die ganze Untersuchung beschränkt sich ja auf stationäre

Strömungen, und solche sind eben nicht möglich, wenn keine für das ganze Gebiet des Magnetfelds gültige Lösung existiert. Bedingung für die Existenz einer stationären Strömung ist also, daß vor Ende des Wechselwirkungsbereichs keine "kritischen" Werte ($v = c$) angenommen werden, d.h. $x_k \geq x_2$. Gl.(20) läßt erkennen: je kleiner B_1 , und je stärker v_1 von c_1 abweicht, umso eher ist eine stationäre Strömung möglich. Die Möglichkeiten erweitern sich noch durch das Auftreten stehender Stoßfronten (s. Abschn.8).

Verhalten der Temperatur:

(19) ergibt mit $E = 0$

$$T' = \frac{\delta\gamma}{F c_p} v^2 B^2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}}\right)\right) \cdot \frac{1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (21)$$

Der Faktor $\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$ ist positiv, daher ist T' auf dem Überschallast durchwegs positiv. Auf dem Unterschallast ist T' im Bereich:

$$\left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}}\right)\right] c^2 < v^2 < c^2$$

negativ, vorher positiv, wie man durch Betrachtung des Klammerausdrucks in (21) findet. Gekennzeichnet wird der Temperaturverlauf in Fig.3 und den folgenden auf diese Weise:
durchgezogene Kurven: T wächst mit x ,
gestrichelte Kurven: T fällt in Strömungsrichtung.

Bei vollständiger Ionisation gilt die ideale Gasgleichung und

$$c^2 = \gamma RT = \gamma(c_p - c_v)T = (\gamma - 1)c_p T .$$

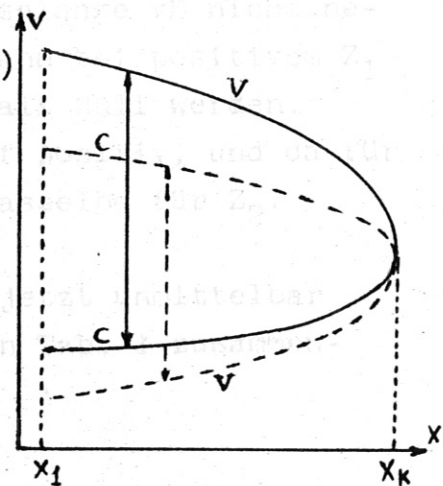


Fig. 4

T' wird nach der obigen Ungleichung dann auf dem ganzen Unterschallast negativ. Die Schallgeschwindigkeit verläuft im gleichen Sinn wie die Temperatur und ist in Fig. 4 dem

Geschwindigkeitsverlauf hinzugefügt: der untere Ast der Schallkurve gehört zum oberen Ast der Geschwindigkeitskurve und umgekehrt.

2. Fall $E < 0$

$j = \sigma(E - vB)$ ist mit E kleiner als Null, daher sind \vec{j} und \vec{E} parallel und dem Gas wird Energie zugeführt.

Zur Vereinfachung werden die Bestandteile der Gl.(18) abgekürzt:

$$vB - E = Z_1, \quad \left(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma - 1}}\right) vB - E = Z_2,$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = N, \quad \frac{\sigma}{c} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{c_p T}} = \delta.$$

Sie lautet dann: $Fv' = \delta v \cdot \frac{Z_1 Z_2}{N}$.

(19) ergibt $T' = \frac{\sigma}{F c_v} \cdot Z_1 \left(Z_1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Z_2}{N} \right),$

(4) ergibt $B' = \mu \sigma Z_1.$

Bei x_1 ist Z_1 positiv und bleibt es, solange vB nicht negativ wird. Dies ist nicht möglich, denn bei positivem Z_1 nimmt B zu und vB kann nicht kleiner als Null werden.

Z_1 ist also im ganzen Strömungsverlauf positiv, und da für positives B stets $Z_2 > Z_1$ ist, gilt dasselbe für Z_2 .

1) Das Verhalten der Strömung läßt sich jetzt unmittelbar aus (18) und (19) entnehmen und ist in Tab. 1 zusammengestellt:

	Z_1	Z_2	N	v'	T'	
$v < c$	+	+	+	+	1) $v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$	
$v > c$	+	+	-	-	+	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$

Tab. 1

1) T' ist negativ, solange $\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Z_2}{Z_1}\right) c^2 < v^2 < c^2$, vorher ist T' positiv.

Aufgezeichnet ergibt sich dasselbe Bild wie in Fig.3.

3. Fall $E > 0$

Es sind dieselben Abkürzungen wie bei Fall 2 gemacht.

a) Generator

$$Z_1 \geq 0, \text{ damit } Z_2 > 0.$$

$j = \mathcal{G}(E-vB) = -\mathcal{G} Z_1$ ist negativ, E positiv, daher wird Energie entzogen. Hierher gehört auch die Anordnung mit einem Widerstand R im Außenkreis, und zwar wird $Z_1 = vB$ mit $R = 0$ (Fall 1) und $Z_1 \equiv 0$ mit $R = \infty$.

Ist irgendwo $Z_1 = 0$, so folgt daraus $Z_1 \equiv 0$, denn $v \equiv \frac{E}{B} = \text{const}$ ist eine Lösung des Problems. (Es fließen keine Ströme und wirken keine Kräfte). Mit $Z_1 = 0$ ist $v' = B' = \rho' = p' = 0$, und da sich $Z_1 \equiv 0$ genau so verhält, gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösungen die Behauptung.

Für $Z_1 > 0$ erhält man die Tabelle 2. Der Strömungsverlauf ist aus Fig.5 zu ersehen.

	Z_1	Z_2	N	v'	B'	$(vB)'$	T'
$v < c$	+	+	+	+	+	+	1) $v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$
$v > c$	+	+	-	-	+	2) +	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$ oder $v' \rightarrow 0$ mit $vB \rightarrow E$

- Tab. 2
- 1) T' ist negativ in der Nähe von $v = c$, vorher kann es aber auch positiv sein.
 - 2) $(vB)' = v'B + vB'$. v' ist negativ, B' positiv, und bei kleinem v' kann $(vB)'$ positiv sein. Mit $v \rightarrow c$ wird $|v'|$ jedoch groß und $(vB)'$ daher negativ. Entweder geht nun

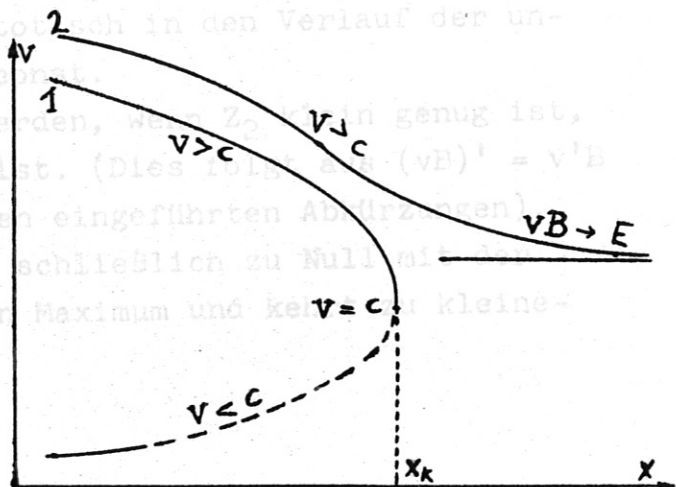


Fig. 5 Entsprechend den 2 Möglichkeiten der Tab.2 sind 2 Überschallläste eingezeichnet.

zuerst $v \rightarrow c$ und damit $v' \rightarrow -\infty$, oder aber es geht vorher $vB \rightarrow E$. Im letzten Fall mündet die Strömung asymptotisch in den Verlauf $Z_1 \equiv 0$.

b) Beschleuniger

$$Z_2 \geq 0, Z_1 < 0$$

	Z_1	Z_2	N	v'	B'	$(vB)'$	T'	
$v < c$	-	+	+	-	-	-	+	$v' \rightarrow 0$ mit $Z_2 \rightarrow 0$ 1)
$v > c$	-	+	-	+	-	$\begin{cases} -2) & 3) \\ +2) & - \end{cases}$	+	$v' \rightarrow 0$ mit $Z_2 \rightarrow 0$
								-

Tab. 3

1) Da vB dauernd abnimmt und mit B sogar negativ werden kann, muß irgendwann $Z_2 = 0$ werden. Dann ist $v' = 0$ und $(vB)' = vB' = v \mu \delta Z_1 < 0$. Mit abnehmendem vB wird Z_2 negativ und v' geht zu positiven Werten über, d.h. $v(x)$ hat bei $Z_2 = 0$ ein Extremum. (Der Faktor $1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{cpI'}{\gamma-1}}$ in Z_2 ist bei vollständiger Ionisation eine Konstante ($= \frac{5}{3}$) und wird sich auch sonst im Vergleich zu den übrigen Strömungsvariablen nur wenig ändern. Man wird also annehmen dürfen, daß der Änderungssinn von Z_2 durch vB bestimmt ist).

2) Nahe bei $v = c$ ist v' sehr groß und daher $(vB)'$ positiv. Bleibt es hierbei, so wächst Z_1 und wird schließlich Null: die Strömung mündet asymptotisch in den Verlauf der ungestörten Lösung $v \equiv \frac{E}{B} = \text{const.}$ $(vB)'$ kann auch negativ werden, wenn Z_2 klein genug ist, genauer wenn $Z_2 < -\frac{\mu \delta FN}{\delta \cdot B}$ ist. (Dies folgt aus $(vB)' = v'B + vB'$ mit (4), (18) und den eingeführten Abkürzungen). Dann nimmt Z_2 ab und wird schließlich zu Null mit der Folge $v' = 0$. $v(x)$ hat ein Maximum und kehrt zu kleineren Werten um.

3) T nimmt ab bei $v = c$ und nimmt zu bei $Z_2 = 0$

Fig. 6 zeigt den Verlauf der Strömung. Es gibt wieder zwei Typen von Überschallströmungen. Für den einen und für den Unterschallast entspricht der eingezeichnete Verlauf zwischen $Z_2 = 0$ und $v = c$ negativen Werten von Z_2 und muß noch in c) erwiesen werden. Bemerkenswert ist, daß unter den jetzigen Bedingungen auch Überschallströmungen beschleunigt werden können.

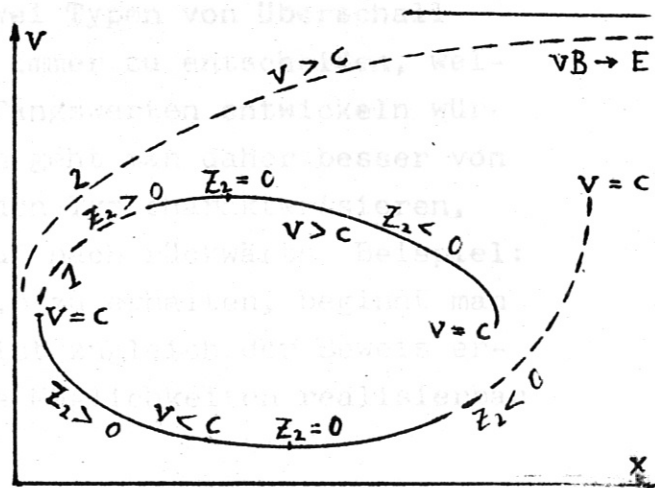


Fig. 6

c) $Z_2 \leq 0$ (und damit $Z_1 < 0$)

	Z_1	Z_2	N	v'	B'	T'	
$v < c$	-	-	+	+	-	1)	$v' \rightarrow +\infty$ mit $v \rightarrow c$ 2)
$v > c$	-	-	-	-	-	+	$v' \rightarrow -\infty$ mit $v \rightarrow c$

Tab. 4

1) T' ist negativ bei $v = c$, vorher kann es positiv sein.

2) Da v' und B' verschiedenes Vorzeichen haben, kann vB sowohl zu- wie abnehmen. Es wäre daher denkbar, daß $Z_2 = 0$ wird, bevor die Strömung Schallgeschwindigkeit erreicht. Nun ist aber mit $Z_2 = 0$ auch $v' = 0$ und daher $Z_2' \sim (vB)' = vB' < 0$. Das heißt, daß Z_2 nur von positiven Werten her gegen Null gehen kann, und die genannte Möglichkeit scheidet aus.

Der Strömungsverlauf ist aus Fig. 6 zu entnehmen (rechter Teil der unteren Kurven), außerdem gilt auch wieder Abb. 3.

Anmerkung:

In a) und b) ergaben sich je zwei Typen von Überschallströmungen. Dabei war es nicht immer zu entscheiden, welcher Typ sich aus gegebenen Anfangswerten entwickeln würde. Bei praktischen Anwendungen geht man daher besser von geeigneten Endwerten aus, die den Typ charakterisieren, und berechnet den Lösungsverlauf nach rückwärts. Beispiel: um den Überschallast 1 von Fig. 6 zu erhalten, beginnt man mit $v > c$ und $Z_2 = 0$. Hiermit ist zugleich der Beweis erbracht, daß auch wirklich beide Möglichkeiten realisierbar sind.

6. Stetiger Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit.

Alle bisher betrachteten Lösungen brechen ab, wenn sie die Schallgeschwindigkeit erreichen, sie liegen also entweder ganz im Überschall- oder ganz im Unterschallgebiet. Falls aber in (18) mit $v = c$ gleichzeitig der Zähler verschwindet, kann die Schallgeschwindigkeit auch durchschritten werden. Beide Möglichkeiten $(1 + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{cpT}{\gamma-1}})vB = E$ und $vB = E$ kommen dabei in Frage und werden als Fall 1 bzw. Fall 2 untersucht. Im kritischen Punkt der Schalldurchschreitung haben E und B gleiches Vorzeichen, und aus oben schon dargelegten Gründen kann man sich auf positives E und B beschränken.

Um die Rechnung nicht unnötig kompliziert und unübersichtlich zu machen, werden jetzt die bei vollständiger Ionisation gültigen Beziehungen [1]

$$c^2 = \frac{5}{3} \frac{p}{\rho}, \quad c_p = 5 \frac{k}{m_0}, \quad \gamma = \frac{5}{3},$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{2 kT}{m_0}, \quad h = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} + \text{const}$$

benutzt. Aus (18) wird damit

$$F v' = \frac{2}{3} \sigma v \frac{(vB-E)(\frac{5}{2} vB-E)}{c^2-v^2}, \quad (22)$$

und der Energiesatz (3) ergibt:

$$\frac{3}{2} F c^2 + F \frac{v^2}{2} + \frac{EB}{\mu} = W^* \quad (23)$$

1. Fall $\frac{5}{2} v_k B_k = E$

Es gilt nun, eine Lösung zu finden, die gleichzeitig mit $\frac{5}{2} vB = E$ Schallgeschwindigkeit erreicht. Zunächst einmal ist gar nicht zu ersehen, ob und mit welchen Anfangswerten dies möglich ist. Hier empfiehlt sich die in der Anmerkung zu Abschn.4 genannte Methode. Man geht aus von einem "kritischen" Punkt x_k mit beliebigen v_k, ρ_k, E und gemäß

$$\rho_k = \frac{3}{5} \rho_k v_k^2 \quad (24), \quad B_k = \frac{2}{5} \frac{E}{v_k} \quad (25)$$

bestimmten Werten von p und B . Im Punkt x_k sind damit die kritischen Gleichungen $\frac{5}{2} vB = E$ und $v^2 = c^2 = \frac{5}{2} \frac{p}{\rho}$ erfüllt.

Für eine "kritische" Lösung $v(x), B(x)$ durch x_k gilt nach (4) und (25):

$$B_k' = [B'(x)]_{x_k} = -\frac{3}{5} \mu \sigma_k E \quad (26)$$

Die Ableitung von $v(x)$ gehorcht (22) und wird bei x_k unbestimmt, da

$$\frac{\frac{5}{2} v(x)B(x)-E}{c^2(x)-v^2(x)} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ mit } x \rightarrow x_k$$

Nach der Hospital'schen Regel erhält man diesen Grenzwert, wenn man Zähler und Nenner differenziert und dann $x \rightarrow x_k$ gehen läßt.

Mit

$$c^2-v^2 = \frac{2}{3} \frac{W^*}{F} - \frac{2}{3} \frac{EB}{\mu F} - \frac{4}{3} v^2 \quad (28)$$

aus (23) und mit (25), (26) ist:

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{d}{dx} \left(\frac{5}{2} v_B - E \right) = E \left(\frac{v_k'}{v_k} - \frac{3}{2} \mu \sigma_k v_k \right),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{d}{dx} (c^2 - v^2) = \frac{2}{5} \frac{\sigma_k E^2}{F} - \frac{8}{3} v_k v_k',$$

und daher

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\frac{5}{2} v_B - E}{c^2 - v^2} = E \frac{\frac{v_k'}{v_k} - \frac{3}{2} \mu \sigma_k v_k}{\frac{2}{5} \frac{\sigma_k E^2}{F} - \frac{8}{3} v_k v_k'}.$$

Berücksichtigt man noch

$$\lim_{x \rightarrow x_k} \frac{2}{5} \sigma_k v (v_B - E) = - \frac{2}{5} \sigma_k v_k E$$

so erhält man schließlich:

$$F v_k' = - \frac{2}{5} \sigma_k v_k E^2 \frac{\frac{v_k'}{v_k} - \frac{3}{2} \mu \sigma_k v_k}{\frac{2}{5} \frac{\sigma_k E^2}{F} - \frac{8}{3} v_k v_k'}.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für v_k' :

$$- \frac{8}{3} F v_k v_k'^2 + \frac{4}{5} \sigma_k E^2 v_k = \frac{3}{5} \mu (\sigma_k v_k E)^2$$

mit der Lösung:

$$v_k' = \frac{3}{20} \frac{\sigma_k E^2}{F v_k} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{10 \mu F v_k^3}{E^2}} \right). \quad (27)$$

Bei gegebenen kritischen Werten v_k, ρ_k etc... gibt es zwei mögliche Werte v_k' , beide sind positiv.

Damit v_k' reell bleibt, darf der Ausdruck unter der Wurzel von (27) nicht negativ werden. Dies liefert als Existenzbedingung der kritischen Lösungen:

$$\frac{10 \mu F v_k^3}{E^2} < 1 \quad (28)$$

(28) bedeutet eine Einschränkung für die ursprünglich frei wählbaren Werte ρ_K, v_K und E .

Ersetzt man darin v_K und E mit (24) und (25) und benutzt $F = \rho_K v_K$, so lautet die Existenzbedingung:

$$\frac{4}{3} \rho_K < \frac{B_K^2}{2\mu} \quad (28a)$$

Zur Diskussion der Strömung benötigt man nun noch den Wert von $(vB)_K' = v_K' B_K + v_K B_K'$. Mit (25), (26) und (27) ergibt sich:

$$(vB)_K' = \frac{3}{50} \frac{\rho_K E^3}{F v_K^2} \left(1 - \frac{10\mu F v_K^3}{E^2} \pm \sqrt{1 - \frac{10\mu F v_K^3}{E^2}} \right) \quad (29)$$

Das + Zeichen gilt, wenn auch in (17) + steht. In diesem Falle ist $(vB)_K'$ positiv, gilt das -Zeichen, so ist $(vB)_K'$ negativ. Die Diskussion der Strömung erfolgt jetzt in drei Abschnitten. a) und b) bringen Lösungen mit stetigem v' , einmal bei positivem, einmal bei negativem $(vB)_K'$. Schließlich werden in c) Lösungen untersucht, bei denen v' in x_K von dem einen Wert der Gl.(27) auf den anderen springt.

a) $(vB)_K' > 0$: "elektromagnetische Lavaldüse".

v' ist in x_K positiv (Gl.(27) mit +), da es stetig sein soll, gilt dies auch kurz vor und nach x_K . $vB-E$ ist in der ganzen Umgebung von x_K negativ, $\frac{5}{2} vB-E$ ist vor x_K negativ, bei x_K Null und nach x_K positiv, da vB im Zunehmen begriffen ist. Man erhält so Tab.5:

	v'	$\frac{5}{2}vB-E$	$vB-E$	c^2-v^2
$x_K - dx$	+	-	-	+
$x_K + dx$	+	+	-	-

Tab. 5

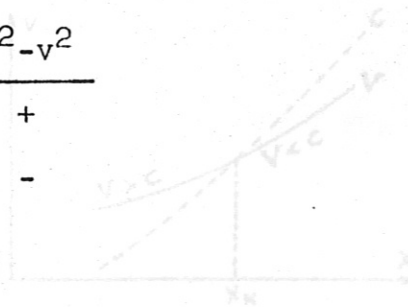


Fig. 8

Die Eintragungen der letzten Spalte ergeben sich aus (22), z.B. für $x_k + dx$: der Nenner von v' ist positiv, v' kann also selbst nur positiv sein, wenn dies auch für $c^2 - v^2$ gilt.

Fig. 7 zeigt den Verlauf der Strömung: die Geschwindigkeitskurve verläuft vor x_k unter, nach x_k über der Schallkurve, die als gestrichelte Linie eingezeichnet ist. (Die Temperaturverhältnisse werden von jetzt an nicht mehr eingezeichnet). Man hat hier die Beschleunigung einer Unterschallströmung auf Überschall.

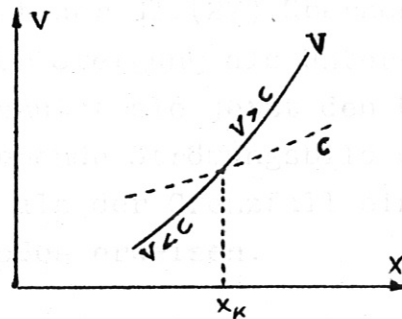


Fig. 7

Ergebnis: bei geeigneter Kombination von elektr. und magn. Feld (Gl.(24),(25) und (28)) wirkt die betrachtete Anordnung als "elektromagnetische Lavaldüse". Während die übliche Lavaldüse drei räumliche Freiheitsgrade hat, besitzt diese nur einen. Elektrisches und magnetisches Feld spielen sozusagen die Rolle zweier weiterer Freiheitsgrade.

b) $(vB)'_k < 0$

	v'	$\frac{5}{2}vB-E$	$vB-E$	$c^2 - v^2$
$x_k - dx$	+	+	-	-
$x_k + dx$	+	-	-	+

Tab. 6

Obwohl die Strömung beschleunigt wird (Gl.(27) mit -), geht sie von Überschall zu Unterschall: die Schallgeschwindigkeit wächst also schneller an als die Geschwindigkeit der Strömung (Fig. 8).

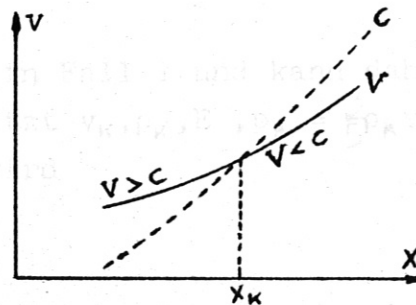


Fig. 8

c) Unstetigkeit in v'

(30)

Verfolgt man den Unterschallast der Fig.7 bis x_k , so kann dort v' auch auf den kleineren Wert der Gl.(27) übergehen. Die Lösung geht dann mit geringerer Steigung als Unterschallströmung weiter, und zwar benutzt sie jetzt den Unterschallast von Fig.8. Das entstehende Strömungsbild der Fig.9 wird sich später (Abschn.8) als der Grenzfall eines unendlich schwachen, stehenden Stoßes erweisen.

Die zweite Möglichkeit für eine Unstetigkeit von v' ist in Fig.10 aufgezeichnet.

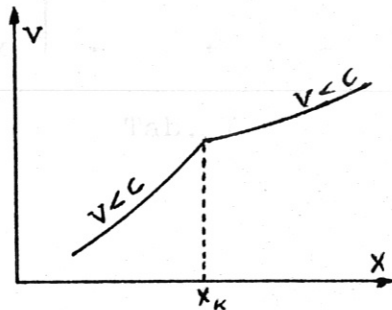


Fig. 9

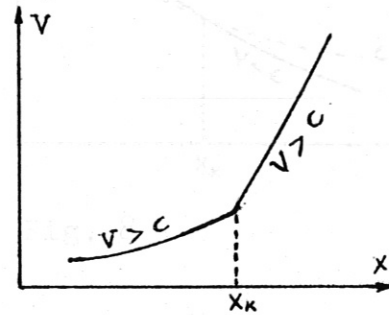


Fig. 10

Offensichtlich ist der Strömungsverlauf durch die gewohnte Anzahl von Anfangswerten jetzt noch nicht festgelegt: bei gegebenen v_k, B_k, ρ_k, p_k und E kann von x_k sowohl eine Über- wie Unterschallströmung ausgehen. Diesbezüglich sei nochmals auf Abschn.8 verwiesen.

2. Fall $v_k B_k = E$

Die Behandlung erfolgt genau wie in Fall 1 und kann daher kurz gefaßt werden. In x_k sind jetzt $v_k, \rho_k, E, p_k = \frac{3}{5} \rho_k v_k^3$ und $B = \frac{E}{v}$ vorzugeben. Hiermit wird

$$B'_k = 0$$

und

$$Fv'_k = \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{2}{3} \rho v \left(\frac{5}{2} vB - E \right) \lim_{x \rightarrow x_k} \frac{\frac{d}{dx}(vB - E)}{\frac{d}{dx}(c^2 - v^2)} = - \frac{3}{8} \frac{\rho_k E^2}{v_k}$$

bzw.

$$v'_k = - \frac{3}{8} \frac{6_k E^2}{F v_k} \quad (30)$$

Es gibt nur einen Wert v'_k , dafür aber auch keine einschränkende Bedingung wie (28).

$$(vB)_k' = v'_k B_k = - \frac{3}{8} \frac{6_k E^3}{F v_k^2}$$

wird negativ und es ergibt sich Tab.7 mit Fig.8.

	v'	$\frac{5}{2}vB-E$	$vB-E$	c^2-v^2
x_k-dx	-	+	+	-
x_k+dx	-	+	-	+

Tab. 7

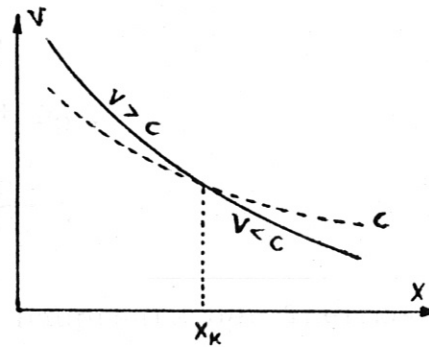


Fig. 8

7. Stoßbedingungen und Rolle der Schallgeschwindigkeit.

Die beiden letzten Abschnitte untersuchten sämtliche stetigen Lösungen der Gleichungen (1)-(4). Irgendwelche stoßähnlichen Verläufe hatten sich dabei nicht ergeben, was aber von einer Theorie, die Reibung und Wärmeleitung vernachlässigt, auch gar nicht zu erwarten war. Neben den stetigen sind jedoch noch unstetige Strömungsverläufe möglich, denn die Gleichungen (1)-(3) besitzen in jedem Punkt zwei Lösungen. Der Sprung von einem Lösungszweig auf einen anderen bedeutet dann einen auf eine Fläche konzentrierten stehenden Stoß.

Die Bedingungen über die Stoßfront sind:

- 1) Gültigkeit von (1)-(3).
- 2) Stetigkeit von E , denn es ist $\text{rot } \vec{E} = 0$. Diese Bedingung ist mit dem Ansatz $E = \text{const}$ von selbst erfüllt.

3) Stetigkeit von B. Zwar ist man von den Verhältnissen bei unendlicher Leitfähigkeit gewohnt, daß B gemäß $vB = \text{const}$ mit v springt. Ein Sprung von B bedingt jedoch unendliche Stromdichte im Sprungpunkt, und das ist bei endlicher Leitfähigkeit nicht möglich.

Mit 2) und 3) ergeben die mechanischen Bedingungen 1) diejenigen der gewöhnlichen Gasdynamik:

$$\begin{aligned}\rho_1 v_1 &= \rho_2 v_2 \quad , \\ \rho_1 v_1^2 + p_1 &= \rho_2 v_2^2 + p_2 \quad , \\ h_1 + \frac{v_1^2}{2} &= h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad .\end{aligned}$$

Daher sind auch hier mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nur Verdichtungsstöße verträglich.

Aus dem engen Zusammenhang zwischen Stoßwellen und Schallausbreitung läßt sich erklären, warum gerade die Schallgeschwindigkeit das Strömungsgeschehen beherrscht und nicht etwa deren Verknüpfung mit der Alvéngeschwindigkeit.

Mit $v_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1$ ergibt die zweite mechanische Stoßbedingung (Impulssatz):

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{\rho_1 v_1^2}{\rho_2} \quad .$$

Geht man nun nach bekannter Methode [2, 3] zu unendlich schwachen Stößen über, so geht $v_2 \rightarrow v_1$, $\rho_2 \rightarrow \rho_1$, $s_2 \rightarrow s_1$ und $\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} \rightarrow \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s$ und man erhält:

$$v_1^2 = \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_s = c^2 \quad .$$

$v_1 = v_2 = c$ ist die Geschwindigkeit des Gases im Ruhesystem des Stoßes bzw. umgekehrt im ruhenden Gas die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer unendlich kleinen Störung. Eine solche breitet sich also bei endlichem δ mit Schallgeschwindigkeit aus, und deren besondere Rolle ist damit erklärt.

8. Stehende Stöße.

Die Diskussion kann auf den Fall $E = 0$ beschränkt werden, $E \neq 0$ läßt sich genau so behandeln.

Mit den Stoßbedingungen des letzten Abschnitts ist ein Verdichtungsstoß so zu beschreiben: die Strömung benutzt zunächst einen Überschallast, dann, am Ort des Stoßes, springt sie auf einen zu gleichen F, P, W gehörigen Unterschallast. B bleibt dabei stetig.

Fig. 3 zeigt einen Über- und einen Unterschallast zu gegebenen F, P, W . Nun sind die Gleichungen (1)-(4) bezüglich der x -Koordinate translationsinvariant (x tritt nicht explizit auf), d.h. die eine Lösung der Fig. 3 produziert bei Parallelverschiebung in Richtung x eine ganze Schar von Lösungen zu den gleichen Werten F, P, W .

Um die Stetigkeitsbedingung für B zu untersuchen, werde ein durchgehender Lösungsbogen herausgegriffen (Fig. 3). Auf seinen beiden Ästen hat B in x_K den selben Wert, vor x_K dagegen muß B unterschiedlich verlaufen, denn bei gleichem Verlauf müßte außer B überall auch $B' = \mu \delta v B$ übereinstimmen.

Ist δ konstant, so liegt die zum Überschallast gehörige Kurve $B = B(x)$ unterhalb derjenigen für den Unterschallast (Fig 9), wäre es umgekehrt, so wäre $B' = \mu \delta v B$ auf dem Überschallast stets größer und B könnte in x_K unmöglich mehr den gemeinsamen Wert B_K erreichen.

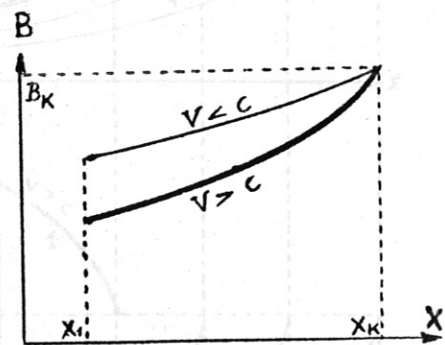


Fig. 9 schwach veränderliches δ oder $\delta = \text{const}$

Bei realen Gasen hat die Temperatur und Druckabhängigkeit von δ einen recht verwickelten Verlauf, auch die Art des Gases wirkt mitbestimmend. Es gibt jedoch Temperaturbereiche, in denen sich δ nur wenig mit den thermischen Variablen ändert, und in ihnen hat man die Situation der Fig. 9.

Bei Temperaturen mit stark veränderlichem σ kann σv auf dem Unterschalllast größer werden als auf dem Überschalllast. Dann kommt die $B(x)$ -Kurve der Überschallströmung nach oben zu liegen.

Der Magnetfeldverlauf überträgt sich auf andere Bögen der Schar einfach durch Parallelverschieben.

Jetzt ist es leicht möglich, diejenigen Orte zu konstruieren, an denen ein Stoß erfolgen kann. Ausgegangen werde von x_1 mit den Anfangswerten v_1, B_1, ρ_1, p_1 einer Überschallströmung. F, P und W sind durch die Anfangswerte festgelegt. Der Verlauf der Strömung ist in Fig. 10a, b als Kurve 1 eingetragen, senkrecht darüber, ebenfalls mit der Ziffer 1 gekennzeichnet, findet sich das zugehörige Magnetfeld. Weiter sind eingezeichnet - bei schwach veränderlichem σ in a), bei stark veränderlichem σ in b) - einige Unterschalläste und deren Magnetfeld, alle natürlich aus der durch F, P, W gekennzeichneten Schar. In ihren kritischen Punkten $\overset{2}{x}_K, \overset{3}{x}_K, \overset{4}{x}_K$ erreichen sie dieselben Endwerte v_K, B_K, ρ_K, p_K wie die Überschallströmung in x_K .

In Fig. 10a verläuft das Magnetfeld des Überschalllastes steiler als das der Unterschalläste, daher muß es Schnittpunkte haben mit den Magnetfeldkurven aller Unterschalläste, deren kritische Punkte rechts von x_K liegen. In Fig. 10b ist es gerade umgekehrt. Diese Schnittpunkte sind die gesuchten Orte stehender Stöße, denn alle Stoßbedingungen sind in ihnen erfüllt. Die Lage s des Stoßes hängt von der Reichweite $\overset{i}{x}_K$ des am Stoß beteiligten Unterschallastes ab, für jeden Überschalllast kann der Stoßort von x_1 bis x_K variieren.

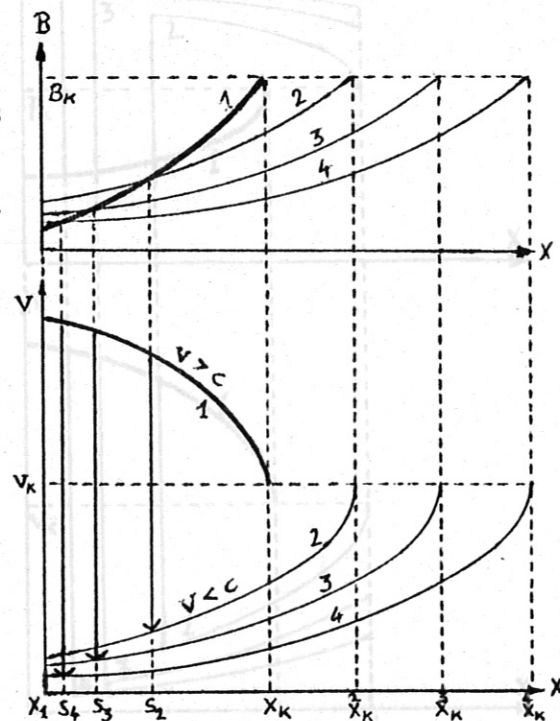


Fig. 10a

d.h., p ist umso größer, je kleiner v ist, also insbesondere auf den Unter-

Während alle bisherigen Lösungen (mit einer Ausnahme) durch Vorgabe der vier Parameter v_1, B_1, ρ_1, p_1 eindeutig festgelegt waren, kann jetzt noch zusätzlich z.B. der Ort des Stoßes vorgeschrieben werden. Die Singularität im Stoßort erlaubt also eine zusätzliche Randbedingung.

In Fig. 10a reichen die Lösungen mit Stoß weiter nach rechts als die stoßfreie Überschallströmung. Dadurch werden stationäre Lösungen auch in Fällen möglich, die bei Beschränkung auf stoßfreie Strömungen nicht mehr lösbar waren.

Physikalisch ist es sinnvoller, statt des Stoßorts den Enddruck p_2 am Ende des Wechselwirkungsbereichs vorzugeben, da dieser durch die Absaugvorrichtung am Rohrende reguliert werden kann.

Fig. 11 zeigt für den Fall der Fig. 9, 10a, wie die Stoßlage mit dem Druckverlauf zusammenhängt. Aus (2) folgt:

$$\frac{dp}{dv} = -\left(F + \frac{B}{\mu} \frac{dB}{dv}\right)$$

Mit $\frac{dB}{dv} = \frac{B'}{v}$, $B' = \mu \delta v B$ und Gl.(20) ergibt sich daraus

$$\frac{dp}{dv} = -F \frac{c \sqrt{\frac{\gamma-1}{c_p T} v^2 + c^2}}{1 + c \sqrt{\frac{\gamma-1}{c_p T} v^2}}$$

d.h., p ist umso größer, je kleiner v ist, also insbesondere auf den Unter-

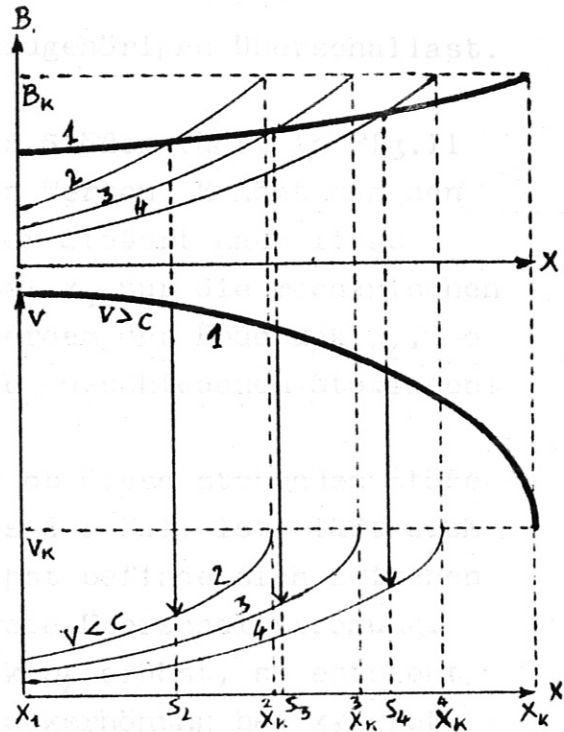


Fig. 10b

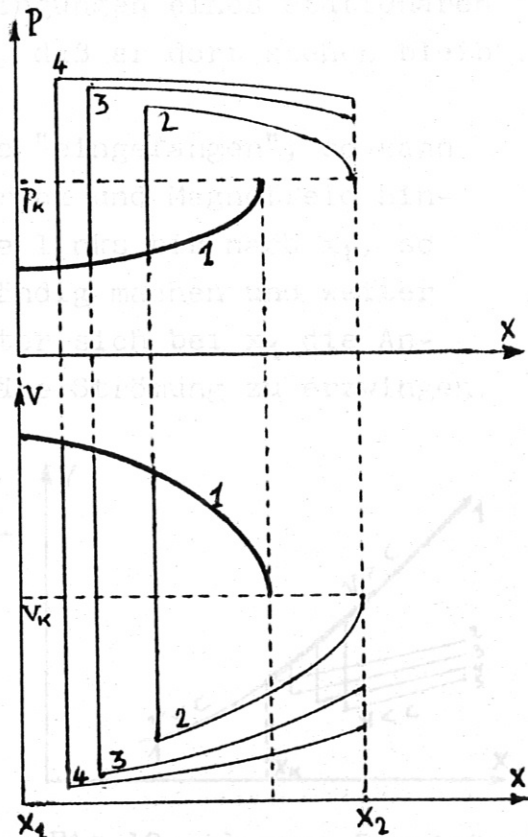


Fig. 11

schalllästen größer als auf dem dazugehörigen Überschalllast.

Der schwächste unter den möglichen Stößen führt in Fig.11 bei x_2 gerade wieder zu kritischen Werten. Erhöht man den Enddruck p_2 , so verschiebt sich der Stoßort nach links und der Stoß wird stärker. Sind bei x_1 nur die mechanischen Parameter ρ_1, v_1, p_1 gegeben, außerdem der Enddruck p_2 , so führt auch die Variation von B_1 zu verschiedenen Stoßlagen.

Nichts gesagt ist bisher darüber, ob diese stehenden Stöße auch tatsächlich auftreten. Daß es der Fall ist, läßt sich zumindest plausibel machen: zunächst befinde sich zwischen x_1 und x_2 eine stationäre, stoßfreie Überschallströmung. Wird nun plötzlich der Absaugdruck p_2 erhöht, so entsteht bei x_2 eine Stoßfront. Ist die Druckerhöhung bei x_2 groß genug, der Stoß also stark genug, so reicht seine Geschwindigkeit aus, um stromaufwärts gegen die Überschallströmung anzukommen. Unter passenden Umständen findet er dann auf seinem Weg im Magnetfeld die Bedingungen eines stationären Stoßes vor, und es ist anzunehmen, daß er dort stehen bleibt.

Ist auf diese Weise eine Stoßwelle "eingefangen", so kann sie durch Veränderung von Absaugdruck und Magnetfeld hin- und hergeschoben werden. Kommt sie links bis nach x_1 , so wird sie sich vermutlich selbstständig machen und weiter stromaufwärts davonlaufen, um hinter sich bei x_1 die Anfangsbedingungen für eine stationäre Strömung zu erzwingen.

Für $E \neq 0$ werde nur kurz auf die "elektromagnetische Lavaldüse" eingegangen. Vom Überschalllast der Fig.7 ist wieder der Übergang zu verschiedenen Unterschalllästen möglich. Das Bild von Fig.9 ist dann als Grenzfall eines unendlich schwachen Stoßes zu deuten.

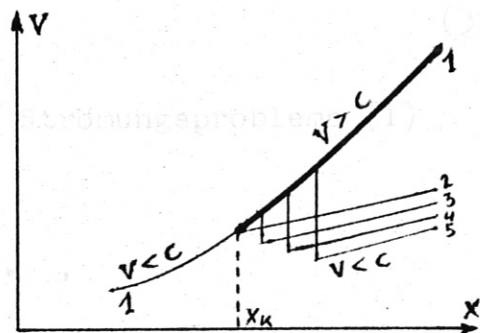


Fig.12 „el.magn.Lavaldüse“

9. Ähnlichkeitstransformationen.

Für die Enthalpie h wird in diesem Abschnitt eine explizite Darstellung benötigt. Mit

$$h = \frac{5}{2} \frac{P}{\rho} + \text{const}$$

gilt das Folgende streng nur im Falle vollständiger Ionisation oder bei fehlender Ionisation. Für die Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit wird gesetzt:

$$\sigma = \sigma_0 T^\alpha .$$

Die jetzt zu behandelnden Ähnlichkeitstransformationen erlauben den Übergang von einer bekannten Lösung zu einer ganzen Schar weiterer Lösungen, und zwar durch einfache Maßstabsveränderung.

Durch die linearen Transformationen

$$\begin{aligned} x_* &= \xi x, & v_* &= \varphi v, & \rho_* &= r \rho, & p_* &= \pi p, \\ B_* &= \beta B, & E_* &= \epsilon E \end{aligned} \quad (31)$$

ordnet man jedem Ort x und den dort gültigen Werten von v , B , ρ etc. den Ort x_* einer anderen Anordnung zu und schreibt dort die Werte $v_* = v_*(x_*) = \varphi v(x)$, ... vor.

Mit $P/\rho = 2 kT/m_0$ transformiert sich T nach (31) gemäß:

$$T_* = \frac{\pi}{r} T . \quad (32)$$

Ist $v(x)$, $B(x)$... eine Lösung des Strömungsproblems (1) - (4), so gilt mit (31) und (32):

$$\rho_* v_* = r \varphi F = F_* , \quad (36)$$

$$\frac{1}{r\varphi^2} F_* v_* + \frac{1}{\pi} p_* + \frac{1}{\beta^2} \frac{B_*^2}{2\mu} = P , \quad (37)$$

$$\frac{1}{\pi\varphi} \frac{5}{2} p_* v_* + \frac{1}{r\varphi^3} F_* \frac{v_*^2}{2} + \frac{1}{\epsilon\beta} \frac{E_* B_*}{\mu} = W ,$$

$$\frac{\xi}{\beta} \frac{dB_*}{dx_*} = \mu \epsilon_0 T_*^\alpha \left(\frac{r}{\pi}\right)^\alpha \left(\frac{v_* B_*}{\phi \beta} - \frac{E_*}{\xi}\right) .$$

Erfüllen die Transformationskoeffizienten die Bedingungen

$$\begin{aligned} r \phi^2 &= \pi = \beta^2 , \\ \pi \phi &= r \phi^3 = \epsilon \beta , \end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{\xi}{\beta} = \left(\frac{r}{\pi}\right)^\alpha \frac{1}{\phi \beta} = \left(\frac{r}{\pi}\right)^\alpha \frac{1}{\epsilon} ,$$

so bilden auch $v_*(x_*)$, $B_*(x_*)$... eine Lösung von (1) - (4), natürlich mit anderen Konstanten $F_* = r \phi F$ etc.

Die 6 Gleichungen (33) sind noch linear abhängig und lassen sich ersetzen durch:

$$\begin{aligned} \pi &= r \phi^2 = \beta^2 , \\ \epsilon &= \beta \phi , \\ \xi &= 1/\phi^{2\alpha+1} . \end{aligned} \quad (34)$$

Der Beweis ergibt sich einfach durch Einsetzen von (34) in (33): mit (34) sind auch die Gln. (33) erfüllt.

Geht man mit (31) von den Koeffizienten auf die Transformationsgrößen zurück, d.h. setzt man $\pi = p_*/p$ etc. in (34) ein, so erhält man als Transformationsgesetze schließlich:

$$\frac{p_*}{p} = \frac{\rho_* v_*^2}{\rho v^2} = \frac{B_*^2}{B^2} , \quad (35)$$

$$\frac{E_*}{E} = \frac{v_* B_*}{v B} , \quad (36)$$

$$\frac{x_*}{x} = \left(\frac{v}{v_*}\right)^{2\alpha+1} . \quad (37)$$

Zwei der Quotienten, z.B. $\frac{v_*}{v}$, $\frac{p_*}{p}$, lassen sich frei vorgeben, die anderen sind dann festgelegt.

(32) ergibt die Gleichung:

$$\frac{\rho_* T_*}{\rho_*} = \rho \frac{T}{p} \quad (38)$$

Wegen der Linearität der Transformationen (31) gelten (35) - (38) auch für die Änderung Δv , Δp , ... der Strömungsgrößen. Kennt man also beispielsweise eine Lösung, bei der sich v nur wenig ändert und ist an einer Lösung mit großer Geschwindigkeitsänderung interessiert, so erhält man diese aus der ursprünglichen durch eine Ähnlichkeitstransformation, bei der $\frac{v_*}{v} \gg 1$ und damit $\frac{\Delta v_*}{\Delta v} = \frac{v_*}{v} \gg 1$ ist.

Bei teilweiser Ionisation sind (35) - (38) nicht mehr gültig, sicher wird man aber noch qualitativ entnehmen können, in welchem Sinn sich die Lösungen mit den Anfangswerten verändern werden.

(35)-(37) lassen sich auch noch umschreiben in:

$$\frac{\rho_*}{\rho_* v_*^2} = \frac{\rho}{\rho v^2}, \quad \frac{\rho_*}{B_*^2/2\mu} = \frac{\rho}{B^2/2\mu}, \quad (35a)$$

$$\frac{E_*}{v_* B_*} = \frac{E}{v B} \quad (36a), \quad \mu \delta_* v_* x_* = \mu \delta v x = R_m. \quad (37a)$$

(37a) erhält man aus (37) unter Benutzung von (35) und von $\frac{\delta}{\delta_*} = \left(\frac{T}{T_*}\right)^\alpha = \left(\frac{\rho}{\rho_*} \frac{\rho_*}{\rho}\right)^\alpha$.

Die 4 Zahlen $\frac{\rho}{\rho v^2}$, $\frac{\rho}{B^2/2\mu}$, $\frac{E}{v B}$, $\mu \delta v x$ (magnetische Reynold-Zahl) charakterisieren das Strömungsbild, und zwar insofern, als ihre Übereinstimmung für zwei verschiedene Strömungen das Kriterium für deren Ähnlichkeit ist. Allerdings kommt ihnen keine absolute Bedeutung zu, da sie innerhalb der Strömung mit dem Ort variieren und es ganz willkürlich ist, welchen Ort der Strömung man zu Vergleichszwecken heranzieht.

A n h a n g

I. Das Streufeld.

Gl.(2) aus Abschn.2 könnte zu der Vermutung führen, daß die hauptsächlichste Beeinflussung der Strömung schon im Streufeld stattfindet, weil B sich dort am stärksten ändert, und daß es dabei unabhängig von der Ausdehnung des Streufelds nur auf den gesamten Anstieg von B ankommt. (2) ist jedoch im Streufeld, auch näherungsweise, nicht mehr gültig. Am einfachsten zeigt dies ein Beispiel: $v \equiv 0$, $p \equiv \text{const}$ muß eine Lösung sein, und nach (2) dürfte sich B dann überhaupt nicht ändern.

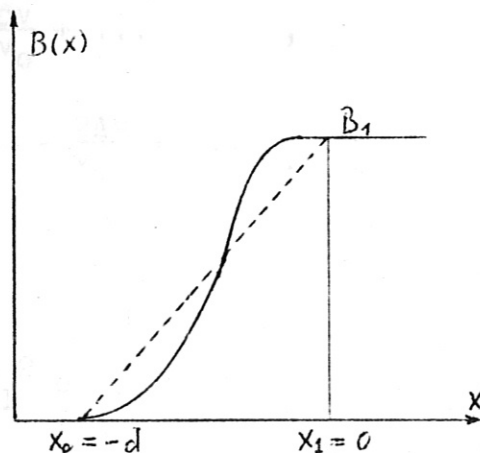
Eine strenge Behandlung des Streufeldbereichs würde ziemlich kompliziert werden, da die Strömung wegen der Inhomogenität des Magnetfelds nicht mehr eindimensional bleibt. Abweichungen vom eindimensionalen Verlauf sollen hier jedoch vernachlässigt werden. Der Einfachheit halber wird mit vollständig ionisiertem Plasma gerechnet, außerdem wird nur der Kurzschlußfall $E = 0$ untersucht.

Die Polschuhe des Magneten können so gestaltet werden, daß das Magnetfeld keine y-Komponente hat. Läßt man die Metallplatten am Rande der Strömung auch das Gebiet des Streufelds begrenzen, so fließt der Strom in y-Richtung und es gilt:

$$\vec{j} = \{ 0, -\sigma v B_z, 0 \}$$

Die Kraft $\vec{j} \times \vec{B}$ auf die Strömung hat die x-Komponente $-\sigma v B_z^2$, ihre z-Komponente wird bei der jetzigen eindimensionalen Behandlung nicht berücksichtigt. $B_z = B(x) =$ angelegtes + induziertes Magnetfeld hängt eigentlich nicht nur von x ab, sondern variiert über den Rohrquerschnitt. Hier ist es etwa als Mittelwert über diesen aufzufassen. Die x-Ausdehnung des Streufelds ist von der Größenordnung des Polschuhabstandes d, dieser Wert soll auch für die Rechnung benutzt werden.

Um den Mittelwert $B(x)$ zu erhalten, wäre im Prinzip eine zu (4) Abschn. 2 analoge Gleichung zu lösen und dann zu mitteln. Man erhielte etwa den Verlauf der nebenstehenden Figur, der bei der hier gewünschten qualitativen Genauigkeit linear approximiert werden darf (gestrichelte Linie):



$$B(x) = B_1 \frac{(x+d)}{d} \quad (1)$$

Massenerhaltungs- und Energiesatz lauten (integriert):

$$\rho v = F \quad (2)$$

$$\frac{5}{2} \rho v + F \frac{v^2}{2} = W \quad (3)$$

Der Impulssatz: $\frac{d}{dx} (Fv + p) = -\sigma v B^2 \quad (4)$

Der letztere ergibt mit $p = \frac{2}{5} (W - \frac{Fv}{2})$ aus (3) die Gleichung:

$$\frac{d}{dx} (2Fv + \frac{W}{v}) = -\frac{5}{2} \sigma v B^2$$

Durch Einsetzen von (1) und Integration von $x_0 = -d$ bis $x_1 = 0$ ergibt sich daraus:

$$2F \log \frac{v_1}{v_0} + \frac{W}{2v_0^2} \left(\frac{v_0^2}{v_1^2} - 1 \right) = -\frac{5}{6} \hat{\sigma} B_1^2 d \quad (5)$$

wo $\hat{\sigma}$ ein Zwischenwert von σ aus dem Bereich $x_0 \leq x \leq x_1$ ist.

Setzt man $v_1 - v_0 = \Delta v$, so ist $\frac{\Delta v}{v_0}$ die relative Änderung von v und es ist $\frac{v_1}{v_0} = 1 + \frac{\Delta v}{v_0}$. Für den Fall, daß diese klein bleibt, kann man die in (5) auftretenden Funktionen entwickeln und beim linearen Glied abbrechen:

II. Thermodynamische Umformungen Abschnitt 4.

$$\log \frac{v_1}{v_0} = \log \left(1 + \frac{\Delta v}{v_0} \right) = \frac{\Delta v}{v_0} + \dots,$$

$$\left(\frac{v_0^2}{v_1^2} - 1 \right) = \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{v_0}} - 1 \right) = - \frac{2\Delta v}{v_0} + \dots \quad (1)$$

In (5) eingesetzt ergibt dies:

$$\left(2F - \frac{W}{v_0^2} \right) \frac{\Delta v}{v_0} = - \frac{5}{6} \hat{6} B_1^2 d \quad (2)$$

Nach (2) und (3) erfüllen F und W die Beziehungen

$$F = \rho_0 v_0, \quad W = \frac{5}{2} \rho_0 v_0 + \frac{1}{2} \rho_0 v_0^3 \quad (3)$$

Hiermit und mit $c_0^2 = \frac{5}{3} \frac{p_0}{\rho_0}$ bzw. $p_0 = \frac{3}{5} \rho_0 c_0^2$ erhält man schließlich:

$$B_1^2 d = \frac{9}{5} \frac{F}{\hat{6}} \left(\left(\frac{c_0}{v_0} \right)^2 - 1 \right) \frac{\Delta v}{v_0} \quad (6)$$

Gemäß ihrer Ableitung gilt (6) nur für $\frac{\Delta v}{v_0} \ll 1$, also gerade für den Fall geringer Strömungsveränderung, an dem man auch interessiert ist. Außer von B_1 hängt die Wirkung des Streufelds auch von d ab und B_1 kann umso größer sein, je kleiner d ist. Für $v_0 < c_0$ ist nach (6) $\frac{\Delta v}{v_0}$ positiv, für $v_0 > c_0$ dagegen negativ, wie im homogenen Feld (Abschn.5, 1. Fall) wird also Unterschall beschleunigt, Überschall gebremst.

Nahe bei $v_0 = c_0$ ist die Wirkung des Streufelds am stärksten, d.h. $B_1^2 d$ muß sehr klein sein, damit dies auch für $\frac{\Delta v}{v_0}$ gilt. Um aber überhaupt stationäre Lösungen für den Bereich rechts von x_1 zu bekommen, muß nach Abschn.5 v_1 stark von der Schallgeschwindigkeit c_1 abweichen, d.h. auch v_0 stark von c_0 , und dann sind nach (6) auch große Werte von B_1^2 zulässig.

oder:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_p = - \frac{T}{\rho^2} (c_p - c_v) \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_p \quad (6b)$$

II. Thermodynamische Umformungen zu Abschnitt 4.

$$a) \quad ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p d\rho + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho dp \quad (1)$$

Hieraus folgt mit $c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ ($ds = 0$ setzen):

$$c^2 = -\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p / \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p / c^2 \quad (2)$$

In (1) eingesetzt ergibt dies:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p \left(dp - \frac{d\rho}{c^2}\right) \quad (3)$$

Nun wird $\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p$ durch leichter meßbare Materialkoeffizienten ersetzt. Mit

Metall $Tds = \frac{dq_{rev}}{T}$ folgt:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho = \frac{c_v}{T}, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{c_p}{T} \quad (8)$$

Hiermit und mit (2) gilt:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p = \frac{c_p}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p, \quad (4)$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p}{c^2} = \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_\rho = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = \frac{c_v}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \quad (5)$$

Nach dem zweiten Hauptsatz gilt:

$$c_p - c_v = -\frac{T}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \cdot \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (6a)$$

oder:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = -\frac{T}{\rho^2 (c_p - c_v)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p \quad (6b)$$

Mit (6b) und mit $(\frac{\partial T}{\partial \rho})_p$ aus (4) ergibt (5):

$$-\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p = -\frac{c^2 c_v T}{T \rho^2 (c_p - c_v) \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p}$$

oder $\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p = \pm \frac{c}{\rho} \sqrt{\frac{c_p}{(\gamma-1)T}}$ mit $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. (7)

Wegen $v = \frac{1}{\rho}$ gilt $\left(\frac{\partial s}{\partial \rho}\right)_p = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_p$

Nimmt bei $p = \text{const}$ v zu, so muß Wärme zugeführt werden und damit die Entropie zunehmen, andernfalls könnte sich ein bei konstantem Druck abgeschlossenes Gas unter Wärmeabgabe ausdehnen. $(\frac{\partial s}{\partial v})_p$ ist daher positiv, $(\frac{\partial s}{\partial \rho})_p$ negativ und in (7) gilt das -Zeichen.

Hiermit wird aus (1) bzw. (3):

$$T ds = \frac{c}{\rho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \left(\frac{dp}{c^2} - dp\right) \quad (8)$$

b) $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho dp + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p d\rho$

Nach (4), (5) und (7) ist $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho = \frac{1}{\rho c c_v} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}}$,

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p = \frac{c}{\rho c_p} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}}$$

daher $dT = \frac{c}{c_p \rho} \sqrt{\frac{c_p T}{\gamma-1}} \left(\frac{dp}{c^2} - \frac{d\rho}{\rho}\right)$ oder mit (8)

$$dT = \gamma \frac{T ds}{c_p} + \frac{c}{c_p} (\gamma-1) \frac{d\rho}{\rho} \quad (9)$$

(2) mit (3) liefert den Zusammenhang

$$v = \frac{5}{8F} \left(P - \frac{B^2}{2\mu}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8F} \left(P - \frac{B^2}{2\mu}\right)\right)^2 + \frac{EB}{2\mu F} - \frac{W}{2F}}$$

zwischen v und B , der für eine Intervallfolge verschiedener B ausgewertet wurde. Er ergibt mit

III. Numerisches Beispiel zur "elektromagnetischen Lavaldüse".

(Gleichungshinweise beziehen sich auf den Hauptteil).

Aus praktischen Gründen darf die Dichte des elektrischen Stroms den Wert $5 \cdot 10^5 \text{ A/m}^2$ nicht überschreiten. Im kritischen Punkt x_K ist:

$$j_K = \sigma_K (E - v_K B_K) = \frac{3}{2} \sigma_K v_K B_K = \frac{3}{2} \sigma_K c_K B_K$$

(wegen (25) und $v_K = c_K$). Nun ist bei gegebener Temperatur c_K umso kleiner, je schwerer das verwendete Gas ist. Daher wurde zur Berechnung Argon mit dem Atomgewicht 40 genommen. Bei $T_K = 8 \cdot 10^3 \text{ OK}$ und $\sigma(T_K) \approx 4 \cdot 10^3 (\Omega \text{ m})^{-1}$ ist mit $B_K = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 4 \cdot 10^2 \text{ Gau\ss}$ die obige Bedingung gerade eingehalten.

Gl.(28a) ist erfüllt, wenn $p_K < 4,78 \cdot 10^2 \text{ kg/m sec}^2$. Genommen wurde der Wert $p_K = 10^2 \text{ kg/m sec}^2$.

Bei $8 \cdot 10^3 \text{ OK}$ ist Argon praktisch noch nicht ionisiert. Daher wurde mit $p/\rho = kT/m_0$ gerechnet. (Bei vollständiger Ionisation würde bei T noch ein Faktor 2 hinzutreten).

Mit $v_K = c_K = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{p_K}{\rho_K}}$ und $E = \frac{5}{2} v_K B_K$ hat man so bei x_K die folgenden Ausgangswerte:

$T_K = 8 \cdot 10^3 \text{ OK}$	$B_K = 4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$
$p_K = 10^2 \text{ kg/m sec}^2$	$\rho_K = 0,61 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3$
$v_K = 1,66 \cdot 10^3 \text{ m/sec}$	$E = 1,66 \cdot 10^3 \text{ V/m}$
$\sigma_K \approx 4 \cdot 10^3 (\Omega \text{ m})^{-1}$	

Hiermit sind F, P und W festgelegt. Die weitere Rechnung erfolgte nach Gl.(1)-(4).

(2) mit (3) liefert den Zusammenhang

$$v = \frac{5}{8F} \left(P - \frac{B^2}{2\mu} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8F} \left(P - \frac{B^2}{2\mu} \right) \right)^2 + \frac{EB}{2\mu F} - \frac{W}{2F}}$$

zwischen v und B, der für eine Intervallfolge verschiedener B ausgewertet wurde. Er ergibt mit

$$P - \frac{B^2}{2\mu} = \rho v^2 + p = \rho(v^2 + p/\rho) = \rho(v^2 + \frac{3}{5}c^2)$$

und mit $F = \rho v$:

$$v - \frac{5}{8v}(v^2 + \frac{3}{5}c^2) = \frac{3}{8v}(v^2 - c^2) = \pm \sqrt{\left(\frac{5}{8F}\left(P - \frac{B^2}{2\mu}\right)\right)^2 + \frac{EB}{2\mu F} - \frac{W}{2F}}$$

Das + Zeichen gilt für $v > c$, das - Zeichen für $v < c$.

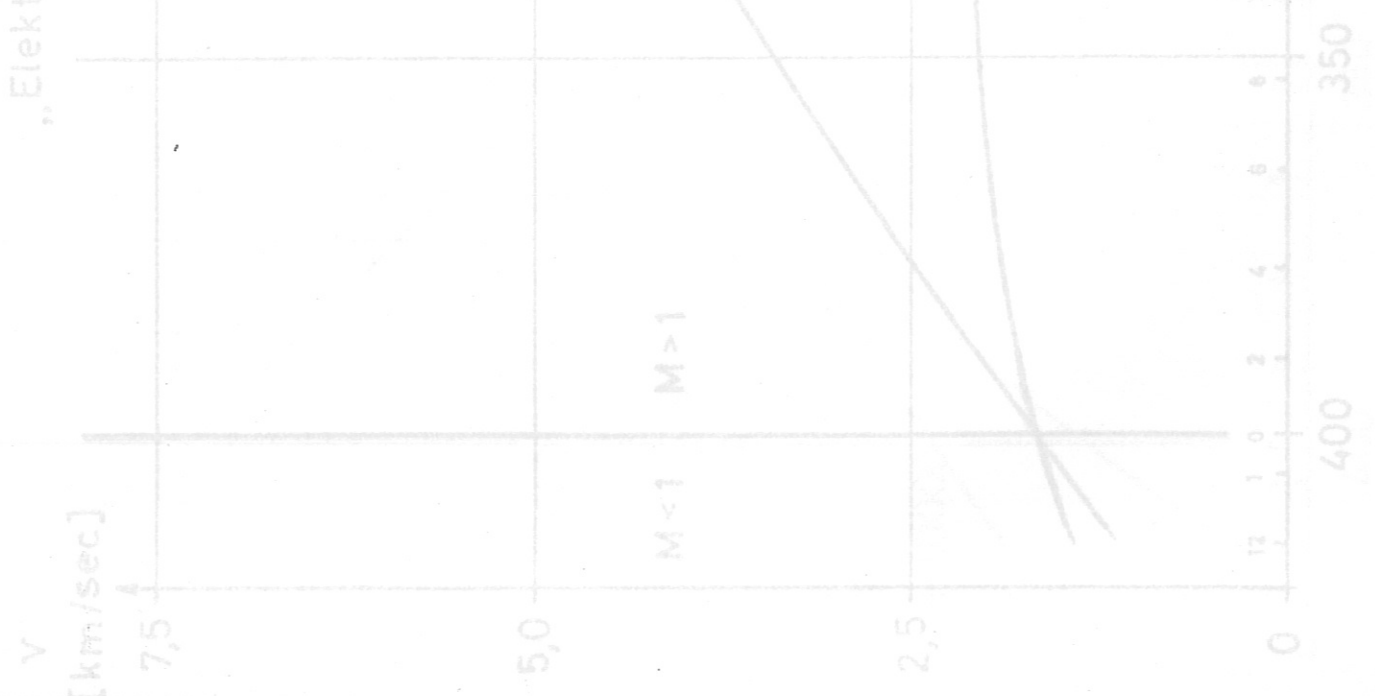
Um den Verlauf der Fig.7 zu erhalten, war daher links von x_K das - Zeichen, rechts das + Zeichen zu nehmen.

Aus (1) und (2) ergaben sich im Anschluß daran die Werte von p und ρ , hieraus T , c und $M = \frac{v}{c}$. Gl.(4) wurde benutzt, um den von der Strömung zurückgelegten Weg Δx zu berechnen, wenn sich B um ΔB geändert hat:

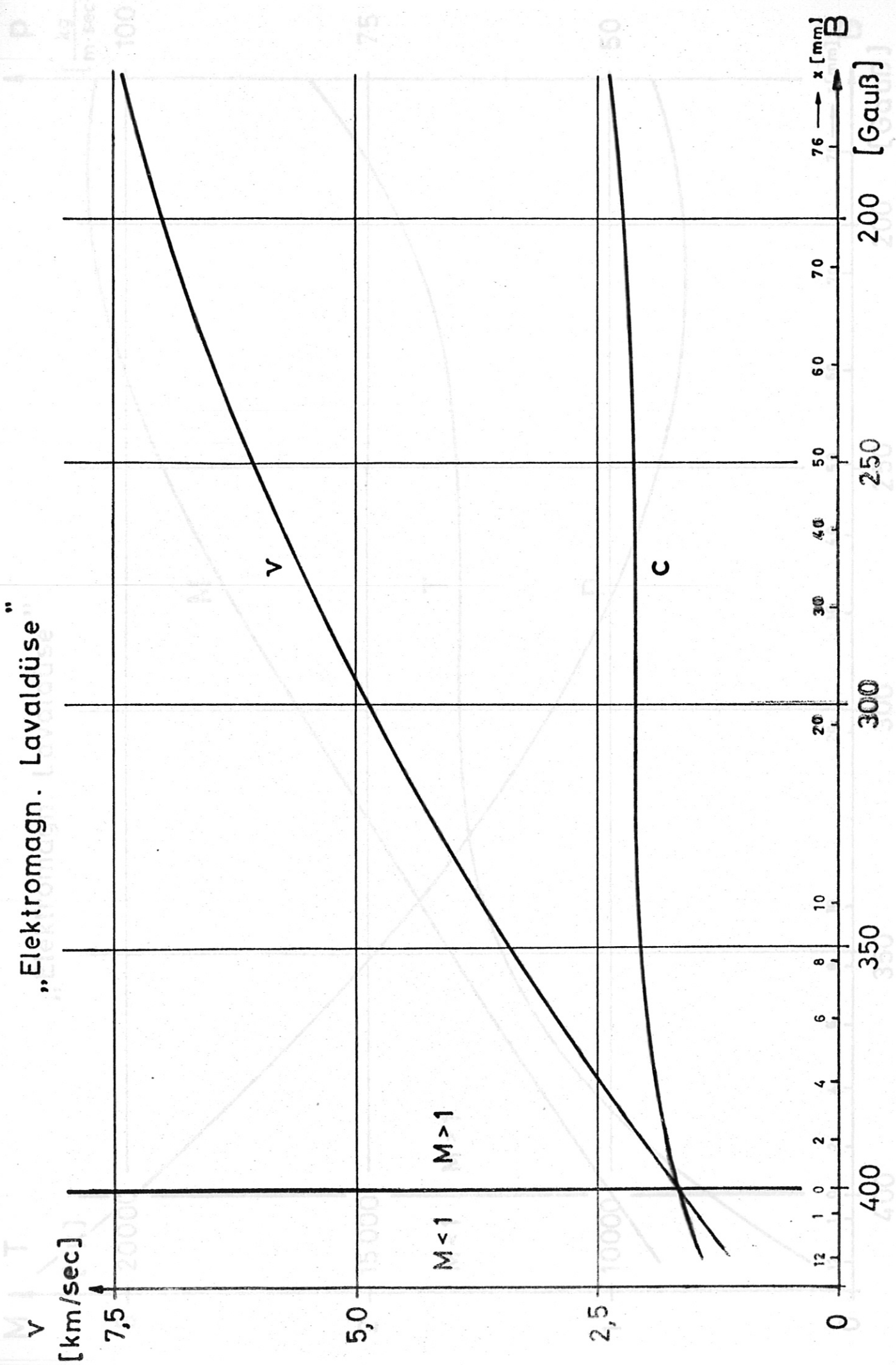
$$\Delta x = \Delta B/B = \mu \delta(vB - E)/B$$

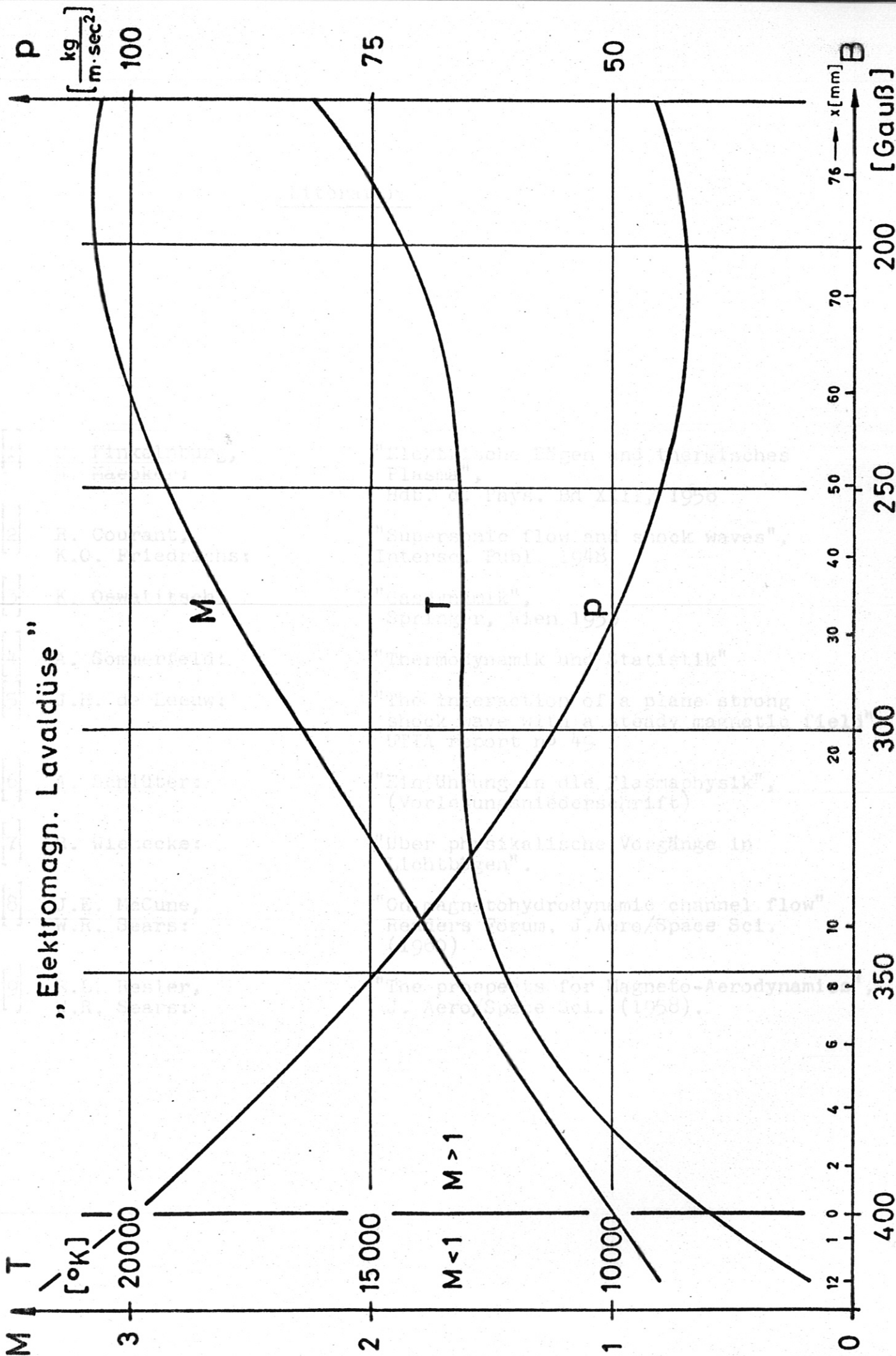
6(T) wurde einer graphischen Darstellung aus [7] entnommen, die allerdings für andere Drucke als hier gilt. Daher ist die x-Skala der folgenden Diagramme weniger zuverlässig und gibt nur etwa die Größenordnung richtig an.

„Elektromagn. Lavaldüse“



„Elektromagn. Lavaldüse“





Literatur

- [1] W. Finkelburg,
H. Maecker: "Elektrische Bögen und thermisches Plasma",
Hdb. d. Phys. Bd XXII, 1956
- [2] R. Courant,
K.O. Friedrichs: "Supersonic flow and shock waves",
Intersc. Publ. 1948
- [3] K. Oswatitsch: "Gasdynamik",
Springer, Wien 1953
- [4] A. Sommerfeld: "Thermodynamik und Statistik"
- [5] J.H. de Leeuw: "The interaction of a plane strong
shock wave with a steady magnetic field"
UTIA report no 49
- [6] A. Schlüter: "Einführung in die Plasmaphysik",
(Vorlesungsniederschrift)
- [7] R. Wienecke: "Über physikalische Vorgänge in
Lichtbögen".
- [8] J.E. McCune,
W.R. Sears: "On magnetohydrodynamic channel flow"
Readers Forum. J.Aero/Space Sci.
(1960)
- [9] E.L. Resler,
W.R. Sears: "The prospects for Magneto-Aerodynamics",
J. Aero/Space Sci. (1958).