

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

ZUR AUFHEIZUNG EINES INHOMOGENEN PLASMAS
MIT ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN

Heinrich Hora

IPP-6/5

Juli 1963

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

1) Einleitung

Läßt man eine elektromagnetische Welle der Frequenz ω aus dem Vakuum gegen ein Plasma anlaufen, so wird man wegen der Brechzahländerung stets eine Reflexion der Welle erwarten. Ist die Plasmafrequenz ω_p größer als ω , so wird eine Absorption der Welle stattfinden, ist jedoch ω größer als ω_p , so erhält man unter bestimmten Bedingungen absorptionsfreie Verhältnisse. Eine Frage ist nun, wie man durch eine geeignete Wahl des lokalen Brechzahlverlaufes mit der Welle möglichst viel Energie in das Plasma hineinpumpen kann, und in welchem Maße es möglich ist, durch eine sehr kleine Änderung des Brechzahlverlaufes diese Energie im Plasmainternen zur Absorption zu bringen. Die Frage des Eindringens von transversalen Wellen tritt in der Plasmaphysik auch in anderem Zusammenhang auf ¹⁾, bei der Ionisation von Plasma mit Mikrowellen, bei der Diskussion der Plasmagrenzschicht an Raumschiffantennen ²⁾ und in der Plasma-diagnostik, wobei u.a. numerische Berechnungen das Eindringen von elektromagnetischen Wellen in Plasmen aufgrund der ortsvariablen Brechzahl gut vor Augen führten ³⁾.

Zur theoretischen Behandlung einer transversalen elektromagnetischen Welle in einem inhomogenen Medium bieten sich grundsätzlich verschiedene Methoden an. In zahlreichen Arbeiten über die Wellenreflexion an der Ionosphäre wurde die strahlenoptische Näherung oder eine Näherung durch Zerlegung in dünne Bereiche konstanter Brechzahl und Aufsummation der Reflexion nach den Fresnelschen Formeln ⁴⁾ angewandt. Diese Methoden hatten vor allem den praktischen Vorteil, daß vorgegebene Verläufe der Brechzahl in annehmbarer Weise untersucht werden konnten. Daneben wurde die Methode, strenge Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen zu erhalten, verhältnismäßig selten angewandt, da übersichtliche Lösungen nur für spezielle, praktisch oft uninteressante Brechzahlverläufe erhältlich waren. Durch diese strengen Lösungen hat sich jedoch - verhältnismäßig spät für dieses umfangreiche Arbeitsgebiet - ein merkwürdiges Ergebnis herausgestellt. Bei den erstgenannten Methoden ergab sich eine

im inhomogenen Medium kontinuierlich ablösende reflektierte Welle, so daß man eine "lokale Reflexion" definieren konnte ⁵⁾, und die gesamte reflektierte Intensität integral über das Medium aufsummiert werden mußte ⁴⁾. Dagegen zeigte sich bei der strengen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen, daß im Inneren des inhomogenen Mediums der Poyntingsche Vektor konstant blieb ^{6) 7)}, ein Ergebnis, das ein Experte auf dem Gebiet der Anwendung der erstgenannten Methoden nur im Konjunktiv referieren zu können glaubte ⁸⁾. Die inzwischen bekannt gewordenen kritischen Bemerkungen zum Poyntingschen Vektor ⁹⁾ sollen an dieser Stelle nicht weiter in die Diskussion einbezogen werden.

Während der Beweis der Konstanz des Poyntingvektors bei Osterberg ⁷⁾ für sehr allgemeinen Brechzahlverlauf aus den allgemeinen Eigenschaften der Lösungen der Riccatischen Differentialgleichung zu entnehmen war, welche in bekannter Weise durch Umformulierung der Wellengleichung erhältlich ist, war in der im weiteren mit (I) zitierten Arbeit ⁶⁾ die besagte Konstanz nur für einen speziellen Fall des Brechzahlverlaufes gezeigt worden. In diesem Fall, der übersichtliche analytische Lösungen ermöglichte, wurde auch gezeigt, daß eine Reflexion an einer Stelle auftreten kann, an der der Brechzahlverlauf nicht analytisch (d.h. beliebig oft differenzierbar) ist. Speziell wurde der stetige Übergang der Brechzahl von einem Bereich konstanter Brechzahl in den des berechneten Falles untersucht. Dabei interessierte nur zu zeigen, daß bei Wahl eines genügend geringen Anstiegs der Brechzahl im inhomogenen Medium die Reflexion an der Übergangsstelle zum homogenen Medium beliebig klein gehalten werden kann.

In der vorliegenden Arbeit interessiert der stetige Übergang der Brechzahl von einem konstanten Wert (Vakuum oder nichtionisiertes Gas) in den eines örtlich abnehmenden Verlaufes, wie es einem Plasma mit örtlich zunehmender Elektronenkonzentration entspricht. Da wir den Fall eines absorbierenden Mediums zunächst ausschließen wollen, soll die Elektronenkonzentration nur bis zu derjenigen Höhe ansteigen, daß die zugehörige Plasmafrequenz ω_p der Frequenz der eingestrahlten Welle entspricht. Es wird dann besonders interessieren, welche Größe die Reflexion an der Grenzfläche und welche Eigenschaften die Welle im inhomogenen Medium hat.

2) Allgemeine Betrachtungen

Im folgenden sollen ebene elektromagnetische Wellen der harmonischen Frequenz ω betrachtet werden, die sich in einem Halbraum mit Vakuumlichtgeschwindigkeit senkrecht auf dessen ebene Begrenzungsfläche zu oder von ihr wegbewegen. An den Halbraum soll sich ein Plasma anschließen, dessen Elektronendichte N [cm^{-3}] nur vom Abstand x von der Begrenzungsebene abhängen und für $x \rightarrow 0$ in noch näher anzugebenderweise gegen Null gehen soll. Die Elektronendichte N soll mit x monoton auf den Wert N_0 ansteigen, dem eine Plasmafrequenz

$$(1) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N}{m_e}} = 5,70 \cdot 10^4 \sqrt{N} \text{ [sec}^{-1}] \quad \text{mit } \omega_p(N_0) = \omega$$

entspricht (mit der Elektronenmasse m_e und -ladung e in cgs.-Einheiten). Setzt man voraus, daß im Plasma ohne elektromagnetische Welle das Magnetfeld verschwindet und die Massengeschwindigkeit des Plasmas gleich Null ist, dann ist von den magneto-hydrodynamischen Gleichungen¹⁰⁾ die Diffusionsgleichung

$$(2) \quad \frac{4\pi}{\omega_p^2} \left(\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} + \gamma \mathcal{J} \right) = \mathcal{E}$$

vorauszusetzen. Die Stoßfrequenz γ im Plasma soll im folgenden gleich Null gesetzt werden. Zusammen mit den Maxwell'schen Gleichungen

$$(3) \quad \nabla \times \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$(4) \quad \nabla \times \mathcal{H} = \frac{4\pi}{c} \mathcal{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

erhält man dann die Wellengleichung¹¹⁾

$$(5) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$$

die mit (2) und der Voraussetzung $\gamma = 0$ sowie der vorausgesetzten Zeitabhängigkeit

$$(6) \quad \mathcal{E} = n e^{-i\omega t}$$

$$(7) \quad \mathcal{H} = f e^{-i\omega t}$$

mit n und f als nur ortsabhängige Faktoren von \mathcal{E} und \mathcal{H} zu der Gleichung

$$(8) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = 0$$

führt. Diese Gleichung kann man dann als eine Wellengleichung mit einer Brechzahl

$$(9) \quad n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{3,25 \cdot 10^7}{\omega^2} N$$

ansprechen, wenn in der Zerlegung

$$(10) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = \nabla \nabla \cdot \mathcal{E} - \Delta \mathcal{E}$$

auf der rechten Seite das erste Glied verschwindet. Letzteres trifft zu, da aus der Raumladungsfreiheit im Plasma ($\nabla \cdot \mathcal{D} = 0$)

$$(11) \quad \nabla \cdot \mathcal{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{E} \cdot \nabla \epsilon$$

folgt und wegen der Koppelung der Dielektrizitätskonstanten mit der Brechzahl, $\epsilon = n^2$, $\nabla \epsilon$ und \mathcal{E} senkrecht sind, wenn die magnetische Permeabilität μ_0 gleich der Vakuumpermeabilität ist, denn die Fortschrittingsrichtung der elektromagnetischen Welle soll parallel zur x -Richtung sein, in welche allein N und damit n bzw. ϵ ortsabhängig sein sollen. Unter diesen Bedingungen kann man den Zustand der elektromagnetischen Welle im Plasma wie in einem inhomogenen Medium mit einer stetig vom Ort abhängigen Brechzahl n durch folgende Wellengleichungen beschreiben

$$(12) \quad \Delta \mathcal{E} - \frac{n^2}{c^2} \ddot{\mathcal{E}} = 0$$

$$(13) \quad \Delta \mathcal{Y} - \frac{1}{n^2} \{ (\nabla n^2) \cdot (\nabla \mathcal{Y}) - (\nabla \mathcal{Y}) \cdot \nabla n^2 \} - \frac{n^2}{c^2} \ddot{\mathcal{Y}} = 0$$

Letztere Gleichungen folgen aus Maxwell'schen Gleichungen mit verschwindender Leitfähigkeit ($\sigma = 0$) und veränderlichem ϵ und können unter den genannten Voraussetzungen, insbesondere Gl. (11), mit den Gleichungen (2) bis (4) als äquivalent angesehen werden.

Für den Verlauf der Elektronenkonzentration N in Abhängigkeit von der x -Koordinate wird im folgenden stets die spezielle Form mit positiv reellem α angenommen:

$$(14) \quad N(x) = \begin{cases} \frac{\omega^2 \alpha x}{3,25 \cdot 10^7} \frac{\alpha x + 2}{(1 + \alpha x)^2} & [\text{cm}^{-3}] \text{ für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Wie man sieht, ist $N(0) = 0$ und für $x \rightarrow \infty$ eine einer Plasmafrequenz $\omega_p(N_0) = \omega$ entsprechende Teilchendichte erreicht. In $x = 0$ schließt das Plasma an das homogene Medium mit Vakuumlichtgeschwindigkeit unter stetigem Verlauf der Elektronenkonzentration an. Nach (9) entspricht dieser Verlauf einer Brechzahlabhängigkeit

$$(15) \quad n = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \\ 1 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Wenn man das kartesische Koordinatensystem so wählt, daß in (6) und (7)

$$(16) \quad \mathbf{n} = \{0; e_y; 0\}$$

$$(17) \quad \mathbf{f} = \{0; 0; h_z\}$$

wird und die Komponenten der Vektoren nur von x abhängen, erhält man wie in (I) für die Komponenten nach (12) und (13) Gleichungen

$$(18) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} e_y + \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x) e_y = 0$$

$$(19) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} h_z - \frac{1}{n^2(x)} \left(\frac{\partial}{\partial x} n^2(x) \right) \frac{\partial}{\partial x} h_z - \frac{\omega^2}{c^2} n^2(x) h_z = 0$$

mit der Koppelungsbeziehung

$$(20) \quad -i\omega\mu_0 h_z = -\frac{\partial}{\partial x} e_y$$

Im inhomogenen Medium ($x \geq 0$) ergibt sich dann wie in (I) für eine höchstens in die positive x -Richtung fortschreitende Welle die Lösung mit der skalaren (komplexen) Amplitude \mathcal{Q}'' und den Einheitsvektoren \hat{i}_2 und \hat{i}_3

$$(21) \quad \mathcal{E}'' = \mathcal{Q}'' \hat{i}_2 (1+\alpha x)^{\frac{1}{2}} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{4}} \frac{\log(1+\alpha x)}{\alpha}} e^{-i\omega t}$$

$$(22) \quad \mathcal{H}'' = \mathcal{Q}'' \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left\{ \sqrt{1 - \frac{c^2 \alpha^2}{\omega^2}} - i \frac{c}{\omega} \frac{\alpha}{2} \right\} \hat{i}_3 (1+\alpha x)^{\frac{1}{2}} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{4}} \frac{\log(1+\alpha x)}{\alpha}} e^{-i\omega t}$$

Dabei wurde die Influenzkonstante ϵ_0 mit $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ verwendet. Der Übergang in die homogene Welle bei verschwindender lokaler Brechzahlvariation

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{4}} \frac{\log(1+\alpha x)}{\alpha}} = e^{i\frac{\omega}{c}x}$$

wurde bereits in (I) gezeigt.

In der Formulierung (21) und (22) sind alle Fälle für $\alpha > 0$ enthalten, d.h. auch solche, in denen die α enthaltenden Quadratwurzeln imaginär werden. Im einzelnen ist dann zu unterscheiden

$$(23) \quad \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{4} = \begin{cases} > 0 & \text{Fall 1} \\ = 0 & \text{Fall 2} \\ = -\beta^2 < 0 & \text{Fall 3} \end{cases} \quad (\beta > 0, \text{ reell})$$

Im Fall 1 hat die Welle im inhomogenen Medium den Charakter der in (I) beschriebenen inhomogenen Welle. Es ist lediglich zu beachten, daß jetzt die Welle gegen ein "weiches" Medium mit abnehmender Brechzahl ($\alpha > 0$) anläuft, und daß dann neben dem Phasenunterschied zwischen \mathcal{E}'' und \mathcal{H}'' (vergl. die geschwungene Klammer in (22)) und neben dem Längerwerden der Wellenlänge eine Zunahme der Gesamtamplitude von \mathcal{E}'' auf Kosten der Abnahme von \mathcal{H}'' zu beobachten ist, so daß der zeitliche Mittelwert des Poyntingschen Vektors mit dem Einheitsvektor \hat{i}_1

$$(24) \quad \bar{\mathcal{S}}'' = \lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} \mathcal{E} \times \mathcal{H} dt = \frac{1}{2\omega} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{1 - \frac{c^2 \alpha^2}{\omega^2}} |\alpha''|^2 \hat{i}_1$$

konstant bleibt.

Im Fall 2 vereinfachen sich die Lösungen zu

$$(25) \quad \mathcal{E}'' = \alpha'' \hat{i}_2 \left(1 + \frac{2\omega}{c} x\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}$$

$$(26) \quad \mathcal{H}'' = -\alpha'' \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{i}_3 \left(1 + \frac{2\omega}{c} x\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega t}$$

Die Vektoren \mathcal{E}'' und \mathcal{H}'' sind um 90° phasenverschoben. Die Gesamtamplitude $|\mathcal{E}''|$ steigt mit zunehmender Tiefe im inhomogenen Medium gegen Unendlich, während die von \mathcal{H}'' gegen Null geht. Der Poyntingsche Vektor hat einen verschwindenden zeitlichen Mittelwert

$$(27) \quad \bar{\mathcal{S}}'' = 0$$

Im Fall 3 findet man nach (23)

$$(28) \quad \mathcal{E}'' = \alpha'' \hat{i}_2 (1 + \alpha x)^{\frac{1}{2}} e^{-\beta \frac{\log(1+\alpha x)}{\alpha}} e^{-i\omega t}$$

$$(29) \quad \mathcal{H}'' = \alpha'' \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{i}_3 \left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{c}{\omega} (1 + \alpha x)^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta \frac{\log(1+\alpha x)}{\alpha}} e^{-i\omega t}$$

Anhand des Faktors β im Exponenten der e -Funktionen ersieht man ein Abklingen von \mathcal{E}'' und \mathcal{H}'' gegen Null mit zunehmender Eindringtiefe ins Plasma. \mathcal{E}'' und \mathcal{H}'' sind wie im Fall 2 im 90° phasenverschoben und in dieser Beziehung wie auch hinsichtlich der exponentiellen Abklingeigenschaft haben beide Fälle eine völlige Analogie zu den Wellen im weicheren Medium bei Totalreflexion, wobei im Fall 2 wie im Fall des Grenzwinkels der Totalreflexion im dünneren Medium \mathcal{E} und \mathcal{H} sehr tief eindringen sollten. Auch im Fall 3 zeigt sich

$$(30) \quad \bar{\mathcal{S}}'' = 0$$

Dieses Ergebnis sowie (27) für Fall 2 zeigt, daß hier nicht ein mit absorbierenden Medien vergleichbarer Fall vorliegt, in denen der Zeitmittelwert des Poyntingvektor wohl exponentiell gegen Null abklingt, aber grundsätzlich von Null verschieden ist.

3) Reflexion am Plasmarand

Wenn eine im Plasma normal von der Begrenzungsebene aus laufende ebene Welle mit stetigen Vektoren \mathcal{E} und \mathcal{Y} mit Wellen im homogenen Medium ($x < 0$) verbunden werden soll, so ist eine in die positive x -Richtung laufende

$$(31) \quad \mathcal{E} = \alpha \hat{i}_2 e^{i(\frac{\omega}{c}x - \omega t)}$$

$$(32) \quad \mathcal{Y} = \alpha \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{i}_3 e^{i(\frac{\omega}{c}x - \omega t)}$$

und eine nach $-x$ laufende (reflektierte) Welle

$$(33) \quad \mathcal{E}' = \alpha' \hat{i}_2 e^{i(\frac{\omega}{c}x + \omega t)}$$

$$(34) \quad \mathcal{Y}' = -\alpha' \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \hat{i}_3 e^{i(\frac{\omega}{c}x + \omega t)}$$

erforderlich. Stellt man die Amplituden der reflektierten Welle und der ins Plasma eindringenden Welle (21) & (22) mit reellen Amplituden- und Phasenfaktoren a' , a'' , δ' und δ'' dar

$$(35) \quad \alpha' = a' e^{i\delta'} \alpha$$

$$(36) \quad \alpha'' = a'' e^{i\delta''} \alpha$$

so ergibt sich für den Fall 1 (23) wie in (I) gezeigt wurde und unter Richtigstellung von Druckfehlern

$$(37) \quad \alpha' = \frac{\frac{c}{\omega} \frac{\alpha}{2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4}}} e^{i\frac{\pi}{2}} \alpha$$

$$(38) \quad \alpha'' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4}}}} e^{i \arccos \left[\frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4}}) \right]} \alpha$$

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4} < 1$

Für den Fall 2 (23) ergibt sich aus dem stetigen Übergang von \mathcal{E} und \mathcal{Y} bei $x=0$

$$(39) \quad \mathcal{E}(x=0) + \mathcal{E}'(x=0) = \mathcal{E}''(x=0)$$

$$(40) \quad \mathcal{Y}(x=0) + \mathcal{Y}'(x=0) = \mathcal{Y}''(x=0)$$

die Beziehung

$$(41) \quad \alpha + \alpha' = \alpha''$$

$$(42) \quad \alpha + \alpha' = -i\alpha''$$

womit nach (35) und (36) das Gleichungssystem

$$(43.1) \quad 1 + a' \cos \delta' = a'' \sin \delta''$$

$$(43.2) \quad -a' \sin \delta' = -a'' \cos \delta''$$

$$(43.3) \quad 1 + a' \cos \delta' = a'' \cos \delta''$$

$$(43.4) \quad a' \sin \delta' = a'' \sin \delta''$$

mit den Lösungen

$$(44) \quad a' = 1; \quad \delta' = \frac{\pi}{2}; \quad a'' = \sqrt{2}; \quad \delta'' = \frac{\pi}{4}$$

erhalten wird. Somit kann man den Fall 2 (23)

$$(45) \quad \alpha' = e^{i\frac{\pi}{2}} \alpha$$

$$(46) \quad \alpha'' = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \alpha \quad \left. \vphantom{(46)} \right\} \left(\frac{e^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4} = 1 \right)$$

mit seiner 100% Reflexion an der Grenzfläche des Plasmas als Grenzfall der Totalreflexion ansprechen, wie auch aus dem Verlauf von φ'' und ψ'' in diesem Fall im Plasmainneren (25) und (26) zu entnehmen war.

Im Fall 3 (23) $\left(\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4} > 1 \right)$ lautet das (43) entsprechende Gleichungssystem

$$(47.1) \quad 1 + a' \cos \delta' = a'' \cos \delta''$$

$$(47.2) \quad a' \sin \delta' = a'' \sin \delta''$$

$$(47.3) \quad 1 - a' \cos \delta' = a'' \sin \delta'' \frac{c}{\omega} \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$$

$$(47.4) \quad a' \cos \delta' = a'' \cos \delta'' \frac{c}{\omega} \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)$$

mit den Lösungen

$$(48) \quad \sin \delta'' = \frac{\frac{\alpha}{2} - \beta}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)^2}} \quad \cos \delta'' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}}$$

$$(49) \quad a'' = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}}$$

$$(50) \quad a' = 1$$

$$(51) \quad \cos \delta' = \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}{1 + \left(\frac{\alpha}{2} - \beta \right)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}$$

Somit findet auch in diesem Fall an der Plasmagrenzfläche Totalreflexion statt:

$$(52) \quad \alpha' = e^{i \arccos \left[\frac{1 - (\frac{\alpha}{2} - \beta)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}{1 + (\frac{\alpha}{2} - \beta)^2 \frac{c^2}{\omega^2}} \right]} \cdot \alpha$$

$$(53) \quad \alpha'' = \frac{2}{\sqrt{1 + (\frac{\alpha}{2} - \beta)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}} e^{i \arccos \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\alpha}{2} - \beta)^2 \frac{c^2}{\omega^2}}} \right]} \alpha$$

} $(\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\alpha^2}{4} > 1)$

wobei die reflektierte Welle einen komplizierten Phasensprung erleidet.

4) Elektronenkonzentration im Plasma

Die Betrachtungen wurden durchgeführt für den speziellen Verlauf der Elektronenkonzentration im Plasma nach Gl. (14). Es interessiert nun, wie dieser Konzentrationsverlauf für die verschiedenen Parameterwerte α ausfällt, nach denen, je nach der Fallunterscheidung (23), Totalreflexion oder partikuläre Reflexion der Welle eintritt, obgleich die Elektronenkonzentration bis zu einem solchen Wert ansteigt, daß die zugehörige Plasmafrequenz der der Welle entspricht. Wir führen als Beispiel für weitere Fälle den folgenden Fall durch: Die Frequenz der Welle sei $\nu = 90,76 \text{ Hz}$, was einer Vakuumwellenlänge von $\lambda_{vac} = 3,303 \text{ mm}$ entspricht. Es ergibt sich dann nach (14) eine Elektronenkonzentration

$$(54) \quad N(x) = 10^{16} \alpha x \frac{\alpha x + 2}{(1 + \alpha x)^2} \quad [\text{cm}^{-3}]$$

d.h. für $x \rightarrow \infty$ steigt die Konzentration auf 10^{16} cm^{-3} an. Der Parameterwert α , für den in Gl.(23) der Fall 2 (Grenzfall der Totalreflexion) erhalten wird, ist

$$(55) \quad \alpha_0 = \frac{2\omega}{c} = 38,0 \text{ cm}^{-1}$$

Für diesen Wert ist der Reflexionskoeffizient $\alpha' = 1$. In Abb. 1 ist N in Abhängigkeit von x mit Vakuumwellenlängen als Abszissenmaßstab eingetragen. Man sieht, daß der Verlauf der Konzentration mit einem sehr starken Knick in den des Vakuumbereiches einmündet. Ferner ist in Abb. 1 für einen zehnmal kleineren Parameterwert als der Grenzfall α_0 der Konzentrationsverlauf eingetragen und der zugehörige Reflexionskoeffizient $\alpha' = 0,12$ angegeben. Hieran sieht man, daß selbst noch mit einem verhältnismäßig großen Knick im Konzentrationsverlauf und mit einem schnellen Erreichen der Maximalkonzentration - bei einer Tiefe von einer Vakuumwellen-

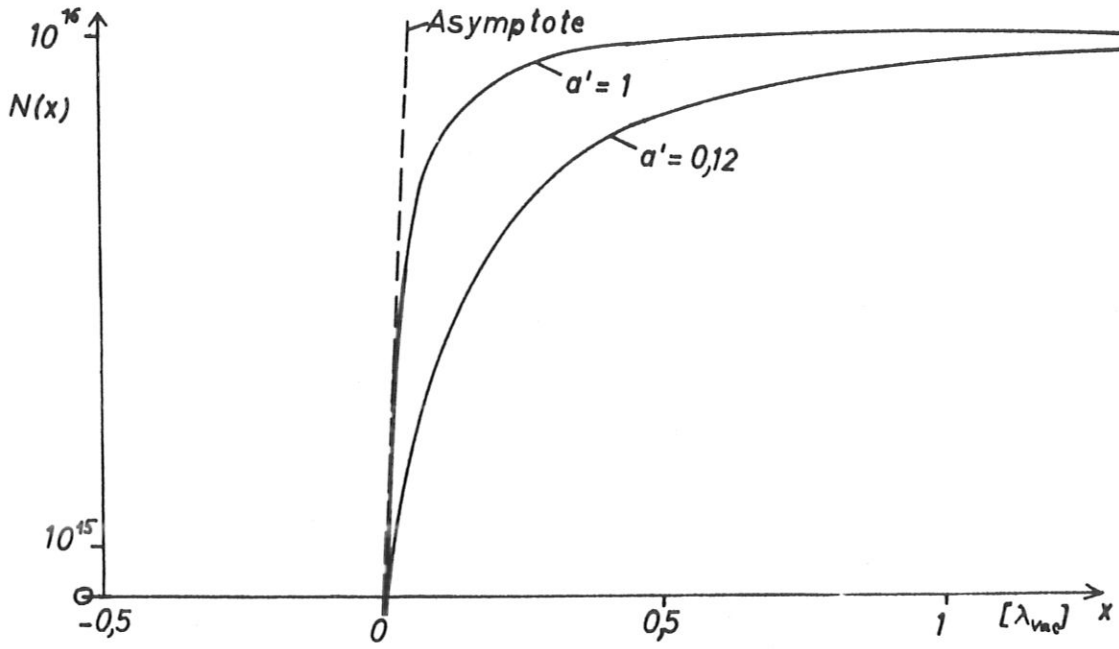


Abb. 1 Ortsabhängigkeit der Elektronenkonzentration für den Grenzfall der Totalreflexion ($a'=1$) und einen Fall partikulärer Reflexion mit einem Reflexionsfaktor $a'=0,12$.

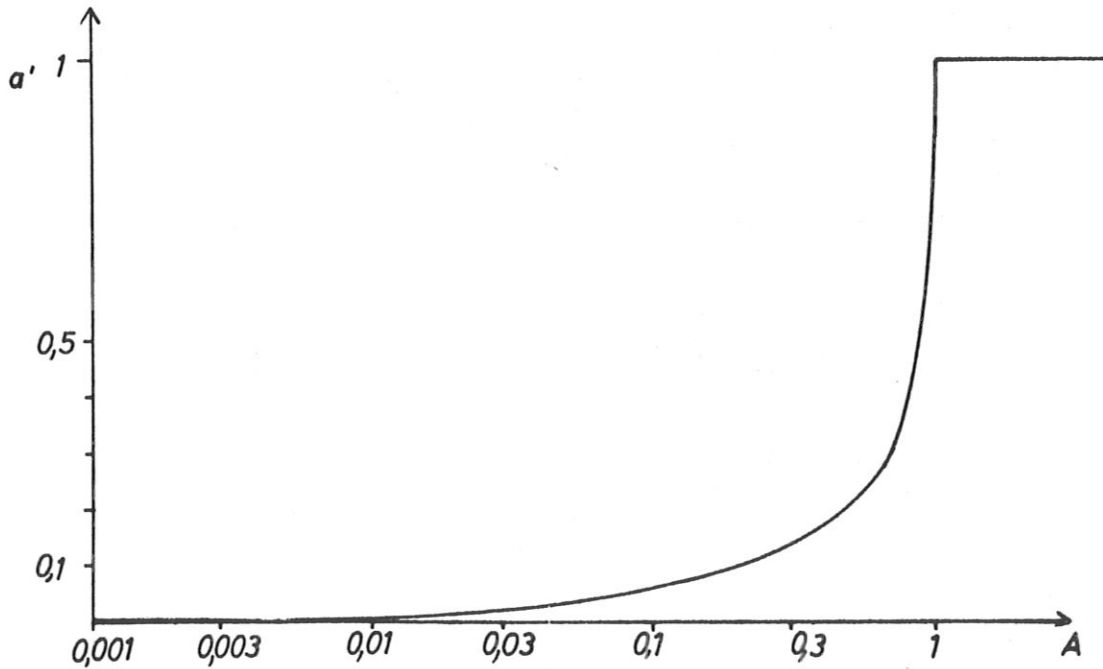


Abb. 2 Reflexionsfaktoren a' in Abhängigkeit von A nach Gl. (56)

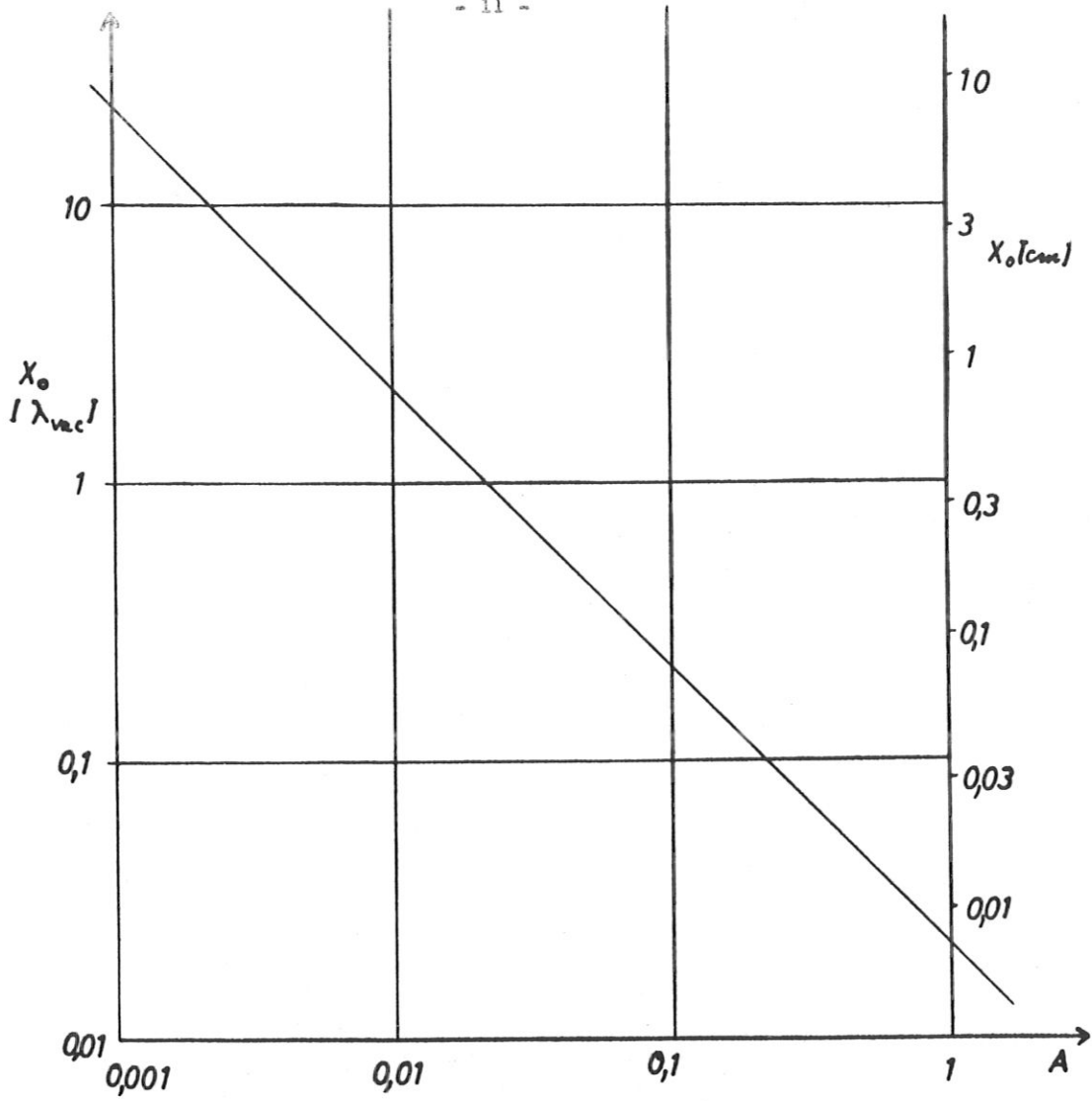


Abb. 3 Eindringtiefe x_0 bis zur halben Maximalkonzentration der Elektronen in Vakuumwellenlängen λ_{vac} oder cm (bei 90,7 GHz), in Abhängigkeit von A (Gl.(56)).

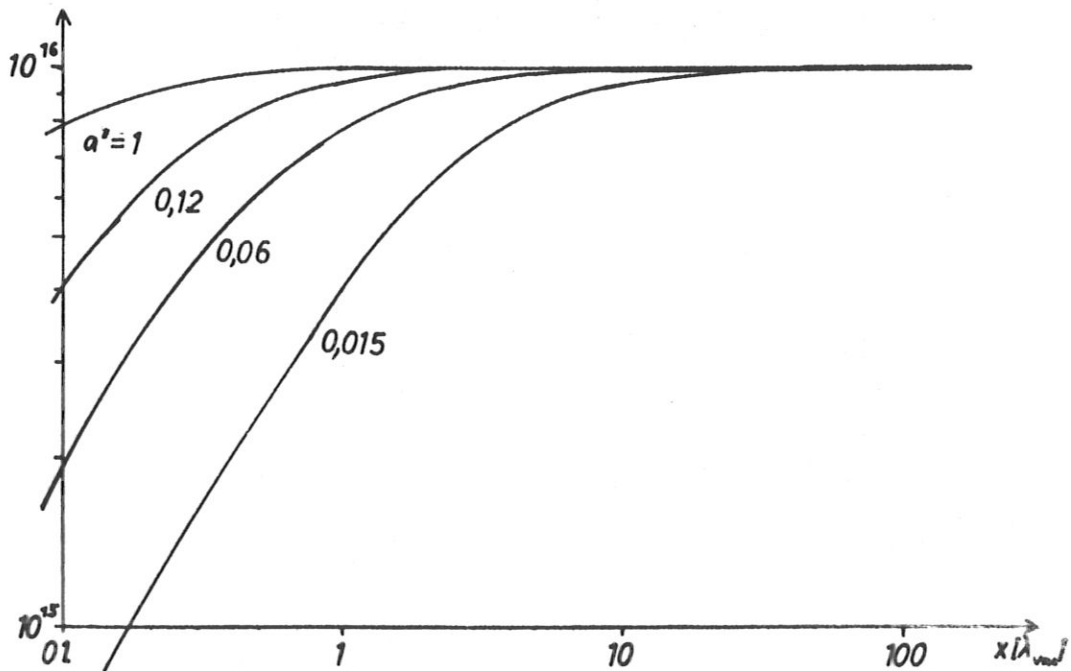


Abb. 4 Konzentrationsverläufe wie in Abb. 1 zur Demonstration, nach welcher Eindringtiefe (in Vakuumwellenlängen λ_{vac}) die Grenzkonzentrationen bis auf Bruchteile eines % erreicht sind.

länge sind bereits 95% dieser Konzentration erreicht - daß dann nur noch eine geringe Reflexion an dem Plasma wahrnehmbar ist.

Dieses Kleinwerden der Reflexion mit kleiner werdendem Parameter α ist in Abb. 2 dargestellt. Wenn A die Abweichung des Wertes α vom Grenzfall α_0 der Totalreflexion darstellt,

$$(56) \quad \alpha = A \alpha_0.$$

ergibt sich in Abb. 2 der Wert des Reflexionskoeffizienten nach (35) und (37) so, daß bei α von der Größe eines hundertstels von α_0 nur noch ca. 0,51% der einfallenden Welle, d.h. extrem wenig reflektiert wird. Daß diesem Fall immer noch ein verhältnismäßig steiler Anstieg der Elektronenkonzentration entspricht, ersieht man aus Abb. 3. Dort ist in Abhängigkeit von A die Tiefe x_0 angegeben, in der die halbe Grenzkonzentration, d.h. $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, erreicht sein müßte. Hat α einen Wert von 1% des Grenzfalles α_0 der Totalreflexion, bei dem die Reflexion schon extrem klein war, so ist die Tiefe bis zum Erreichen einer Elektronenkonzentration von $5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ nur wenige Vakuumwellenlängen.

Um einen Überblick zu bekommen, wie schnell für Fälle sehr geringer Reflexion die Endkonzentration von 10^{16} cm^{-3} erreicht wird, ist in Abb. 4 der Konzentrationsverlauf (nach (54) für die A -Werte 1 (Totalreflexion); 0,265; 0,1 und 0,0265 eingetragen und die Werte für die zugehörigen Reflexionskoeffizienten (1; 0,12; 0,06 bzw. 0,015 angegeben.

5) Folgerungen

Aus Abb. 4 ist zu entnehmen, daß man in das Plasma unter den angegebenen Bedingungen 88% der Amplitude der einfallenden Welle eindringen lassen kann, wenn man einen Konzentrationsverlauf der Elektronen verifizieren könnte, der durch den Parameter $\alpha' = 0,12$ gekennzeichnet ist. Man hätte dann also ein Plasma vor sich, dessen Elektronenkonzentration nach einer Tiefe von wenigen Vakuumwellenlängen bereits weniger als 1% von der Grenzkonzentration mit einer der Wellenfrequenz entsprechenden Plasmafrequenz verschieden wäre. In unseren Betrachtungen haben wir bisher den Fall ausgeschlossen, daß die Elektronenkonzentration den Wert

der Grenzkonzentration übersteigt und dann die Bedingungen eines absorbierenden Mediums für die Welle ergäbe. Man könnte sich leicht vorstellen, daß man bei einem Plasma mit 12% Reflexion ($a'=0,12$ in Abb. 4) in der Tiefe von einigen Vakuumwellenlängen sehr leicht die nur Bruchteile eines Prozents unter der Grenzkonzentration liegende Elektronendichte auf Werte über diese Grenzkonzentration erhöhen könnte, indem man z.B. Ultraschall auf das Plasma einwirken läßt. Die Welle im Plasma würde dann zwischen zwei Bäuchen der Ultraschallwelle gespiegelt und in beliebig kurz wählbarer Zeit absorbiert, nämlich wenn die Konzentration in den Bäuchen genügend wenig über der Grenzkonzentration läge. Bei diesem Prozeß brauchte man von den angeführten Voraussetzungen die der verschwindenden Stoßfrequenz nicht aufgeben, da bei der Absorption eine einfache Aufheizung der Elektronen denkbar wäre.

Wenn auch die spezielle Wahl des Konzentrationsverlaufes (14) nur nach mathematischen Gesichtspunkten erfolgte, und eine experimentelle Verwirklichung nach ganz anderen Gesichtspunkten ausfiele, so ist wenigstens prinzipiell gezeigt, wie ein Plasma, das in erster Näherung für Wellen von der Plasmafrequenz undurchdringlich ist, wohl innerlich aufgeheizt werden kann. Dieses prinzipielle Bild ist auch insofern unvollkommen, als gleichzeitig das Verschwinden eines äußeren Feldes \mathcal{E} bei gleichzeitigem Verschwinden einer Massengeschwindigkeit vorausgesetzt wird. Diese Bedingungen lassen sich zur Verwirklichung einer Begrenzung des Plasmas in der hier betrachteten Weise sicher schwer erfüllen. Die Frage des Einflusses der Sheathzone an der Plasmaoberfläche sowie viele weitere Fragen der Wechselwirkung der Wellen mit hydromagnetischen und elektrostatischen Wellen u.v.a. bleiben zunächst unerörtert. Der betrachtete Fall sollte jedoch ein spezielles Bild von einem vielleicht möglichen Aufheizprozeß liefern.

Schließlich soll noch ein Hinweis gegeben werden, daß das Ergebnis der Reflexionsfreiheit im Inneren des inhomogenen Plasmas auch die Vorgänge in einer Stoßwelle betreffen kann. Dort ist zwar die Voraussetzung verschwindender Massengeschwindigkeiten sehr kritisch, doch hat man ziemlich klar die Verhältnisse vorliegen, daß ein homogener Bereich (wohin die Stoßwelle noch nicht gekommen ist) mit einem inhomogenen Plasma mit stetigem

Brechzahlverlauf verbunden ist. Die vieldiskutierte Lage der Stoßfront und der Leuchtfrent¹²⁾, die sich durch schlierenoptische Methoden¹³⁾ günstig untersuchen zu lassen scheint, wurde auch durch Reflexion von Mikrowellen geprüft¹⁴⁾. Soweit damit Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt werden, ist der Ort der Reflexion nicht in erster Linie interessant, wenn jedoch der Ort der Reflexion untersucht wird, wird man daran denken müssen, daß die Reflexion wohl nicht im Plasmainneren stattfindet, sondern an der Grenzfläche zum homogenen Medium, und daß, wie unser spezielles Beispiel zeigte, im Fall partikulärer Reflexion nur der übliche Phasensprung von 90° für die reflektierte Welle zu erwarten ist, soweit man aufgrund der höchstmöglichen Elektronenkonzentrationen mit absorptionsfreien Wellenvorgängen zu rechnen angehalten ist.

6) Zusammenfassung

Es wird das Eindringen transversaler elektromagnetischer Wellen in ein Plasma geeigneten räumlichen Verlaufes der Elektronenkonzentration untersucht, wobei strenge Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen diskutiert werden. Das Plasma ist ein inhomogenes Medium, dessen Elektronenkonzentration N von einem Vakuumbereich her stetig und monoton bis zu einer solchen Höhe N_0 ansteigt, daß deren Plasmafrequenz der Frequenz der einfallenden Welle entspricht. Ist der Anstieg genügend stark, so erfolgt an der Grenzfläche zum Vakuum 100%ige Reflexion. Die Form der dann im inhomogenen Medium mit verschwindendem Poyntingvektor herrschenden Welle entspricht in vieler Beziehung der Welle im dünneren Medium bei üblicher Totalreflexion. Bei partikulärer Reflexion findet nur an der Vakuumgrenze, also nicht im Inneren des inhomogenen Mediums die Reflexion statt. Es zeigt sich, daß die Reflexion sehr klein ist, selbst wenn die Elektronenkonzentration bereits in der Tiefe einer Vakuumwellenlänge auf 95% der Endkonzentration N_0 ansteigt.

Ein Aufheizen der Elektronen erscheint insofern denkbar, als viel elektromagnetische Energie in das Plasma eindringen und durch nur sehr geringe periodische Dichteänderungen absorbiert werden kann.

Literatur

- 1) J.E. Drummond, Plasma Physics, McGraw-Hill, London 1961, p. 293 ff.
- 2) H.S. Glick, ARS Journal, 32 (1962) 1359
- 3) K. Hain, M. Tutter, Z. Naturforsch. 17a (1962) 59
- 4) K. Försterling, H. Lassen, Z. Techn. Phys. 12 (1931) 453
- 5) B. Beckmann, Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, 2. Aufl., Leipzig 1948
- 6) H. Hora, Jenaer Jahrbuch 1957, S. 131
- 7) H. Osterberg, J. opt. Soc. Amer. 48 (1958) 513
- 8) K. Rawer, Zentralbl. f. Math. u. Grenzgeb. 80 (1959) 209
- 9) F. Bopp, Phys. Verhandl. 14 (1963) 184
- 10) A. Schlüter, Z. Naturforsch. 5a (1950) 72
- 11) R. Lüst, Z. Astrophys. 37 (1955) 67
- 12) G. Brederlow, Congr. on Ionizat. Phänom. in Gases, Paris 1963
- 13) P. Jeanmaire, Phys. Verhandl. 14 (1963) 82
- 14) H. Klingenberg, E. Meder, Phys. Verhandl. 14 (1963) 81