

Homologielösungen zur Darstellung
von Vorgängen in Stoßwellenrohren.

- Literaturstudie -

H. Muntenbruch

IPP 3/7

August 1962

I N S T I T U T F Ü R P L A S M A P H Y S I K

G A R C H I N G B E I M Ü N C H E N

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Homologielösungen zur Darstellung
von Vorgängen in Stoßwellenrohren.

- Literaturstudie -

H. Muntenbruch

IPP 3/7

August 1962

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

I n h a l t

1. Einleitung
2. Mathematische Erfassung instationärer, starker, ebener Stoßfronten
3. "Block"-Modell und Homologieansatz
4. Allgemeine Ableitung des Homologieansatzes
5. Homologiegleichungen
6. Homologielösungen
7. Standardlösung
8. Lineare Lösungen
9. Die Stabilität der Standardlösung
10. Anwendbarkeit der Theorie auf Experimente
11. Schlußbemerkungen
12. Literaturverzeichnis.

1. Einleitung.

Experimentelle Untersuchungen an schnellen Stoßwellen versprechen nur dann Erfolg, wenn sie auf der Grundlage einer genügend richtigen Modellvorstellung unternommen werden. Diese setzt nicht nur eine möglichst gute Kenntnis des Antriebsmechanismus voraus, sondern auch eine Theorie, die die Bewegung der Stoßfront in ihrem weiteren Verlauf annähernd richtig beschreibt.

Während bei den in Membranrohren erzeugten Stoßwellen die Rankine-Hugoniot-Theorie wohl in genügender Näherung anwendbar ist, scheint dies bei elektromagnetisch erzeugten Wellen außerordentlich fraglich. Hier ist die zugrunde gelegte Stationarität der Plasmaparameter hinter der Stoßfront sicher nicht mehr gegeben.

Aus diesem Grunde ist es notwendig, sich nach einer anderen theoretischen Basis umzusehen, wenn Vorgänge in elektromagnetischen Stoßwellenrohren untersucht werden sollen. Die der "Blast-Wave-Theory" verwandten "Homologielösungen" könnten eine solche Grundlage darstellen. Deshalb soll im folgenden über sie berichtet werden.

Von 1953 an beschäftigte sich eine Arbeitsgruppe unter der Leitung von C.F. von Weizsäcker mit Problemen starker Stoßfronten. Ziel der Untersuchungen war die Aufstellung einer "Theorie der Turbulenzen im Überschallbereich", mit deren Hilfe sich verschiedene physikalische Probleme lösen lassen sollten. Die Arbeitsgruppe arbeitete nach etwa folgendem Programm:

- a) Behandlung starker, instationärer, ebener Stoßfronten, die in ein ruhendes Vorland konstanter Dichte hineinflaufen.
- b) Berücksichtigung der Energieabstrahlung innerhalb der Stoßfront und ihre Rückwirkung auf Dichte- und Temperaturverteilung hinter der Front.
- c) Berücksichtigung des Einflusses von Magnetfeldern.

- d) Untersuchung der Wechselwirkung zweier Fronten vom Typ a unter Berücksichtigung der Energieabstrahlung und der Wirkung von Magnetfeldern.
- e) Untersuchung eines Feldes ungeordnet durcheinanderlaufender Stoßfronten aller Richtungen, Geschwindigkeiten und Ausdehnungen.

Für die Behandlung elektromagnetisch erzeugter Stoßwellen sind insbesondere die ersten Punkte von Interesse. Sie sollen deshalb hier behandelt werden.

2. Mathematische Erfassung instationärer, starker, ebener Stoßfronten.

Die Bewegung einer instationären Stoßfront und die Verteilung von Plasmageschwindigkeit u , Dichte ρ und Druck p hinter der Front werden beschrieben durch ein totalhyperbolisches System von drei partiellen Differentialgleichungen zusammen mit den an der Front geltenden Randbedingungen.

Unter Vernachlässigung von Viskosität und Wärmeleitung lauten diese drei Grundgleichungen in Eulerscher Schreibweise mit $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$:

$$\begin{aligned} \rho_t + u \cdot \rho_x + u_x \cdot \rho &= 0 && \text{Massenerhaltung} \\ u_t + u \cdot u_x + p_x / \rho &= 0 && \text{Impulserhaltung} \\ p_t + u \cdot p_x + \kappa \cdot u_x \cdot p &= 0 && \text{Energieerhaltung} \end{aligned} \quad (1)$$

Darin sind t = Zeit, x = Ort (in Fortpflanzrichtung der Front); die Indices geben die entsprechenden partiellen Ableitungen an.

Die obige Form der Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls ist wegen $d/dt = \partial/\partial t + u \cdot \partial/\partial x$ mit der von Becker [2] benutzten identisch. Dagegen ergibt sich die obige Form des Energiesatzes aus der bei Becker benutzten dadurch, daß die Erhaltungsgleichung für die Masse noch eingesetzt wird.

Für starke Stöße ($M \gg 1$, nach einer Bemerkung von v. Hoerner ab $M > 3$) gelten noch:

$$\rho_F = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \cdot \rho_0 \quad (2)$$
$$p_F = \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \rho_F \cdot u_F^2$$

Der Ort der Front muß durch Integration der Gleichung:

$$V = \frac{\alpha + 1}{2} \cdot u_F \quad (3)$$

berechnet werden.

Darin sind ρ_0 = Dichte vor der Front, V = Geschwindigkeit der Front.

Die Gleichungen (2) und (3) werden

"Frontbedingungen" genannt.

Die Ableitung von (2) und (3) ist in sehr anschaulicher Form in [5] nachzulesen. (Vergleiche zur Ableitung der ersten Gleichung (2) sonst z.B. Becker [2]. Es ist nämlich $\rho/\rho_0 = \frac{2 c_v}{R} - 1$, was sich leicht umformen läßt. Zur zweiten Gleichung (2) und zu Gleichung (3) siehe ebenfalls Becker [2]. Zu beachten sind die unterschiedlichen Geschwindigkeitsbezeichnungen).

Die Lösung des Gleichungssystems stößt auf Schwierigkeiten verschiedener Art:

a) Mathematisch-technische, denn die Gleichungen sind nicht

linear, und der Rand liegt nicht fest, sondern ergibt sich erst zusammen mit den Lösungen aus (3).

- b) Es ist bisher noch kein bestimmter Lösungstyp ausgezeichnet; es fehlen noch Anfangsverteilungen von u , ρ , p oder allgemeine Bedingungen, die die Lösungstypen einschränken.
- c) Andererseits sollen aber möglichst allgemeine Aussagen gewonnen werden.

Die Bearbeitung des Programmpunktes a bedeutete also: Überwindung der obigen Schwierigkeiten und Aufsuchen möglichst aller physikalisch sinnvoller Lösungen, die zur Beschreibung von Stoßfronten brauchbar sind.

Eine Möglichkeit ist die Aussonderung bestimmter Lösungstypen, indem das partielle Gleichungssystem (1) durch einen Separationsansatz auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt wird. Dieser Weg führt auf die

"Homologielösungen".

Um "physikalisch sinnvoll" zu sein, müssen dabei für endliche x auch ρ , p , u endlich bleiben, und um allgemein "brauchbar" zu sein, muß die Lösung stabil sein, d.h. benachbarte Lösungen müssen sich ihr mit der Zeit anschließen.

Ist beides erfüllt, so läßt sich hoffen, daß die Lösung eine brauchbare Beschreibung von in der Natur vorkommenden Stoßfronten darstellt.

Eine andere Möglichkeit besteht in der numerischen Behandlung des Gleichungssystems (1) für verschiedene Anfangsverteilungen. Streben die Lösungen dann mit der Zeit eine gemeinsame Form an, kann auch diese als "allgemeine" Aussage gewertet werden.

Beide Wege wurden in Göttingen beschrritten und führten zu demselben Ergebnis. Dies gemeinsame Ergebnis wird die

"Standardlösung"

genannt.

3. "Block"-Modell und Homologieansatz.

Für einen ersten Überblick schematisierte v. Weizsäcker [5] die Stoßfront und ihr Hinterland als einen "Block" räumlich konstanter Dichte und Plasmageschwindigkeit u , der eine endliche Länge d habe. Das Vorland ruhe und habe konstante Dichte ρ_0 .

Die Frontbedingungen sagen dann:

$$\begin{aligned}\rho &= \text{const} \\ V/u &= \text{const},\end{aligned}$$

während durch Aufsammeln von Materie (des Vorlandes):

$$\begin{aligned}u(t) &\text{ abnimmt mit wachsender Zeit,} \\ V(t) &\text{ abnimmt mit wachsender Zeit,} \\ d(t) &\text{ zunimmt mit wachsender Zeit.}\end{aligned}$$

Für ein "Momentbild" $t = t_0$ geben hier auch die Rankine-Hugoniot Gleichungen eine richtige Beschreibung der Zustände genügend nahe hinter der Front. Sie erfassen aber nicht die zeitlichen Änderungen und sagen nichts über die Länge des "Blocks" aus. Die sonst zu messende Stoßfrontgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Modell.

Für das Aufsammeln von Materie gilt:

$$\dot{m} = \rho (V-u) = \text{const} \cdot u$$

mit m = Masse des Blockes pro cm^2 Frontfläche.

Der Impulssatz ergibt also mit $J = m \cdot u$:

$$\dot{J} = \dot{m}u + m\dot{u} = \text{const} \cdot u^2 + \dot{u} \frac{J}{u} = 0 \quad (4)$$

oder:

$$\dot{u} = - \text{const} \cdot u^3 \quad (5)$$

Integriert mit $V = \text{const} \cdot u$ (s.o.) ergibt sich:

$$\boxed{V(t) = \frac{\text{const}}{(t-t_0)^{1/2}} = c_1 \cdot (t-t_0)^{-1/2}} \quad (6)$$

Der Energiesatz hingegen gibt mit $A = m \cdot u^2$:

$$\dot{A} = \dot{m}u^2 + 2mu \dot{u} = \text{const} \cdot u^3 + \frac{2A}{u} \cdot \dot{u} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{u} = - \text{const} \cdot u^4 \quad (8)$$

$$\boxed{V(t) = \frac{\text{const}}{(t-t_0)^{1/3}} = c_2 \cdot (t-t_0)^{-1/3}} \quad (9)$$

Die Verschiedenheit der Exponenten zeigt die Mängel des Modells, aber die gemeinsame Form der Zeitabhängigkeit läßt vermuten, daß ein Ansatz:

$$\boxed{V(t) = c \cdot (t-t_0)^{-k}} \quad (10)$$

auch für eine exakte Behandlung des Problems Erfolg haben könnte. Bei diesem Ansatz (10) handelt es sich um einen "Homologieansatz".

Das "Blockmodell" kann noch etwas verfeinert werden: Die Welle, als Block schematisiert, wird in Wirklichkeit am hinteren Ende Materie verlieren. So wird (wie bei einer Rakete) Impuls auf den Block übertragen, dessen Impuls pro Masseneinheit also zunimmt. Daher nimmt seine Geschwindigkeit langsamer ab als nach (6) abgeschätzt. Es ist also in (10) zu erwarten: $K < 0,5$. Dieser Gedankengang kann auch durch Einführung einer mittleren Geschwindigkeit und Dichte hinter dem Block quantitativ gefasst werden. Auch dann ergibt sich $K \neq 1/2$; der Wert von K kann aber nur durch zusätzliche Überlegungen über die Energie der Strömung festgelegt werden.

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{p(x,t)}{R} \right\} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{p(x,t)}{R} \right\} \quad (11)$$

mit $U = u(x)$, $R = p(x)$, $P = p(x)$.

Wobei x die zeitabhängige Lage der Stofffront sei.

Wobei x die zeitabhängige Lage der Stofffront sei.

4. Allgemeine Ableitung des Homologieansatzes.

v. Weizsäcker [5] geht direkt von dem durch (10) nahegelegten Ansatz aus und erweitert ihn entsprechend auf das Gebiet hinter der Front (in Anlehnung an kugelsymmetrische Homologieansätze von Taylor [6] und Guderley [7] und [8]).

v. Hoerner [1] hingegen gibt eine Ableitung des Homologieansatzes, die allein von einer sehr weit gefaßten physikalischen Forderung ausgeht, und die so allgemein wie möglich gehalten ist, so daß ihr Ergebnis dann in keiner Weise mehr als ein willkürlicher mathematischer Ansatz erscheinen kann.

Das eigentliche Interesse der Göttinger Gruppe galt ja einer Lösung von (1), die, von verschiedenen (zufälligen) Anfangsverteilungen ausgehend, stets (oder wenigstens unter gewissen Bedingungen, z.B. an die Anfangsverteilung) mit der Zeit asymptotisch angestrebt wird. Eine solche Lösung sollte dann zu sich selbst ähnlich bleiben *).

Diese physikalische Forderung muß nun mathematisch formuliert werden, und v. Hoerner meint, das Mindeste, was man von einer "zu sich selbst ähnlich bleibenden" Lösung fordern müsse, sei:

Der funktionale Zusammenhang der durch ihre Frontwerte normierten Größen u , ρ , p , sei zu allen Zeiten derselbe. (11)

oder

$$\frac{u(x,t)}{U} = f \left\{ \frac{\rho(x,t)}{R} \right\} = g \left\{ \frac{p(x,t)}{P} \right\} \quad (11')$$

mit $U = u(X)$, $R = \rho(X)$, $P = p(X)$,
worin X der zeitabhängige Ort der Stoßfront sei.

*) Hierzu siehe z.B. [9].

Allein aus dieser Forderung folgt, wie v. Hoerner [1] zeigt, der Homologieansatz, wie ihn auch v. Weizsäcker [5] benutzt.

Der Weg, ausgehend von (1), soll hier nur kurz skizziert werden.

Es sei:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= R(t) \cdot r(\xi) \\ u(x,t) &= U(t) \cdot \varphi(\xi) \\ p(x,t) &= P(t) \cdot \psi(\xi) \end{aligned} \quad (12)$$

mit $\xi = \xi(x,t)$; $\xi(X) = \text{const} = c$

Dies stellt nur eine andere Formulierung von (11') dar.

Mit den Frontbedingungen ergeben sich:

$$R(t) = 1, \quad P(t) = \frac{\alpha - 1}{2} \cdot U^2 \quad \text{und dann:}$$

$\begin{aligned} \rho(x,t) &= r(\xi) \\ u(x,t) &= \varphi(\xi) \cdot U \\ p(x,t) &= \psi(\xi) \cdot \frac{\alpha - 1}{2} \cdot U^2 \end{aligned}$	(13)
---	------

Wird dann $\rho_0 = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$ normiert, so wird:

$$r(c) = \varphi(c) = \psi(c) = 1 \quad (14)$$

Einsetzen von (13) in (1) ergibt (der Strich bedeutet Ableitung nach ξ):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\xi} t}{U \cdot \dot{\xi}_x} \cdot r' + r \cdot \varphi' + \varphi \cdot r' &= 0 \\ \frac{\dot{\xi} t}{U \cdot \dot{\xi}_x} \cdot \varphi' + \varphi \cdot \frac{\dot{U}}{U^2 \cdot \dot{\xi}_x} + \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\psi'}{r} + \varphi \cdot \varphi' &= 0 \\ \frac{\dot{\xi} t}{U \cdot \dot{\xi}_x} \cdot \psi' + \psi \cdot \frac{\dot{U}}{U^2 \cdot \dot{\xi}_x} \cdot 2 + \alpha \cdot \varphi' \cdot \varphi + \varphi \cdot \psi' &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Bei der Lösung von (15) zeigt sich nebenbei, daß die Skalentransformation in x linear sein muß, ohne daß dies im Ansatz gefordert wurde. Für ξ und U ergibt sich, daß sie folgende Form haben müssen:

$$\xi = \frac{x-x_0}{(t-t_0)^{1-K}}; \quad U = \frac{U_0}{(t-t_0)^K}; \quad 1 \neq K \neq \infty \quad (16)$$

mit $x_0, t_0, U_0, K = \text{Konstante}$; aber K (der Homologieparameter) ist die einzige wesentliche Konstante darunter.

Es ergeben sich so (die in (16) ausgeschlossenen Grenzfälle mit angeführt):

Typ	$U(t)$	$\xi(x,t)$	
a) K beliebig ($\neq 1, \neq \infty$)	t^{-K}	$x \cdot t^{-(1-K)}$	
b) $K = 1$	t^{-1}	$x \pm \ln t$	(16')
c) $K = \infty$	$e^{\pm t}$	$x \cdot e^{\pm t}$	

(16) stellt nun gerade die durch das Blockmodell nahegelegte Form des Ansatzes (10), des "Homologieansatzes", dar. Dieser ist also eine spezielle Form des Separationsansatzes (12).

Interessant ist noch, daß man das gleiche Ergebnis auch von einem ganz anderen (rein mathematischen) Ausgangspunkt her erhalten kann, wie eine Arbeit von v.Hagenow [1] ergab. Ein weiteres Ergebnis der v.Hagenow'schen Arbeit ist folgende Aussage: Ein Separationsansatz ist stets dann verträglich mit den Frontbedingungen, wenn Hinterland und Front sich nach dem gleichen Ansatz separieren lassen.

Schließlich bemerkt v.Hoerner [1] noch, daß man nur im Grenzfall der starken Front Homologielösungen erhält; zum mindesten versagen bei allgemeiner Frontstärke die bisherigen Ableitungen und Ansätze.

5. Homologiegleichungen.

Aus der allgemeinen Forderung (11) bzw. (12) hatten sich also unter Befriedigung der Frontbedingungen die Gleichungen (13) ergeben. Ihr Einsetzen in (1) führte dann zu dem Differentialgleichungssystem (15), das erkennen ließ, daß an die Funktionen ξ und U in (13) bestimmte Forderungen gestellt werden müssen, ihre Abhängigkeit von x und t muß nämlich der in (16) angegebenen entsprechen. Dadurch, daß nun der Homologieansatz (16'a) in (15) eingesetzt wird, wird das partielle System (1) auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert, das sich in folgender Form ergibt:

$$\begin{array}{l} \left[\varphi - (1-K) \cdot \xi \right] \cdot r' + r \varphi' = 0 \\ \left[\varphi - (1-K) \cdot \xi \right] \cdot \varphi' - K \varphi + \frac{\varkappa-1}{2} \cdot \frac{\psi'}{r} = 0 \\ \left[\varphi - (1-K) \cdot \xi \right] \cdot \psi' + \varkappa \varphi \varphi' - 2K \psi = 0 \end{array} \quad (17)$$

Dies sind die "Homologiegleichungen".

Häfele [10] setzt die analytische Behandlung von (17) im Anschluß an Guderley [7] noch weiter fort und führt (17) auf eine einzige Differentialgleichungen 1. Ordnung und zwei folgende Quadraturen zurück. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

v. Weizsäcker nutzt die Möglichkeiten elektronischer Rechenmaschinen dazu aus, das System (17) direkt für verschiedene K numerisch zu integrieren und findet so verschiedene Typen von

"Homologielösungen".

6. Homologielösungen.

v. Hoerner gibt in [1] einen Überblick über die verschiedenen Typen von Homologielösungen. Die Tabelle 1 sei hier wiedergegeben.

Zur Diskussion der Lösungen kann entweder das Richtungsfeld der in [10] von Häfele untersuchten, einen Differentialgleichung 1. Ordnung betrachtet werden, oder das System (17) wird numerisch für verschiedene K integriert (wie v. Weizsäcker [5] dies tat), und die unterschiedlichen Lösungstypen werden dann zusammengestellt.

Ehe auf die Singularitäten der Lösungen eingegangen wird, sei ihr Verhalten im regulären Gebiet erörtert:

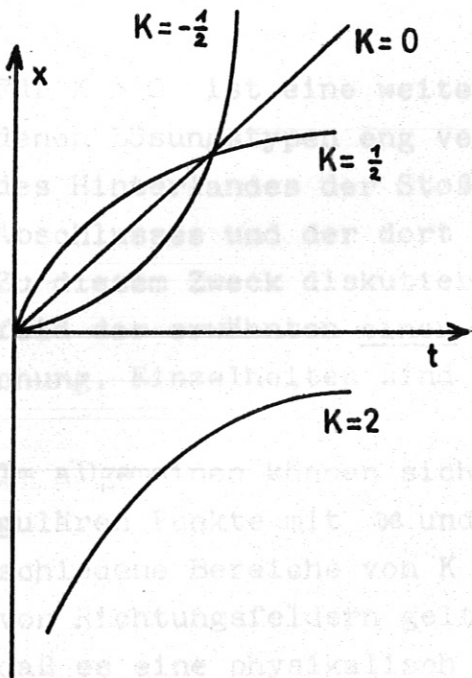
Für jede feste Zeit t lassen sich die Funktionen ρ , u , p oder r , φ , ψ sowohl als Funktionen von ξ als auch als solche von x lesen. Sie verändern sich dann mit der Zeit ähnlich zu sich selbst. (Dies ist bei v. Weizsäcker ein Ergebnis des Ansatzes, bei v. Hoerner eine Forderung, der der Ansatz genügen muß). Die Homologielösungen sind also als solche charakterisiert, deren Anfangsbedingungen eine zeitliche Weiterentwicklung der Lösung garantieren, bei der sie zu sich selbst ähnlich bleibt. Daher ist nun nicht mehr die Freiheit vorhanden, eine Anfangsverteilung der Zustandsgrößen vorzugeben.

Gleichung (16'a) zeigt, daß sich für $t = 0$ die ξ -Skala auf einen Punkt zusammenzieht. Die Homologielösungen zeigen also für einen bestimmten Zeitpunkt ein singuläres Verhalten. Physikalisch sinnvoll sind sie nur von einem Zeitpunkt an, der etwas größer als 0 ist. (Die Lösungen werden hier nur für positive Zeiten diskutiert). Ihr Verhalten wird an der Weltlinie der Front im x - t -Diagramm demonstriert.

Tabelle 1
Die verschiedenen Typen der Homogielösungen

Parameterwert	$k < 0$	$k = 0$	$0 < k < 1/3$	$k = 1/3$	$1/3 < k < k_0$	$k = k_0$	$k_0 < k < 1$	$k = 1$	$k > 1$
Die Front ist	be- schleu- nigt	statio- när	gebremst						
Front läuft	von x_0 bis $+\infty$	$-\infty$ $+\infty$	x_0 $+\infty$					$-\infty$ $+\infty$	$-\infty$ x_0
Hinterland auf Separatrix		/.	/.	III	/.	II	/.	/.	
über Einlauf nach		/.		P_0		$P_{2,3}$ P_0		Umkehrkante P_4	
hinterer Abschluß		/.	undurchlässige Wand		Vakuum		Umkehrkante		
Geschwindig- keit	> 0	> 0	> 0	$= 0$	< 0	$-\infty$	< 0	$= 0$	> 0
Funktions- werte	ρ, p, T $= \text{const}$	$\rho = 0,$ $p = \text{const},$ $T = \infty$				$\rho = 0$ $p = 0$ $T = \infty$		ρ, p, T endlich, aber $\rho_s, p_s, T_s = \infty$	

Hinterer Abschluß



Aus (16'a) folgt mit
 $\dot{x}_F = \dot{x}_F = \dot{x} = \text{const.}$
das nebenstehend dargestellte
Verhalten:
Die Front befindet sich bei
 $X = \text{const}(K) \cdot t^{1-K}$ (18)

Bild 1

Für $K = 0$ wird $X \sim t$, die stationäre Front läuft mit konstanter Geschwindigkeit.

$0 < K < 1$ bedeutet, daß die Front an einem im Endlichen befindlichen Ort mit unendlicher Geschwindigkeit startet, sich stetig verlangsamt, aber beliebig weit läuft.

$K < 0$ besagt, daß die Geschwindigkeit der Front mit zunehmender Zeit wächst, z.B. durch einen ständig hinter ihr herrschenden Überdruck (mit einem wegen der Singularität unendlichen Energievorrat).

Für $K > 1$ kommt die Front für $t = 0$ aus dem Unendlichen, wird aber im Endlichen asymptotisch zum Stehen gebracht.

Damit sind die beiden ersten Zeilen der Tabelle 1 erläutert.

Ersichtlich können für uns nur Lösungen mit $0 \leq K < 1$ interessant sein, und das Blockmodell läßt uns darüberhinaus erwarten, daß im Bereich um $K = 0,33$ und $K = 0,5$ herum für uns besonders interessante Lösungen zu finden sein könnten.

Für $K > 0$ ist eine weitere Unterscheidung der verschiedenen Lösungstypen eng verbunden mit der Betrachtung des Hinterlandes der Stoßfront, speziell eines hinteren Abschlusses und der dort auftretenden Singularitäten. Zu diesem Zweck diskutiert Häfele [10] das Richtungsfeld der erwähnten einen gewöhnlichen Differentialgleichung. Einzelheiten sind [10] zu entnehmen.

Im allgemeinen können sich Lage und Charakter der singulären Punkte mit α und K ändern, so daß z.B. für verschiedene Bereiche von K auch ganz verschiedene Arten von Richtungsfeldern gelten. In [12] fand Häfele jedoch, daß es eine physikalisch reguläre Lösung stets nur im Richtungsfeld geben kann, das zu

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} < K < \frac{\alpha}{\alpha + 2} \quad (19)$$

gehört.

Es gibt dann im wesentlichen 5 Möglichkeiten (vergleiche Tabelle 1): Im 1. Fall treten "Umkehrkanten" auf (siehe dazu [8], [13], [14], [15]). Der hier vorliegende Typ wird gelegentlich als "Umkehrkante mit Expansion" bezeichnet. Solche Umkehrkanten können durch keine Anfangs- und Randbedingungen physikalisch realisiert werden.

In den Fällen 2 - 4 laufen die Lösungen zu einem Punkt des Richtungsfeldes, für den $\xi = \text{const}$ ist, also x endlich. Dort wird $\rho = 0$, $p = \text{const}$, $T = \infty$. Deswegen nennt Häfele dies einen "Energienachschub an einem festen Punkt im Endlichen". v.Hoerner vertritt in [1] eine andere (wohl richtige) Auffassung: Da wegen $p = \text{const}$ der Druckausgleich schon stattgefunden hat, und da Wärmeleitung vernachlässigt ist, wird auch an diesem Punkt keine thermische Energie zugeführt. v.Hoerner fragt nun, ob durch den fraglichen singulären Punkt denn Materie hindurchströmt, und weist

nach, daß das nicht der Fall ist. Physikalisch würde das bedeuten, daß der betrachtete Stoßwellenvorgang hinten durch eine undurchlässige Wand begrenzt ist, die sich im allgemeinen bewegt, für $K = 1/3$ aber ruht. Dieser eine der drei diskutierten Fälle (mit $K = 1/3$) erscheint also geeignet, Stoßwellen zu beschreiben, die durch eine ebene Explosion an einer festen Wand entstanden sind.

Daß es sich genau um $K = 1/3$ handelt, konnte v.Hagenow beweisen, während Häfele und Hain vorher in mühevollen numerischen Rechnungen 0,333 ermittelten. Der entsprechende Fall einer Kugelexplosion wurde von Taylor [16] analytisch integriert.

In [17] weisen Culler und Fried auf die Möglichkeit hin, mit dieser Lösung $K = 1/3$ die Verhältnisse in einem Stoßwellenrohr angenähert zu beschreiben. Diese Lösung könnte auch für uns von Interesse sein ^{*)}, für die Göttinger Arbeitsgruppe war sie jedoch uninteressant, da es im Kosmos keine festen Wände gibt. Daher wurde nach einer Lösung gesucht, die nach hinten ein freies Abströmen ins Vakuum darstellt.

Der 5. Fall stellt, wie Häfele [10] zeigte, die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft dar. Er ist mit der eingangs zitierten "Standardlösung" identisch.

Die letzten drei Zeilen der Tabelle 1 sind damit ebenfalls behandelt.

^{*)} Die Frage der Stabilität ist hier noch nicht diskutiert

7. Standardlösung.

Für ein $K \approx 0,4$ (je nach dem gewählten α) läßt sich eine Lösung finden (5. Fall), die im Endlichen überall regulär ist.

Hain und v.Hoerner [18] fanden in numerischen Rechnungen den Wert $K = 0,389$ für $\alpha = 5/3$, und Häfele [10] konnte analytisch ihre Singularitätenfreiheit im Endlichen beweisen und zeigen, daß es sich um die einzige Lösung mit dieser Eigenschaft handelt. Darüberhinaus berechnete er für verschiedene α die entsprechenden K , die für diese spezielle Lösung (die "Standardlösung") jetzt K_0 genannt werden sollen.

Bild 2

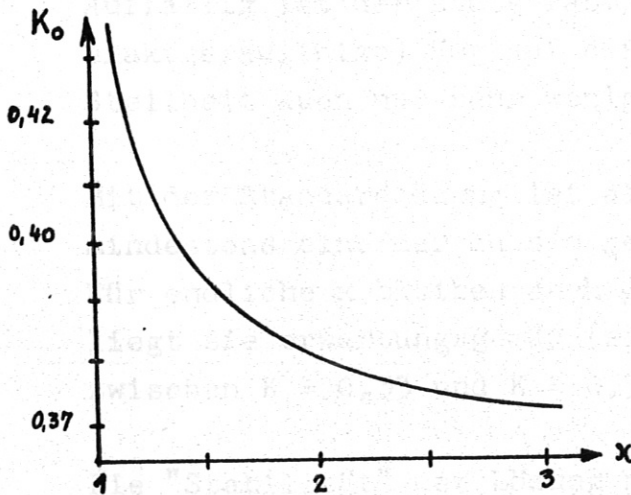


Tabelle 2

α	K_0
1,1	0,43112 \pm 0,00001
1,4 = 7/5	0,4
1,60 = 5/3	0,38927 \pm 0,000005
2,8	0,373296 \pm 0,000005

Abhängigkeit des Parameters K_0 , der die reguläre Homologie-lösung kennzeichnet, vom Verhältnis der spezifischen Wärmen α (nach [10]).

Diese "Standardlösung" kann, wie schon angedeutet, physikalisch als rückwärtiges freies Abströmen ins Vakuum gedeutet werden. Für den speziellen Wert $\alpha = 7/5$ (Luft, Wasserstoff etc.) konnte Häfele sogar die analytische Lösung angeben. Sie sei hier nur für festgehaltene Zeit in abgekürzter Form angegeben ($a = \text{const}$):

8. Lineare Lösungen

$$u \sim 1 + \frac{5a}{2} \xi$$

$$T \sim 1 + a \xi$$

$$p \sim (1 + a\xi)^{-3/2} \quad (20)$$

$$\rho \sim (1 + a\xi)^{-5/2} \quad (21)$$

$$K_0 = 0,4$$

Die Verteilung von u , ρ , p der Standardlösung ist bei Häfele [10] für $\alpha = 5/3$ tabelliert, für andere α -Werte finden sich dort die Verteilungen in Form von Kurven dargestellt. Dabei nehmen u , ρ , p stets hinter der Front monoton ab, während T für kleine α -Werte stark ansteigt, für $\alpha = 5/3$ nur noch schwach, und für $\alpha = 2,8$ monoton fällt. Auffällig ist der stets fast geradlinige (bei $\alpha = 7/5$ exaktgeradlinige) Verlauf der Geschwindigkeit u , dessen Steilheit auch nur sehr wenig von α abhängt.

Mit der Standardlösung ist also eine Lösung gefunden, die mindestens eine der an sie gestellten Forderungen erfüllt: Für endliche x bleiben auch ρ , p , u endlich. Außerdem liegt sie erwartungsgemäß (siehe Blockmodell) im Bereich zwischen $K = 0,33$ und $K = 0,5$.

Die "Stabilität" der Lösung muß im Folgenden noch diskutiert werden.

Ein weiteres Beispiel einer linearen Lösung ist das isentrope Abströmen ins Vakuum nach Burgers [20] und Pack [21].

Es scheint so, als hätten Abströmvorgänge ins Vakuum die allgemeine Tendenz zum linearen Abströmen, unter Umständen leicht gestört durch damit nicht verträgliche Randbedingungen.

8. Lineare Lösungen.

Die Standardlösung weist für alle gerechneten \mathcal{R} einen in x nahezu linearen Verlauf der Geschwindigkeit u auf. Deshalb liegt die Frage nahe, ob sich die hydrodynamischen Grundgleichungen (1) auch mit der Zusatzforderung:

$$u(x,t) = A(t) \cdot x + B(t) \quad (21)$$

Eine Lösung soll dann stabil genannt werden, wenn sich ihr allgemein lösen lassen, und ob die so erhaltenen "Linearen Lösungen" zur angenäherten Beschreibung von Stoßfronten geeignet sind. v.Hoerner [19] untersuchte diese Frage. Er fand, daß man die allgemeine Lösung von (1) auch unter der Forderung (21) angeben kann.

Eine zweite auffällige Eigenschaft der Standardlösung ist, daß für einen weiten Bereich hinter der Front in guter Näherung der Druck proportional zu einer Potenz der Dichte ist:

$$p(x,t) = P(t) \cdot \rho^\gamma \quad \text{mit } \gamma = \text{const} \approx 0,8 \quad (22)$$

Deshalb untersuchte v.Hoerner [19], ob sich die allgemeine Lösung von (1) auch mit der Zusatzforderung (22) statt (21) angeben läßt. Dabei ergab sich, daß (21) aus (22) und (1) folgt, daß also die durch (22) ausgesonderten Lösungen eine Untergruppe der linearen Lösungen sind.

v.Hoerner stellte aber weiter fest, daß die Frontbedingungen nicht mit (21) verträglich sind, außer für $\mathcal{R} = 7/5$. Trotzdem sind die linearen Lösungen zur angenäherten Darstellung des Hinterlandes der Standardlösung geeignet, speziell auch die Untergruppe (22), die für $\mathcal{R} = 7/5$ wieder exakt gilt.

Ein weiteres Beispiel einer linearen Lösung ist das isentrope Abströmen ins Vakuum nach Burgers [20] und Pack [21]. Es scheint so, als hätten Abströmvorgänge ins Vakuum die allgemeine Tendenz zum linearen Abströmen, unter Umständen leicht gestört durch damit nicht verträgliche Randbedingungen.

9. Die Stabilität der Standardlösung.

Nachdem eine "physikalisch sinnvolle" Lösung gefunden wurde, also eine solche, die für alle endlichen x auch endliche ρ , p , u , T gibt, muß noch ihre Stabilität nachgewiesen werden.

Eine Lösung soll dann stabil genannt werden, wenn sich ihr mit wachsender Zeit benachbarte Lösungen asymptotisch anschmiegen.

Wie Hain und v.Hoerner [18] zeigten, schmiegen sich sämtliche 9 dort behandelten Lösungen, von sehr verschiedenen Anfangsverteilungen ausgehend, der Standardlösung an. Aber dies ist natürlich kein Beweis für die Stabilität.

In zwei Arbeiten wurde ein analytischer Stabilitätsbeweis gesucht: F. Meyer [22] leitet aus den Grundgleichungen (1) und den Frontbedingungen (2), (3) in bestimmter Weise ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ab, deren Richtungsfeld Hinweise auf die Stabilität der Standardlösung gibt. Aber einen strengen Beweis gibt die Arbeit von Meyer ebensowenig wie die von Haefele [15], so daß nur zu sagen bleibt:

Durch [18], [22] und [15] ist gezeigt, daß die Standardlösung mit großer Wahrscheinlichkeit stabil ist *).

*) v.Hagenow wies darauf hin, daß F. Meyer für $\alpha = 7/5$ der Stabilitätsbeweis ziemlich allgemeingültig gelungen ist.

10. Anwendbarkeit der Theorie auf Experimente.

Nach Abschnitt 6 Tabelle 1 (Seite 12) und dem auf Seite 16 gesagten, müssen zur Beschreibung von Experimenten mit magnetisch beschleunigenden Stoßrohren vorallem Lösungen mit dem Exponenten $K = 1/3$ ("Explosion" an einer ruhenden, festen Wand) in Betracht gezogen werden. Bei Experimenten mit Lauffunkenstrecken könnte vielleicht auch $0 < K < K_0$ in Betracht gezogen werden, falls das Magnetfeld bzw. die Stromschicht als "bewegte, feste Wand" aufgefaßt werden darf. Da schließlich Homologielösungen erst in einer gewissen Entfernung vom Elektrodenraum anwendbar sein werden, und im allgemeinen bei der Entladung auch noch eine gewisse Menge Elektrodenmaterial verdampft wird, so muß auch noch $K = K_0$, die Standardlösung in Betracht gezogen werden. Gerade für deren Anwendbarkeit sprechen die im Abschnitt 9 erwähnten Stabilitätsuntersuchungen. Besonders die von Hain und v.Hoerner [18] durchgeführten, numerischen Rechnungen zeigen, für einen wie breiten Bereich von Anfangsverteilungen sich die Lösungen der Standardlösung anschmiegen.

Die einfachste Möglichkeit, die Anwendbarkeit der Theorie auf das Experiment zu prüfen, wird ein Vergleich gemessener $x-t$ -Kurven (aus Schmierphotos) mit berechneten Kurven sein. Eine andere Möglichkeit bietet die Messung der Strömungsgeschwindigkeit hinter der Front z.B. bei fester Zeit als Funktion des Ortes. Auch solche Messungen sollen durchgeführt werden.

Ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment in diesen Fällen genügend gut, so sollten auch die anderen Parameterwerte, die die Theorie ergibt, als richtig angenommen werden. Dann ist zum mindesten eine Abschätzung der Bedingungen möglich, die bei der Messung der weiteren Parameter erfüllt sein müssen (z.B. notwendige Zeitauflösung bei einer Temperaturmessung usw.).

11. Schlußbemerkungen.

Eine Schwäche der Theorie könnte sein, daß sie mit konstantem \mathcal{K} arbeitet, eine Voraussetzung, die sicher bei elektro-magnetisch beschleunigten Stoßwellen nicht erfüllt sein wird. Vielmehr wird vor der Stoßfront $\mathcal{K} = 1,4$ oder $1,66$ anzunehmen sein, während hinter der Front \mathcal{K} auf Grund der Ionisation nur wenig größer als 1 sein und mit wachsendem Abstand von der Front noch variieren wird.

[9] E. Birkhoff: "Hydrodynamics, a study in logic, fact and similitude". Princeton University Press, London 1950

[10] Dr.v.Hagenow sei an dieser Stelle für viele nützliche Diskussionen gedankt.

[12] W. Häfeler: Dissertation
(unveröffentlicht)

[13] W. Tollmien: Z. angew. Math. Mech. 11 (1937) 117 f

[14] W. Tollmien: Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) 140 f

[15] W. Häfeler: Z. Naturforschg. 10a (1955) 1017 f

[16] I.L. Taylor: Phil. Mag. 46 (1955) 317

[17] G.I. Guller, B.D. Fried: ARL - 6 - 20
(Randall-Wallbridge Corp., Los Angeles)

[18] K. Hain, S. v. Hoerner: Z. Naturforschg. 9a (1954) 269

[19] S. v. Hoerner: Z. Naturforschg. 10a (1955) 687

[20] J.M. Burgers: K. Ned. A. Wetensch. 49 (1946) 588

[21] D.C. Pack: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 113 (1953) 43

[22] F. Meyer: Z. Naturforschg. 10a (1955) 693

12. Literaturverzeichnis.

- [1] S. v. Hoerner: Fortschritte der Physik 6 (1958)
375-425
- [2] R. Becker: Zs. Phys. 8 (1922) 321 f
- [5] C.F. v. Weizsäcker: Z. Naturforschg. 9a (1954) 269-275
- [6] G.I. Taylor: Proc. Roy. Soc. A 201 (1950) 159 f
- [7] G. Guderley: Luftfahrtforschg. 19 (1942) 302 f
- [8] G. Guderley: Z. Angew. Math. Mech. 22 (1942) 121 f
- [9] G. Birkhoff: "Hydrodynamics, a study in logic fast
and similitude".
Princeton University Press, London 1950
- [10] W. Häfele: Z. Naturforschg. 10a (1955) 1006 f
- [11] K.U. v. Hagenow: Dissertation Göttingen 1956
(unveröffentlicht)
- [12] W. Häfele: Dissertation
(unveröffentlicht)
- [13] W. Tollmien: Z. Angew. Math. Mech. 11 (1937) 117 f
- [14] W. Tollmien: Z. Angew. Math. Mech. 21 (1941) 140 f
- [15] W. Häfele: Z. Naturforschg. 10a (1955) 1017 f
- [16] I.L. Taylor: Phil. Mag. 46 (1955) 317
- [17] G.I. Culler,
B.D. Fried: ARL - 6 - 20
(Ramo Wollridge Corp., Los Angeles)
- [18] K. Hain,
S. v. Hoerner: Z. Naturforschg. 9a (1954) 269
- [19] S. v. Hoerner: Z. Naturforschg. 10a (1955) 687
- [20] J.M. Burgers: K. Ned. A. Wetensch. 49 (1946) 588
- [21] D.C. Pack: Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 113
(1953) 43
- [22] F. Meyer: Z. Naturforschg. 10a (1955) 693.