

Eindimensionales Modell für die Aufheizung
einer Gasströmung unter Berücksichtigung
von Dissoziation und Ionisation.

E. Ahlborn

M. Salvat

IPP 3/2

September 1962

Literatursammlung

203

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Eindimensionales Modell für die Aufheizung
einer Gasströmung unter Berücksichtigung
von Dissoziation und Ionisation.

E. Ahlborn

M. Salvat

IPP 3/2

September 1962

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Diese Arbeit erscheint in der Zeitschrift für angewandte Physik.

U b e r s i c h t

I. Problemstellung

II. Strömung mit konstantem $\gamma = \gamma_0$

1. Grundgleichungen
2. Lösungen in dimensionsloser Form
3. Berechnung einiger besonderer Werte
4. Näherungslösungen
5. Zusammenstellung der Ergebnisse

III. Strömung mit variablem $\gamma(p, T)$

1. Neue Grundgleichungen
2. Dimensionslose Lösungen
3. Grenzwerte
4. Näherungslösungen
5. Berechnung genauer Kurven
6. Zusammenstellung der Ergebnisse
7. Schlussbemerkungen
8. Kurven

I. Problemstellung.

In dieser Darstellung wird untersucht, welche Zustandsänderungen in einer Gasströmung eintreten, wenn sie durch starke Energiezufuhr zu hohen Temperaturen aufgeheizt wird. Insbesondere sollen hierbei Dissoziation und Ionisation berücksichtigt werden.

Aus Gründen der besseren Übersicht wird die Strömung ein-dimensional angenommen und ferner werden Reibung und Wärmeleitung vernachlässigt. Diese Theorie ist also eine erste Näherung zur Beschreibung einer Plasmaquelle. In einer besseren Näherung können dann Wärmeleitung und innere Reibung berücksichtigt werden.

Unser Modell ist die Strömung in einem Rohr mit konstantem Querschnitt. Wir betrachten zwei Kontrollflächen F_0 und F

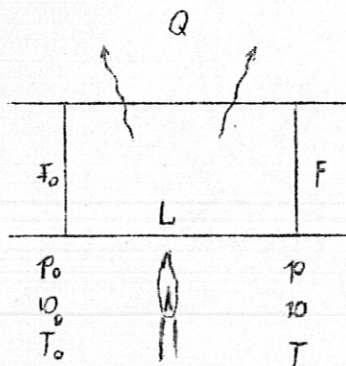


Bild 1

senkrecht zur Achse (Bild 1). Zwischen diesen beiden Flächen soll im Gas die Wärme L pro Zeiteinheit erzeugt werden, wovon ein Anteil Q wieder an die Rohrwände abgeleitet wird, so daß nur die Wärme $(L-Q)$ - gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt - im Gas zurückbleibt.

Die Annahme einer eindimensionalen Strömung bedeutet, daß sowohl die Anfangswerte auf der Fläche F_0 als auch die Endwerte auf F einheitliche Werte sind (d.h. an jedem Ort der Fläche F_0 hat man z. B. die gleiche Dichte p_0 , die gleiche Geschwindigkeit ω_0 usw.).

Die Aufheizungstheorie soll die Endwerte p , ω , T im Querschnitt F liefern, wenn die Anfangswerte (p_0 , ω_0 , T_0) und die eingekoppelte Energie $L-Q$ bekannt sind. So z.B. den Druck p als Funktion von p_0 , ω_0 , T_0 und $L-Q$.

Für Gase mit konstanten spezifischen Wärmen ($\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \text{const}$) kennt man die Endwerte, welche sich nach der Aufheizung einstellen (siehe z.B. Oswatitsch, Gasdynamik 1952). Die Ergebnisse werden in Teil II angegeben, um später zu erkennen, welche Unterschiede auftreten, sobald Dissoziation und Ionisation ins Spiel kommen (d.h. wenn c_p und c_v Funktionen der Temperatur und des Druckes werden).

II. Strömung mit konstantem $\gamma = \gamma_0$.

II.1 Grundgleichungen.

Zur Berechnung des Endzustandes p, ρ, ω, T aus den gegebenen Anfangswerten $p_0, \rho_0, \omega_0, T_0$ und der im Gas verbliebenen Energie $L-Q$ benötigen wir die drei Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie und eine Zustandsgleichung (hierbei ist h die Enthalpie/g).

$$\text{Kontinuitätsgleichung} \quad \rho_0 \omega_0 = \rho \omega = \frac{i}{F} \quad (1)$$

$$\text{Impulsgleichung} \quad p_0 + \rho_0 \omega_0^2 = p + \rho \omega^2 \quad (2)$$

$$\text{Energiegleichung} \quad \frac{1}{2} \omega_0^2 + h_0 + \frac{L-Q}{i} = \frac{1}{2} \omega^2 + h \quad (3)$$

$$\text{Zustandsgleichung} \quad h = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

Die Bekannten sind ρ_0 [g/cm³] ; ω_0 [cm/sec] ; p_0 [dyn/cm²]; $L-Q$ [erg] , i [g/sec] .

Die Unbekannten sind ρ, ω, p, h , also 4 Gleichungen und 4 Unbekannte. Die Gleichungen sollen in einer dimensionslosen Form geschrieben werden, deswegen führen wir folgende Größen ein:

$$\text{Geschwindigkeitsänderung} \quad \varphi = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (5)$$

$$\text{Druckänderung} \quad \pi = \frac{p}{p_0} \quad (6)$$

$$\text{Enthalpieänderung} \quad H = \frac{h}{h_0} \quad (7)$$

$$\text{"Energieerhöhung"} \quad \left(\frac{\text{Energie}}{\text{Anfangsenthalpie}} \right) y = \frac{L-Q}{ih_0} \quad (8)$$

$$M_0 = \frac{W_0}{c_0} \quad (9)$$

Die Gleichungen 2, 3, 4 lauten jetzt:

$$\pi - 1 = \gamma_0 M_0^2 (1 - \varphi) \quad (10)$$

$$H - 1 = \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2 (1 - \varphi^2) + y \quad (11)$$

$$H = \pi \varphi \quad (12)$$

Die Bekannten sind y , γ_0 und M_0 , die Unbekannten π , φ und H .

Berücksichtigt man Gl. (12), dann erhält man:

$$\pi - 1 = \gamma_0 M_0^2 (1 - \varphi) \quad (13)$$

$$\pi \varphi - 1 = \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2 (1 - \varphi^2) + y \quad (14)$$

II.2 Lösungen in dimensionsloser Form.

Wenn man jetzt π oder φ eliminiert, erhält man entweder für π oder für φ eine quadratische Gleichung.

$$\varphi^2 - \frac{2\gamma_0}{1+\gamma_0} \left(1 + \frac{1}{\gamma_0 M_0^2} \right) \varphi + \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \frac{2}{M_0^2} \left(\frac{1}{\gamma_0 - 1} + \frac{y}{\gamma_0 - 1} + \frac{M_0^2}{2} \right) = 0 \quad (15)$$

$$\pi^2 - \frac{2}{1+\gamma_0} \left(1 + \gamma_0 M_0^2 \right) \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} 2\gamma_0 M_0^2 \left(\frac{1}{\gamma_0(\gamma_0 - 1)} + \frac{y}{\gamma_0 - 1} - \frac{1}{2\gamma_0^2 M_0^2} \right) = 0 \quad (16)$$

Die Lösungen sind:

$$\varphi = 1 + \frac{\frac{1}{M_0^2} - 1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1)}{(\frac{1}{M_0^2} - 1)^2} y} \right\} \quad (17)$$

und

$$\pi = 1 - \frac{\gamma_0 M_0^2 (\frac{1}{M_0^2} - 1)}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1)}{(\frac{1}{M_0^2} - 1)^2} y} \right\} \quad (18)$$

Diese Gleichungen sind in Bild 2 und Bild 3 dargestellt. Es wurde y als freie Variable und M_0 als Parameter gewählt, $\gamma_0 = \frac{5}{3}$. Der Kurvenast, der sich jeweils mit dem + Zeichen vor der Wurzel ergibt, ist gestrichelt (bzw. gepunktet). Glatt ausgezogen wurde der Kurvenast mit dem - Zeichen.

Zu den graphischen Darstellungen von Geschwindigkeits- und Drucksteigerung sei folgendes gesagt:

1. Bei $M_0 < 1$ findet man bei jeder Kurve mit festem M_0 :

a) einen größten Wert für y (bezeichnet mit y_{\max}). Bei diesen Anfangswerten (M_0, i) ist aufgrund der Erhaltungssätze kein größeres y möglich. Man hat einen maximalen Wert der Energiezufuhr

$$(L-Q)_{\max} = y_{\max} \cdot i \cdot h_0$$

b) einen Grenzwert y_{gr} , der 2 Gebiete trennt:

Ein Bereich $0 \leq y < y_{\text{gr}}$, in dem es nur eine Lösung gibt (zu dem gepunkteten Kurventeil in Fig. 2 würde sich ein negativer Druck ergeben) und ein Bereich $y_{\text{gr}} \leq y < y_{\max}$, wo man zwei Lösungen hat, nämlich die Fortsetzung aus dem ersten Gebiet (glatte Kurve) und den gestrichelten Kurvenzug. Dieser ergibt sich mit dem Pluszeichen vor der Wurzel in Gl. (17) und (18).

2. Bei $M_0 > 1$ findet man auch einen größten Wert $y = y_{\max}$. Zum Unterschied zu 1. sind aber stets zwei Lösungen möglich. Eine mit Verdichtungsstoß (gestrichelte Kurve) und eine ohne Stoß (glatte Kurve).

Berechnung der Enthalpie.

Die Enthalpiesteigerung $H = \frac{h}{h_0}$ erhält man mit der Beziehung $H = \pi \cdot \varphi$, wenn man hier (17) und (18) einsetzt. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen (17) und (18) jedoch noch etwas umgeformt.

$$\varphi = \frac{1}{\gamma_0 + 1} \left\{ \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right)^2 - \frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1) y} \right\} \quad (17')$$

und

$$\pi = \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma_0 + 1} \left\{ \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) \ominus \sqrt{\left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right)^2 - \frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1) y} \right\} \quad (18')$$

Damit ergibt sich:

$$H = \varphi \cdot \pi = \frac{\gamma_0 M_0^2}{(\gamma_0 + 1)^2} \left\{ \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right)^2 - W \ominus \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) (\gamma_0 - 1) \sqrt{W} \right\} \quad (19)$$

mit $W = \left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right)^2 - \frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1) y$

Berechnung der Machzahl.

Die Machzahl $M = \frac{W}{c}$ ist ein Maß dafür, wieviel Energie in kinetische Energie umgewandelt worden ist.

$$M^2 = \frac{W^2}{c^2} = \frac{\frac{1}{2} W^2}{\frac{1}{2} c^2} = \frac{\frac{1}{2} W^2}{\frac{1}{2} (\gamma_0 - 1) h} = \frac{2}{\gamma_0 - 1} \frac{\frac{1}{2} W^2}{h}$$

$$M^2 = \frac{2}{\gamma_0 - 1} \cdot \frac{\text{kinetische Energie pro Gramm}}{\text{Enthalpie pro Gramm}}$$

Man kann die Machzahl auch als Funktion von φ und π ausdrücken:

$$M^2 = \frac{W^2}{c^2} = \frac{\left(\frac{W}{W_0} \right)^2}{\left(\frac{c}{W_0} \right)^2} = W_0^2 \frac{\varphi^2}{c^2} = W_0^2 \frac{\varphi^2}{\gamma_0 \frac{p}{\rho}} \cdot \frac{\gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}}{\gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}}$$

$$M^2 = W_0^2 \frac{\varphi^2}{\frac{p_0 \rho_0}{\rho_0 \rho} \cdot \gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}} = W_0^2 \frac{\varphi^2}{\pi \cdot \varphi \cdot c_0^2}$$

$$M^2 = M_0^2 \frac{\varphi}{\pi} \quad (20)$$

II.3 Berechnung einiger besonderer Werte.

- A) Bei $y = y_{\max}$ hat man stets nur eine Lösung. Es muß dann die Wurzel in Gl.(17) und (18) verschwinden. Daraus ergibt sich sofort:

$$y_{\max} = \frac{(\frac{1}{M_0^2} - 1)^2}{\frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1)} \quad (21)$$

- B) Den Grenzwert, welcher die zwei Gebiete (siehe unter II.1b) trennt, erhält man aus der Bedingung, daß der Druck $p = 0$ wird.

Daraus folgt:

$$y_{\text{gr}} = \frac{y_0 - 1}{2\gamma_0^2} \frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{\gamma_0} \quad (22)$$

- C) Ohne Wärmezufuhr ($y = 0$) ergibt sich bei großen Machzahlen ($M_0 > 1$) durch Verdichtungsstoß

- a) für π ein maximaler Wert

$$\pi_{\max} = \frac{1}{\gamma_0 + 1} (2\gamma_0 M_0^2 + 1 - \gamma_0) \quad (23)$$

$$\approx \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 + 1} M_0^2 \quad \text{bei } M_0 \gg 1$$

- b) für φ ein minimaler Wert

$$\varphi_{\min} = \frac{1}{\gamma_0 + 1} (\gamma_0 - 1 - \frac{2}{M_0^2}) \quad (24)$$

$$\approx \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} \quad \text{bei } M_0 \gg 1$$

II.4 Näherungslösungen.

Man kann den Maximalwert, von y aus Gl.(21) einsetzen in die Wurzeln in (17) und (18). Dann erhält man:

$$\varphi = 1 + \frac{\frac{1}{M_0^2} - 1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y}{y_{\max}}} \right\} \quad (25)$$

$$\pi = 1 - \gamma_0 M_0^2 \frac{\frac{1}{M_0^2} - 1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{y}{y_{\max}}} \right\} \quad (26)$$

In diesen Gleichungen kann man die Wurzel für $1 \gg \frac{y}{y_{\max}}$ entwickeln, d.h. man betrachtet Aufheizvorgänge bei denen wenig Energie (verglichen mit dem Maximalwert y_{\max}) zugeführt wird.

Wir betrachten die Aufheizung ohne Stoß. Es gilt dann das - Zeichen (vergl. unter II.2). Die Entwicklung der Wurzel wird nach dem ersten Glied abgebrochen. Man erhält aus Gl. (25):

$$\varphi = 1 + \frac{\frac{1}{M_0^2} - 1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{y_{\max}} \right) \right\}$$

Daraus folgt nach einigen Umformungen:

$$\varphi = 1 + \frac{y}{1 - M_0^2} \quad (27)$$

und aus (26) folgt:

$$\pi = 1 - \gamma_0 M_0^2 \frac{y}{1 - M_0^2} \quad (28)$$

Diese Näherungen verlaufen linear.

III. Strömung mit variablem γ .

III.1 Neue Grundgleichungen.

Die Gleichungen (1), (2), (3), die wir für den Fall $\gamma = \gamma_0$ geschrieben haben, bleiben unverändert. Die Zustandsgleichung ist jetzt jedoch durch Dissoziation und Ionisation sehr kompliziert geworden.

$$h = h(p, \rho) \quad \text{oder} \quad h = h(p, T)$$

Wir wollen nicht die Gleichung für h explizit schreiben, sondern die Tabellen von $h(p, T)$ benutzen, wie sie z.B. Dr. Wienecke¹⁾ oder Dr. Knoche²⁾ berechnet haben, um die Gleichung numerisch zu lösen.

Zur Vereinfachung führen wir eine neue Größe ein, die wir γ nennen und die durch

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad \text{definiert wird} \quad (29)$$

Diese Definition ist genau dieselbe wie $\gamma = \frac{h(p, T)}{u(p, T)}$

Wenn man diese Größe einführt, erhält man Gleichungen und Lösungen, die ähnlich aussehen, wie die Gl. (15) und (16) und die Lösungen (17) und (18).

Zusammenfassend lauten jetzt die Gleichungen:

$$\rho_0 w_0 = \rho w = \frac{i}{F} \quad (1)$$

$$p_0 + \rho_0 w_0^2 = p + \rho w^2 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} w_0^2 + h_0 + \frac{L-Q}{i} = \frac{1}{2} w^2 + h \quad (3)$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \quad (29)$$

wobei γ jetzt eine Funktion von p und T ist.

-
- 1) F. Burhorn, R. Wienecke: Plasmazusammensetzung von Wasserstoff und Wasser. Z.f. phys. Chemie, 215, 285-292, 1960
 - 2) K.F. Knoche, Stuttgart, Inst.f. Thermodynamik der Flugtriebwerke: Zählendaten von Argonplasma

Mit den definierten dimensionslosen Werten φ , π , H , y , M_0 (vergl. (5), (6), (7), (8), (9)) lauten die Gleichungen:

$$\pi - 1 = \gamma_0 M_0^2 (1 - \varphi) \quad (30)$$

$$H - 1 = \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2 (1 - \varphi^2) + y \quad (31)$$

$$H = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \pi \varphi \quad (32)$$

Wir eliminieren H mit (32) aus den Gleichungen (30) und (31) und finden:

$$\pi - 1 = \gamma_0 M_0^2 (1 - \varphi) \quad (33)$$

$$\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \pi \varphi = \frac{\gamma_0 - 1}{2} M_0^2 (1 - \varphi^2) + y + 1 \quad (34)$$

III.2 Dimensionslose Lösungen.

Wie bei der Rechnung in Abschnitt II.2 erhält man wahlweise für π oder φ eine quadratische Gleichung:

$$\varphi^2 - \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) \varphi + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0-1} + \frac{1}{\gamma_0-1} + \frac{M_0^2}{2} \right) = 0 \quad (35)$$

$$\pi^2 - \frac{2}{\gamma+1} (\gamma_0 M_0^2 + 1) \pi + 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \gamma_0^2 M_0^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0-1} + \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_0 M_0^2} \right) = 0 \quad (36)$$

und die entsprechenden Lösungen sind:

$$\varphi = \frac{\gamma}{\gamma+1} \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{(\gamma+1)^2} \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right)^2 - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0-1} + \frac{1}{\gamma_0-1} + \frac{M_0^2}{2} \right)} \quad (37)$$

$$\pi = \frac{1}{\gamma+1} (\gamma_0 M_0^2 + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{(\gamma+1)^2} (\gamma_0 M_0^2 + 1)^2 - 2 \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \gamma_0^2 M_0^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_0-1} + \frac{1}{\gamma_0(\gamma_0-1)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_0 M_0^2} \right)} \quad (38)$$

oder

$$\varphi = 1 - \frac{1}{\gamma+1} + \frac{\gamma}{(\gamma+1)\gamma_0 M_0^2} \pm \sqrt{\dots} \quad (39)$$

$$\pi = 1 - \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma+1} \mp \sqrt{\dots} \quad (40)$$

Durch eine Umformung erhält man:

$$(41) \quad \varphi = 1 + \frac{1}{\gamma+1} \left\{ -\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2}\right)^2 + \frac{2(\gamma+1)(\gamma_0-\gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0-1)} - \frac{2(\gamma^2-1)\gamma}{M_0^2 (\gamma_0-1)}} \right\} = 1 + \frac{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)}{\gamma+1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{1 + \frac{\frac{2(\gamma+1)(\gamma_0-\gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0-1)}}{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2} - \frac{\frac{2(\gamma^2-1)}{M_0^2 (\gamma_0-1)} \gamma}{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2}} \right\}$$

$\varepsilon \quad \gamma/\gamma_{max}$

$$(42) \quad \pi = 1 + \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma+1} \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2}\right)^2 + \frac{2(\gamma+1)(\gamma_0-\gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0-1)} - \frac{2(\gamma^2-1)\gamma}{M_0^2 (\gamma_0-1)}} \right\} = 1 - \frac{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1) \gamma_0 M_0^2}{\gamma+1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{1 + \frac{\frac{2(\gamma+1)(\gamma_0-\gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0-1)}}{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2} - \frac{\frac{2(\gamma^2-1)}{M_0^2 (\gamma_0-1)} \gamma}{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2}} \right\}$$

Wie in den Lösungen (17) und (18) entspricht dem + Zeichen eine Aufheizung mit Stoß.

Die Ergebnisse (41) und (42) schreiben wir:

$$\varphi = 1 + \frac{\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1}{\gamma+1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{1 + \varepsilon - \frac{\gamma}{\gamma_{max}}} \right\} \quad (43)$$

$$\pi = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1}{\gamma+1} \gamma_0 M_0^2 \left\{ 1 \oplus \sqrt{1 + \varepsilon - \frac{\gamma}{\gamma_{max}}} \right\} \quad (44)$$

wobei $\varepsilon = \frac{\frac{2}{M_0^2} \frac{\gamma+1}{\gamma_0} \frac{\gamma_0-\gamma}{\gamma_0-1}}{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2}$ (45)

klein ist gegen 1 wenn $M_0 \ll 1$; $M_0 \gg 1$; $\gamma \approx \gamma_0$ und

$$\gamma_{max} = \frac{(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1)^2}{\frac{2}{M_0^2} \frac{\gamma^2-1}{\gamma_0-1}} \quad (46)$$

der maximale γ -Wert ist, falls man ε vernachlässigen kann, z.B. falls $M_0 < \frac{1}{10}$ und $M_0 > 10$ ist.

Berechnung von H(γ) und der Umkehrung $\gamma(H)$.

Die Lösung für H erhält man, wenn man in Gl.(32) die Ausdrücke für φ und π einführt.

Zu diesem Zweck formen wir etwas um in Gl.(41) und (42):

$$\varphi = \frac{1}{\gamma+1} \left\{ \left(\frac{1}{M_0^2 \gamma_0} + 1 \right) \gamma \pm \sqrt{W} \right\} \quad (41')$$

$$\pi = \frac{M_0^2 \gamma_0}{\gamma+1} \left\{ \left(\frac{1}{M_0^2 \gamma_0} + 1 \right) \frac{1}{\gamma} \pm \sqrt{W} \right\} \quad (42')$$

wobei
$$W = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1 \right)^2 + \frac{2(\gamma+1)(\gamma_0-\gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0-1)} - \frac{2(\gamma^2-1)\gamma}{M_0^2 (\gamma_0-1)} \quad (47)$$

Man findet mit (41') und (42')

$$H = \gamma \frac{\gamma_0-1}{\gamma+1} \frac{M_0^2}{(\gamma+1)^2} \left\{ \gamma \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right)^2 - W \pm \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + 1 \right) (\gamma-1) \sqrt{W} \right\} \quad (48)$$

Die Gleichung (48) kann man umformen um $y(\gamma, H)$ zu erhalten:

$$y = \left[\frac{\gamma_0-1}{4} M_0^2 \left(\frac{1}{\gamma_0^2 M_0^4} - 1 \right) - \frac{1+\gamma_0}{2\gamma_0} \right] + \frac{1}{2} \frac{\gamma+1}{\gamma} H \pm \frac{\gamma_0-1}{4} \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0} + M_0 \right)^2 \sqrt{1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{H}{\frac{\gamma_0-1}{4} \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0} + M_0 \right)^2}} \quad (49)$$

III.3 Grenzwerte.

Die Grenzwerte sind bei veränderlichem γ auch sehr leicht zu finden:

a) y_{\max} ergab sich oben in Gl.(46)

$$y_{\max} = \frac{\left(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1 \right)^2}{\frac{2}{M_0^2} \frac{\gamma^2-1}{\gamma_0-1}} \quad (46)$$

b) y_{gr} Dieser Wert ergibt sich, wenn der Druck und damit auch die Temperatur sehr klein wird. Man hat dann wegen der geringen Temperatur $\gamma = \gamma_0$. Infolgedessen bleibt der Grenzwert der gleiche wie im Fall $\gamma = \gamma_0$.

$$y_{\text{gr}} = \frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0^2} \frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{\gamma_0} \quad (50)=(22)$$

c) Im Fall $\gamma = 0$

φ erreicht seinen minimalen Wert durch Verdichtungsstoß,

π erreicht seinen maximalen Wert durch Verdichtungsstoß.

Diese Werte sind:

$$\begin{aligned} \varphi_{\min} &= 1 + \frac{\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1}{\gamma + 1} \left\{ 1 \oplus \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \right) \right\} \\ &= 1 + \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) \approx \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad \text{für } M_0^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \pi_{\max} &= 1 - \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) \left\{ 1 \oplus \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\} \\ &= 1 - \frac{2 \gamma_0 M_0^2}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) \approx 1 + \frac{2 \gamma_0 M_0^2}{\gamma + 1} \quad \text{für } M_0^2 \gg 1 \end{aligned} \quad (52)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (51) und (52) kann man Druck, Temperatur und Dichte nach dem Stoß bestimmen.

III.4 Näherungslösungen.

Wie oben für $\gamma = \gamma_0$ erhält man die Näherungslösungen durch Entwicklung der Wurzeln in den Gleichungen (43) und (44). Wir betrachten hier nur die normale Aufheizung einer Unterschallströmung, müssen also das Minus-Zeichen vor der Wurzel verwenden.

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\gamma}{2 \gamma_{\max}} \right] \right\}$$

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\varepsilon - \frac{\gamma}{\gamma_{\max}} \right) \right\}$$

Nach einfacher Umformung findet man:

$$\varphi = 1 + \frac{(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0(\gamma - 1)y}{(\gamma_0 - 1)(\gamma - \gamma_0 M_0^2)} \quad (53)$$

für π erhält man analog:

$$\pi = 1 - \frac{(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0(\gamma - 1)y}{(\gamma_0 - 1)\left(\frac{\gamma}{\gamma_0 M_0^2} - 1\right)} \quad (54)$$

Außerdem ist H durch $H = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \varphi \pi$ gegeben (Gl. 32).

Wenn man in diesen Ausdruck die Näherungswerte für φ und π einführt, erhält man eine Näherungslösung für H.

$$H = \frac{\gamma}{\gamma - \gamma_0 M_0^2} \left\{ 1 - M_0^2 + (1 - \gamma_0 M_0^2)y \right\} \quad (55)$$

Diese Gleichung kann man nach y auflösen, sodaß sich y als Funktion von γ und H ergibt.

$$y = \frac{M_0^2 - 1}{1 - \gamma_0 M_0^2} + \frac{\gamma - \gamma_0 M_0^2}{\gamma(1 - \gamma_0 M_0^2)} H \quad (56)$$

Die Näherungslösungen (53), (54) ergeben bereits ein recht gutes qualitatives Bild von Aufheizvorgängen bei kleiner Energiezufuhr y besonders bei sehr kleinem M_0 . Dann ergibt sich ($M_0 \ll 1$ und $\gamma - \gamma_0 \ll \gamma_0(\gamma - 1)y$)

$$\varphi = 1 + \frac{\gamma_0(\gamma - 1)y}{(\gamma_0 - 1)\gamma} \quad (53')$$

und

$$\pi = 1 - \frac{\gamma_0^2 M_0^2 (\gamma - 1)y}{(\gamma_0 - 1)\gamma} \approx 1 \quad (54')$$

und

$$y = H - 1 \quad (56')$$

Diese Näherungen gelten etwa im Bereich (y_{gr} siehe Gl.(50))
 $0 \leq y \leq y_g$.

Nach diesen Näherungen wurden Kurven für Wasserstoff und Argon berechnet. (Siehe Anhang).

Methode: (Die Gleichung (54') gibt $p \approx p_0$. Nach Gl. (56') kann man $y = y(p_0, T)$ berechnen. Außerdem kennt man dann $\gamma(p_0, T)$. Damit läßt sich φ von (p_0, T) gemäß Gl. (53') bestimmen. Jetzt hat man $y(p_0, T)$ und $\varphi(p_0, T)$ und kann $\varphi(y)$ zeichnen.)

Qualitativ kann man sagen, daß die Geschwindigkeit linear mit y und ω_0 ansteigt, während π linear mit y abnimmt und zwar stärker bei großem M_0 . $\varphi(y)$ und $\pi(y)$ sind jedoch keine Geraden, weil $\gamma = \gamma(p, T)$ ist.

III.5 Berechnung genauer Kurven.

Wir haben oben für $\gamma = \gamma_0$ die geschlossenen Formen gefunden:

$$\varphi = \varphi(\gamma_0, M_0, y) \quad (17)$$

$$\pi = \pi(\gamma_0, M_0, y) \quad (18)$$

$$H = H(\gamma_0, M_0, y) \quad (19)$$

Da γ_0 für alle Gase bekannt ist, kann man also φ , π , und H als Funktion von y mit M_0 als Parameter zeichnen (wie es in Bild 2-5 für Argon dargestellt wird).

Bei veränderlichem $\gamma = \gamma(p, T)$ erhalten wir jedoch mit den entsprechenden Gleichungen, (nämlich (41), (42) und (48)) keine geschlossenen Lösungen, weil stets γ eine Funktion von T und p bleibt.

Das erkennt man, wenn man y aus Gl. (49)

$$y = y \left[\gamma(p, T), H(p, T), M_0 \right] = y(p, T, M_0) \quad (49')$$

einsetzt in die Druckgleichung (42) $\pi = f(\gamma(p, T), y, M_0)$.

Man hat dann:

$$\pi = f \left(\gamma(p,T), y(p,T), M_0 \right)$$

$$\frac{p}{p_0} = \pi = f(p,T,M_0) \quad (57)$$

Geben wir in dieser Gleichung M_0 und p_0 vor und wählen $p = p^*$, so ist in dieser Gleichung nur noch T offengelassen. Gesucht werden muß jetzt die Temperatur $T = T^*$ bei der (57) befriedigt wird, so daß gilt:

$$\frac{p^*}{p_0} = f(p^*, T^*, M_0) \quad (58)$$

Hat man diese Temperatur T^* gefunden, so kann man sich mittels (49) auch y^* ausrechnen und schließlich φ^* aus Gl. (41) erhalten. Diese vier Werte p^* , T^* , y^* , φ^* gehören physikalisch zusammen. Das bedeutet: wenn einer Gasströmung mit der Anfangsmachzahl M_0 Energie $L-Q$ zugeführt wird, sodaß $\frac{L-Q}{i \cdot h_0} = y^*$ gilt, so erhält man eine Geschwindigkeitssteigerung $\frac{u}{u_0} = \varphi^*$, einen Enddruck von p^* und eine Endtemperatur T^* .

Die Hauptschwierigkeit bei der Berechnung der Endwerte liegt darin, T^* zu finden. Dieses T^* ermitteln wir mit Hilfe von Tabellen und Kurvenscharen.

Zunächst schreiben wir (57) in der Form

$$p = p_0 f \left(\gamma(p,T), y(p,T), M_0 \right) = g(p,T,M_0) \quad (59)$$

Wir benötigen jetzt Tabellen mit $h(p,T)$ und $u(p,T)$. Diese wurden aus Rechnungen von Knoche gewonnen. Wegen der Definition (29) $\gamma = \frac{h}{u}$ kann man dann auch $\gamma(p,T)$ tabellieren. Nun legen wir uns fest auf ein bestimmtes M_0 (z.B. $M_0 = 5 \cdot 10^{-2}$) und können jetzt mit Gl. (49) $y(p,T, M_0 = 5 \cdot 10^{-2})$ berechnen. Es steht somit alles Zahlenmaterial zur Verfügung, um gemäß (59) die Funktion $g(p,T, M_0 = 5 \cdot 10^{-2})$ zu berechnen.

Jetzt wird p (z.B. $p = 0,8$ at) vorgegeben. Dadurch ist es möglich, $g(p = 0,8 \text{ at}, M_0 = 5 \cdot 10^{-2})$ zu berechnen.

Wir tragen das Ergebnis in ein g-T Diagramm (Bild 6) ein.

Auf der Ordinate markieren wir den Punkt $p^* = 0,8$. Die gestrichelte Gerade legt den Punkt fest, wo $g(p^*, M_0^*, T^*) = p^*$ gilt. Damit finden wir graphisch sofort $T_{0,8}^*$. Das physikalisch interessante Wertepaar $(p_{0,8}^*, T_{0,8}^*)$ dieser Kurve $g_{0,8}$ ist so gefunden. Man kann nun einen anderen Druck (etwa $p^* = 0,6$ at) vorgeben, wieder $g(p^* = 0,6 \text{ at}, M_0 = 5 \cdot 10^{-2}, T)$ zeichnen und $T_{0,6}^*$ at bestimmen, usw. Punkt für Punkt wird so die physikalische Kurve $p^*(T^*)$ gewonnen.

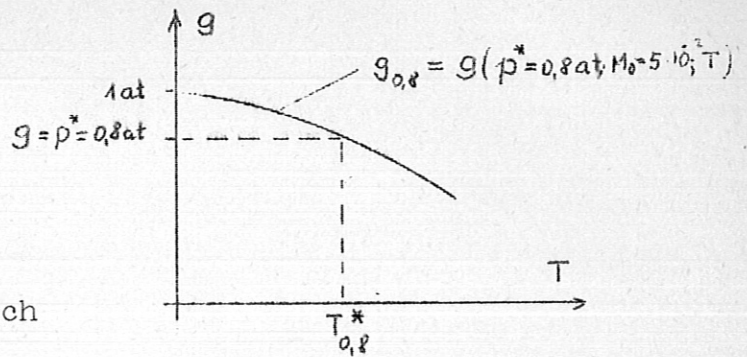


Bild 6

Danach ist es dann nicht mehr schwierig, $\gamma^* = \gamma(p^*, T^*)$ und ferner $y^* = y(p^*, T^*)$ zu berechnen. Schließlich erhält man auch $\varphi^* = \varphi(p^*, T^*)$. Damit haben wir alle interessierenden Größen gewonnen. Da uns nun nur noch die Größen mit $*$ interessieren, wird jetzt der Stern weggelassen. Es gehören ja stets die vier Werte

$$\varphi \quad \pi \quad T \quad y$$

zusammen. Deswegen kann man z. B. auftragen:

$\varphi(y)$	Bild 7
$\pi(y)$	Bild 8
$T(y)$	Bild 9

In die gleiche Darstellung wurden vergleichsweise die Kurven für $\gamma = \gamma_0$ (die also Dissoziation und Ionisation nicht berücksichtigen) eingetragen.

Stoßvorgänge kann man als Grenzfall einer Gasströmung mit Wärmezufuhr behandeln, z.B. für den Fall, daß keine Energie zugeführt wird.

Wir wollen unter dieser Annahme ($\gamma=0$) den Lösungsweg erläutern:

Zu jedem vorgegebenen M_0 gibt es gerade ein Wertepaar p^* , $T^*(M_0)$, welches die beiden Gleichungen

$$\varphi = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad (51)$$

und

$$\eta \frac{p}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma_0 M_0^2}{\gamma+1} \quad (52)$$

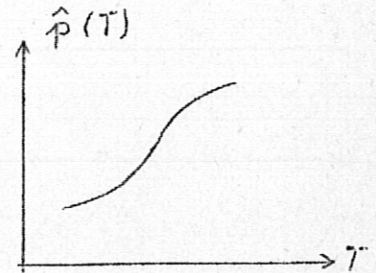
löst.

Wir schreiben (52) in der Form:

$$p = p_0 \cdot \left\{ 1 + \frac{2\gamma_0 M_0^2}{\gamma(p,T)+1} \right\}$$

Wobei $\gamma(p,T)$ in Tabellen vorliegt. Die Lösung dieser Gleichung liefert eine Funktion

$$\hat{p}(T)$$



die man in die Gleichung (51), d.h.

$$\rho(\hat{p}(T), T) = \hat{\rho} = \rho_0 \frac{\gamma(\hat{p}(T), T) + 1}{\gamma(\hat{p}(T), T) - 1}$$

einfügen kann, sodaß diese Gleichung nur für einen Wert T erfüllt ist. Wir haben diese Gleichung graphisch gelöst und dadurch T^* und ρ^* erhalten. Wenn T^* gefunden ist, kann man p^* in der Kurve $\hat{p}(T)$ suchen, denn $p^* = \hat{p}(T^*)$.

Als Beispiel sind im Anhang die Kurven $\varphi(M_0)$, $p(M_0)$, $T(M_0)$ für Argon mit $p_0 = 0,01 \text{ at}$ $T_0 = 300^\circ\text{K}$ angegeben.

III 6. Zusammenfassung der Lösungen ($\gamma = \gamma_0 = \text{const.}$)

	$\gamma = \frac{D_0}{D_0} = \frac{D_0}{D_0}$	$\Pi = \frac{D_0}{D_0}$	$H = \frac{L-Q}{i \cdot h_0}$
Exakte Lösung	$1 + \frac{1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{W_1} \right\}$ <p style="text-align: center;">mit $W_1 = 1 - \frac{2}{M_0^2} (\gamma_0 + 1)$</p>	$1 - \gamma_0 M_0^2 \frac{1}{\gamma_0 + 1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{W_1} \right\}$	$\frac{M_0^2 (\gamma_0 - 1)}{4} \frac{1}{(\gamma_0 M_0^2 - 1)} + (H-1) \frac{\gamma_0 + 1}{2 \gamma_0} \oplus \left(\frac{1}{\gamma_0 M_0^2} + M_0^2 \right) \frac{\gamma_0 - 1}{4} \sqrt{1 - \frac{4H}{\gamma_0 (\gamma_0 M_0^2 + M_0^2)}}$
Näherungs Lösung	<p>ohne Stoß:</p> $1 + \frac{\gamma}{1 - M_0^2}$	$1 - \gamma_0 M_0^2 \frac{\gamma}{1 - M_0^2}$	$(H-1) \frac{1 - M_0^2}{1 - \gamma_0 M_0^2}$
Besondere Werte	<p>mit Stoß:</p> $\frac{\gamma_0 - 1 + \frac{2}{M_0^2}}{\gamma_0 + 1} - \frac{\gamma}{1 - M_0^2} \approx \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}$	<p>$M_0 > 1$ $\gamma \ll M_0^2$</p> $\frac{1 - \gamma_0 + 2 \gamma_0 M_0^2}{\gamma_0 + 1} + \frac{\gamma_0 \gamma}{M_0^2 - 1} \approx \frac{2 \gamma_0}{\gamma_0 + 1} M_0^2$	$\gamma_{gr} = \frac{\gamma_0 - 1}{2 \gamma_0} \frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{\gamma_0}$ $\gamma_{max} = \frac{\left(\frac{1}{M_0^2} - 1 \right)^2}{2 M_0^2 (\gamma_0 + 1)}$

III 6. Zusammenfassung der Lösungen $\gamma = \gamma(p, T)$

	$\varphi = \frac{p}{p_0} = \frac{p}{p}$	$\pi = \frac{p}{p_0}$	$H = \frac{h}{h_0}$	$\gamma = \frac{L-Q}{i \cdot h_0}$
Exakte Lösung	$1 + \frac{\gamma}{\gamma_0} \frac{M_0^2 - 1}{\gamma + 1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{W_1} \right\}$	$1 - \gamma_0 \frac{M_0^2 - 1}{\gamma + 1} \left\{ 1 \oplus \sqrt{W_1} \right\}$	$\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma - 1} \frac{M_0^2}{(\gamma + 1)^2} \left\{ \gamma \left(\frac{1}{\gamma_0} M_0^2 + 1 \right)^2 - W_2 \pm (\gamma - 1) \left(\frac{1}{\gamma_0} M_0^2 + 1 \right) \sqrt{W_2} \right\}$	$\left[\frac{\gamma_0 - 1}{4} M_0^2 \left(\frac{1}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right) - \frac{\gamma + 1}{2 \gamma} H \oplus \frac{\gamma_0 - 1}{4} \left(\frac{1}{\gamma_0} M_0^2 + 1 \right) \right] \sqrt{1 - \frac{H \frac{\gamma - 1}{\gamma}}{\gamma_0 - 1 \left(\frac{1}{\gamma_0} M_0^2 + 1 \right)}}$
Lösung	$W_1 = 1 + \frac{2 \frac{(\gamma + 1)(\gamma_0 - \gamma)}{M_0^2 \gamma_0 \gamma_0 - 1} \frac{\gamma - 1}{\gamma}}{\left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right)^2} = 1 + \varepsilon - \frac{\gamma}{\gamma_{max}}$	$W_2 = \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right)^2 + \frac{2(\gamma + 1)(\gamma_0 - \gamma)}{M_0^2 \gamma_0 (\gamma_0 - 1)} - \frac{2(\gamma^2 - 1)}{M_0^2 (\gamma_0 - 1)} \gamma$		
Näherungs	<p>ohne Stoß: $(M_0 < 1 ; 0 \leq \gamma \leq \gamma_{gr})$</p> $1 + \frac{(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0 (\gamma - 1) \gamma}{(\gamma_0 - 1) (\gamma - \gamma_0 M_0^2)}$	$1 - \frac{(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0 (\gamma - 1) \gamma}{(\gamma_0 - 1) \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right)}$	$\frac{\gamma}{\gamma - \gamma_0} \left\{ 1 - M_0^2 + (1 - \gamma_0 M_0^2) \gamma \right\}$	$\frac{M_0^2 - 1}{1 - \gamma_0 M_0^2} + \frac{\gamma - \gamma_0 M_0^2}{\gamma (1 - \gamma_0 M_0^2)} \cdot H$
Lösung	<p>mit Stoß: $(M_0 > 1 ; \gamma \ll 1)$</p> $\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2 \gamma}{\gamma_0 M_0^2 (\gamma + 1)}$	$\frac{1 - \gamma}{\gamma + 1} + \frac{2 \gamma_0 M_0^2}{\gamma + 1}$	$\frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} 2 M_0^2 (\gamma_0 - 1)$	
Besondere Werte	$\varphi(\gamma_{gr}) = 1 + \frac{1}{\gamma + 1} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right)$	$\pi(\gamma_{max}) = 1 - \frac{1}{\gamma + 1} (\gamma - \gamma_0 M_0^2)$		$\frac{\gamma_{gr}}{\gamma_{max}} = \frac{\gamma_0 - 1}{2 \gamma_0} \frac{1}{M_0^2} - \frac{1}{\gamma_0}$ $\frac{\gamma_{gr}}{\gamma_{max}} = \frac{M_0^2 (\gamma_0 - 1)}{2 (\gamma^2 - 1)} \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} M_0^2 - 1 \right)^2$

III.7. Schlußbemerkungen.

Wir haben in dieser Darstellung gezeigt, daß man eine ein-dimensionale Strömung mit Wärmezufuhr unter Berücksichtigung der Dissoziation und Ionisation berechnen kann, indem man ein $\gamma = \frac{h(p,T)}{u(p,T)}$ einführt. Ein bemerkenswertes Ergebnis ist die Druckabnahme bei steigender Wärmezufuhr. - Die Abweichungen gegenüber einer Rechnung mit konstantem $\gamma = \gamma_0$ sind zum Teil erheblich.

Stoßwellen sind als Grenzfall in dieser Rechnung enthalten. Das Verhalten der Entropie wurde jedoch nicht untersucht. Im Vergleich mit Experimenten darf man diese Rechnung nur als qualitativ richtiges Modell bewerten, sobald (wegen Wärmeleitung und innerer Reibung) die Konstanz von T und w in der Anfangs- und Endfläche nicht mehr hinreichend gesichert ist.

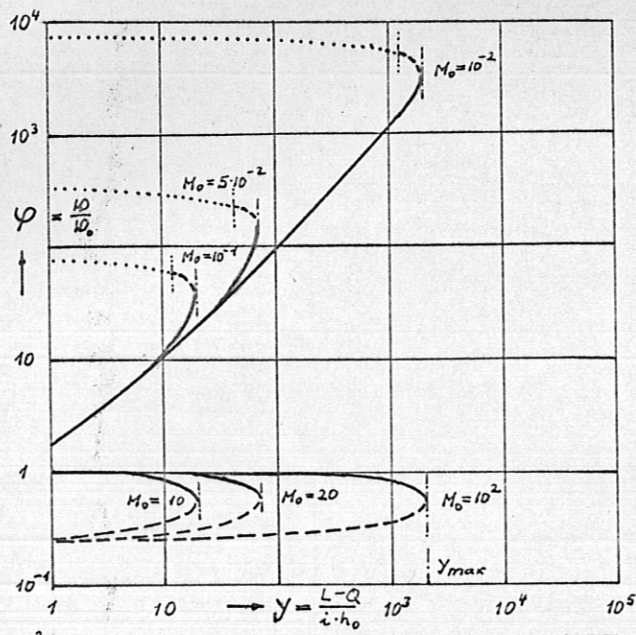


BILD 2

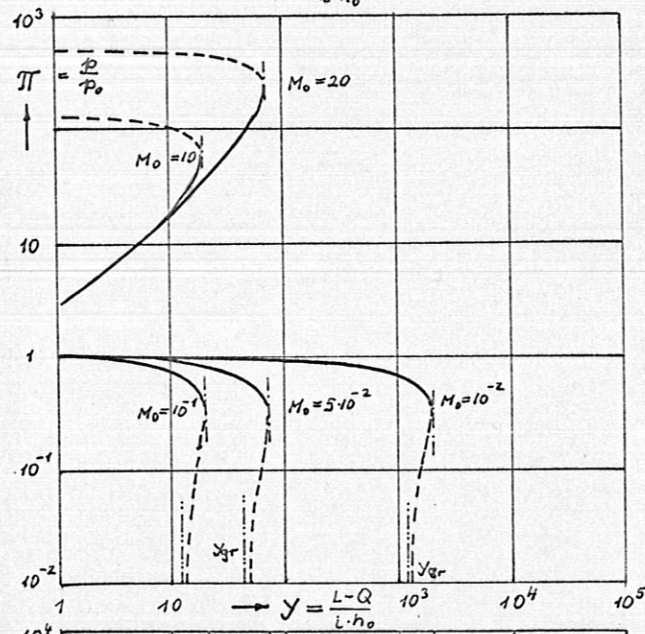


BILD 3

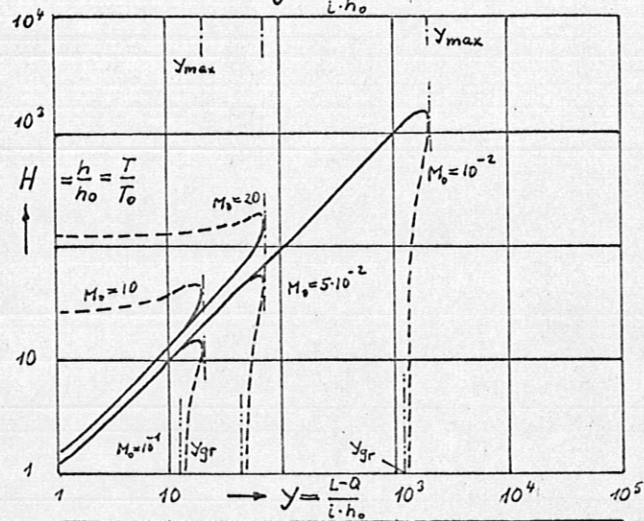


BILD 4

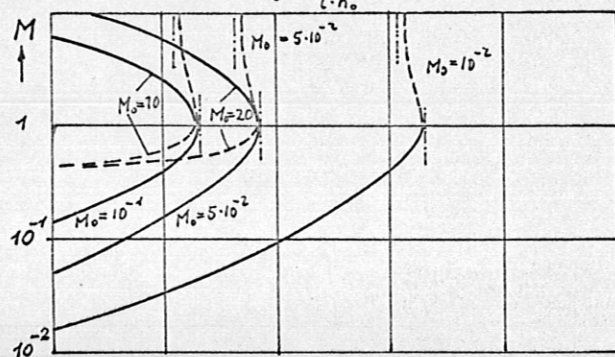
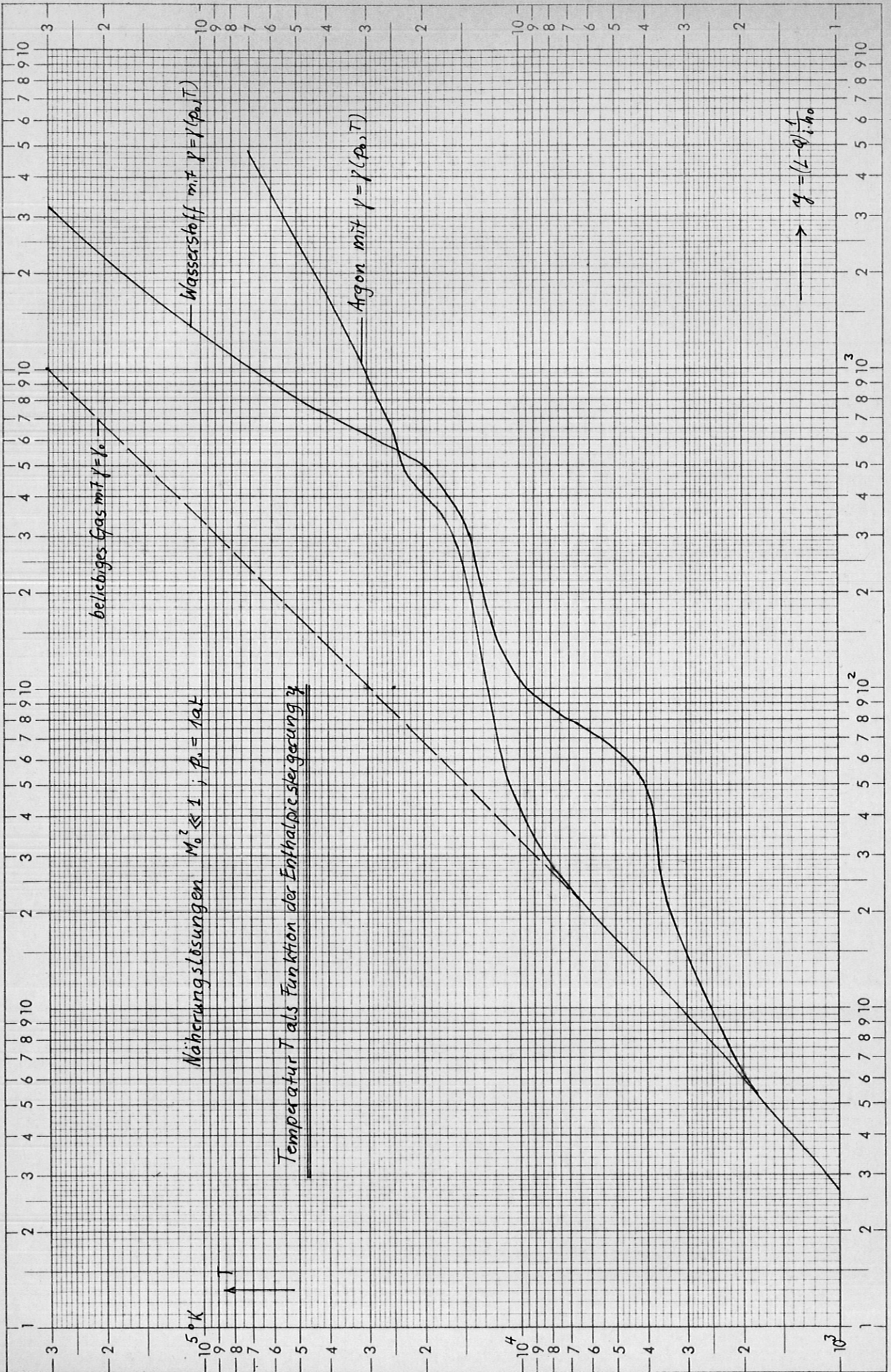
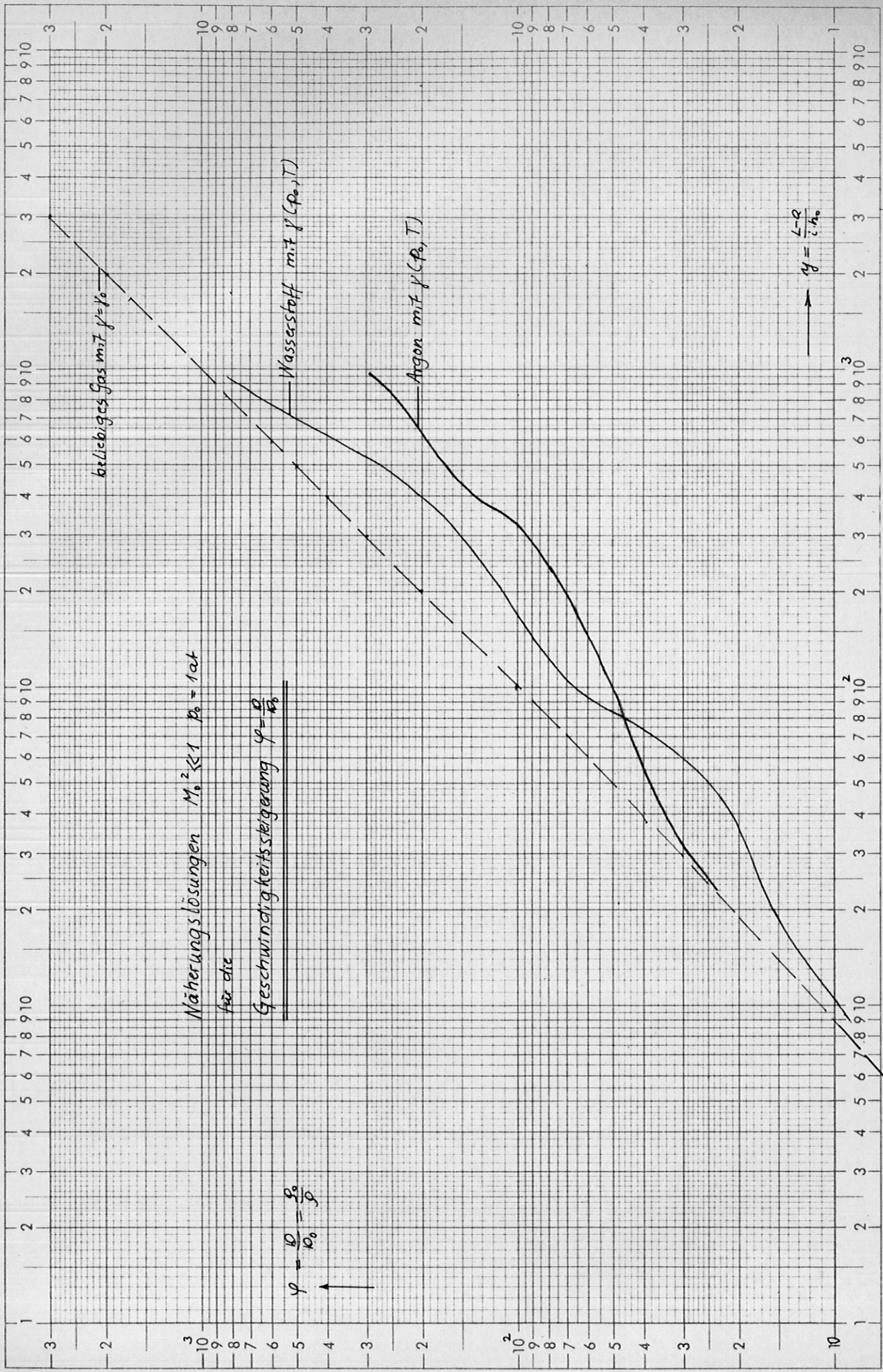


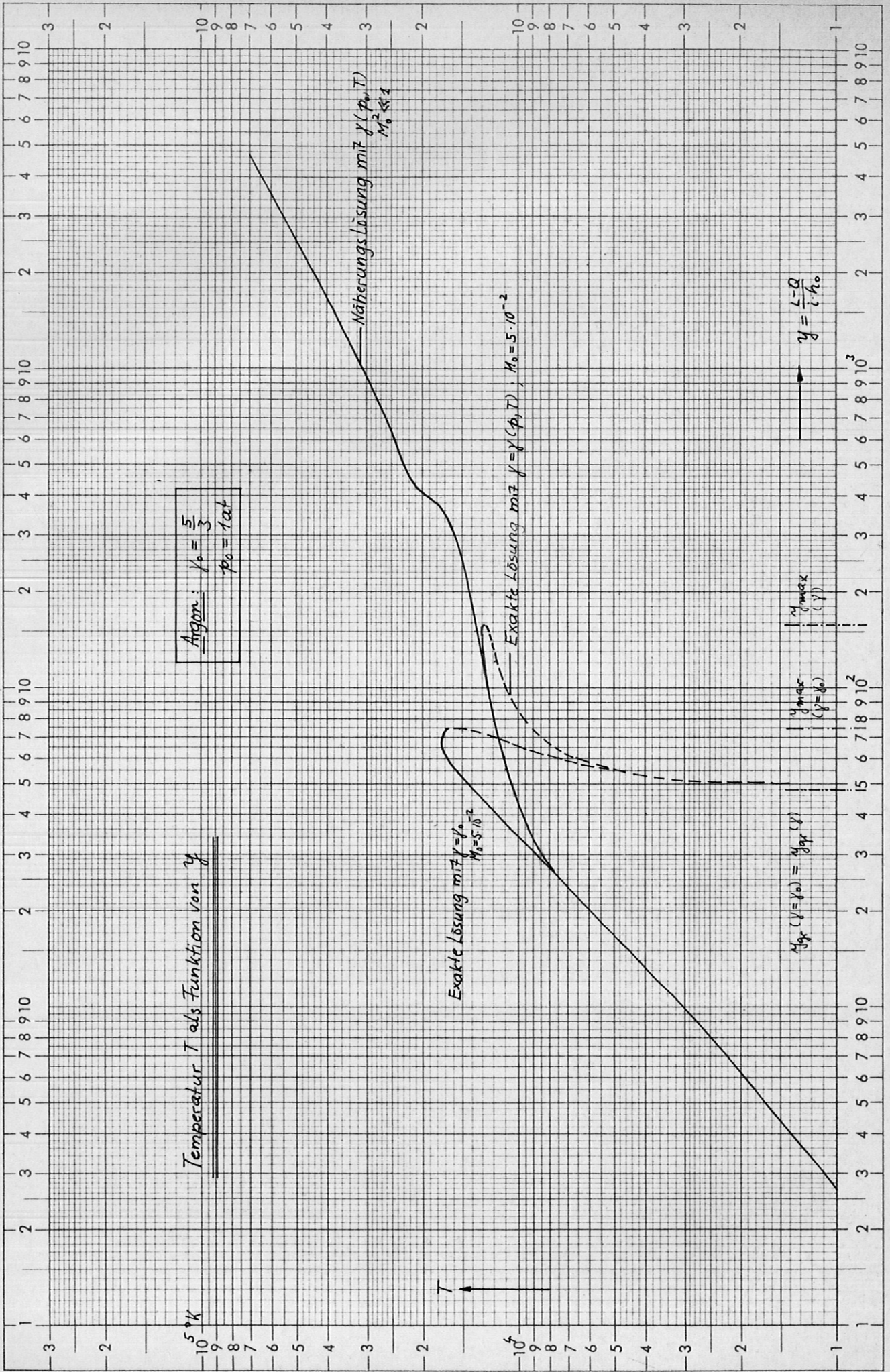
BILD 5



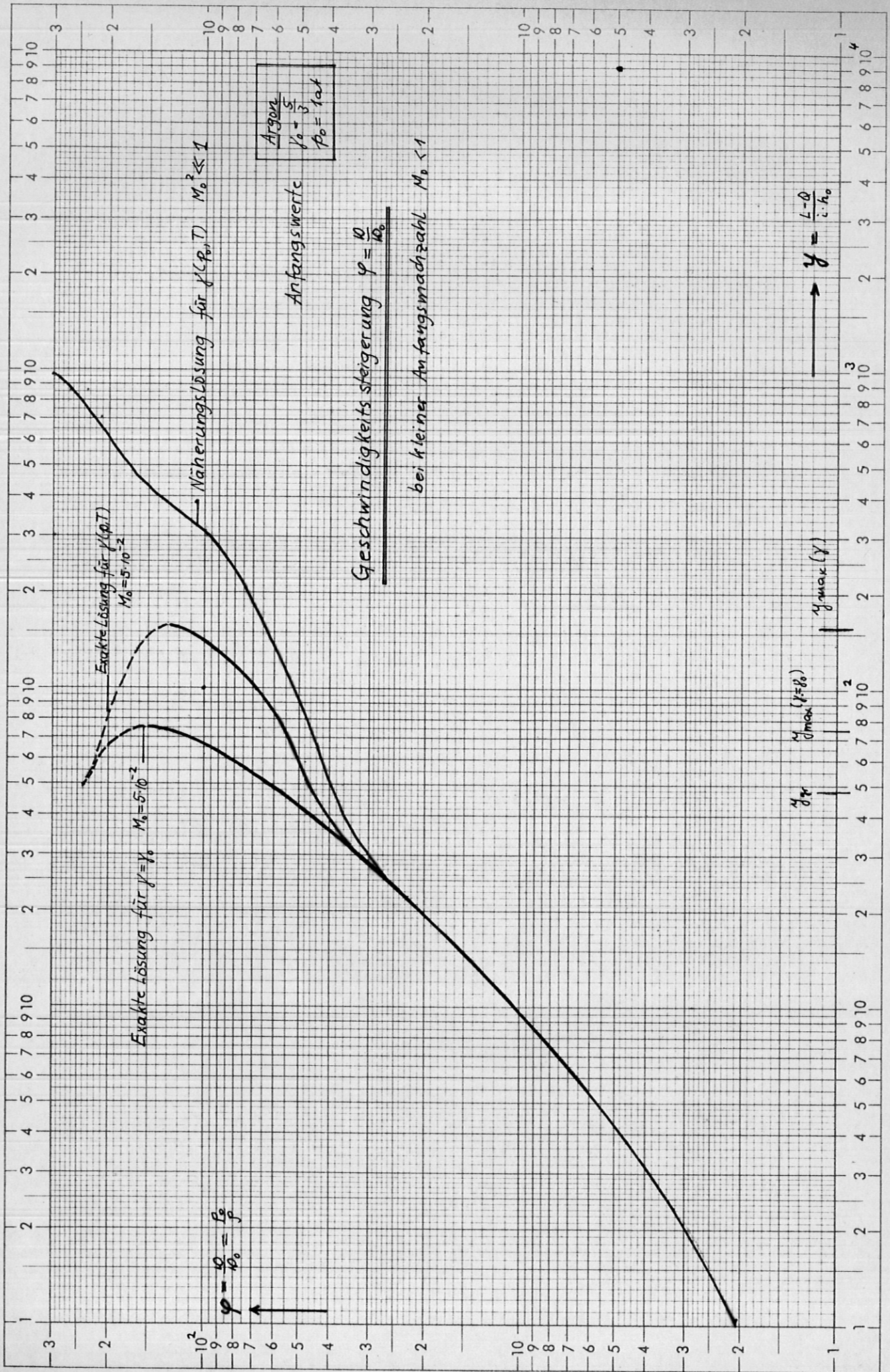
Beide Achsen logar. geteilt von 1 bis 10000 und 1 bis 300 Einheit 62,5 mm



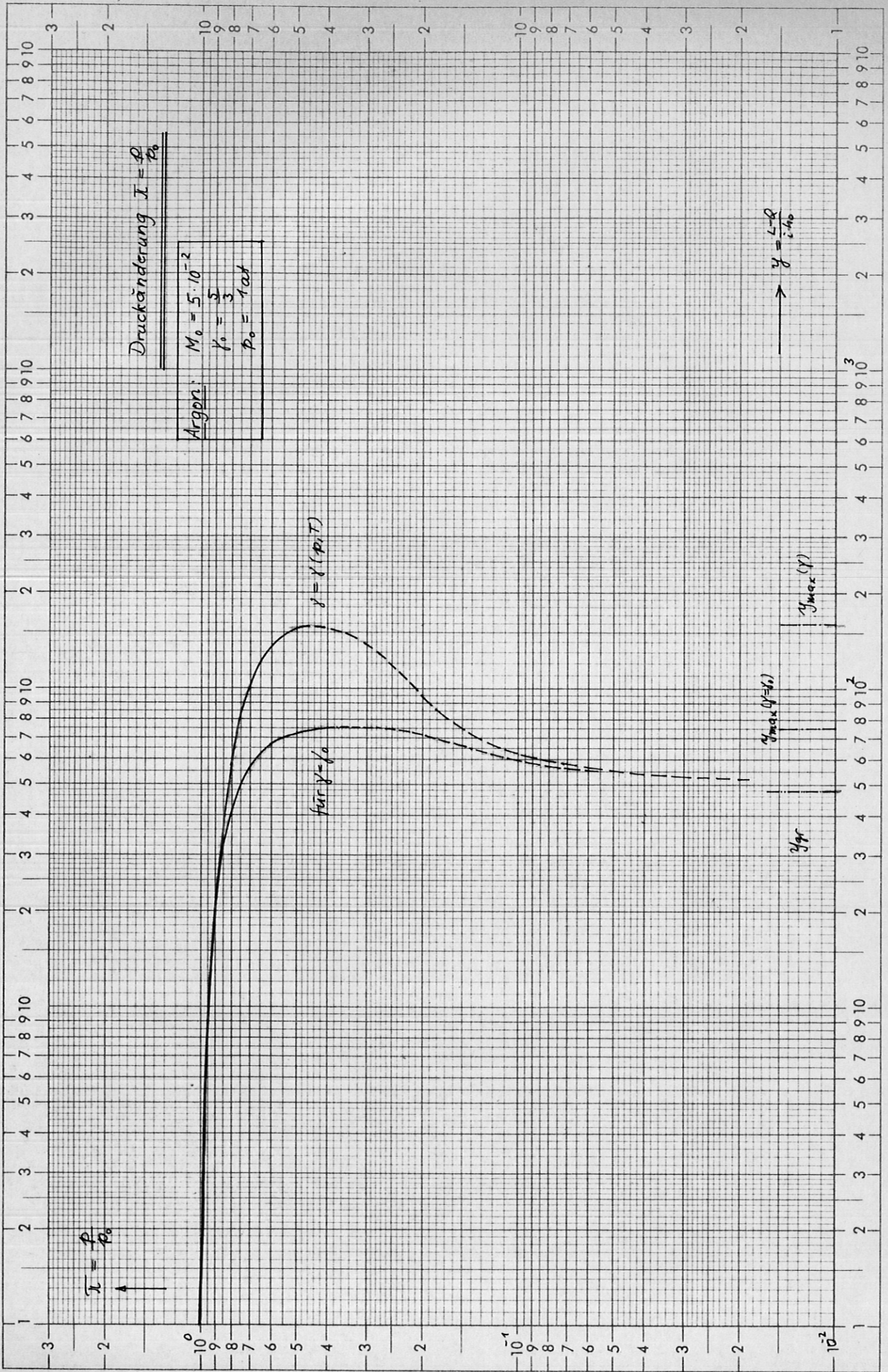
Beide Achsen logar. geteilt von 1 bis 10000 und 1 bis 300 Einheit 62,5 mm



Beide Achsen logar. geteilt von 1 bis 10000 und 1 bis 300 Einheit 62,5 mm



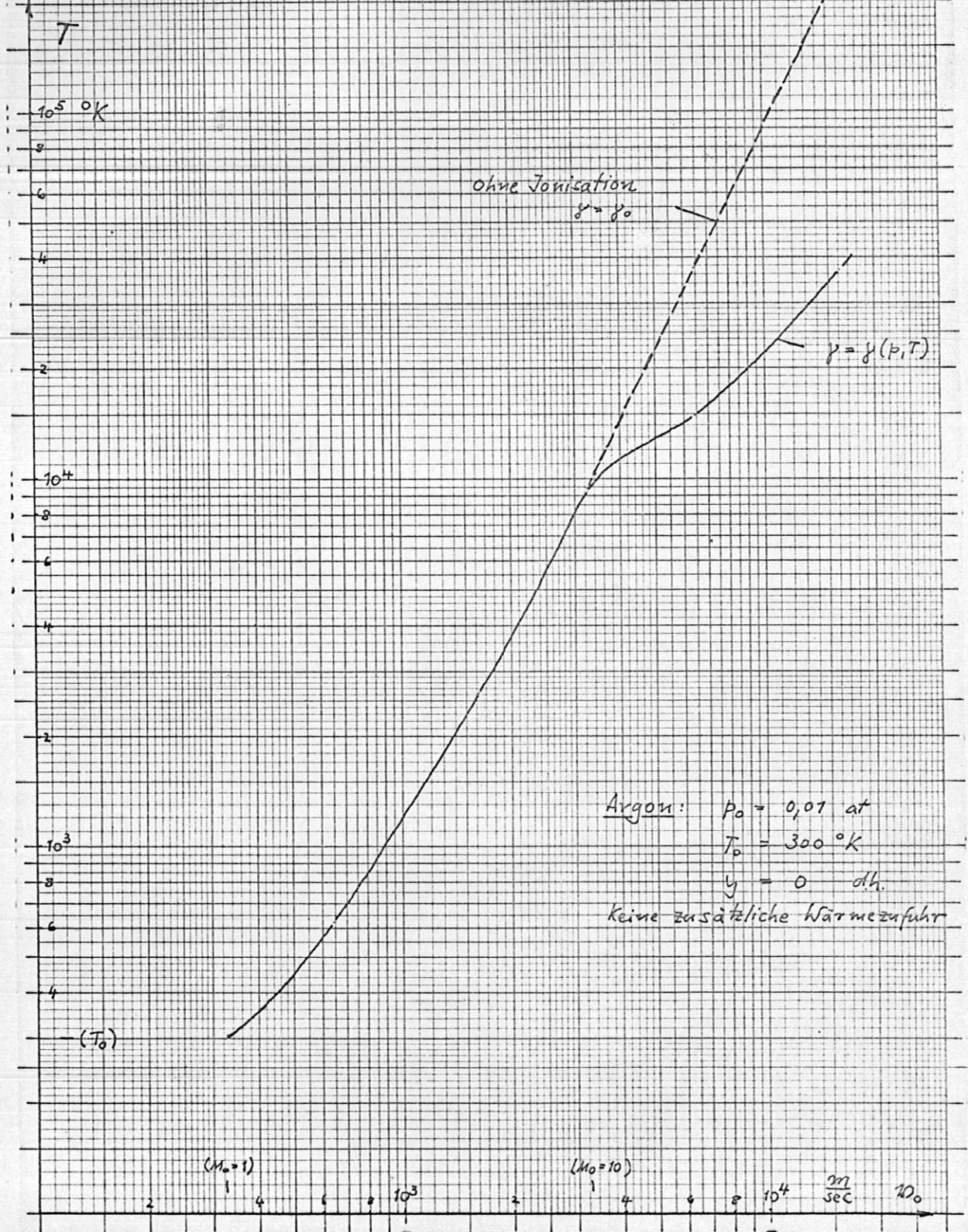
Beide Achsen logar. geteilt von 1 bis 10000 und 1 bis 300 Einheit 62,5 mm



Beide Achsen logar. geteilt von 1 bis 10000 und 1 bis 300 Einheit 62,5 mm

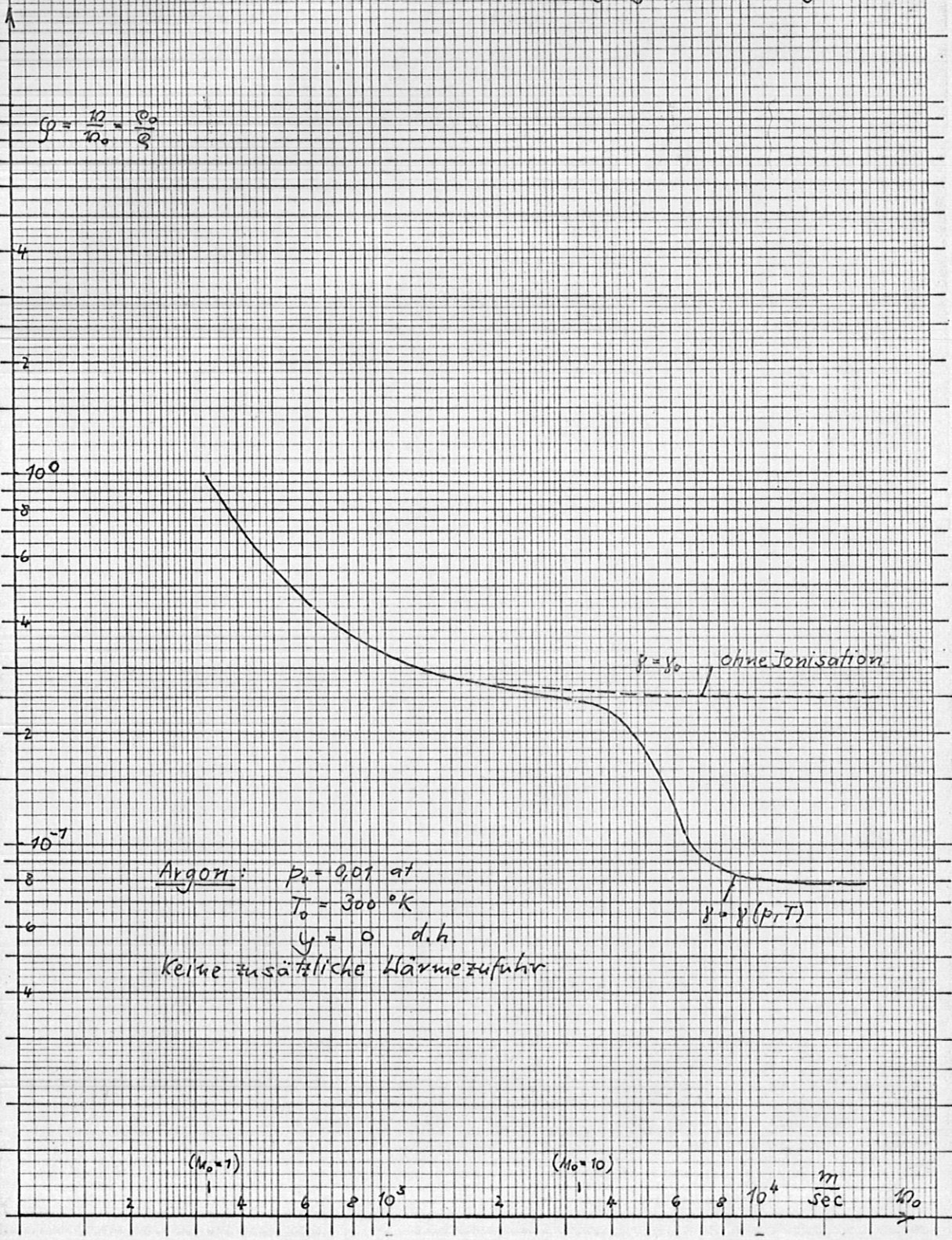


Temperatur T nach einem Stoß
als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit u_0



Dichteänderung $\rho = \frac{\rho_0}{\sigma}$ nach einem Stoß
als Funktion der Anfangsgeschwindigkeit u_0

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sigma} = \frac{\rho_0}{\sigma}$$



Argon $L-Q=0$ $p_0 = 0,01 \text{ atm}$
 $T_0 = 300^\circ \text{K}$

$p(M_0)$ mit Ionisation
nach Stoß ohne Energiezufuhr ($y=0$)

p in atm. (Π)

10^2 (10^4)

8

6

4

2

10^1 (10^3)

8

6

4

2

10^0 (10^2)

8

6

4

2

2

($M_0=1$)

10^3

($M_0=10$)

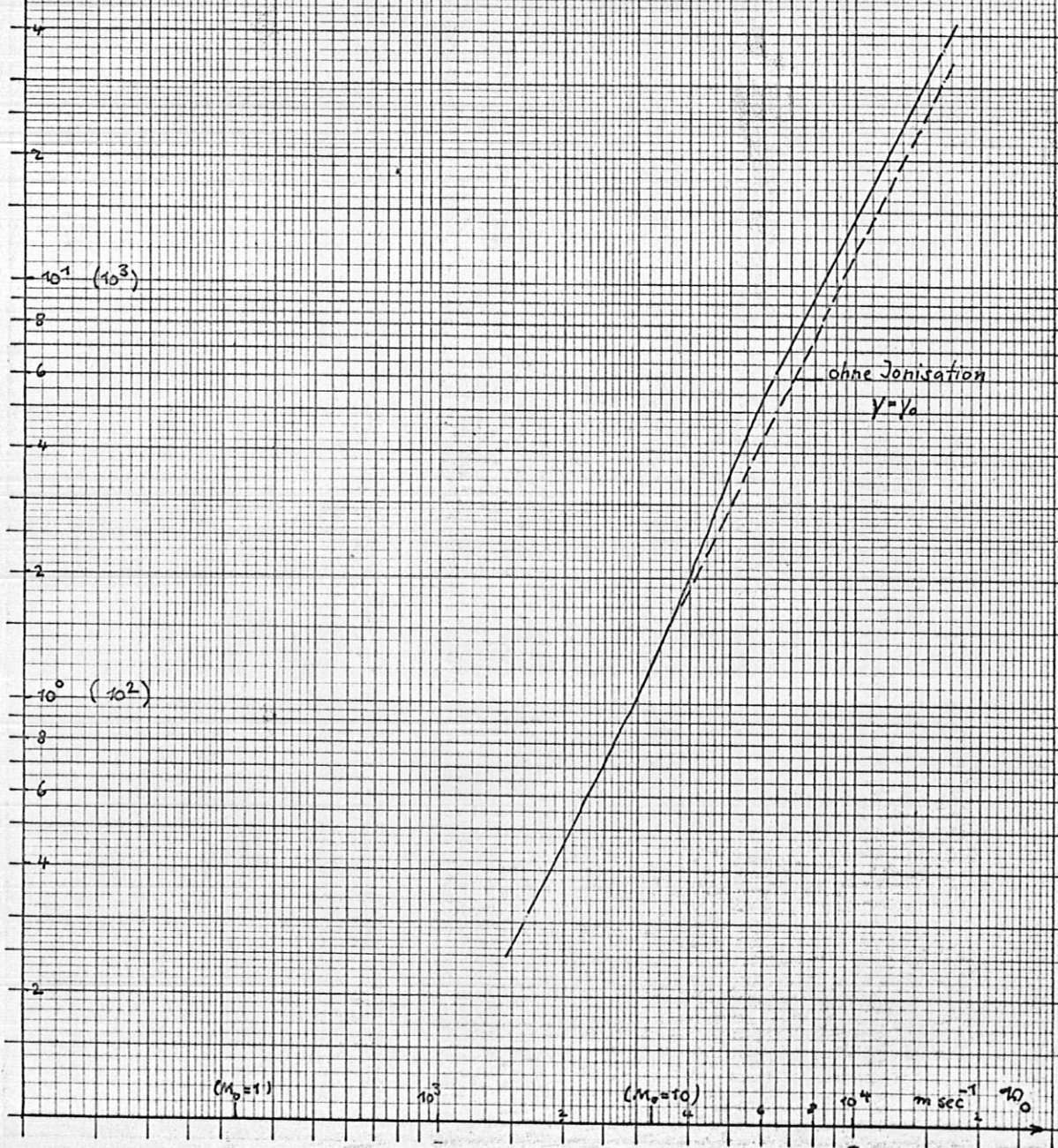
6

8

10^4

m sec^{-1}

10^0



$\delta = \frac{h(p, T)}{u(p, T)}$ als Funktion der Temperatur T
 mit dem Druck p als Parameter

