

INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Induktionsspulen als Messelemente
an schnellen, stromstarken
Gasentladungen.

W. Köppendörfer

IPP 1/2

1. Nov. 1961

Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.

Induktionsspulen als Messelemente an schnellen, stromstarken Gasentladungen

W Köppendörfer

I Einführung.

Induktionsspulen benützt man in der Regel bei stromstarken, zeitlich schnell veränderlichen Entladungen zur Messung des Entladestroms J , seiner zeitlichen Änderung $\frac{dJ}{dt}$, des Magnetfeldes \mathcal{L} und seiner zeitlichen Änderung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$. Grundsätzlich unterscheiden sich beide Messungen - von J und $\frac{dJ}{dt}$ einerseits und von \mathcal{L} und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ - andererseits - nicht in ihrer Wirkungsweise und dem Aufbau des Messkreises. Die Messung von J und $\frac{dJ}{dt}$ erfordert keinen Eingriff in den Entladerraum. Beide Grössen sind Integrale über eine räumliche Verteilung. \mathcal{L} und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ dagegen sind Funktionen des Ortes und der Zeit. Deshalb muss das Messelement, die "Sonde", an den Ort gebracht werden, an dem \mathcal{L} oder $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$ gemessen werden sollen, also unter Umständen auch in das Plasma. Ein Unterschied zwischen Strom und Magnetfeldmessung besteht nur in der geometrischen Form und Abmessung der Induktionsspulen.

Bei einer Strommessung muss im allgemeinen eine lange Spule den Strom ganz umschliessen. Für die Magnetfeldmessung wird eine möglichst kleine Spule verwendet, deren Störung im Entladerraum vernachlässigt werden kann. Im Prinzip lässt sich der Entladestrom durch den Spannungsabfall an einem ohmschen Widerstand messen, der in den Entladekreis geschaltet wird. Seine Dimensionierung erfordert aber so ungünstige Werte, dass er kaum realisierbar ist. Ausserdem ist dazu eine galvanische Verbindung zwischen dem Entladekreis und dem registrierenden Oszillographen nötig, die nach Möglichkeit vermieden werden soll. Deshalb benützt man vorteilhaft Spulen, in denen das zeitlich veränderliche Magnetfeld des Entladestromes eine Spannung induziert, die je nach Auslegung des Messkreises proportional J oder $\frac{dJ}{dt}$ sein kann.

In einer Spule wird durch eine Flussänderung $\frac{d\phi}{dt}$ eine Spannung induziert, die der Flussänderung proportional ist:

$$(1) \quad U_i = 10^{-8} \frac{d\phi}{dt}$$

U_i hat die Dimension Volt, wenn der Fluss ϕ in Gauss cm^2 angegeben wird. Bei einer Zylinderspule mit n Windungen und der Querschnittsfläche F ist $\phi = n \cdot F \cdot B$, wenn B die Feldkomponente parallel zur Spulenachse ist. Zwischen B und H braucht hier kein Unterschied gemacht zu werden, da nur Materialien mit $\mu=1$ Verwendung finden.

Grundsätzlich kann U_i nur an offenen Spulenden gemessen werden. D.h. der Spule müsste ein Messinstrument mit sehr hohem Eingangswiderstand angeschlossen sein. Schnell ablaufende Vorgänge, wie sie hier gemessen werden sollen (Zeitskalen: $0,1 \div 10 \mu\text{s}$), können nicht ohne Schaden über hohe Widerstände ($R > 1 \text{ k}\Omega$) übertragen werden, da Streuinduktivitäten und Streukapazitäten das Signal verfälschen. Deshalb ist die Spule immer über einen Widerstand geschlossen. Abb. 1 zeigt das Schaltschema. U_i bedeutet dabei die durch eine äussere Flussänderung induzierte Spannung. L ist die Selbstinduktivität der Spule, und R der ohmsche Widerstand, meist der

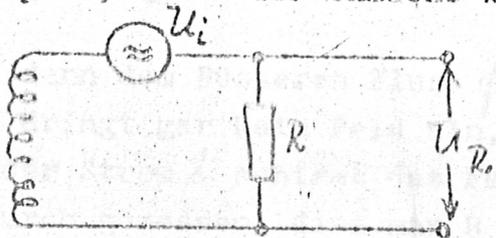


Abb. 1

Wellenwiderstand eines Messkabels. Für diesen einfachen Kreis gilt die Maschengleichung:

$$(2) \quad U_i = L \frac{di}{dt} + Ri$$

U_R ist der Spannungsabfall, der am Widerstand R gemessen wird. Li ist der durch den Strom i induzierte Gegenfluss ϕ_i . U_R gibt also die wirkliche Flussänderung durch die Spule an:

$$(3) \quad U_R \sim \frac{d}{dt} (\phi - \phi_i)$$

Zwei Grenzfälle der Gleichung (2) sind hier von Bedeutung:

1. $R \rightarrow \infty$ Die Spule ist offen und U_i ist der äusseren Flussänderung $\frac{d\phi}{dt}$ und damit $\frac{d\phi}{dt}$ proportional, Praktisch ist dieser Fall mit der Forderung $|L \frac{di}{dt}| \ll |Ri|$ erfüllt. Im allgemeinen ist diese Forderung bei einem endlichen Widerstand R nicht erfüllbar, denn der Strom $i(t)$ kann einen beliebigen Verlauf haben. Dabei kann durchaus vorkommen, dass $i=0$ aber $\frac{di}{dt} \neq 0$ ist. Es genügt aber, wenn $L \frac{di}{dt}$ immer so klein ist, dass es unter dem Auflösungsvermögen des Instruments liegt, mit dem U_R gemessen wird. Wenn das der Fall ist, kann der induzierte Gegenfluss ϕ_i immer gegen den äusseren Fluss vernachlässigt werden. Eine gegebene Feldkonfiguration wird dann nicht durch die Messspule gestört.

2. $R \rightarrow 0$ Die Spule ist kurzgeschlossen und es gilt:

$$(4) \quad U_i = L \frac{di}{dt}$$

oder:

$$B \sim \phi \sim \int U_i dt = Li$$

Der Strom i ist dann dem äusseren Fluss ϕ und damit B proportional. In die Messspule dringt gar kein Feld ein, da ϕ_i immer ϕ gerade aufhebt. Oder: der Strom i schirmt das Feld B ab. Praktisch wird der Strom i dadurch gemessen, dass man R endlich lässt, aber so klein wählt, dass

$$L \frac{di}{dt} \gg Ri \quad \text{ist.}$$

Diese Forderung kann auch geschrieben werden:

$$Li \gg \int U_R dt$$

Der Spannungsverlauf $U_R(t)$ ist dann so lange $\int U_R dt$ proportional, solange $\int U_R dt \ll \frac{L}{R} U_R$ ist. Verletzt ist diese Forderung, wenn $U_R=0$ ist, aber $\int U_R dt \neq 0$. Im praktischen Fall genügt es aber, wenn $\Delta U_R = \frac{R}{L} \int U_R dt$ kleiner als das Auflösungsvermögen des Messinstrumentes ist. Eine Schaltung, die so dimensioniert ist,

dass das gewährleistet ist, nennt man eine integrierende Schaltung.

Diese beiden Grenzfälle, und ihre praktische Anwendung wurden deshalb angeführt, weil sie zeigen, wann ein Magnetfeld durch eine Spule, die es messen soll, verändert wird. Die Spule übt dann keine Rückwirkung auf das Magnetfeld aus, wenn das Glied $L \frac{dI}{dt}$ vernachlässigbar klein ist. Wenn das nicht der Fall ist, insbesondere bei einer integrierenden Schaltung der Art wie sie beschrieben wurde, muss überlegt werden, ob die Störung durch die Spule nicht die Entladung beeinflusst. Sicher kann ihre Rückwirkung auf die Entladung vernachlässigt werden, wenn der Raum, den sie einnimmt, klein gegen den gesamten vom Feld erfüllten Raum ist.

II. Die Rogovskispule.

Unter einer Rogovskispule versteht man eine Induktionsspule, mit der ein zeitlich veränderlicher Strom J oder sein $\frac{dJ}{dt}$ gemessen wird, wobei die Stromverteilung beliebig sein kann. Die Wirkungsweise einer Rogovskispule lässt sich aus dem Kreisintegral

$$(5) \quad \oint_C \mathcal{L} d\mathcal{S} = 0,4\pi J$$

veranschaulichen. Das Integral erstreckt sich dabei über eine geschlossene Kurve C , die beliebig verlaufen kann, aber den Strom ganz umschliessen muss. Die Einheit von J ist das Ampere und die von \mathcal{L} das Gauss. Das Skalenprodukt $\mathcal{L} d\mathcal{S}$ kann $B ds$ geschrieben werden, wenn B die Feldkomponente parallel zum Linienelement ds ist. Denkt man sich nun um eine den Strom J umschliessende Kurve eine Spule in zahlreichen Windungen gewickelt, so dass der Abstand von Windung zu Windung immer gleich gross ist und die Flächen, die von den einzelnen Windungen eingeschlossen werden auch gleich gross sind, dann ist die Spannung U_i , die in dieser Spule durch eine Feldänderung $\frac{dB}{dt}$ induziert wird:

$$(6) \quad U_i = 10^{-8} F \cdot \sum_{v=1}^n \frac{dB_v}{dt}$$

B_v ist die Feldkomponente, die parallel der Flächennormale der v ten Windung ist. Die Gesamtzahl der Windungen ist n . Wenn die einzelnen Windungsflächen immer senkrecht zur Kurve C gerichtet sind, dann ist B_v immer parallel zu Δs . Wenn Δs hinreichend klein gewählt wird, kann das Integral (5) angenähert werden:

$$(7) \quad \Delta s \sum_{v=1}^n B_v = 0,4\pi J$$

Δs tritt vor die Summe, da der Windungsabstand gleich gross gewählt wurde. Bezeichnet man mit l die Gesamtlänge der Kurve C , dann wird $\Delta s = \frac{l}{n}$. Setzt man ausserdem F noch als Faktor vor die Summe, so lautet (7):

$$\frac{l}{nF} \cdot F \sum_{v=1}^n B_v = 0,4\pi J$$

Differenziert man noch nach der Zeit t und berücksichtigt Gleichung (6), so erhält man:

$$(8) \quad U_i = \frac{0,4\pi F}{l} \cdot 10^{-8} \frac{dJ}{dt}$$

Die Herleitung zeigt, worauf bei einer Rogovskispule zu achten ist:

1. Die Flächen, die die einzelnen Windungen einschliessen müssen gleich gross sein, d.h. die Spule muss einheitlichen Querschnitt besitzen.
2. Der Windungsabstand muss gleich gross sein.
3. Die Windungszahl muss so gross sein, dass das Kreisintegral innerhalb der erforderlichen Messgenauigkeit durch eine Summe angenähert werden kann. Im Einzelfall hängt das davon ab, in welchem Grad das Magnetfeld inhomogen ist.
4. Die einzelnen Windungsflächen müssen senkrecht zur Spulenachse (Kurve C) orientiert sein. Da das im allgemeinen wegen der Steigerung der Windungen nicht der Fall ist, muss durch geeignete Anordnung (z.B. eine zusätzliche Lage von Windungen entgegengesetzter Steigung) dafür gesorgt werden, dass sich Beiträge von Feldkompo-

menten herausheben, die nicht parallel zu ΔS sind.

Wenn diese Forderungen erfüllt sind, dann ist es ganz gleichgültig:

1. in welcher Kurve die Spule den Strom J umschliesst, und
2. wie sich der Strom innerhalb der Kurve C verteilt.

Die Gleichung lautet):

$$(8) \quad U_i = M \cdot \frac{dJ}{dt}$$

Der konstante Faktor M , der allein von der geometrischen Form der Spule abhängt, heisst Gegeninduktivität.

$$M = \frac{0,4\pi \cdot n \cdot F}{\ell} \cdot 10^{-8}$$

Seine Dimension ist Henry, wenn F in cm^2 , und ℓ in cm angegeben werden. U_i hat die Dimension Volt, wenn $\frac{dJ}{dt}$ in Asec^{-1} angegeben wird.

In vielen Fällen kann als Rogovskispule eine Spule verwendet werden, die die Form eines Torus hat. Die Steigung der Windungen wird dann durch zwei Windungslagen kompensiert. Oft ist es aber nicht möglich eine Spule in Form eines Kreisrings zu verwenden, z.B. wenn der Strom in Bandleitern gemessen werden soll. An einem Beispiel wird die Konstruktion einer Rogovskispule gezeigt, wie sie Anwendung findet, wenn nur wenig Raum um einen Stromleiter zur Verfügung steht.

Beispiel:

Für eine Stossbatterie wurde ein maximaler Stromanstieg von $\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{\text{max}} = 10 \frac{\text{A}}{\text{sec}}$ errechnet. Der zeitliche Verlauf von $\frac{dJ}{dt}$ soll durch eine Rogovskispule gemessen werden. Die Spule kann nur um eine von zwei engbenachbarten Leiterplatten angebracht werden. Die Breite der Platten ist 10 cm, ihre Dicke 1 mm und ihr Abstand 2 mm. Das Messsignal soll maximal 100 Volt betragen, um es mit Sicherheit über den Störpegel zu heben.

Daraus ergibt sich eine Gegeninduktivität:

$$M = \frac{U_i}{\left(\frac{dJ}{dt}\right)_{\text{max}}} = \frac{10^2}{10} = 10^{-9} \text{ Hy}$$

Die Gesamtlänge der Spule soll etwa 25 cm betragen, etwas mehr als die doppelte Plattenbreite. Abb 2 zeigt die geplante Anordnung der Spule.

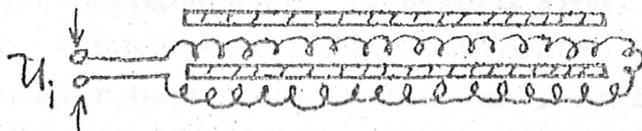


Abb. 2

Verwendet wird ein rechteckiger Spulenquerschnitt, wovon eine Rechteckseite $a = 1 \text{ mm}$ sein soll, wegen des geringen Plattenabstandes. Die zweite Seite sei b .

$$M = \frac{0,4 \pi \cdot n \cdot a \cdot b \cdot 10^{-8}}{l}$$

Daraus:

$$n \cdot b = \frac{l \cdot M \cdot 10^{+8}}{0,4 \pi \cdot a} = \frac{25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^8}{0,4 \pi \cdot 0,1} \approx 20 \text{ cm}$$

Als zweite Rechteckseite wird $b = 0,5 \text{ cm}$ gewählt. Die Spule erhält dann 40 Windungen. Aus Montagegründen kann die Spule nicht auf einen geschlossenen Spulenkörper gewickelt werden. Daher soll ein flexibles Band, z. B. aus Kunststoff verwendet werden. Das Band muss 0,1 cm dick sein und mindestens 25 cm lang sein, kann aber breiter als 0,5 cm sein, wenn Löcher so angebracht werden (Abb. 3), dass die Spulenwindungen nur 0,5 cm Breite umfassen. Man geht dabei so vor: Zwanzig Windungen werden in einer Richtung mit gleichmässigen Windungsabstand über die ganze Länge der Folie gewickelt und weitere zwanzig Windungen ohne den Drehsinn zu ändern wieder zum Ausgangspunkt zurück. Abb. 3 zeigt die Anordnung der Windungen.

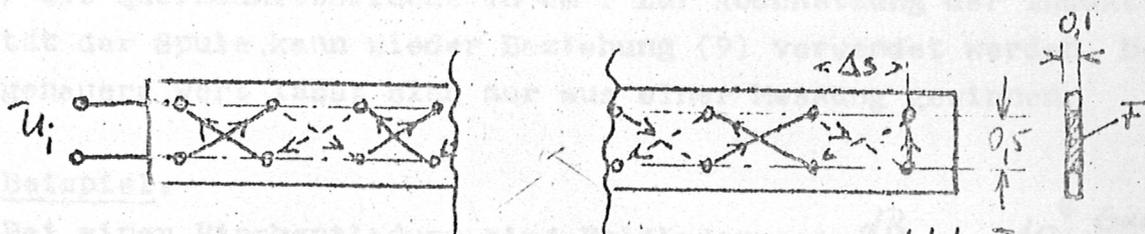


Abb 3.

Durch die Art der Wicklung wird erreicht, dass sich Feldkomponenten, die nicht parallel zur Spulenachse gerichtet sind, sich weitgehend kompensieren. Nur dort, wo starke Inhomogenitäten über einen Windungsabstand vorhanden sind, wie etwa an den Plattenrändern, können andere Feldkomponenten Spannungen induzieren. Sie fallen aber hier kaum ins Gewicht, da dort der Betrag des Feldes klein ist. Eine Verbesserung der Spule durch eine grössere Windungszahl ist meist nicht ratsam, weil dann ihre Selbstinduktivität zu gross wird ($L \sim n^2$). In Abschnitt IV, der den Messkreis behandelt wird davon noch die Rede sein. Die fertige Spule wird dann um eine der beiden Platten geschlungen, und beide Enden so angeordnet, dass ihr Abstand etwa einem Windungsabstand entspricht.

Für die Induktivität einer Rogovskispule nimmt man meist die einer langen Spule an:

$$(9) \quad L = \frac{0,4\pi F \cdot n^2}{l} \cdot 10^{-8} \text{ Hy}$$

Im Einzelfall muss aber die errechnete Induktivität durch eine Messung geprüft werden, da diese Formel meist nicht hinreichend genau ist. Dazu schaltet man der Spule eine Kapazität passender Grösse parallel und misst die Resonanzfrequenz des Kreises.

III. Die Magnetfeldsonde.

Als Magnetfeldsonde findet fast durchweg eine Zylinderspule kleiner Abmessungen Verwendung. Ihr Durchmesser und ihre Länge betragen in der Regel 0,5 bis 1 mm. Die induzierte Spannung ist:

$$(10) \quad U_i = 10^{-8} n \cdot F \frac{dB}{dt}$$

B ist die Feldkomponente parallel zur Spulenachse in Gauss und F die Querschnittsfläche in cm^2 . Zur Abschätzung der Induktivität der Spule kann wieder Beziehung (9) verwendet werden. Der genauere Wert lässt sich nur aus einer Messung gewinnen.

Beispiel:

Bei einer Pinchentladung sind Feldänderungen $\frac{dB}{dt}$ von $10^4 \frac{\text{Gauss}}{\text{msec}}$

zu erwarten. Die Induktivität der Sondenspule darf nicht höher als $L = 300 \mu\text{Hy}$ sein. Die induzierte Spannung U_i soll mindestens 1 Volt betragen. Als untere Grenze wird ein $\frac{dB}{dt} = 10^9 \frac{\text{Gauss}}{\text{sec}}$ angenommen.

$$U_i = 10^{-8} \cdot n F \frac{dB}{dt}$$

$$n F = \frac{U_i \cdot 10^{-8}}{\frac{dB}{dt}} \approx 10^{-1} \text{cm}^2$$

Gewählt werden $n = 20$ Windungen. Dann wird $F = 5 \cdot 10^{-3} \text{cm}^2$. Der Durchmesser der Sondenspule ist dann:

$$d = 2 \sqrt{\frac{F}{\pi}} = 8 \cdot 10^{-2} \text{cm}$$

$$d \approx 0,8 \text{mm}$$

Die Induktivität der Spule, die etwa $l = 1 \text{mm}$ lang sein soll ist etwa:

$$L = \frac{0,4 \pi F \cdot n^2}{l} \cdot 10^{-8} \approx 240 \mu\text{Hy}$$

Die wirkliche Induktivität liegt sicher höher, wird aber 300 nicht wesentlich übersteigen.

IV. Der Messkreis.

Der Messkreis umfasst das Messelement und alle Schaltelemente einschliesslich Messkabel bis zum Oszillographeneingang. Berücksichtigt werden dabei nur konzentrierte Schaltelemente. Streuinduktivitäten und Streukapazitäten werden vernachlässigt. Das Schaltschema entspricht also nur dann den wirklichen Verhältnissen, wenn der Einfluss parasitärer Induktivitäten und Kapazitäten vernachlässigbar klein ist. Das muss von Fall zu Fall geprüft werden. Um den Einfluss von Streukapazitäten gering zu halten, empfiehlt es sich, auf alle Fälle niedrige ohmsche Widerstände zu verwenden (Grössenordnung $\sqrt{1000}$). Ausnahmen sind dann möglich, wenn hohe Widerstände ohnehin über eine grosse Kapazität an Erde liegen, wie z.B. bei RC Integrationsgliedern. Zwischen Magnetfeldsonde und Rogovskispule braucht hier

kein Unterschied gemacht zu werden, da beide in den Messkreis als Induktivitäten eingehen.

Grundsätzlich können vielerlei Arten von Schaltungen verwendet werden, um $\frac{dJ}{dt}$ und $\frac{dB}{dt}$ einerseits und J und B andererseits zu messen. An Hand von Beispielen werden im folgenden drei Arten von Schaltungen behandelt. Sie zeichnen sich durch besondere Einfachheit aus. Ihr Verhalten ist deshalb noch gut zu überblicken.

a.) Mit einem Koaxialkabel, das den Wellenwiderstand Z hat, soll das Messsignal zum Oszillographen übertragen werden, wobei die am Oszillographen gemessene Spannung $U_2(t)$ der in der Messspule induzierten Spannung $U_1(t)$ (d.h. $\frac{dJ}{dt}$ oder $\frac{dB}{dt}$) proportional sein soll. Abb. 4 zeigt die Schaltung.

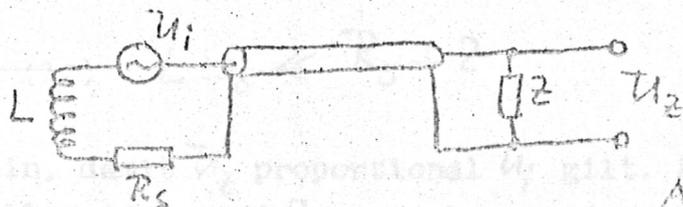


Abb. 4.

L bedeutet die Induktivität der Messspule und R_s ihren Innenwiderstand. Z ist der Abschlusswiderstand des Koaxialkabels. Für diesen Kreis gilt:

$$U_1 = L \frac{di}{dt} + (R_s + Z) i$$

und mit: $U_2 = Z \cdot i$

$$(11) \quad U_1 = \frac{L}{Z} \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$$

Da U_2 proportional zu U_1 sein soll, muss $\frac{L}{Z} \frac{dU_2}{dt}$ gegenüber $\left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$ vernachlässigbar klein sein. Das Messsignal ist im allgemeinen ein Impuls $U_2(t)$ ganz beliebiger Form. An Hand des Fourierspektrums eines Impulses $U_2(t)$ kann eine obere Grenzfrequenz ω_0 ermittelt werden, bei der das Spektrum abgeschnitten werden kann und der Impuls immer noch ausreichend genau wiedergegeben wird. Im praktischen Fall ist dieses Verfahren zu mühsam. Einen brauchbaren Wert für die obere Grenzfrequenz ω_0 erhält man aus Ablesegenauigkeit Δt der Zeitskala in der der Impuls am Oszillographen wiedergegeben wird, indem man Δt gleich der Periodendauer T_0 der Grenzfrequenz setzt. Ist z.B.

die Zeitablenkung $1 \mu\text{sec}$ pro Skalenteil (cm) am Oszillographenschirm, so können $\Delta t = 0,2 \mu\text{sec}$ noch mit ausreichender Genauigkeit abgelesen werden. Dann ist $T_0 = 2 \cdot 10^{-7} \text{V}_0 = 5 \cdot 10^6 \text{Hz}$ und $\omega_0 = \pi \cdot 10^7 \text{sec}^{-1}$.

Um die Grössenordnung der einzelnen Glieder in Gleichung (11) abzuschätzen, setzt man für

$$U_2 = U_{20} \cos \omega_0 t \quad \text{ein:}$$

$$U_1 = \frac{L}{Z} \omega_0 U_{20} \sin \omega_0 t + \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_{20} \cos \omega_0 t$$

Da $U_{20} \cos \omega_0 t$ und $U_{20} \sin \omega_0 t$ Faktoren gleicher Grössenordnung sind, muss die Bedingung

$$(12) \quad L \omega_0 \ll R_s + Z$$

erfüllt sein, damit U_2 proportional U_1 gilt. Danach kann z.B. vorgegebenem Wellenwiderstand Z angegeben werden, wie gross die Spulenduktivität L höchstens sein darf. Der Innenwiderstand R_s der Spule kann bei dieser Schaltung fast immer gegen Z vernachlässigt werden. Wenn Bedingung (12) erfüllt ist, dann gilt:

$$U_1 = \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$$

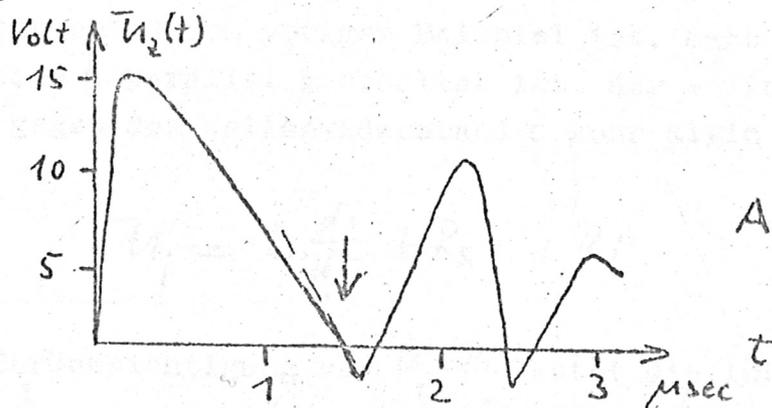
Diese ganze Betrachtung ist dann sinnlos, wenn parasitäre Induktivitäten und Kapazitäten, die in der Schaltung nicht berücksichtigt werden, nicht vernachlässigbar klein sind. Deshalb muss die Gültigkeit des Schaltbildes überprüft werden. Dazu bestimmt man das Frequenzverhalten des Kreises. Man ersetzt die symbolische Spannungsquelle U_1 durch einen Sinusgenerator variabler Frequenz. Der Innenwiderstand des Generators muss dabei hinreichend klein gemacht werden. Mit Hilfe eines Zweistrahloszillographen kann dann leicht das Amplitudenverhältnis $\frac{U_{20}}{U_{10}}$ und der Phasenwinkel φ zwischen U_{20} und U_{10} in Abhängigkeit der Frequenz ω gemessen werden. Für den Kreis der Abb. 4 muss z.B. gelten:

$$\frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L\omega}{Z}\right)^2 + \left(\frac{R_s}{Z} + 1\right)^2}}$$

und
$$tg \varphi = \frac{L\omega}{R_s + Z}$$

Stimmen Amplituden- und Phasenverlauf nicht mit den errechneten Beziehungen überein, dann müssen die Werte der einzelnen Schaltelemente so abgeändert werden, dass ausreichende Übereinstimmung erzielt wird. Nach einiger Zeit bekommt man genügend Erfahrung, so dass in den meisten Fällen eine zeitraubende Überprüfung nicht mehr nötig ist. Parasitäre Induktivitäten oder Kapazitäten im Schaltbild zu berücksichtigen, ist nicht ratsam, da sie sich in der Regel in nicht erfassbarer Weise über grössere Gebiete verteilen.

Eine obere Grenzfrequenz wird als Hilfsgrösse eingeführt, um die Schaltung überschlägig zu dimensionieren. Den einzelnen Messignalen ist nun ihre obere Grenzfrequenz nicht ohne weiteres anzusehen. Deshalb soll kurz ein einfaches Verfahren besprochen werden, durch das die Brauchbarkeit der Schaltung an Hand der Messignale $U_2(t)$ geprüft werden kann. $U_2(t)$ ist nur dann U_1 proportional, wenn $\frac{L}{Z} \left(\frac{dU_2}{dt} \right) \ll \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$ ist. Diese Forderung ist sicher dann verletzt, wenn $U_2 = 0$ aber $\frac{dU_2}{dt} \neq 0$ ist. Es genügt aber, wenn $\Delta U_2 = \frac{L}{R_s + Z} \frac{dU_2}{dt}$ kleiner oder höchstens gleich der Ablesegenauigkeit $(\Delta U_2)_0$ des Oszillographen ist. In Abb. 5 wird ein Beispiel eines Signals gezeigt, das den zeitlichen Verlauf des $\frac{dI}{dt}$ einer Pinchentladung wiedergibt.



Eine der kritischen Stellen liegt bei $t \approx 1,5 \mu\text{sec}$. Hier ist $\left| \frac{dU_2}{dt} \right|$ gross und $U_2 = 0$. Die Induktivität der verwendeten Spule betrug $L = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{Hy}$. Ihr Innenwiderstand R_s war gegenüber dem Wellenwiderstand $Z = 120 \Omega$ vernachlässigbar klein. Die Ablesegenauigkeit von U_2 beträgt etwa $(\Delta U_2)_0 = 0,5 \text{ Volt}$. Die Steigerung bei $t = 1,5 \mu\text{sec}$

Ist: $\left| \frac{dU_2}{dt} \right| \approx \frac{20}{1,5 \cdot 10^{-6}} \approx 1,3 \cdot 10^7 \frac{V}{\text{sec}}$ und $\frac{L}{Z} = \frac{15 \cdot 10^{-7}}{120} \approx 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$
 Damit wird $\Delta U_2 = \frac{L}{Z} \frac{dU_2}{dt} \approx 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ Volt}$

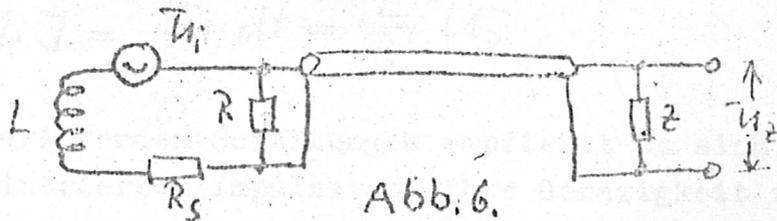
Dieser Wert liegt weit unter $(\Delta U_2)_0 \approx 0,5V$. Deshalb brauchen die anderen Nullstellen erst gar nicht geprüft werden. Es gilt mit ausreichender Genauigkeit:

$$M \cdot \frac{dI}{dt} = U_1 = U_2$$

Diese Methode Oszillogramme zu prüfen, ist sehr einfach anzuwenden und genauer als eine Diskussion mit Hilfe von Grenzfrequenzen. Ausserdem gewinnt man nach einiger Übung einen guten Blick dafür, ob man sich in einem gefährlichen Bereich befindet oder nicht.

Ein weiteres Beispiel soll die Anwendung einer einfachen integrierenden Schaltung erläutern.

b.) Mit einer Rogovoskispule soll der Strom I einer Entladung gemessen werden. D.h. $U_2(t)$ soll in diesem Fall dem Integral $\int U_1 dt$ proportional sein. Verwendet wird eine Schaltung der Abb. 6.



Der Unterschied zum vorigen Beispiel ist, dass der Spule eine ohmsche Widerstand R parallel geschaltet ist, der - wie gleich deutlich wird - gegen den Wellenwiderstand Z sehr klein ist. Für diesen Kreis gilt:

$$U_1 = L \frac{di}{dt} + R_S i + R i$$

Unter Berücksichtigung von $U_2 = R i$ lautet die integrierte Gleichung:

$$\int_0^t U_1(t') dt' = \frac{L}{R} U_2 + \left(\frac{R_S}{R} + 1 \right) \int_0^t U_2(t') dt'$$

Da U_2 proportional $\int U_1 dt$ sein soll, muss die Ungleichung gelten:

$$\frac{L}{R} U_2 \gg \left(\frac{R_S}{R} + 1 \right) \int U_2 dt$$

Hier muss offensichtlich als Kriterium die untere Grenzfrequenz ω_u benützt werden, da für die niederste Frequenz die rechte Seite der Ungleichung ihren höchsten Wert annimmt. Als untere Grenzfrequenz kann durchweg die Frequenz des Entladekreises verwendet werden. Die Ungleichung lautet dann:

$$\frac{L}{R} \gg \left(\frac{R_s}{R} + 1 \right) \frac{1}{\omega_u}$$

oder

$$(13) \quad L \omega_u \gg R_s + R$$

Hier muss also im Gegensatz zum vorigen Beispiel die Induktivität L der Spule möglichst gross gewählt werden. Verwendet man zum Beispiel eine Spule mit $L = 5 \cdot 10^{-6} \text{ H}$ und $R_s = 0,05 \Omega$, dann wird, wenn die Frequenz des Entladekreises $\omega_u = 2\pi \cdot 10^5$ ist (100 KHz): $L \omega_u \approx 3 \Omega$. Wählt man für $R = 0,05 \Omega$, dann ist die Ungleichung (13) mit ausreichender Genauigkeit erfüllt und es gilt:

$$M.J = \int u_i dt = \frac{L}{R} U_2$$

Auch bei integrierenden Schaltungen empfiehlt es sich, die oszillographisch registrierten Impulse auf ihre Genauigkeit zu prüfen. Gefährlich sind auch hier Stellen, wo $U_2 = 0$ ist. Überall soll $\Delta U_2 = \frac{R_s + R}{L} \int U_2 dt$ kleiner als der Spannungswert $(\Delta U_2)_0$ sein, der am Oszillographen gerade ablesbar ist. Abb. 7 zeigt den typischen Verlauf des Entladestrom bei einer linearen Pinchentladung.

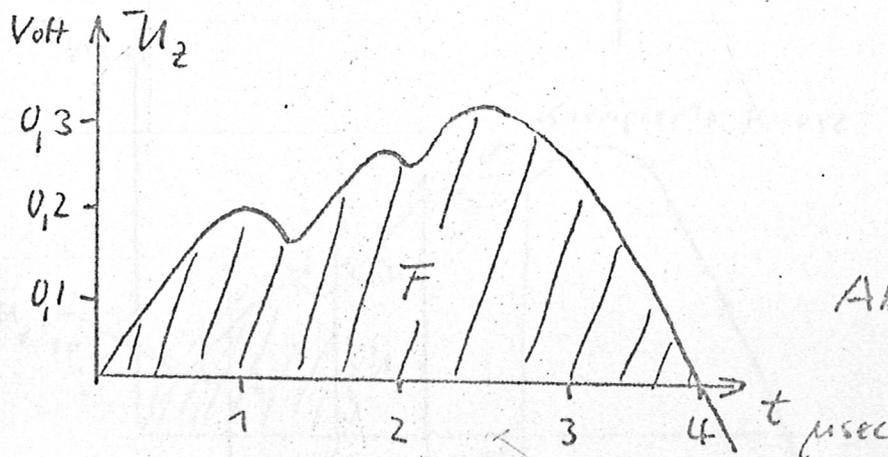


Abb. 7

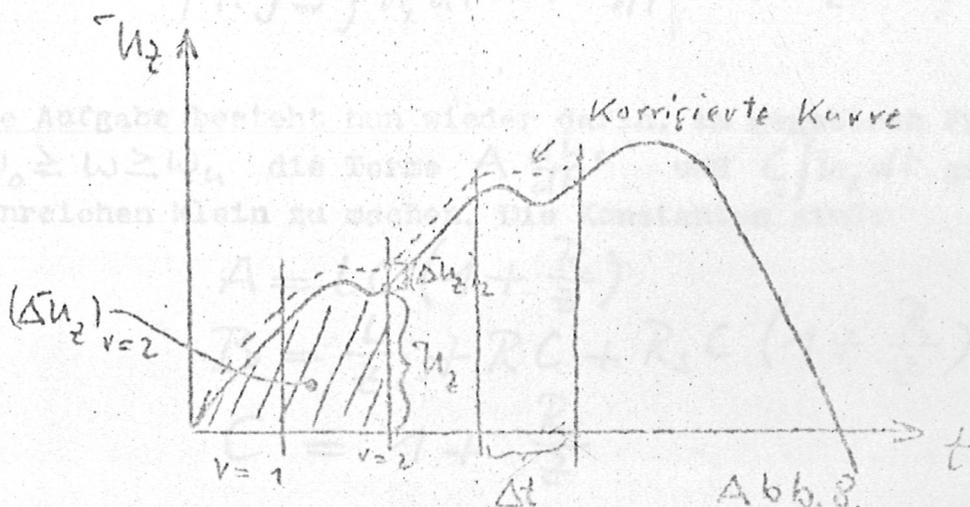
Nach etwa $t = 4 \mu\text{sec}$ durchstezt die Kurve $U_2(t)$ die Nulllinie. Zu dieser Zeit ist der Fehler ΔU_2 sicher am grössten, da die Fläche $F = \int_0^t U_2(t') dt'$ ihr Maximum erreicht hat. Danach wird U_2 negativ und F nimmt wieder ab. Für $-U_2$ gilt:

$$-U_2 = \frac{R_1 M}{L} \cdot J - \frac{R_2 + R}{L} \int_0^t U_2(t') dt'$$

Wenn U_2 proportional dem Entladestrom J gelten soll, muss das zweite Glied ΔU_2 der rechten Seite verschwinden. Die Induktivität der Spule im Beispiel der Abb. 7 war $L = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Hly}$ und $R_1 + R = 91,2$. Die Fläche $F = \int_0^{4 \cdot 10^{-6}} U_2(t') dt' \approx 8 \cdot 10^{-7} \text{ Vs}$ und damit $\Delta U_2 = \frac{R_2 + R}{L} \cdot F = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ Volt}$. ΔU_2 ist also an der Stelle $t = 4 \mu\text{sec}$ etwa gleich der Ablesegenauigkeit des Ordinatenmassstabes $(\Delta U_2)_0 \approx 902 \text{ Volt}$. Mit ausreichender Genauigkeit gilt für den Kurvenverlauf der Abb. 7:

$$U_2 = \frac{R_1 M}{L} \cdot J$$

In Fällen, in denen ΔU_2 nicht mehr vernachlässigbar klein ist und die Schaltung nicht verbessert werden kann, lässt sich ohne Schwierigkeit eine Korrektur der Kurven $U_2(t)$ durchführen. Dazu teilt man die Abszisse in geeignete Intervalle Δt ein und ermittelt vom Zeitpunkt $t=0$ bis jeweils zur Grenze t_v eines Intervalls den Wert von $(\Delta U_2)_v = \frac{R_2 + R}{L} \int_0^{t_v} U_2(t') dt'$. Der Index v bezeichnet das v te Intervall. Die Werte $(\Delta U_2)_v$ addiert man dann zu $(U_2)_v$ und erhält dann einen Kurvenverlauf, der proportional zu J ist (Abb. 8).



Für eine Schaltung, wie sie im Beispiel a) beschrieben wurde, die $\bar{u}_2 \sim \frac{dJ}{dt}$ liefern soll, ist eine Korrektur von $\bar{u}_2(t)$ nicht hinreichend genau möglich. Hier wäre $\Delta \bar{u}_2 = \frac{L}{R_s + L} \frac{d\bar{u}_2}{dt} \approx \bar{u}_2$ zu addieren. Die Steigung $\frac{d\bar{u}_2}{dt}$ kann aus dem Kurvenverlauf $\bar{u}_2(t)$ aber nicht mit der erforderlichen Genauigkeit ermittelt werden.

In einem weiteren Beispiel wird eine Schaltung angegeben, die $\frac{dJ}{dt}$ und J oder $\frac{dB}{dt}$ und B nebeneinander zu messen gestattet.

c.) Dazu kann die im Beispiel a.) diskutierte Schaltung verwendet werden, wenn am Kabelende noch ein RC Integrierglied angefügt wird. Abb. 9 zeigt die Schaltung.

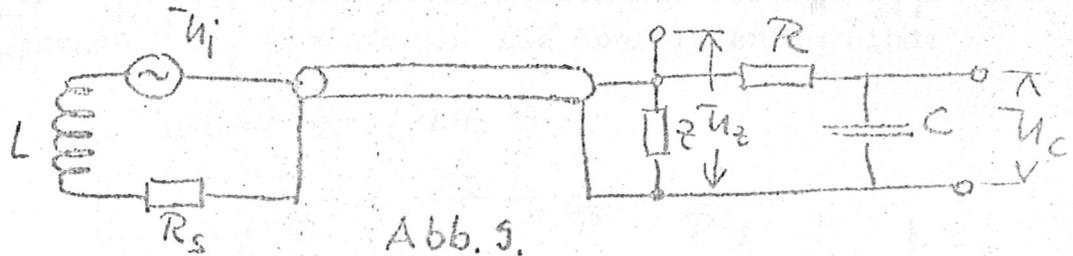


Abb. 9.

Die einzelnen Elemente müssen dann so dimensioniert werden, dass \bar{u}_c dem Integral $\int \bar{u}_1 dt = M \cdot J$ und \bar{u}_2 der Spannung $\bar{u}_1 = M \frac{dJ}{dt}$ proportional werden. Der Zusammenhang zwischen \bar{u}_1 und \bar{u}_c ist durch eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben:

$$(14) \quad \bar{u}_1 = A \frac{d^2 \bar{u}_c}{dt^2} + B \frac{d\bar{u}_c}{dt} + C \bar{u}_c$$

oder integriert:

$$M \cdot J = \int \bar{u}_1 dt = A \frac{d\bar{u}_c}{dt} + B \bar{u}_c + C \int \bar{u}_c dt$$

Die Aufgabe besteht nun wieder darin, im gegebenen Frequenzbereich $\omega_0 \geq \omega \geq \omega_n$ die Terme $A \frac{d\bar{u}_c}{dt}$ und $C \int \bar{u}_c dt$ gegenüber $B \bar{u}_c$ hinreichen klein zu machen. Die Konstanten sind:

$$A = LC \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

$$B = \frac{L}{Z} + RC + R_s C \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

$$C = 1 + \frac{R_s}{Z}$$

Die Bedingungen unter Einführung der Grenzfrequenzen lauten dann:

$$(15) \quad LC \left(1 + \frac{R}{z}\right) \omega_0 \ll \frac{L}{z} + RC + R_s C \left(1 + \frac{R}{z}\right)$$

und

$$(16) \quad \frac{L}{z} + RC + R_s C \left(1 + \frac{R}{z}\right) \gg \frac{1}{\omega_u} \left(1 + \frac{R_s}{z}\right)$$

Der Zusammenhang zwischen \bar{U}_1 und \bar{U}_2 lautet:

$$(17) \quad \bar{U}_1 = \alpha \frac{d\bar{U}_2}{dt} + \beta \bar{U}_2 + \gamma \int_0^t \bar{U}_2(t') e^{\frac{t'-t}{RC}} dt'$$

Hier soll $\bar{U}_2 \beta = \bar{U}_1$ sein, also müssen die Terme $\propto \frac{d\bar{U}_2}{dt}$ und $\int \bar{U}_2 e^{\frac{t'-t}{RC}} dt'$ gegen $\beta \bar{U}_2$ klein sein. Die Koeffizienten sind:

$$\alpha = \frac{L}{R} \left(1 + \frac{R}{z}\right)$$

$$\beta = 1 + \frac{R_s}{z} + \frac{R_s}{R} - \frac{L}{R^2 C}$$

$$\gamma = \frac{1}{RC} \left(\frac{L}{R^2 C} - \frac{R_s}{R}\right)$$

Der Faktor $e^{\frac{t'-t}{RC}}$ unter dem Integral kann zur Abschätzung der Grösaenordnung der Terme gleich 1 gesetzt werden, da der Exponent wegen $t'-t < 0$ immer negativ ist. Man erhält dann die Bedingungen:

$$(18) \quad \frac{L}{z} \left(1 + \frac{R}{z}\right) \omega_0 \ll 1 + \frac{R_s}{z} + \frac{R_s}{R} - \frac{L}{R^2 C}$$

und

$$(19) \quad 1 + \frac{R_s}{z} + \frac{R_s}{R} - \frac{L}{R^2 C} \gg \frac{1}{\omega_u} \left[\frac{1}{RC} \left(\frac{L}{R^2 C} - \frac{R_s}{R}\right) \right]$$

An Hand der einzelnen Oszillogramme $\bar{U}_1(t)$ und $\bar{U}_2(t)$ kann nach der schon beschriebenen Methode durch Differentiation und Integration wieder geprüft werden, ob die Vernachlässigungen gerechtfertigt sind.

Zahlenbeispiel: Gegeben ist eine Rogovskispule mit $L = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H}$ und $R_s = 1 \Omega$. Der Wellenwiderstand ist $z = 120 \Omega$, für R wird ein Widerstand von $5 \cdot 10^3 \Omega$ und für C eine Kapazität von $5 \cdot 10^{-5} \text{ F}$ gewählt.

Die Frequenz ω liegt zwischen:

$$\omega_n = 2\pi \cdot 10^5 \leq \omega \leq 2\pi \cdot 10^7 = \omega_0$$

Zuerst die Bedingung (15) für $\int u_i dt = B U_C$

$$LC \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \omega_0 \approx 5 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{L}{Z} + RC + R_s C \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \approx 25 \cdot 10^{-5}$$

Dabei sind alle Glieder in diesem Ausdruck klein gegen R.C. Es gilt mit ausreichender Genauigkeit:

$$LC \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \omega_0 \ll RC + \frac{L}{Z} + R_s C \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

Für die zweite Bedingung (16) ergibt sich:

$$\frac{1}{\omega_n} \left(1 + \frac{R_s}{Z}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$$

Also:

$$RC = 2,5 \cdot 10^{-5} \gg \frac{1}{\omega_n} \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$$

Für die Strommessung ist diese Schaltung brauchbar und es gilt:

$$M \cdot J = \int u_i dt = R \cdot C \cdot U_C$$

oder

$$U_C = \frac{M}{RC} \cdot J$$

Ausserdem soll $\beta U_2 = M \frac{dJ}{dt}$ gelten. Dafür müssen die Bedingungen (18) und (19) erfüllt sein:

$$\frac{L}{R} \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \omega_0 \approx 4,8 \cdot 10^{-3}$$

und $1 + \frac{R_s}{Z} + \frac{R_s}{R} - \frac{L}{R^2 C} \approx 1$, da alle Glieder klein gegen 1 sind. Also (18):

$$\frac{L}{R} \left(1 + \frac{R}{Z}\right) \omega_0 = 4,8 \cdot 10^{-3} \ll 1$$

Die Ungleichung (19) ist auch mit ausreichender Genauigkeit er-

füllt:

$$\frac{1}{\omega_n} \left[\frac{1}{RC} \left(\frac{L}{R^2 C} - \frac{R_s}{R} \right) \right] \approx 5,2 \cdot 10^{-2}$$

Für die $\frac{dJ}{dt}$ Messung erhält man damit im gegebenen Frequenzintervall:

$$U_z = M \frac{dJ}{dt}$$

Im Prinzip lassen sich sämtliche Schaltungen in ähnlicher Weise diskutieren, wie an diesen drei Beispielen gezeigt wurde. Allerdings werden bei Verwendung von nur wenig mehr Schaltelementen die Gleichungen schnell unübersichtlich und erfordern erheblich höheren Rechenaufwand, um das Verhalten der Messkreise zu überblicken. In den meisten Fällen wird man aber mit einer der drei beschriebenen Schaltungen auskommen.

V. Die Abschirmung.

Sowohl eine Rogovskispule, wie eine Magnetfeldsonde sind durchweg an Stellen angebracht, wo hohe zeitlich schnell veränderliche elektrische Felder herrschen. Deshalb müssen die Mess Elemente und Messkabel elektrostatisch gut abgeschirmt werden. Eine Rogovskispule wird in der Regel mit einer Metallfolie umkleidet. Die Folie muss aber so geschlitzt sein, dass kein geschlossener Stromkreis entstehen kann, der den zu messenden Fluss am Eindringen in die Spule hindert. Der Abstand zwischen Folie und Windungen der Spule soll nach Möglichkeit nicht zu klein sein, damit starke kapazitive Kopplungen der Spule gegen die Abschirmung vermieden werden. Bei Magnetfeldsonden wird ein dünnwandiges Metallrohr kleinen Durchmessers als Abschirmung verwendet, das am Ort der Spule so geschlitzt ist, dass der zu messende Fluss eindringen kann. Diese Abschirmungen sind mit einem Metallschlauch verbunden, der über das koaxiale Messkabel gezogen ist. Die gesamte Abschirmung muss gegen den Messkreis und das Kabel elektrisch isoliert sein. Erst am Oszillgrapheneingang, oder an der Messkabine kann die Abschirmung mit dem Aussenleiter des Messkabels und der Kabinenerde verbunden sein. An der Apparatur, an der gemessen wird, soll die Abschirmung und der Messkreis keinerlei

galvanische Verbindung mit irgendwelchen Leitern oder mit Erde haben. Schematisch ist die Abschirmung in Abb. 10 dargestellt.

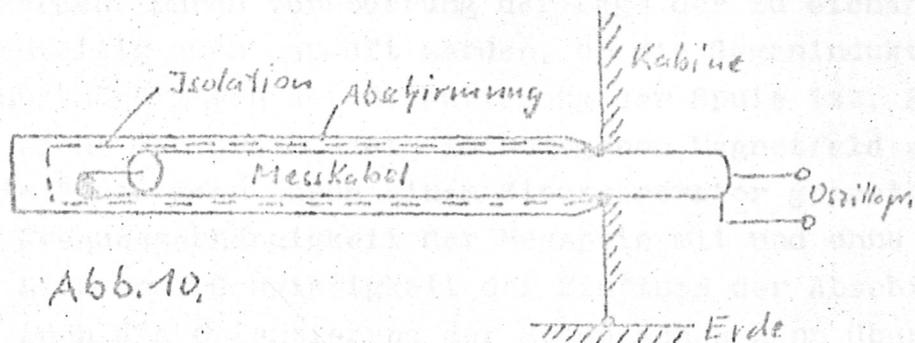


Abb. 10.

Die Abschirmung kann man sich als verlängerte Messkabine vorstellen.

Bei der Verlegung von Messkabeln und der Anbringung der Messspulen muss auf größtmöglichen Abstand zu den Triggerkabeln der Schaltfunkenstrecken geachtet werden. Über diese laufen schnelle Hochspannungsimpulse, die häufig Störungen verursachen. Deshalb soll auch die Leitfähigkeit des abschirmenden Metalls gross sein, um geringe Eindringtiefe von Störungen zu gewährleisten. Wenn mehrere Messelemente gleichzeitig benützt werden, so sollen deren Abschirmungen ausserhalb der Messkabine galvanisch getrennt sein.

VI. Die Eichung der Messspulen.

Vielfach darf dem errechneten Wert für die Gegeninduktivität nicht ohne weiteres vertraut werden, z.B. dann, wenn der geometrische Aufbau einer Rogovskispule Fehler ermöglicht (etwa bei sehr kleiner Windungsfläche und vergleichbarem Drahtdurchmesser). Auch die Abschirmung bei Magnetfeldkonden kann bei hohen Frequenzen das Eindringen des Feldes in die Spule beeinflussen. Aus diesen Gründen ist es oft nötig, die errechnete Gegeninduktivität durch Messung zu prüfen.

Zu diesem Zweck empfiehlt es sich, einen eigenen Eichkreis aufzubauen. Für eine Rogovskispule verwendet man einen stromstarken Schwingkreis, dessen Frequenz durch Zu- oder Abschalten von Kondensatoren verändert werden kann. Um ein Leiterstück des Kreises bringt man dann die zu eichende Spule an. Der Strom durch diesen

Leiter muss erst mit einer möglichst fehlerfrei gebauten Rogovskispule gemessen werden. Durch Veränderung der Lage der zu eichenden Spule kann gleichzeitig auch geprüft werden, ob die Gegeninduktivität M wirklich unabhängig von der Orientierung der Spule ist. Eine Magnetfeldsonde eicht man zweckmässig im homogenen Magnetfeld einer langen Spule. Die Spule kann durch einen Sinusgenerator gespeist werden. Aus der Frequenzabhängigkeit der Messspule mit und ohne Abschirmung lässt sich ohne Schwierigkeit der Einfluss der Abschirmung ermitteln. Auch die Orientierung der Sondenachse kann überprüft werden. Dazu dreht man die Messspule so lange bis sich ein deutliches Minimum im Sondersignal feststellen lässt. Die Sondenachse ist dann senkrecht zu den Feldlinien orientiert.

VII. Zusammenfassung der Formeln und Kriterien.

1. Rogovskispule.

$$U_i = M \frac{dJ}{dt}$$

U_i = induzierte Spannung in Volt

$\frac{dJ}{dt}$ = zeitliche Stromänderung in $\frac{A}{sec}$

M = Gegeninduktivität in Hg

$$M = \frac{0,4\pi n^2 \bar{F}}{e} \cdot 10^{-8}$$

n = Windungszahl der Spule

e = Länge der Spule in cm

\bar{F} = Querschnitt der Spule in cm^2

Erforderlich sind: Gleicher Windungsabstand, ausreichend viele Windungen, geschlossene Spule, einheitlicher Windungsquerschnitt.

2. Magnetfeldsonde.

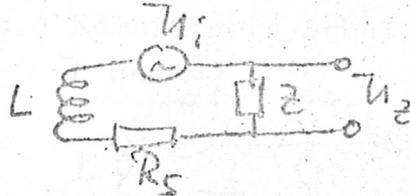
Zylindrische Spule mit Querschnittsfläche \bar{F} in cm^2 und Windungszahl n .

$$U_1 = 10^{-8} \cdot n^2 \cdot F \frac{dB}{dt}$$

B Magnetfeld in Gauss parallel zur Spulenchase.

3. Schaltungen.

a.) Schaltung zur Messung von $\frac{dB}{dt}$ oder $\frac{dJ}{dt}$



Z = Wellenwiderstand

R_s = Innenwiderstand der Spule

L = Induktivität der Spule

$$U_1 = \frac{L}{Z} \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$$

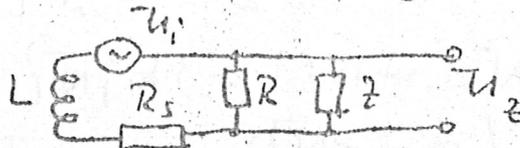
Wenn für obere Grenzfrequenz die Ungleichung:

$$L\omega_0 \ll R_s + Z$$

erfüllt ist, gilt für $\omega < \omega_0$

$$U_1 = \left(\frac{R_s}{Z} + 1 \right) U_2$$

b.) Integrierende Schaltung zur Messung von B oder J :



R Parallelwiderstand zur Spule am Kabeleingang, der im klein gegen Z ist.

$$\int U_1 dt = \frac{L}{R} U_2 + \left(\frac{R_s}{R} + 1 \right) \int U_2 dt$$

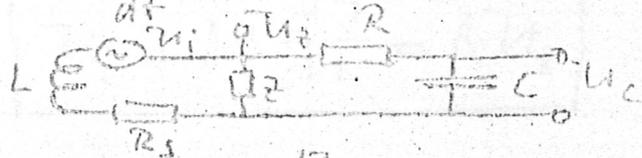
Wenn bei der unteren Grenzfrequenz ω_u - meist Frequenz des Entladekreises - die Ungleichung:

$$L\omega_u \gg R + R_s$$

erfüllt ist, dann gilt für $\omega \geq \omega_n$:

$$\int u_1 dt = M \cdot J = \frac{L}{R} u_2$$

c.) Kombinierte Schaltung zur Messung von B und $\frac{dB}{dt}$ oder J und $\frac{dJ}{dt}$:



$$1.) \int u_1 dt = A \frac{du_2}{dt} + B u_2 + C \int u_2(t') dt'$$

$$A = LC \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

$$B = \frac{L}{Z} + RC + R_5 C \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

$$C = 1 + \frac{R_5}{Z}$$

Folgende Ungleichungen müssen erfüllt sein:

$$A \omega_0 \ll B$$

$$C \frac{1}{\omega} \ll B$$

damit für $\omega_n \leq \omega \leq \omega_0$

$$\int u_1 dt = M J = B u_2$$

$$2.) u_1 = \alpha \frac{du_2}{dt} + (\beta u_2 + \gamma) \int_0^t u_2(t') e^{\frac{t-t'}{RC}} dt'$$

$$\alpha = \frac{L}{R} \left(1 + \frac{R}{Z}\right)$$

$$\beta = 1 + \frac{R_5}{Z} + \frac{R_5}{R} - \frac{L}{R^2 C}$$

$$\gamma = \frac{1}{RC} \left(\frac{L}{R^2 C} - \frac{R_5}{R}\right)$$

Wenn die Ungleichungen

$$\alpha \omega_0 \ll \beta$$

$$\gamma \frac{1}{\omega_0} \ll \beta$$

erfüllt sind, dann gilt im Frequenzbereich $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_0$

$$\boxed{u_1 = M \frac{d^2}{dt^2} = \beta^{-1} u_2}$$