

Nina Heitmann

**Lösung energiewirtschaftlicher Probleme mit Hilfe linearer
Programmierung**

Solution of energy problems with the help of linear programming

**IPP 16/6
Oktober, 2005**

Lösung energiewirtschaftlicher Probleme mit Hilfe linearer Programmierung

Diplomarbeit im Studiengang
Wirtschaftsmathematik

an der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Augsburg

Vorgelegt von

Nina Heitmann

Oktober 2005

unter Betreuung von:
Dr. Thomas Hamacher
Max-Planck-Institut für
Plasmaphysik in Garching

Erstgutachter:

Priv.-Doz. Dr. Bernhard Schmidt
Institut für Mathematik
Lehrstuhl für Diskrete Mathematik,
Optimierung und Operations Research

Zweitgutachter:

Prof.Dr.-Ing. Kurt Behringer
Institut für Physik
Lehrstuhl für Experimentelle Plasmaphysik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	2
1.1.1	Probleme des CO_2 -Emissionsanstiegs	2
1.1.2	Notwendigkeit der Umstrukturierung des Kraftwerksparks	3
1.2	Energieversorgung in Deutschland	4
1.3	Windenergie in Deutschland	5
1.3.1	Probleme der Nutzung der Windenergie	7
2	Die Modellierung des Kraftwerksparks und des Übertragungsnetzes	13
2.1	Die Struktur des Modells	13
2.2	Eingabedaten	16
2.2.1	Kosten	17
2.2.2	Nachfrage	18
2.2.3	Wind	19
2.2.4	Übertragungsnetz	20
2.2.5	Kraftwerke	21
2.3	Modellierung	22
3	Lineare Optimierungsprobleme und deren Lösungsalgorithmen	23
3.1	Der Simplex-Algorithmus	25
3.1.1	Das lineare Problem in allgemeiner Form	25
3.1.2	Der Simplex-Algorithmus mit beschränkten Variablen	31

3.1.3	Entartung und Komplexität	35
3.1.4	Farkas' Lemma	36
3.1.5	Das Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitäts-Kriterium	37
3.1.6	Das duale Problem	39
3.1.7	Wirtschaftliche Betrachtungsweise der dualen Lösung	42
3.2	Barrier-Methode	43
3.3	Laufzeitvergleiche der von Cplex zur Verfügung gestellten Algorithmen	48
3.3.1	Darstellung des Problems als Matrix	48
3.3.2	Vergleich und Zusammenfassung der Algorithmen	52
4	Wahl und Auswertung verschiedener Szenarien	53
4.1	Ein Auswahlverfahren für die Zeitreihen	55
4.2	Vergleich unterschiedlicher Zeitreihen	58
4.2.1	Zusammenfassung	60
4.3	Gaspreisvariation	60
4.3.1	Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh	61
4.3.2	Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh	61
4.3.3	Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	65
4.3.4	Zusammenfassung	69
4.4	CO ₂ -Emissionsreduzierung	70
4.4.1	Ergebnisse	71
4.5	Variation der WEA	77
4.5.1	Preisbildung im öffentlichen Strommarkt	79
4.5.2	Interpretation der marginalen Kosten	81
5	Zusammenfassung und Ausblick	86

Abbildungsverzeichnis

1.1	Entwicklung der Primärenergie von 1850 bis 2004	1
1.2	Bruttostromerzeugung nach Energieträgern 2004	4
1.3	Entwicklung der Nutzung des Windes zur Erzeugung von Energie	5
1.4	Installierte Windenergieanlagen in Deutschland 2004	6
1.5	Leistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit	8
1.6	Leistungsbeiwert und elektrische Wirkleistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit	10
1.7	Rayleigh-Verteilung und Dichtefunktion in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit	11
2.1	Das modellierte Verbundnetz	14
2.2	Modellierung der Knoten für drei Beispielorte	15
2.3	Schematische Darstellung des Programmablaufs	16
2.4	Typischer Lastgang für eine Woche im Sommer im Vergleich zum Winter	18
2.5	Restnachfrage für eine Woche im Sommer im Vergleich zum Winter	19
2.6	Windangebot einer Woche im Winter für Nord- und Süddeutschland	20
2.7	Windangebot versus Stromnachfrage einer Woche im Winter für Nord- und Süddeutschland	20
2.8	Transportkapazitäten	21
3.1	Geometrische Darstellung des Farkas' Lemmas	37
3.2	Hilfsfunktion und Barrier-Funktion	47
3.3	Laufzeit in Abhängigkeit der Zeitschritte	52

4.1	Windangebot versus Stromnachfrage	55
4.2	Häufigkeitsverteilungen der Stunden unterteilt nach den Kategorien Windangebot und Stromnachfrage	56
4.3	Stromerzeugung und Kraftwerksinstallation ausgewählter Zeitreihen	59
4.4	Engpassleitung des Stromnetzes	59
4.5	Typische Anteile der Kraftwerke an der Stromerzeugung und Kraftwerkskapazität	60
4.6	Stromgestehungskosten und Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh	61
4.7	Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh	62
4.8	Stromgestehungskosten der Spitzenlast für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh	62
4.9	Stromgestehungskosten der Mittel- und Grundlast für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh	63
4.10	Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh	64
4.11	Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh	64
4.12	Stromgestehungskosten der Grundlast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	66
4.13	Stromgestehungskosten der Mittellast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	66
4.14	Stromgestehungskosten der Spitzenlast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	67
4.15	Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	67
4.16	Windangebot der untersuchten Zeitschritte mit der jeweiligen Gewichtung . .	68
4.17	Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	68
4.18	Szenarienvergleich für die Gaspreiserhöhung	69
4.19	Stromgestehungskosten für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh	72
4.20	Stromerzeugung in Abhängigkeit der CO_2 -Emission	73
4.21	Kraftwerksinstallation in Abhängigkeit der CO_2 -Emission	74
4.22	Kraftwerkswahl mit und ohne Beschränkung der CO_2 -Emission	74
4.23	Stromerzeugung in Abhängigkeit der CO_2 -Emission	75
4.24	Engpassleitungen durch eine Beschränkung der CO_2 -Emission	76
4.25	Stromerzeugung und Kraftwerksinstallation in Abhängigkeit der Windenergie	77
4.26	Gegenüberstellung der CO_2 -Emission und der Gesamtkosten in Abhängigkeit der Installation von Windenergieanlagen	78

4.27	Kostenanstieg beim Neubau von 4,5 GW Windleistung in Abhängigkeit bereits genutzter Kapazitäten	78
4.28	Strompreisbildung in Nord- und Süddeutschland mit und ohne Windenergieanlagen	79
4.29	Verlauf der Grenzkosten der Nachfrage	81
4.30	Zusammenhang von Windangebot, Nachfrage und Grenzkosten	83
4.31	Grenzkosten der Onshore-Windenergieanlagen	84

Tabellenverzeichnis

2.1	Spezifische Kosten der Stromerzeugung für das Jahr 2030	17
2.2	Technische Parameter der einzelnen Kraftwerke	22
3.1	Transformationsregeln zwischen (LP) und (DP)	40
3.2	Dimension der Matrizen in Abhängigkeit der Anzahl der Zeitschritte t	49
3.3	Indexmengen	49
4.1	Installierte Wasserkraftwerke	54
4.2	Installierte Braunkohlekraftwerke	55
4.3	Installierte Windenergieanlagen	70
4.4	Installierte Kernkraftwerke	71
4.5	CO_2 -Emission der einzelnen Energieträger	71
4.6	Investitions-, Fix- und variable Kosten der Kraftwerke	77

Kapitel 1

Einleitung

In den letzten beiden Jahrhunderten hat der weltweite Energieverbrauch, bedingt durch die fortschreitende technische Entwicklung und die wachsende Bevölkerung, deutlich zugenommen (siehe Abbildung 1.1).

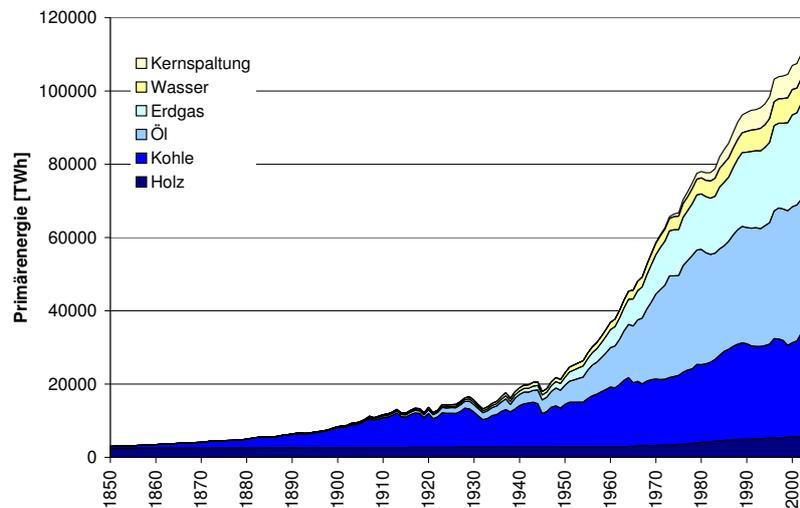


Abbildung 1.1: Entwicklung der Primärenergie von 1850 bis 2004

Der Weltenergieverbrauch basiert derzeit zu 85% auf fossilen Energieträgern. Der Energieverbrauch ist allerdings sehr ungleichmäßig über die Welt verteilt: Die Industriestaaten, die 18% der Weltbevölkerung ausmachen, verbrauchen 57% der Energie, dem restlichen Teil der Weltbevölkerung (82%) stehen damit nur 43% der Energie zur Verfügung [29]. Der Einsatz von fossilen Brennstoffen wird nach Angaben der Internationalen Energie Agentur (IEA) in

Zukunft weiter zunehmen [21]. Es ist davon auszugehen, dass sich die Weltbevölkerung in den nächsten Jahren bis 2050 auf 10 Milliarden Menschen erhöhen und damit einen Anstieg um das Dreifache des derzeitigen Energieverbrauchs nach sich ziehen wird. Dies ist auch durch technologischen Fortschritt und zunehmende Industrialisierung in den Entwicklungs- und Schwellenländern bedingt[30].

1.1 Motivation

Im Jahre 1997 wurde das Kyoto-Protokoll verabschiedet. Darin verpflichten sich die Industriestaaten, ihre Treibhausgasemissionen im Zeitraum von 2008-2012 um 5% gegenüber 1990 zu reduzieren. Das Protokoll musste von mindestens 55 Staaten, welche mehr als 55% der CO_2 -Emission von 1990 verursacht hatten, ratifiziert werden. Nach jahrelangen Debatten hat Russland als letztes Beitrittsland den Weg für das Klimaschutzprotokoll geebnet. Am 16. Februar 2005 trat das Kyoto-Protokoll in Kraft. Die USA, weltweit der größte CO_2 -Produzent, haben zwar das Protokoll unterschrieben, weigern sich aber weiterhin, dieses zu ratifizieren. Im Rahmen der Lastenteilung der EU wurde Deutschland eine Reduktion der Emissionen um 21% zugeteilt. Unter der Voraussetzung einer Emissionsminderung auf EU-Ebene um 30% bis 2020 ist Deutschland bereit, die Emissionen um 40% im gleichem Zeitraum zu verringern.

Zur Erhaltung der heutigen Lebensumstände ist es absolut notwendig, das Kyoto-Protokoll umzusetzen. Der umwelttechnische Aspekt der CO_2 -Emissionsreduzierung wird begleitet von der Umstrukturierung des herkömmlichen Kraftwerksparks hin zur Förderung schadstoffemissionsarmer Kraftwerkalternativen, wie beispielsweise die Nutzung erneuerbarer Energien.

In dieser Arbeit sollen energiewirtschaftliche Probleme mit Hilfe der linearen Programmierung gelöst werden. Insbesondere wird dabei auf die Zunahme des Windes als Energieträger und dessen Auswirkung auf den konventionellen Kraftwerkspark eingegangen. Der Schwerpunkt wird auf die Wirtschaftlichkeit der Integration von Windenergieanlagen im Hinblick auf die Standortwahl und die damit verbundene Strompreisentwicklung gelegt. Es werden Veränderungen der Fahrweise und des Einsatzes von Kraftwerken in Bezug auf die Gaspreis-erhöhung untersucht. Bei einer Optimierung der Fahrweise und Bildung eines kostenminimalen Kraftwerksmixes sollen sowohl die steigende und schwankende Nachfrage als auch die Reduzierung des CO_2 -Ausstoßes im Hinblick auf eine Möglichkeit der Umsetzung des Kyoto-Protokolls berücksichtigt werden.

1.1.1 Probleme des CO_2 -Emissionsanstiegs

Unsere Atmosphäre ist von einem Schutzschild bestehend aus so genannten Treibhausgasen umgeben, welche das Austreten eines Teils der Wärme ins All verhindert und so für eine angenehme Temperatur auf der Erde sorgt. Durch die heutige Lebensweise der Menschen, den Verkehr, die Industrie und die zahlreichen Haushalte wird ein Anstieg der Treibhausgase Ozon (O_3), Stickoxide, insbesondere N_2O , Methan (CH_4), FCKW und vor allem von CO_2 und Wasserdampf verursacht. Die erhöhte Konzentration an Treibhausgasen in der Atmosphäre erschwert das Austreten der langwelligen Wärmestrahlung. Die Erdoberfläche wird durch die reflektierte Wärmestrahlung mehr und mehr erhitzt, bis die Natur ein Gleichgewicht zwischen

eingehender und ausgehender Wärmestrahlung herstellen kann. Das durch den Menschen verursachte Phänomen dieser globalen Erwärmung wird als anthropogener Treibhauseffekt bezeichnet.

Zum Großteil wird der CO_2 -Anstieg durch die weltweite Verbrennung von fossilen Energieträgern verursacht. Im Jahre 1991 wurden 10 Mrd Tonnen SKE (Steinkohleeinheiten) in Form von Kohle, Öl und Erdgas verbrannt, dabei entstanden 21 Mrd t CO_2 . Die Verwendung von Holz, Dung etc. zur Energieerzeugung führte zu einem weiteren Ausstoß von 2 Mrd t CO_2 . Die gleiche Menge CO_2 wurde durch Brandrodung des tropischen Regenwaldes v. a. in Brasilien ausgestoßen. Dies resultierte in einer CO_2 -Emission von 25 Mrd t im Jahr 1991 [29]. Im Jahr 2003 lag die CO_2 -Emission durch die Verbrennung fossiler Energieträger bereits bei 25 Mrd t CO_2 [12]. Die weltweiten Treibhausgasemissionen, die hauptsächlich durch die Industriestaaten verursacht werden, verzeichnen bis heute einen stetigen Anstieg, welcher auch in der nahen Zukunft nur sehr langsam zum Stagnieren kommen wird. Statistisch erzeugt ein Mensch in Indien eine Tonne CO_2 im Jahr, ein Europäer 9 t CO_2 im Jahr und ein US-Amerikaner sogar 20 t CO_2 im Jahr. Wissenschaftliche Studien besagen, dass bei einem gleich bleibenden Anstieg bis 2100 die globale Temperatur im Schnitt um $1,4^\circ C$ bis $5,3^\circ C$ erhöht wird und einen Anstieg des Meeresspiegels um 10 bis 90 cm nach sich zieht, was enorme Naturkatastrophen, wie Überflutungen von Küstenregionen und ganzen Landstrichen, Umverteilung von Niederschlägen und damit Ausweitung von Wüstenbildung und Ausdehnung von Trockenzonen, Schmelzen von Gletschern etc., hervorrufen könnte [6]. Eine globale Stabilisierung der Treibhausgasemission ist somit von Nöten.

1.1.2 Notwendigkeit der Umstrukturierung des Kraftwerksparks

Bis 2002 hatte die Bundesrepublik eine Reduzierung um 19% erreicht [31]. Um jedoch eine weitere Reduktion zu erlangen, ist eine Umstrukturierung der derzeitigen Energieerzeugung notwendig. Konkrete Maßnahmen, welche auf nationaler Ebene getroffen werden, sind u.a. der Ausbau erneuerbarer Energien (EE), die Einführung des Emissionshandels¹ und die Steigerung der Energieeffizienz des bestehenden Kraftwerksparks durch beispielsweise einen weiteren Ausbau und Einsatz der Kraft-Wärme-Kopplung oder durch eine verstärkte Nutzung von Gas- und Dampfturbinen (GuD).

Nicht nur die essentielle Reduzierung der CO_2 -Emission, sondern auch die vorhersehbare Verknappung² der fossilen Energieträger führen zu der Notwendigkeit der Erneuerung und Umstrukturierung der bestehenden Kraftwerkskonstellation.

¹Seit Anfang des Jahres 2005 erhalten Betreiber von Kraftwerken kostenlose Zertifikate, die es ihnen erlauben, eine festgelegte Menge CO_2 auszustoßen. Ist die Emission höher, wird durch den Zukauf weiterer Zertifikate ein erhöhter Ausstoß genehmigt. Ebenso können die Betreiber bei geringerer Emission überschüssige Zertifikate verkaufen.

²Statistischen Berechnungen zu Folge verzeichnen die Primärenergieträger Öl, Gas und Kohle bei konstantem Verbrauch eine Reichweite ihrer Reserven von 30, 60 und 300 Jahren [29].

1.2 Energieversorgung in Deutschland

In Deutschland bilden derzeit die fossilen Energieträger wie Kohle, Erdöl und Erdgas sowie der nukleare Energieträger Uran die Grundlage der Energieversorgung. In Abbildung 1.2 auf Seite 4 ist die Stromerzeugung je Energieträger im Jahre 2004 dargestellt³. Dabei nimmt die Kernenergie mit 167 TWh von insgesamt 606,5 TWh eine führende Position ein. An zweiter Stelle steht die Braunkohle mit 158,5 TWh, dicht gefolgt von der Steinkohle mit 138 TWh. Erneuerbare Energien wie Wind, Wasserkraft und Biomasse tragen mit 56 TWh, (9,3%) zur Stromerzeugung bei.

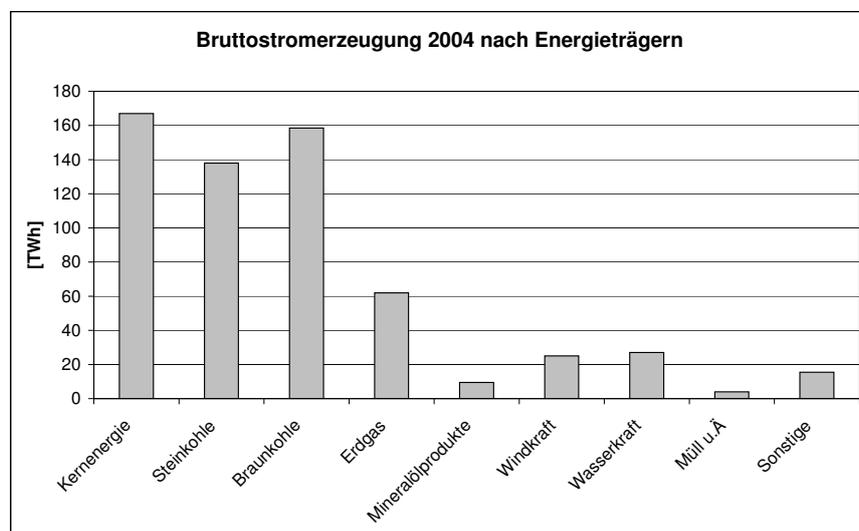


Abbildung 1.2: Bruttostromerzeugung nach Energieträgern 2004

Instrumente und Maßnahmen der Bundesregierung zur Förderung der Nutzung von u.a. Wind, Sonne und Wasser zur Erzeugung von Energie haben zu einem Boom der Entwicklung von erneuerbaren Energien geführt. Dies brachte nicht nur positive Effekte für die Umwelt, vielmehr erlangte die Bundesrepublik auf diese Weise eine führende Position in diesem technischen Gebiet. Der Startschuss für die Förderung erneuerbarer Energien erfolgte durch das Stromeinspeisegesetz vom 1. Januar 1991. Darin verpflichteten sich die Energieversorgungsunternehmen, aus regenerativen Energien gewonnenen Strom zu festgelegten Tarifen abzunehmen. Die für die Betreiber von Windenergieanlagen (WEA) festgelegte degressive Vergütung beläuft sich auf ca. 8,5 ct/kWh. Dies führt zu Mehrkosten für die Verbraucher von ca. 1,08 Euro pro Monat und Haushalt bei einem Stromverbrauch von 3500 kWh im Jahr [7].

Der daraus resultierende Aufschwung in Fertigung und Forschung von Anlagen zur Erzeu-

³Quelle: Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen AGEB; Stand 25.07.2005 [1]

gung von Strom aus erneuerbaren Energien wurde durch das „Erneuerbare-Energien-Gesetz (EEG)“, das zum 1. April 2000 in Kraft trat und am 1. August 2004 novelliert wurde, noch gefördert. Ziel dieses Gesetzes ist es, den Anteil erneuerbarer Energien an der Stromversorgung bis 2010 auf 12,5% und bis 2020 auf mindestens 20% zu steigern. Dies würde eine Verdoppelung des Anteils bis 2010 gegenüber 2000 bedeuten. Die Windenergie leistete 2003 bei der Stromerzeugung aus erneuerbaren Energien einen Anteil von 40%, neben der Wasserkraft, die daran mit 44% beteiligt war.

Für die Zukunft wird der Nutzung der Windenergie das größte Potential zugesprochen, da in ihr noch nicht genutzte Ausbaumöglichkeiten vor allem bei der Nutzung des Windes auf See gesehen werden. Ende 2003 waren schon rund die Hälfte der in Europa installierten Windenergieanlagen in Deutschland installiert.

Die Abbildung 1.3 stellt die Entwicklung der Nutzung der Windenergie in Deutschland in den Jahren 1990 bis 2004 graphisch dar. Ein stetiger Anstieg ist seit Anfang der 90er Jahre zu erkennen, dieser wird durch den geplanten Ausbau auch weiterhin zunehmen [7]. Es ist

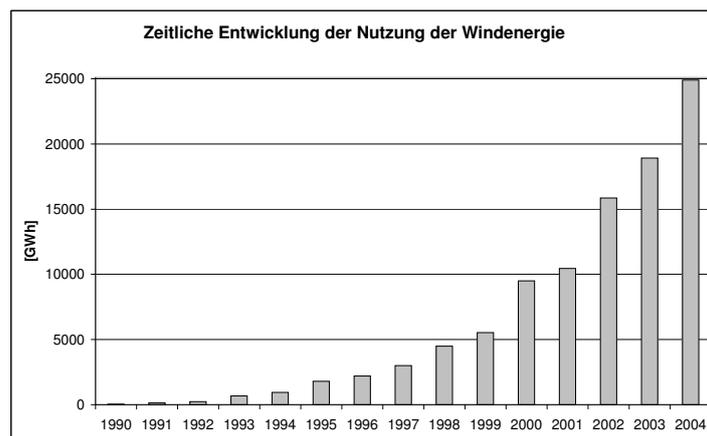


Abbildung 1.3: Entwicklung der Nutzung des Windes zur Erzeugung von Energie

ein Anstieg von 40 GWh 1990 auf 25000 GWh im Jahre 2004 zu verzeichnen. Der maximale Entwicklungsschub ist für das Jahr 2000 verzeichnet; dort stieg die Nutzung um 72% im Vergleich zum Vorjahr.

1.3 Windenergie in Deutschland

Die räumliche Konzentration der Windenergieanlagen im Norden Deutschlands, welcher eine geringere Nachfrage als der Süden aufweist sowie die zeitlichen Schwankungen des Auftretens von Wind führen zu neuen Problemen und Herausforderungen in der deutschen Ener-

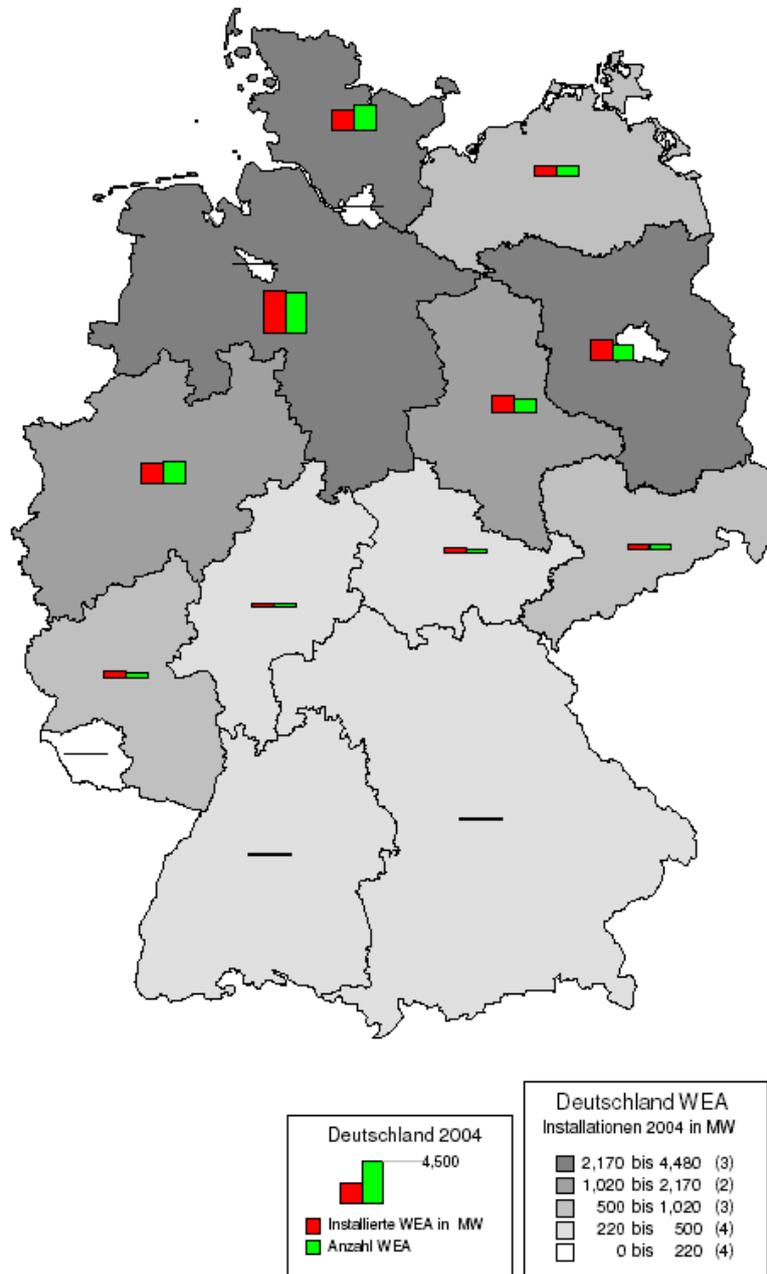


Abbildung 1.4: Installierte Windenergieanlagen in Deutschland 2004

gieversorgung. Die Nutzung der Windenergie ist u.a auch dadurch ein sehr umstrittenes Thema. Die Gegner argumentieren mit Schlagwörtern wie Landschaftsverhandlung und Lärmbelästigung. Befürworter sehen darin u.a. eine Risikoreduktion gegenüber Atomkraftwerken und eine Natur schonende Art der Energieerzeugung durch die Verringerung der CO_2 -Emissionen.

Die Windenergie hat derzeit in Deutschland von allen regenerativen Energieträgern für den Stromverbrauch das größte Ausbaupotential. Angestoßen durch die Umwelt- und Energiepolitik der Bundesregierung, hat die Windenergie eine Vorreiterfunktion im Ausbau erneuerbarer Energien übernommen.

Je nach Windvorkommen ist die Anzahl der installierten Windenergieanlagen variabel. Die regionalen Differenzen sind in Abbildung 1.4 auf Seite 6 dargestellt. Maximal installierte Windenergieanlagen befinden sich in Niedersachsen mit einer Gesamtleistung von 4471 MW, gefolgt von Brandenburg mit 2179 MW und Schleswig-Holstein mit 2174 MW. Die durchschnittliche Leistung der Anlagen je Bundesland erstreckt sich von 0,59 MW in Hamburg bis 1,27 MW in Sachsen-Anhalt. Mit einer kumulierten Gesamtleistung von 16629 MW im Jahr 2004 nimmt Deutschland weltweit eine führende Position ein [11].

Die Errichtung von Windenergieanlagen erfordert eine gut durchdachte Standortwahl. Der Bau von Windenergieanlagen in Regionen mit niedriger Windgeschwindigkeit ist daher nicht vorteilhaft. Noch kann die Gewinnung von Windenergie auf Land weiterhin ausgebaut werden. Insbesondere durch Repowering⁴, kann die Stromerzeugung durch Windenergieanlagen im Jahr vervielfacht werden [7]. Da der Wind auf See erheblich stärker und beständiger weht, wird vor allem den Windenergieanlagen auf See, auch Offshore-Windenergieanlagen genannt, ein großes Potential zugeschrieben. Auf den Flächen in der deutschen Ausschließlichen Wirtschaftszone (AWZ) in Nord- und Ostsee, die von der Bundesregierung 2002 für Offshore-Windparks als Eignungsgebiete identifiziert wurden, könnten bis 2006 Anlagen mit mindestens 500 MW Gesamtleistung installiert werden. Im Jahre 2010 wäre eine Leistung von 2000 bis 3000 MW und bis 2025-2030 eine Leistung von 20000-25000 MW realisierbar [7]. Voraussetzung für die Nutzung von Offshore-Windenergieanlagen dieser Größenordnung ist die Bereitstellung und Entwicklung von Transportmöglichkeiten.

1.3.1 Probleme der Nutzung der Windenergie

Wind entsteht als Ausgleichsströmung von Temperatur- und damit verbundenen Luftdruckunterschieden infolge ungleichmäßig starker Sonneneinstrahlung auf die Erde. Wind ist folglich ein stochastisch auftretendes Element. Die Windstärke unterliegt sowohl regionalen als auch jahres- und tageszeitlichen Differenzen. Schwankungen treten sogar schon im Sekundenbereich auf. Auch im Vergleich von mehreren Jahren sind Unterschiede gemessen worden.

Bei der im Wind enthaltenen Energie spricht man von kinetischer Energie. Diese steigt linear mit der Masse m und mit der zweiten Potenz der Geschwindigkeit v .

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (1.1)$$

Die Masse m ist wiederum linear abhängig von der Geschwindigkeit v . Es gilt

$$m = lA\rho \quad (1.2)$$

$$= vtA\rho \quad (1.3)$$

Denn die Länge l ist Geschwindigkeit v mal Zeit t .

⁴Ersatz alter, kleiner WEA (100 kW) durch moderne, leistungsfähigere WEA (ab 1,5 MW).

Leistung P ist definitionsgemäß die Arbeit (hier: Energie) E die pro Zeiteinheit t geleistet wird:

$$P = \frac{E}{t} \quad (1.4)$$

Steigt nun die Windgeschwindigkeit, so strömt mehr Masse pro Zeiteinheit über die von den Rotorblättern begrenzte Fläche $A = \pi r^2$. Dabei bezeichnet r den Rotationsradius bzw. die Länge der Rotorblätter. Der Massenstrom steigt nach 1.3 linear zur Windgeschwindigkeit. Durch Einsetzen in obige Formeln 1.1 und 1.4 erhält man

$$P = \frac{1}{2} \pi r^2 \rho v^3$$

Die Leistung, welche durch die Windenergie erzielt wird, hängt also von der dritten Potenz der Windgeschwindigkeit ab, d.h. schon geringe Änderungen der Windgeschwindigkeit haben große Auswirkungen auf die durch den Wind erzielbare Leistungsabgabe. In Abbildung 1.5

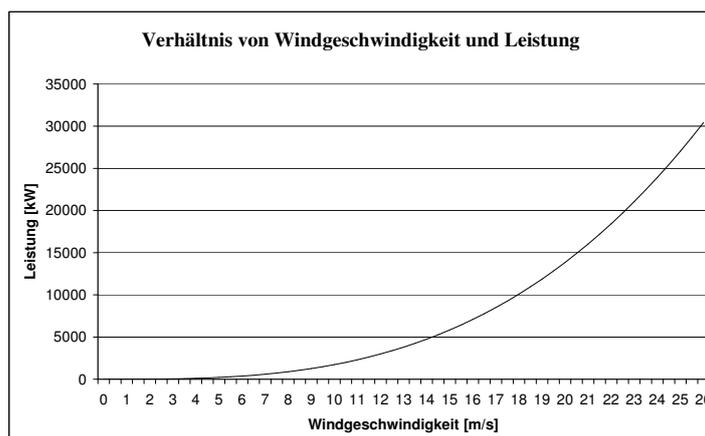


Abbildung 1.5: Leistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit

ist die Leistungskurve des Windes für einen Rotordurchmesser von 60 m und eine Luftdichte von $1,225^5 \text{ kg/m}^3$ dargestellt. Wird der Windströmung Energie entnommen, verlangsamt sich diese. Der Massenstrom bleibt allerdings konstant, was zur Folge hat, dass der Wind sich ausweitet, da hinter der Windenergieanlage die gleiche Menge Luft bei geringerer Geschwindigkeit über eine größere Fläche abtransportiert werden muss. Würde man die komplette Windenergie in Rotationsenergie wandeln, käme es hinter der Anlage zu einem Luftstau, da dort die Luftmassen ruhen würden. Der Physiker Betz ermittelte das Maximum des Anteils der Leistung, welche dem Wind entnommen werden kann. Dieser Wert liegt bei 59,3% und wird als Betzscher Leistungsbeiwert $c_{p,Betz}$ bezeichnet.

⁵Dichte von trockener Luft bei normalem atmosphärischem Druck auf Meereshöhe bei 15°C; dieser Wert wird in der Windindustrie als Standard verwendet.

Windenergieanlagen (WEA)

In der Realität liegt der Leistungsbeiwert c_p , der Anteil der Leistung, den eine Windenergieanlage nutzen kann, je nach Anlagentyp nur bei 40% bis 50%. Der Wirkungsgrad⁶ einer Windenergieanlage stellt das Verhältnis von Leistungsbeiwert c_p zum Betz'schen Leistungsbeiwert $c_{p,Betz}$ dar und liegt demnach zwischen 70 und 80%. Es lohnt sich also nur, die Anlage ab einer bestimmten Windgeschwindigkeit einzuschalten. Diese so genannte Anlaufgeschwindigkeit v_{start} liegt zwischen 2 und 4 m/s [32].

Eine Windenergieanlage besteht aus einem Fundament, dem Turm, der Maschinengondel mit Generator, dem Getriebe und den Rotorblättern mit Nabe. Der Rotordurchmesser ist je nach Anlagengröße und Hersteller verschieden. Die Werte variieren zwischen 43 m und 90 m. Die Nabenhöhe schwankt zwischen 43 und 90 m und ist mit dem Rotordurchmesser positiv korreliert. Im Fuß des Turms befinden sich die Elektronik und die Netzanschlusstechnik. Durch die Rotorblätter wird der Wind in eine Drehbewegung gewandelt, welche dann von dem elektrischen Generator in elektrische Energie umgewandelt wird. Die dabei gewonnene Energie wird ins Stromnetz eingespeist.

Eine weitere Kenngröße von Windenergieanlagen ist die Nenngeschwindigkeit v_N . Bei dieser gibt die Anlage ihre Nennleistung P_N ab. Sie liegt zwischen 11 und 16 m/s. Ab dieser Nenngeschwindigkeit wird die maximale Leistungsabgabe der Anlage erreicht; d.h. beim Überschreiten dieser Geschwindigkeit wird die Leistungsabgabe konstant gehalten, da es sonst zu Überlastungen der Anlagenkomponenten kommen kann. Der Leistungsbeiwert c_p nimmt somit ab.

Bei heutigen Windenergieanlagen wird von einer Anlagengröße von 1,5 MW bis 3 MW ausgegangen. Bei Offshore-Anlagen ist eine höhere Nennleistung denkbar. Bei zu starkem Sturm, ab einer Windgeschwindigkeit von 25-35 m/s, wird die Anlage jedoch abgeschaltet, um Schäden zu vermeiden. Im Folgenden wird die Abschaltgeschwindigkeit mit v_{stop} bezeichnet. Der Leistungsbeiwert c_p sinkt auf Null.

Eine Möglichkeit, den Leistungsbeiwert in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit zu berechnen, hat Quaschnig in seiner Arbeit *Systemtechnik einer klimaverträglichen Elektrizitätsversorgung in Deutschland für das 21. Jahrhundert* dargestellt [27]:

$$c_p(v) = \begin{cases} 0 & : v \leq v_{start} \\ c_{p,max} & : v_{start} < v < v_N \\ \frac{2P_N}{\rho A v^3} & : v_N \leq v \leq v_{stop} \\ 0 & : v > v_{stop} \end{cases} \quad (1.5)$$

Die elektrische Wirkleistung P_{el} ist der Anteil der Leistung, der von einer Windenergieanlage für die Stromerzeugung genutzt werden kann. Diese ist abhängig von der im Wind enthaltenen Leistung P sowie dem Leistungsbeiwert. Sie lässt sich mit Hilfe folgender Formel bestimmen:

$$P_{el}(v) = c_p(v)P(v) \quad (1.6)$$

⁶Der Wirkungsgrad stellt das Verhältnis von abgegebener zu zugeführter Leistung dar.

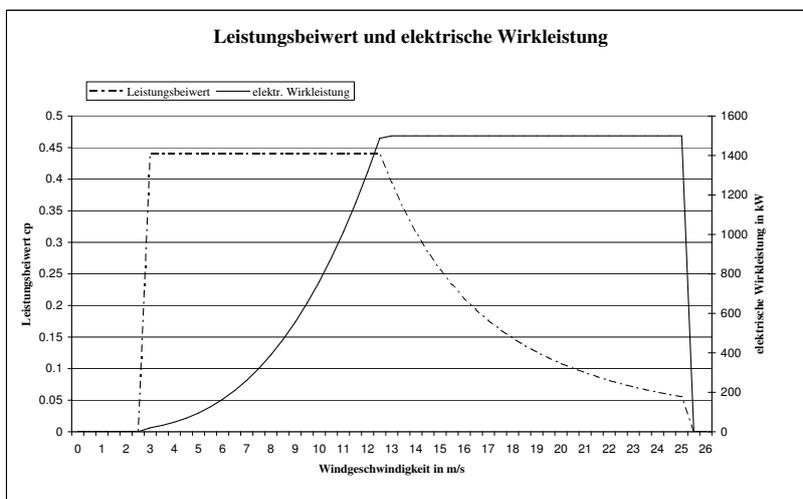


Abbildung 1.6: Leistungsbeiwert und elektrische Wirkleistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit

In der Abbildung 1.6 sind der Leistungsbeiwert und die elektrische Wirkleistung in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit gegenübergestellt. Die Kurven wurden für eine Beispielanlage mit einer Nennleistung von 1,5 MW, einem Rotordurchmesser von 60 m und einer Luftdichte $\rho = 1,225 \text{ kg/m}^3$ berechnet. Anlauf-, Nenn- und Abschaltgeschwindigkeit liegen bei 2,5 m/s, 13 m/s und 25 m/s. Der maximale Leistungsbeiwert $c_{p,max}$ liegt bei dieser Anlage bei 0,44.

Für die Windanlagenindustrie ist es sehr wichtig, die regionalen Windverhältnisse zu kennen. Um die Anlage in Bezug auf Energiekosten zu optimieren, oder um die Rentabilität einer Anlage an einem bestimmten Standort zu bestimmen, werden diese Informationen benötigt. Die Windgeschwindigkeit über ein Jahr hinweg unterliegt der sog. Weibull-Verteilung

$$F_{\alpha,\beta}(v) = 1 - e^{-\alpha(\frac{v}{\bar{v}})^\beta} \quad (1.7)$$

mit der zugehörigen Dichtefunktion

$$f_{\alpha,\beta}(v) = \alpha\beta \frac{v^{\beta-1}}{\bar{v}^\beta} e^{-\alpha(\frac{v}{\bar{v}})^\beta} \quad (1.8)$$

mit dem Parametern α , β und \bar{v} . Letzterer ist die mittlere Windgeschwindigkeit für den jeweiligen Standort. Die statistische Verteilung der Windgeschwindigkeit ist je nach Ort verschieden und von mehreren Faktoren abhängig, wie beispielsweise der Landschaft oder der Bodenoberfläche. Die Weibull-Verteilung ändert sich je nach Wahl der Parameter in Form und Mittelwert. Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\beta = 2$ wird sie auch Rayleigh-Verteilung genannt.

$$f_{\frac{\pi}{4},2}(v) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{v}{\bar{v}^2} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}(\frac{v}{\bar{v}})^2} \quad (1.9)$$

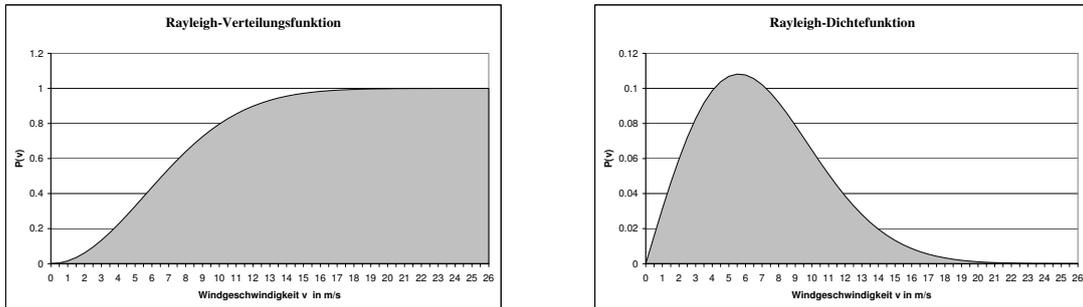


Abbildung 1.7: Rayleigh-Verteilung und Dichtefunktion in Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit

Diese Verteilungs- und Dichtefunktion ist in Abbildung 1.7 für eine mittlere Windgeschwindigkeit von 7 m/s dargestellt. An der x-Achse ist jeweils die Windgeschwindigkeit angetragen und an der y-Achse die Wahrscheinlichkeit des Auftretens dieser Windgeschwindigkeit. Der Median der Verteilung liegt hier bei 6,6 m/s. Er unterteilt die Fläche in zwei gleich große Hälften, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die Windgeschwindigkeit kleiner gleich 6,6 m/s ist, entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Windgeschwindigkeit stärker als 6,6 m/s weht.

Der Verlauf der beiden Kurven zeigt, dass in dieser Region Stürme nur sehr selten vorkommen. Am häufigsten treten Windgeschwindigkeiten von 5,5 m/s auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Windgeschwindigkeit unter 10 m/s liegt, ist 80%. Für eine Anlage mit einer Nenngeschwindigkeit von 11 m/s oder mehr würde hier in den seltensten Fällen die Nennleistung der Anlage erreicht. Man sieht, dass durch die Nennleistung einer Anlage nur geringfügige Aussagen über die tatsächliche Leistungsabgabe gemacht werden können. Hierzu benötigt man die mittlere elektrische Leistungsabgabe \bar{P}_{el} der Anlage, welche die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer bestimmten Windgeschwindigkeit berücksichtigt

$$P_{el} = \int_{v=0}^{\infty} f(v)P_{el}(v)dv \quad (1.10)$$

Um daraus die Energie E_{el} zu berechnen, welche von einer Windenergieanlage an diesem Standort in einem Jahr erzeugt wird, multipliziert man die mittlere Leistung mit der Anzahl Stunden im Jahr. Es ergibt sich

$$E_{el} = \bar{P}_{el} \cdot 8760h \quad (1.11)$$

Um die Leistung einer Windenergieanlage zu bestimmen, benötigt man die Windgeschwindigkeit auf Nabenhöhe $v(h)$. Gegebene Messwerte, welche die Windgeschwindigkeit in einer bestimmten Höhe h_{mess} wiedergeben, müssen dazu umgerechnet werden. Die Winddaten, die

für die Berechnung der Zeitreihen in Abschnitt 2.2.3 verwendet wurden, beziehen sich auf eine Höhe von 6 m. Die Umrechnung erfolgt über das logarithmische Grenzschichtprofil

$$v(h) = v(h_{mess}) \frac{\ln(\frac{h}{z_0})}{\ln(\frac{h_{mess}}{z_0})} \quad (1.12)$$

Dabei beschreibt z_0 die Rauigkeitslänge, die für Offshore-Gebiete mit 0,002, für küstennahen Gebiete mit 0,03 und für das Binnenland mit 0,1 abgeschätzt werden kann.

Kapitel 2

Die Modellierung des Kraftwerksparks und des Übertragungsnetzes

Das deutsche Energieerzeugungs- und Übertragungssystem wurde mittels eines Modells beschrieben. Unter Berücksichtigung der fluktuierenden Eigenschaften des Windes, der Stromnachfrage der Verbraucher, welche zu jeder Tages- und Nachtzeit gedeckt werden muss, des Übertragungsnetzes und der verschiedenen Kraftwerke wird durch das Modell u.a. eine optimale Fahrweise des bestehenden Kraftwerksparks errechnet, sowie die nötigen Kapazitäten für die Erzeugung und den Transport bestimmt. Im folgenden Kapitel wird auf die Einzelheiten der Modellierung und die zu Grunde liegenden Daten eingegangen.

2.1 Die Struktur des Modells

Das komplette Übertragungsnetz und der Kraftwerkspark der Regelzone Deutschland wurden zusammengefasst. Daraus resultieren 29 Ersatzknoten, die stellvertretend die Verbraucherzentren und Erzeugungszentren repräsentieren. Jedem Knoten wird damit eine Nachfrage zugewiesen, die es zu decken gilt. Ebenso sind jedem Knoten unterschiedliche Kraftwerke zugeordnet. Dieses Modell wurde auf 8 Kraftwerkstypen beschränkt: Gasturbinen, GuD, Windenergieanlagen im On- und Offshore-Bereich, Kern-, Steinkohle-, Braunkohle- sowie Laufwasser- und Pumpspeicherkraftwerke. Die Modellierung für drei Beispielknoten ist in Abbildung 2.2 graphisch dargestellt.

Die 380/220 kV-Leitungen wurden zusammengefasst und deren Kapazität den entsprechenden Ersatzleitungen zugerechnet. Das modellierte Übertragungsnetz besteht aus 88 Leitungen mit heutiger Nennübertragungskapazität, welche die einzelnen Knoten miteinander verbinden. Es ist in Abbildung 2.1 auf Seite 14 graphisch dargestellt. Den Übertragungsleitungen wurde ein mittlerer Wirkungsgrad zugeordnet, da es aus Gründen der geforderten Linearität nicht möglich ist, die reale Abhängigkeit der Übertragungsverluste vom Lastfluss abzubilden.

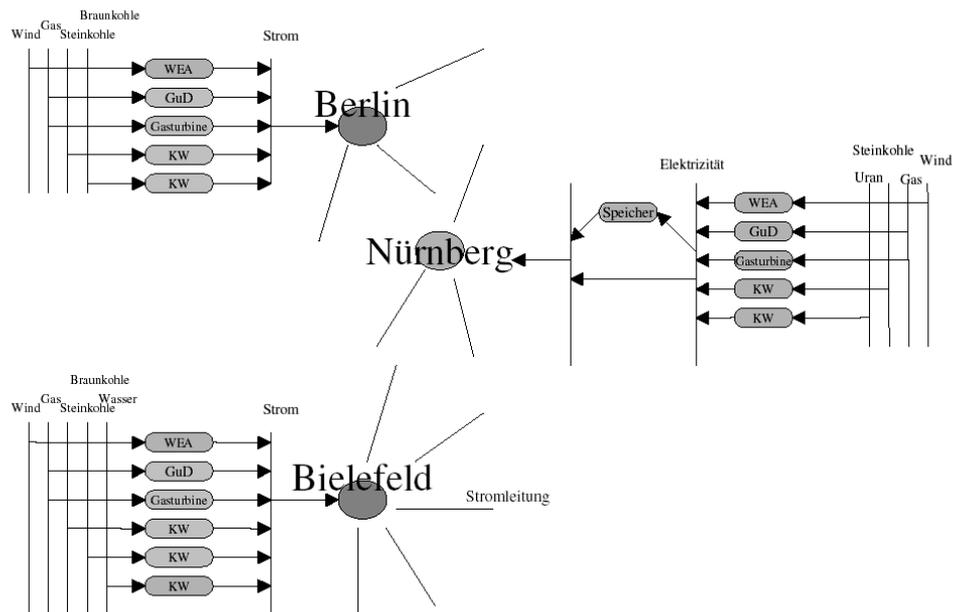


Abbildung 2.2: Modellierung der Knoten für drei Beispielorte

ten werden mit Hilfe der Annuitätenberechnung mit einem Kalkulationszinssatz von 5% und einem spezifisch angenommenen Abschreibungszeitraum auf ein Jahr umgelegt. Der Abschreibungszeitraum beträgt je nach Anlage zwischen 15, 17 und 30 Jahre. Technische Parameter der Kraftwerke sowie des Übertragungsnetzes werden im Modell durch Variablen, Gleichungen und Ungleichungen umgesetzt.

Die Eingabedaten stellen einen elementaren Teil des Modells dar. Diese werden von GAMS aus Textdateien importiert. Durch eine geeignete Benutzeroberfläche und mittels VBA¹ können die wesentlichen Daten und Parameter der Energieerzeugung und Übertragung sehr schnell und einfach geändert werden. Dazu gehören u.a. alle Arten von Kosten, Wirkungsgraden, Kapazitätsschranken und Laständerungskoeffizienten der Kraftwerke. Die Eingabedaten des Verbraucherlastgangs und des Windangebots liegen in Form von Zeitreihen (stündliche Auflösung) vor.

Je nach Untersuchungsziel können durch eine geeignete Kapazitätswahl die Rahmenbedingungen für die Optimierung geändert werden. So kann beispielsweise die Existenz von bereits bestehenden Kraftwerken vorgegeben werden. Ermöglicht wird auch die Nutzung bzw. Nichtnutzung gewisser Kraftwerke zu einem frei wählbaren Grad. Bei den folgenden Szenarien wurden so die globale Beschränkungen des Erdgasimports und das lokale Kohlevorkommen berücksichtigt. Auch die Nutzung von Laufwasserkraftwerken wurde fixiert. Ferner besteht die Möglichkeit, die CO_2 -Emission zu beschränken.

¹Visual Basic for Application

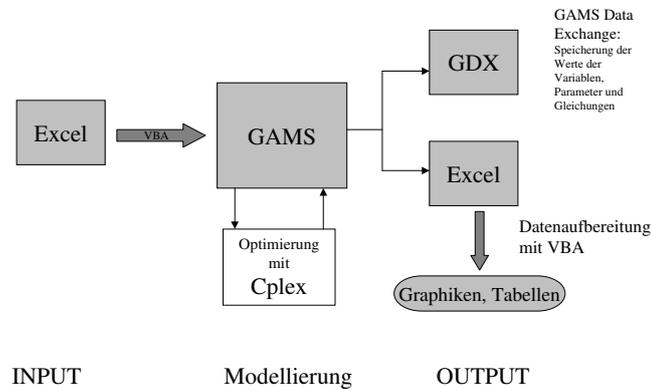


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung des Programmablaufs

Als Output liefert das Modell die optimale Fahrweise des Kraftwerksparks als Zeitreihe sowie die errichteten Kapazitäten der Kraftwerke und des Übertragungsnetzes. Die optimalen Transportmengen werden ebenfalls ausgegeben. Dadurch ist es möglich, Engpassleitungen zu lokalisieren. Die Ausgabewerte werden in einer GDX Datei abgespeichert und gleichzeitig werden Exceltabellen erzeugt. Durch eine geeignete VBA-Programmierung wurden die Ausgabedaten direkt für weitere Analysen aufgearbeitet (Abbildung 2.3).

Es besteht die Möglichkeit, dass das Modell eine Optimallösung liefert, die technisch nicht umsetzbar ist. In dem elektrotechnischen Simulationsmodell DigSILENT PowerFactory wird die Durchführbarkeit von Lastflüssen hinsichtlich der Spannungserhaltung und der Leistungsauslastung überprüft [18]. Diese netztechnischen Untersuchungen orientieren sich an den Erfordernissen eines unveränderten Zuverlässigkeitsniveaus der deutschen Energieversorgung. Mittels Lastflussrechnung wird die Einhaltung der Spannung an den einzelnen Knoten sowie die Auslastung der Übertragungsleitung untersucht. Abgesehen von wenigen Ausnahmen, entsprechen die bei der Optimierung ermittelte Lastflüsse der bei der Netzberechnung ermittelten maximalen Auslastung [17]. Treten solche Ausnahmen auf, kann durch geringes Ändern der Optimallösung die Durchführbarkeit gewährleistet werden. Da diese Fälle nur in sehr geringe Maße auftreten, sind sie für diese Arbeit unwesentlich und können ignoriert werden.

2.2 Eingabedaten

Die Eingabedaten bilden den elementaren Teil der Programmierung. Eine Änderung variiert die Voraussetzungen und damit die Grundlage der zu berechnenden Probleme. An der Implementierung in GAMS selber muss dazu nichts geändert werden.

2.2.1 Kosten

Die Kosten für die Investition und den Betrieb von Kraftwerken unterteilen sich in Investitionskosten, Fixkosten, variable Kosten und Brennstoffkosten. Diese sind in den Tabellen 2.1 zusammengefasst. Die Brennstoffkosten sind hier thermisch angegeben, die restlichen Kosten elektrisch.

Kraftwerk	K_{Inv} [Euro/kW]	K_{Fix} [Euro/kW]	K_{Var} [Euro ct/kWh]	K_{Bren} [Euro ct/kWh]
Steinkohlekraftwerk	1036	40	0,77	0,5
Braunkohlekraftwerk	1150	47	0,99	0,45
Gasturbine	229	13	0,00	0,9
GuD	405	16	0,40	0,9
Kernkraftwerk	1500	40	0,99	0,3
Laufwasserkraftwerk	4500	41	0,00	0,00
WEA Onshore	675	34	0,36	0,00
WEA Offshore	793	40	0,47	0,00

Tabelle 2.1: Spezifische Kosten der Stromerzeugung für das Jahr 2030

Die Daten entstammen der Enquete-Kommission des Deutschen Bundestages „Nachhaltige Energieversorgung unter den Bedingungen der Globalisierung und der Liberalisierung“ [14][16]. Bei den Werten für das Jahr 2030 handelt es sich um eine mögliche Entwicklung der Kosten. Die Brennstoffkosten sind allerdings nur sehr schwer vorhersehbar. Wenn nicht weiter angegeben, wurde mit einem konstanten Kalkulationszinssatz von 5% gerechnet. Die Brennstoffkosten für Gas wurden bei verschiedenen Untersuchungen variiert. Als Ausgang diente ein Preis in Höhe von 2 Euro ct/kWh. Dies entspricht dem Durchschnitt der Gaspreise für den Import der Jahre 1990 bis 2003. Aktuell liegt der Gaspreis bei 2,4 Euro ct/kWh.

Der Abschreibungszeitraum wurde für GuD, Gasturbinen, Steinkohle-, Braunkohle- und Kernkraftwerke auf 17 Jahre festgelegt, für Laufwasserkraftwerke auf 30 und für Windenergieanlagen auf 15 Jahre.

Bei den hier angegebenen Kosten sind alle Aufwendungen für die Erzeugung einer Kilowattstunde enthalten. Für die Modellierung wurden die Investitionskosten mit Hilfe der Annuitätenrechnung auf ein Jahr umgelegt, so dass sich alle Kosten in dem Modell auf ein Jahr beziehen.

Die Annuität A lässt sich nach folgender Formel berechnen:

$$A = \frac{K_{Inv} (1+r)^T r}{(1+r)^T - 1} \quad (2.1)$$

Die benötigten Parameter sind im Folgenden aufgelistet:

Bezeichner	Beschreibung
K_{Inv}	Investitionskosten/Kapital
r	Kalkulationszinssatz
T	Abschreibungszeitraum/Nutzungsdauer

2.2.2 Nachfrage

Die großen Stromversorger der meisten westeuropäischen Länder haben sich zu einem gemeinsamen Verbundnetz, der UCTE (Union für die Koordination des Transportes elektrischer Energie), zusammengeschlossen, um die Versorgungssicherheit mit Strom besser zu gewährleisten und zu vereinfachen. Derzeit hat die UCTE 20 Mitgliedstaaten [15].

Die Verbraucherlasten liegen in Form einer Zeitreihe vor und wurden einen detaillierten UCTE-Datensatz der Universität Rostock entnommen. Die Verbraucherlasten wurden zusammengefasst und den einzelnen Knoten des Modells zugeordnet [17].

Für alle Szenarien wurde derselbe Lastgang verwendet. Es sind deutliche Unterschiede zwischen Wochenenden und Werktagen sowie tageszeitliche und saisonale Schwankungen der Stromnachfrage zu erkennen. Die Abbildung 2.4 zeigt einen typischen Lastgang einer Woche von Montag bis Sonntag im Sommer im Vergleich zu einer Woche im Winter für Gesamtdeutschland. Die Nachfrage ist im Winter durchgehend höher. In der Nacht und am Wochenende zeichnen sich ebenfalls geringere Lastgänge ab. Die oben beschriebenen auftretenden

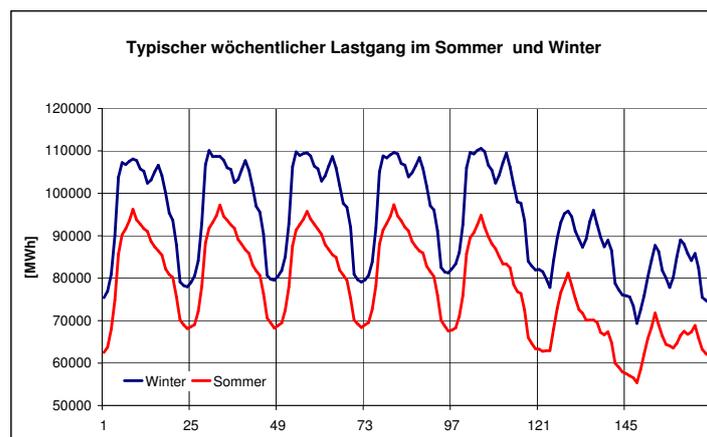


Abbildung 2.4: Typischer Lastgang für eine Woche im Sommer im Vergleich zum Winter

Schwankungen sind durch ihr periodisches Auftreten relativ leicht vorhersagbar und bereiten so den Energieversorgungsunternehmen keine großen Probleme. Wird allerdings Windenergie in das Stromnetz integriert, entstehen neue Probleme für die Energieunternehmen, da die Restnachfrage nicht mehr in dem Maße vorhersehbar ist. Die Restnachfrage ist die Differenz aus Stromnachfrage und Windangebot, sie ist demnach sehr stark vom örtlichen Windaufkommen abhängig. Die Restnachfrage für obige Wochen ist in Abbildung 2.5 auf Seite 19 dargestellt. Man sieht hier deutlich, dass weder zwischen einem Winter- und Sommertag noch zwischen Werktag und Wochenende unterschieden werden kann. Tageszeitliche Schwankungen sind meist noch zu erkennen. In Kapitel 4.3 werden die Preisanstiege in Zusammenhang mit der Integration von Windenergieanlagen in das deutsche Stromnetz untersucht.

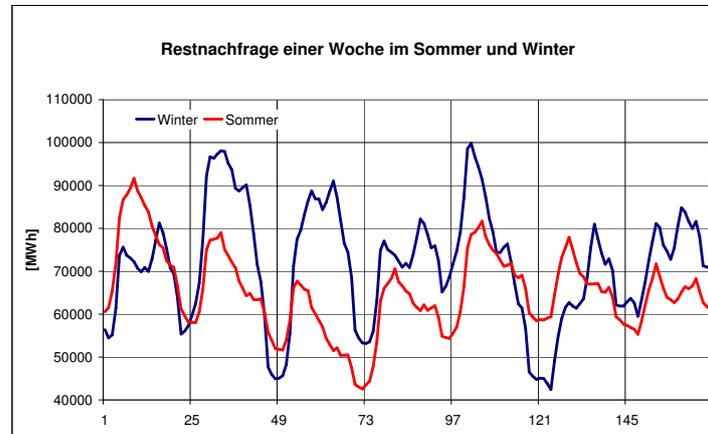


Abbildung 2.5: Restnachfrage für eine Woche im Sommer im Vergleich zum Winter

2.2.3 Wind

Den Ausgangspunkt für die Zeitreihe des Windangebots für das Modell bilden die Windgeschwindigkeitsdaten des World-Wind-Atlas [33]. Der World-Wind-Atlas wurde aus meteorologischen Daten eines globalen Wettermodells erstellt. Für Deutschland existieren 20 Messpunkte mit jeweiligen Windgeschwindigkeiten in sechsstündiger Auflösung, die von T. Haase im Rahmen seiner Dissertation aufgearbeitet wurden [17]. Die Daten für jede sechste Stunde wurden zunächst auf 1 Stunde umgerechnet und anschließend die lokalen Windgeschwindigkeiten mit Hilfe der Entfernungen zu den 20 umliegenden Messpunkten bestimmt.

Die Leistungsabgabe des Windes kann nun mit Hilfe der in Abschnitt 1.2.1 vorgestellten Formeln und der lokalen Windgeschwindigkeiten errechnet werden. Die Winddaten zeigen ein eindeutiges Nord-Süd-Gefälle. In Graphik 2.6 auf Seite 20 ist stellvertretend für Süddeutschland ein typisches Windangebot der Stadt München dargestellt. Dort können in dieser Woche beispielsweise maximal 77 MWh Strom erzeugt werden. Der Mittelwert liegt bei 8,4 MWh. Die Stadt Hamburg repräsentiert dagegen Norddeutschland. Hier sind die Winddaten der Offshore-Region Hamburg dargestellt. Mit dort installierten Windenergieanlagen könnten zwischen 662 MWh und 7013 MWh Strom erzeugt werden. Der Mittelwert liegt bei 4027,7 MWh. In Norddeutschland könnte damit allein durch die Offshore-Windparks die Nachfrage zu großen Teilen gedeckt werden, in Süddeutschland dagegen nicht annähernd. In Abbildung 2.7 auf Seite 20 wird die durch Wind erzielbare Energie mit der Nachfrage für einen Ort im Norden (links) und einen Ort im Süden (rechts) von Deutschland dargestellt. Es wird deutlich, dass sich das Stromnetz hinsichtlich dieses Gefälles bei einer Nutzung der Windenergie ändern muss. Es sind weitere Untersuchungen und Forschungen hinsichtlich der Durchführung solch einer Erweiterung notwendig.

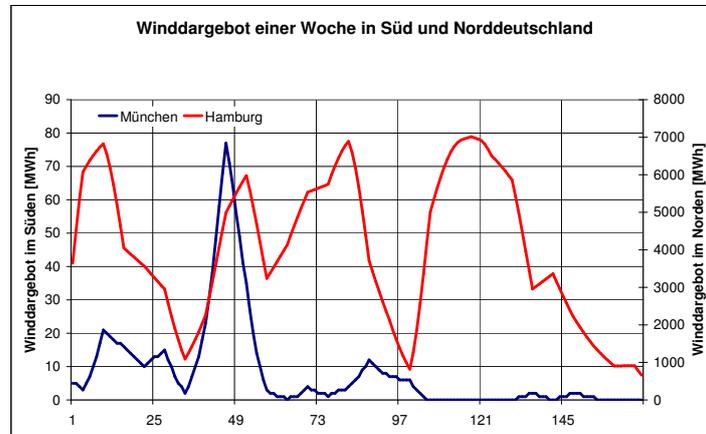


Abbildung 2.6: Windangebot einer Woche im Winter für Nord- und Süddeutschland

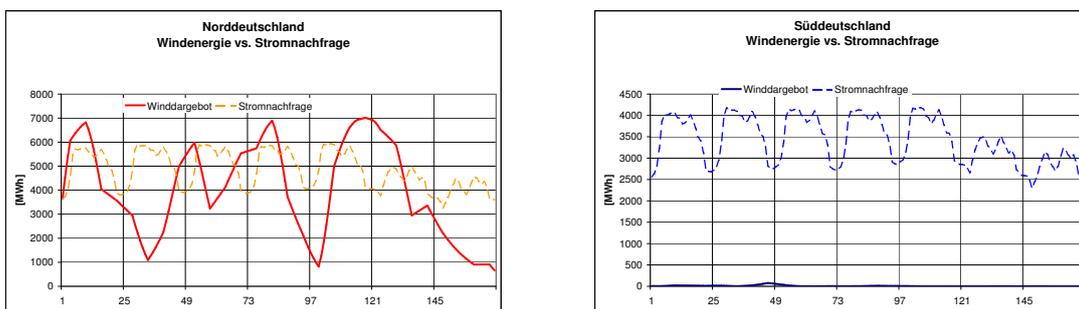


Abbildung 2.7: Windangebot versus Stromnachfrage einer Woche im Winter für Nord- und Süddeutschland

2.2.4 Übertragungsnetz

Deutschland wurde in 29 Bereiche unterteilt, die als Knoten im Modell die realen Verbraucherzentren ersetzen. Meist sind diese Bereiche Umgebungen von größeren Städten. Diesen Knoten werden der Realität entsprechend Kraftwerke zugeordnet. Die umliegenden UCTE-Mitgliedstaaten wurden jeweils zu einem Knoten zusammengefasst und deren Erzeugung und Verbrauch fixiert. Die Einzelkapazitäten der 220/380-kV-Leitungen des detaillierten UCTE-Netzes, welche die Knoten miteinander verbinden, wurden zusammengefasst. So entstanden insgesamt 88 Leitungen, die in dem Modell implementiert sind. Von diesen 88 Leitungen verbinden 55 Leitungen Knoten innerhalb Deutschlands, 20 Leitungen verbinden Deutsch-

*KAPITEL 2. DIE MODELLIERUNG DES KRAFTWERKSPARKS UND DES
ÜBERTRAGUNGSNETZES*

land mit den umliegenden Mitgliedstaaten, und 13 Leitungen verbinden die Mitgliedstaaten untereinander.

Leitung		Leistung [MVA]	Wirkungsgrad	Leitung		Leistung [MVA]	Wirkungsgrad
Berlin	Cottbus	3547	0.976	Hannover	Kassel	2449	0.979
Berlin	Greifswald	2063	0.979	Hannover	Magdeburg	2685	0.985
Berlin	Magdeburg	2369	0.985	Karlsruhe	Mainz	381	0.992
Bielefeld	Bremen	816	0.991	Karlsruhe	Nuernberg	1007	0.985
Bielefeld	Hamburg	2632	0.985	Karlsruhe	Saarbruecken	987	0.983
Bielefeld	Hannover	2693	0.98	Karlsruhe	Stuttgart	3748	0.983
Bielefeld	Kassel	1580	0.969	Kiel	Eltra	2260	0.989
Bielefeld	Muenster	1269	0.976	Koeln	Mainz	2590	0.976
Bodensee	Stuttgart	987	0.971	Koeln	Saarbruecken	2256	0.971
Bodensee	Ulm	1826	0.97	Koeln	Tennet	3343	0.96
Bodensee	Tirol	3026	0.99	Leipzig	Magdeburg	2659	0.982
Bremen	Hamburg	3640	0.971	Magdeburg	Rostock	2029	0.956
Bremen	Muenster	987	0.996	Mainz	Nuernberg	564	0.984
Bremen	Tennet	2626	0.977	Mainz	Saarbruecken	1650	0.978
Chemnitz	Cottbus	4405	0.982	Mainz	Stuttgart	2638	0.983
Chemnitz	Dresden	5264	0.985	Muenchen	Nuernberg	2714	0.964
Chemnitz	Erfurt	2037	0.964	Muenchen	Regensburg	2738	0.983
Chemnitz	Leipzig	3933	0.971	Muenchen	Ulm	1580	0.984
Chemnitz	Ceps	2632	0.99	Muenchen	Tirol	1238	0.992
Cottbus	Dresden	2632	0.984	Muenster	Tennet	2843	0.997
Cottbus	Leipzig	2632	0.975	Nuernberg	Regensburg	2367	0.964
Cottbus	Magdeburg	2632	0.977	Nuernberg	Stuttgart	1316	0.982
Dresden	Pse	2659	0.991	Regensburg	Apg	1516	0.975
Erfurt	Kassel	2686	0.972	Regensburg	Ceps	2896	0.981
Erfurt	Leipzig	3987	0.974	Rostock	Elkraft	600	0.95
Erfurt	Nuernberg	3160	0.979	Saarbruecken	Edf	3580	0.961
Essen	Kassel	1974	0.984	Stuttgart	Ulm	3891	0.98
Essen	Koeln	3973	0.978	Ulm	Tirol	1381	0.982
Essen	Muenster	3577	0.98	Egl	Edf	2975	0.989
Frankfurt	Kassel	4738	0.983	PSE	CEPS	0	0.92
Frankfurt	Koeln	987	0.991	PSE	SOE	2770	0.999
Frankfurt	Mainz	1974	0.993	CEPS	SOE	2215	0.999
Frankfurt	Nuernberg	2632	0.977	CEPS	APG	2200	0.94
Freiburg	Karlsruhe	5422	0.978	APG	TIROL	1185	0.94
Freiburg	Stuttgart	636	0.988	BODENSEE	EGL	3180	0.98
Freiburg	Egl	4933	0.999	TENNET	ELIA	5400	0.94
Freiburg	Edf	1790	0.996	ELIA	EDF	2795	0.98
Greifswald	Magdeburg	1343	0.974	Saarbruecken	ELIA	980	0.98
Greifswald	Rostock	2688	0.973	APG	SOE	3375	0.999
Greifswald	Pse	324	0.981	ENEL	SOE	2040	0.999
Hamburg	Hannover	3160	0.976	ENEL	EDF	3510	0.999
Hamburg	Kiel	2244	0.99	ENEL	EGL	1950	0.999
Hamburg	Kraftnaet	600	0.95	ENEL	BODENSEE	1510	0.999
Hamburg	Rostock	2633	0.98	ENEL	TIROL	255	0.999

Abbildung 2.8: Transportkapazitäten

2.2.5 Kraftwerke

Die Kraftwerke im detaillierten UCTE-Netz wurden für jede Umgebung eines Ersatzknotens nach Energieträgern und Wirkungsweise zusammengefasst und dem entsprechendem Knoten im Modell zugeordnet. Die Kraftwerke unterscheiden sich durch technische Parameter und

spezifische Kosten. Der Lastflussänderungskoeffizient wird mit PC bezeichnet. Er gibt die Geschwindigkeit des Lastwechsels an.

Kraftwerk	Wirkungsgrad	Abschreibungszeitraum [a]	PC
Steinkohlekraftwerk	0,45	17	0,2
Braunkohlekraftwerk	0,45	17	1
Gasturbine	0,35	17	1
GuD	0,58	17	0,2
Kernkraftwerk	0,35	17	1
Laufwasserkraftwerk	0,5	30	1
WEA Onshore	1	15	1
WEA Offshore	1	15	1

Tabelle 2.2: Technische Parameter der einzelnen Kraftwerke

Die technischen Parameter sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Die spezifischen Kosten können Kapitel 4, Seite 53, entnommen werden.

2.3 Modellierung

Die in diesem Kapitel vorgestellten Konzepte wurden als ein mathematisches Modell in Form eines linearen Optimierungsproblems formuliert. Die Eingabedaten werden in Form von Variablen, Gleichungen und Ungleichungen in die lineare Programmierung eingebunden. In folgendem Kapitel wird auf die Theorie linearer Optimierungsprobleme eingegangen und einige Algorithmen und Verfahren vorgestellt, die zum Lösen des Modells verwendet wurden.

Kapitel 3

Lineare Optimierungsprobleme und deren Lösungsverfahren

In der Wirtschaft findet man viele Probleme, die als lineare Optimierungsprobleme formuliert werden können. Dazu gehören beispielsweise die Minimierung von Produktionskosten, Fahrzeitminimierung bei der Auslieferung von Produkten oder die Berechnung der maximalen Auslastung von Maschinenlaufzeiten. Die lineare Optimierung stellt demnach ein bedeutendes Feld der Optimierung dar.

Bei Problemen obiger Art verfolgt man ein Ziel, das es zu optimieren gilt. Dieses Ziel wird in der so genannten Zielfunktion beschrieben. Bedingungen und Einschränkungen, welche für die Erfüllung obiger Ziele gelten bzw. gewährleistet werden müssen, werden mathematisch mit Hilfe von Gleichungen, Ungleichungen (auch Restriktionen genannt) und Variablen umgesetzt. Ein Optimierungsproblem, bei dem Zielfunktion und Restriktionen linear sind, nennt man ein lineares Programm.

Aus geometrischer Sicht beschreibt jede lineare Gleichung mit den Variablen x_1, \dots, x_n eine Hyperebene im n -dimensionalen Bildraum, eine lineare Ungleichung einen Halbraum, in dem alle Punkte auf einer Seite der Hyperebene liegen. Dieser Halbraum stellt die Menge aller zulässigen Lösungen für diese Ungleichung dar.

Mehrere Restriktionen definieren durch den Schnitt aller zugeordneten Halbräume den Zulässigkeitsbereich, der einen konvexen Polyeder bildet. Es besteht allerdings auch die Möglichkeit, dass dieser Bereich aufgrund zweier sich widersprechender Restriktionen leer ist (Beispielsweise $x \geq 2$ und $x \leq 1$). Das Problem ist also nicht lösbar. Ist der Polyeder in Richtung der Zielfunktion unbeschränkt, so existiert ebenso keine optimale Lösung (Beispiel : $\max x_1 + 3x_2$ unter $x_1 + x_2 \geq 10$ und $x_i \geq 0$ für $i = 1, 2$).

Gibt es jedoch ein Optimum, ist dieses am Rand des Zulässigkeitsbereichs in einer Ecke bzw. Schnittmenge zu finden. Eine Ecke eines Polyeders ist ein Punkt, in dem sich n linear unabhängige Ungleichungen schneiden, dabei ist n die Anzahl der Variablen. Im 2-dimensionalen Raum ist eine Schnittmenge eine Kante. Das Optimum ist eine Kante, wenn der Zielfunktionswert in zwei benachbarten Ecken gleich ist, d.h. die Zielfunktion ist parallel zu der Restriktion, welche diese beiden Ecken verbindet, und damit ist jeder Punkt auf dieser Strecke

ein Optimum. Da es sich im linearen Fall um eine lineare Zielfunktion handelt, ist jedes lokale Optimum auch ein globales.

In der Energiewirtschaft stellen die Erzeugung und Übertragung von Energie sowie die Bestimmung des optimalen Kraftwerkeinsatzes ebenfalls ein Problem dar, welches als lineares Programm formuliert werden kann. Dabei ist das Ziel die Ermittlung der kostenminimalen Entscheidungen bezüglich des Einsatzes eines Kraftwerksparks und dessen Fahrweise zur Lastdeckung der Nachfrage unter Berücksichtigung der Möglichkeit der Nutzung des Windangebots. Technische Beschränkungen der Kraftwerke wie Anfahrzeiten und Lastbeschränkungen werden durch Nebenbedingungen erfasst. Die wichtigsten Nebenbedingungen sind im Folgenden vereinfacht dargestellt.

Variablen: E_{in} , E_{out} , E_{CO_2} , C , C_{neu} .

Dabei steht E_{in} für Energie, die in einen Prozess, die Speicherung bzw. den Transport hinein fließt und E_{out} für Energie, die aus dem Prozess, der Speicherung oder dem Transport heraus fließt. E_{CO_2} ist die CO_2 -Emission. C steht für Kapazität. C ist die Gesamtkapazität und C_{neu} , die neu errichtete Kapazität. I ist die Menge aller Installationen, dazu gehören die Energieerzeugung je Ort, Zeit und Kraftwerk, die Speicherung je Ort und Zeit sowie der Transport von Ort zu Ort je Zeit. T ist die Menge der Zeitschritte. K_{inv_i} , K_{fix_i} und K_{var_i} sind Investitionskosten, Fixkosten und variable Kosten der Installation i .

Zielfunktion

$$\min \sum_i K_{inv_i} C_{neu_i} + \sum_i K_{fix_i} C_i + \sum_{i,t} K_{var_i} E_{in_{i,t}} \quad (3.1)$$

Nebenbedingungen

Durch die Energieumwandlung (Prozess), die Speicherung oder den Transport entstehen Verluste. Mit Hilfe des Wirkungsgrades η wird die erhaltene Energie bestimmt:

$$E_{in_{i,t}} \eta = E_{out_{i,t}} \quad \forall i \in I \quad \text{und} \quad t \in T \quad (3.2)$$

Die Nachfrage d_t , mit $d_t \geq 0$, muss zu jedem Zeitpunkt t gedeckt werden:

$$\sum_{i,t} (E_{out_{i,t}} - E_{in_{i,t}}) \geq d_t \quad (3.3)$$

Die Energieerzeugung, Speicherung und der Transport unterliegen gewissen Kapazitätsschranken:

$$E_{in_{i,t}} \leq C_i \quad \forall i \in I \quad \text{und} \quad t \in T \quad (3.4)$$

Die Kapazität C einer Installation i errechnet sich aus bereits installierter $instC$ plus neuer Kapazität C_{neu} :

$$C_i = C_{neu_i} + instC_i \quad \forall i \in I \quad (3.5)$$

Begrenzung der CO_2 -Emission:

$$\sum_{i,t} E_{CO_2_{i,t}} \leq up \quad \text{für} \quad i \in I, t \in T \quad (3.6)$$

Laständerung eines Kraftwerks von einem auf den nächsten Zeitpunkt. Der Laständerungskoeffizient wird mit PC bezeichnet:

$$-C \cdot PC \leq E_{out_i,t} - E_{out_i,t-1} \leq C \cdot PC \quad \text{für } i \in I, t \in T \quad (3.7)$$

Die Variablen können sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt werden:

$$lo_i \leq C_i \leq up_i \quad \text{für alle } i \in I \quad (3.8)$$

$$lo_i \leq E_{in_i} \leq up_i \quad \text{für } i \in I \quad (3.9)$$

3.1 Der Simplex-Algorithmus

Die Simplex-Methode, 1947 von Dantzig entwickelt, ist ein Algorithmus zum Lösen linearer Optimierungsprobleme. Er ist der erste Algorithmus, welcher in der Praxis zum Lösen linearer Probleme eingesetzt wurde. Obwohl er nicht immer in polynomieller Zeit eine Lösung liefert, gilt er als sehr effizient.

Man startet an einer beliebigen zulässigen Ecke, sucht von dort eine Verbesserung bezüglich des Zielfunktionswertes und geht soweit in die Richtung der Verbesserung, bis die nächste Ecke des Zulässigkeitsbereich erreicht wird. Von dort aus wiederholt sich das Verfahren, bis keine Verbesserung mehr möglich ist. Die Ecken des Polyeders heißen *Basislösungen* des linearen Ungleichungssystems. Der Teilvektor der Variablen, welcher die Basislösung bildet, wird aus den *Basisvariablen* zusammengesetzt. Die restlichen Variablen nennt man *Nicht-Basisvariablen*. Ein Wandern von Ecke zu Ecke ist gleichbedeutend mit einem Basiswechsel. Eine Ecke entsteht, wie schon erwähnt, als Schnitt von sich schneidenden Hyperebenen. Für die Restriktionen, die zu diesen Hyperebenen gehören, gilt im Falle von Ungleichungen Gleichheit. Man nennt sie die *straffen* Restriktionen.

Die Theorie der linearen Programmierung und des Simplex-Algorithmus orientiert sich an dem Buch *Linear programming and network flows* von M.S. Bazaraa, J.J. Jarvis und H.D. Sherali [2]. Kleinere Ergänzungen stammen aus dem Buch *Optimierungsmethoden, Eine Einführung* [22] bzw. *Optimierungsmethoden, Teil 2* [23] von D. Jungnickel.

3.1.1 Das lineare Problem in allgemeiner Form

Das Standard-Problem lässt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\min \quad c^T x \quad (3.10)$$

$$\text{unter } Ax = b \quad (3.11)$$

$$x \geq 0 \quad (3.12)$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \leq n$ mit $\text{Rang}(A) = m$, b ist m -dimensionaler Vektor, c ist n -dimensionaler Vektor, x ist n -dimensionaler Variablenvektor.

Jedes lineare Problem kann leicht durch Umwandlungen in Standard-Form transformiert werden. Ungleichungen können durch Addition bzw. Subtraktion von nicht-negativen Hilfsvariablen zu Gleichungen gemacht werden. Die künstlich hinzugefügten Hilfsvariablen nennt man auch *Schlupfvariablen*. Ist eine Variable x_j unbeschränkt, kann diese durch zwei nicht-negative Variablen ersetzt werden mit $x_j = x'_j - x''_j$. Eine unbeschränkte Variable nennt man *frei*.

Um das Verfahren des Simplex-Algorithmus herzuleiten, wird obiges Minimierungsproblem umgeschrieben. Für die Bezeichnung des Zielfunktionswertes wird der Variablenname z eingeführt:

$$z - c^T x = 0 \tag{3.13}$$

$$\text{unter } Ax = b \tag{3.14}$$

$$x \geq 0 \tag{3.15}$$

Im Folgenden bezeichnet B die Indexmenge der Basisvariablen¹. Die Spalten von A , welche in B enthalten sind, sind linear unabhängig. Die Submatrix A_B bezeichnet damit die Basismatrix. x_i , $i \in B$ bezeichnet die i -te Basisvariablen mit $x_B = x_{B_1}, \dots, x_{B_m}$. Die Indexmenge der Nicht-Basisvariablen wird mit N bezeichnet, die Nicht-Basisvariablen demnach mit x_N und die Nicht-Basismatrix mit A_N . Es gilt $A_N \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ und x_N ist $(n-m)$ -Vektor.

Sei eine Basis B gegeben, dann kann die Gleichung $Ax = b$ geschrieben werden als $A_B x_B + A_N x_N = b$. Multipliziert man diese Gleichung mit A_B^{-1} , erhält man $x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$. Damit ist $[\bar{x}_B, \bar{x}_N] = [A_B^{-1} b, 0]$ eine *Basislösung* für B . Ist \bar{x}_B nicht-negativ, so ist $\bar{x}_B = A_B^{-1} b, \bar{x}_N = 0$ eine *zulässige Basislösung*.

Obiges lineares Programm (LP) ist äquivalent zu

$$z - [c_B^T, c_N^T] \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \tag{3.16}$$

$$\text{unter } x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b \tag{3.17}$$

$$x_B, x_N \geq 0 \tag{3.18}$$

Ersetzt man $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$ in 3.16 und 3.18, so erhält man:

$$\begin{aligned} & z - [c_B^T, c_N^T] \begin{bmatrix} A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \\ x_N \end{bmatrix} = 0 \\ \iff & z - c_B^T A_B^{-1} b + c_B^T A_B^{-1} A_N x_N - c_N^T x_N = 0 \\ \iff & z - c_N^T x_N + c_B^T A_B^{-1} A_N x_N = c_B^T A_B^{-1} b \\ \iff & z - [c_N^T + c_B^T A_B^{-1} A_N] x_N = c_B^T A_B^{-1} b \end{aligned}$$

$$\iff z - \bar{w}_N^T x_N = c_B^T A_B^{-1} b \tag{3.19}$$

$$\text{unter } A_B^{-1} A_N x_N \leq A_B^{-1} b \tag{3.20}$$

$$x_N \geq 0 \tag{3.21}$$

¹Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Schreibweise die Indexmenge der Basisvariablen kurz mit Basis B bezeichnet

Dabei ist $\bar{w}_N := c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ und wird reduzierte Kosten genannt. Diese Variablen enthalten wichtige Informationen über die Basislösung. Sei $\bar{x}_B = A_B^{-1} b, \bar{x}_N = 0$ mit zugehörigem Zielfunktionswert $c_B^T A_B^{-1} b$. Um zu entscheiden, ob diese Lösung noch verbessert werden kann, sehen wir uns den Zielfunktionswert 3.19 an. Diese Gleichung impliziert, dass im Falle der Existenz eines $\bar{w}_q < 0$ für ein $q \in N$, z_0 um \bar{w}_q gesenkt wird, für jede Einheit, um die x_q vom aktuellen Wert Null erhöht wird. Um wie viel x_q erhöht werden kann, damit 3.20 nicht verletzt wird, bestimmt man durch den *Minimum-Ratio-Test*:

$$\alpha_P := \frac{\bar{x}_{B_r}}{\bar{y}_{r_q}} := \min\left\{\frac{\bar{x}_{B_i}}{\bar{y}_{i_q}} \mid \bar{y}_{i_q} > 0, i = 1, \dots, m\right\} \quad (3.22)$$

Hier ist \bar{y}_{i_q} das Element in Zeile i und Spalte q der transformierten Nicht-Basismatrix $A_B^{-1} A_N$, und \bar{y}_q bezeichnet die Spalte q . Der Wert α_P gibt an, um wie viel die Variable x_q erhöht werden kann. Der Zielfunktionswert $c_B^T A_B^{-1} b$ wird dementsprechend zu $c_B^T A_B^{-1} b + \alpha_P \bar{w}_q$ reduziert. Existiert kein $i, i = 1, \dots, m$, für das gilt $\bar{y}_{i_q} > 0$, so ist das Problem unbeschränkt. Im Folgenden sei $\bar{w}_j = c_j - z_j$ mit $z_j := c_B^T A_B^{-1} a_j := w a_j \forall j \in N$, a_j ist hier die Spalte j der Matrix A .

Satz 3.1 *Sei B Basis. Ist die Basislösung (\bar{x}_B, \bar{x}_N) zulässig und $\bar{w}_N \geq 0$, dann ist die Lösung eine Optimallösung. Existiert ein $q \in N$, so dass $\bar{w}_q < 0$ und $\bar{y}_q \leq 0$, dann ist (LP) unbeschränkt.*

Beweis 1 *Ist (\bar{x}_B, \bar{x}_N) eine zulässige Lösung, dann gilt $\bar{x}_B \geq 0$ und $\bar{x}_N = 0$. Sei $\bar{z}_0 = c_B^T A_B^{-1} b - \bar{w}_N^T \bar{x}_N$ der zugehörige Zielfunktionswert. Da es sich hier um ein Minimierungsproblem handelt und $\bar{w}_N \geq 0$, wird durch eine Erhöhung der Variablen \bar{x}_N der Zielfunktionswert erhöht. Es gilt $\bar{z} = c_B^T A_B^{-1} b - \bar{w}_N^T \bar{x}_N \leq c_B^T A_B^{-1} b - \bar{w}_N^T \bar{x}_N = z$. Damit ist der aktuelle Zielfunktionswert optimal. Der zweite Teil des Satzes folgt aus der Tatsache, dass durch $\bar{w}_q < 0$ und $\bar{y}_q \leq 0$ die Unbeschränktheit des Problems impliziert wird.*

Die Vorgehensweise der Simplex-Methode wird im Folgenden zusammengefasst als Algorithmus formuliert dargestellt.

Der Primale Simplex-Algorithmus

Initialisierung

Wähle beliebige zulässige Startlösung $[x_B, x_N]$ mit Basis B . Es gilt $A = A_B A_N$, A_B ist Basismatrix und $\text{Rang}(A_B) = \text{Rang}(A) = m$ und A_N ist Nicht-Basismatrix, N ist Indexmenge der Nicht-Basisvariablen

Hauptschritte

Seien x_B die Basisvariablen zur Basis B , x_N die Nicht-Basisvariablen, und z bezeichnet den Zielfunktionswert

1. Löse $A_B x_B = b$, dadurch ergeben sich die eindeutigen Lösungen $x_B = A_B^{-1} b = \bar{b}$
 $x_B = \bar{b}, x_N = 0, z = c_B^T x_B$
2. Löse $w A_B = c_B$, dadurch ergeben sich die eindeutigen Lösungen $w = A_B^{-1} c_B$
 - berechne $z_j - c_j = w a_j - c_j \forall j \in N$
 - $z_q - c_q = \max_j (z_j - c_j)$
 - wenn $z_q - c_q = -\bar{w}_q \leq 0$ dann
 - STOP \implies Optimallösung
 - Variable x_q wird in Basis aufgenommen;
3. Löse $A_B \bar{y}_q = a_q$, dadurch ergeben sich die eindeutigen Lösungen $y_q = A_B^{-1} a_q$
 - wenn $y_q \leq 0$
 - STOP \implies Lösung unbeschränkt entlang des Strahls
 $\left\{ \begin{pmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{pmatrix} + x_q \begin{pmatrix} -y_q \\ e_q \end{pmatrix} : x_q \geq 0 \right\}$

4. Bestimme blockierende Variable, die Basis verlässt mit Hilfe des Minimum-Ratio-Test:

$$\alpha_P = \frac{\bar{b}_r}{\bar{y}_{rq}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_{iq}} : \bar{y}_{iq} > 0, i = 1, \dots, m \right\} \quad (3.23)$$

$r =$ Index der blockierenden Variablen \implies Vektor a_q ersetzt Vektor a_{B_r} in der Basis

Gehe zu 1.

Die Berechnung der reduzierten Kosten in Schritt 2 des Algorithmus nennt man *Pricing*. Die Regel für die Auswahl der maximalen negativen reduzierten Kosten wird als *Dantzig-Regel* bezeichnet.

Beispiel

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{unter} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Durch Einführen der Schlupfvariablen x_3 und x_4 ergibt sich

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{unter} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Initialisierung Sei $B=\{3,4\}$ und $N=\{1,2\}$ damit ist $A_B = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_N = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Hauptschritte

1. Iteration

$$1. \quad x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{b},$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z = c_B^T x_B = (0, 0) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2. \quad w^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0),$$

$$z_j - c_j = w a_j - c_j \quad \text{für } j = 1, 2$$

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = 1,$$

$$z_2 - c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 = 3$$

$\Rightarrow \max_j(z_j - c_j) = 3 > 0$ für $j = 2 \Rightarrow x_q = x_2$ ist Variable, die in Basis aufgenommen

wird

$$3. \quad \bar{y}_q = \bar{y}_2 = A_B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{y}_2 > 0 \Rightarrow$ Gehe zu 4.

$$4. \quad \min_i \frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_{i2}} : \bar{y}_{i2} > 0 = \min_i \frac{\bar{b}_i}{\bar{y}_{i2}} = \frac{6}{3} = 2, \frac{\bar{b}_2}{\bar{y}_{22}} = \frac{1}{1} = 1 = 1$$

\Rightarrow 2.ter Basisvektor $a_{B_2} = a_4$ verlässt die Basis.

$B = \{3, 2\}$ und $N = \{1, 4\}$ damit ist $A_B = (a_3, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A_N = (a_1, a_4) =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Iteration

$$1. x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{b},$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z = c_B^T x_B = (0, -3) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3$$

$$2. w^T = c_B^T A_B^{-1} = (0, -3) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, -3),$$

$$z_j - c_j = w a_j - c_j \quad \text{für } j = 1, 4$$

$$z_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 = 4,$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = -3$$

$\Rightarrow \max_j(z_j - c_j) = 4 > 0$ für $j = 1 \Rightarrow x_q = x_1$ ist Variable, die in Basis aufgenommen

wird

$$3. \bar{y}_q = \bar{y}_1 = A_B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \bar{y}_1 \not\leq 0 \Rightarrow$ Gehe zu 4.

4. $r=1 \Rightarrow$ 1.ter Basisvektor $a_{B_1} = a_3$ verlässt die Basis.

$$B = \{1, 2\} \text{ und } N = \{3, 4\} \text{ damit ist } A_B = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_N = (a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Iteration

$$1. \quad x_B = A_B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{b},$$

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{N_1} \\ x_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$z = c_B^T x_B = (-1, -3) \begin{pmatrix} 3/5 \\ 7/5 \end{pmatrix} = -5$$

$$2. \quad w^T = c_B^T A_B^{-1} = (-1, -3) \begin{pmatrix} 1/5 & -3/5 \\ 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = (-4/5, -3/5),$$

$$z_j - c_j = w a_j - c_j \quad \text{für } j = 3, 4$$

$$z_3 - c_3 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 = -4/5,$$

$$z_4 - c_4 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 = -3/5$$

$\Rightarrow \max_j (z_j - c_j) = -3/5 \leq 0$ für $j = 4 \Rightarrow$ STOP Optimallösung erreicht mit $x_{opt}^T = (3/5, 7/5, 0, 0)^T$ und $z_{opt} = -5$

3.1.2 Der Simplex-Algorithmus mit beschränkten Variablen

In der Praxis sind die Variablen der meisten Probleme nach oben und unten beschränkt. Solch ein Problem kann wie folgt dargestellt werden:

$$\min \quad cx \tag{3.24}$$

$$\text{unter } Ax = b \tag{3.25}$$

$$l \leq x \leq u \tag{3.26}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{Rang}(A) = m$, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, l untere Schranke (lower bound), u obere Schranke (upper bound). Sei nun B die Indexmenge der Basisvektoren, dann gilt Basismatrix A_B ist quadratisch mit $\text{Rang}(A_B) = \text{Rang}(A) = m$, $A = (A_B, A_{N_1}, A_{N_2})$, wobei A_{N_1} der Vektor der Nicht-Basisvariablen ist, welche die untere Schranke erreicht haben. Diese werden im Folgenden mit \bar{x}_{N_1} bezeichnet. A_{N_2} ist der Vektor der Nicht-Basisvariablen, welche die obere Schranke erreicht haben. Diese Variablen werden mit \bar{x}_{N_2} bezeichnet. In der Basis befinden sich diejenigen Variablen, die zwischen der oberen und unteren Schranke liegen. Die Basisvariablen werden mit \bar{x}_B bezeichnet. Existiert eine solche Unterteilung, so ist $\bar{x} = (\bar{x}_B, \bar{x}_{N_1}, \bar{x}_{N_2})$ Basislösung für das System $Ax = b$.

Es gilt $\bar{x}_{N_1} = l_{N_1}$, $\bar{x}_{N_2} = u_{N_2}$, $\bar{x}_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{N_1}l_{N_1} - A_B^{-1}A_{N_2}u_{N_2}$.

Wenn $l_B \leq \bar{x}_B \leq u_B \implies \bar{x}$ ist zulässige Basislösung

Wenn $l_B < \bar{x}_B < u_B \implies \bar{x}$ ist nicht entartete zulässige Basislösung.

$N_1 = \{j : x_j \in A_{N_1}\}$ sei die Indexmenge aller Variablen, welche die untere Schranke erreicht haben und $N_2 = \{j : x_j \in A_{N_2}\}$ die Indexmenge aller Variablen, welche die obere Schranke erreicht haben.

Sei x_B Basisvariable mit

$$x_B = A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{N_1}x_{N_1} - A_B^{-1}A_{N_2}x_{N_2} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} z &= c_B^T x_B + c_{N_1}^T x_{N_1} + c_{N_2}^T x_{N_2} \\ &= c_B^T A_B^{-1}b - (c_{N_1}^T - c_B^T A_B^{-1}A_{N_1})x_{N_1} - (c_{N_2}^T - c_B^T A_B^{-1}A_{N_2})x_{N_2} \\ &= c_B^T A_B^{-1}b - \bar{w}_{N_1}^T x_{N_1} - \bar{w}_{N_2}^T x_{N_2} \\ &= c_B^T A_B^{-1}b - \sum_{j \in N_1} (c_j - z_j)x_{N_j} - \sum_{j \in N_2} (c_j - z_j)x_{N_j} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Zur Vereinfachung und besseren Übersichtlichkeit schreibt man die relevanten Werte in ein Tableau, das nach jedem Basiswechsel modifiziert wird. Die rechte Spalte wird mit RHS (Right Hand Side) bezeichnet. Sie enthält den Zielfunktionswert und den Vektor der Basislösung. I ist die Einheitsmatrix. Das Tableau hat folgende Gestalt:

Starttableau

	z	x _B	x _{N₁}	x _{N₂}	RHS
z	1	0	$c_B^T A_B^{-1}A_{N_1} - c_{N_1}^T$	$c_B^T A_B^{-1}A_{N_2} - c_{N_2}^T$	$\hat{z} = c_B^T A_B^{-1}b$
x _B	0	I	$A_B^{-1}A_{N_1}$	$A_B^{-1}A_{N_2}$	$\hat{b} = A_B^{-1}b$

Im Folgenden seien $c_{N_1}^T - c_B^T A_B^{-1}A_{N_1} := \bar{w}_{N_1}^T$ und $c_{N_2}^T - c_B^T A_B^{-1}A_{N_2} := \bar{w}_{N_2}^T$ die reduzierten Kosten, $A_B^{-1}A_{N_1} := Y_1$ und $A_B^{-1}A_{N_2} := Y_2$. Bei der Simplex-Methode für beschränkte Variablen wird wie beim allgemeinen Simplex-Verfahren eine Basisvariable gegen eine Nicht-Basisvariable vertauscht, während alle anderen Variablen fixiert bleiben. Somit sucht man eine Verbesserung des Zielfunktionswertes entlang einer Kante. Den Index q der Variablen, welche die Basis betritt, erhält man durch die Berechnung des folgenden Wertes:

$$\max \{ \max_{j \in N_1} (z_j - c_j), \max_{j \in N_2} (c_j - z_j) \} \quad (3.29)$$

Ist das erhaltene Maximum positiv, so wird durch Aufnahme der Variablen x_q in die Basis die maximale Verbesserung erreicht. Ist $q \in N_1$, so erhöht man die Variable vom aktuellen Wert l_q . Andernfalls verringert man sie von ihrem Wert u_q . Wäre das Maximum ≤ 0 , wäre $z_j - c_j \leq 0 \quad \forall j \in N_1$ und $z_j - c_j \geq 0 \quad \forall j \in N_2$, und damit wäre nach Gleichung 3.28 die aktuelle Lösung optimal.

Erhöhen der Variablen x_q von ihrem aktuellen Wert l_q

Erhöht man den aktuellen Wert der Variablen $x_q = l_q$ um Δ_q und ersetzt diesen in Gleichung 3.27 und 3.28, so erhält man:

$$\begin{aligned} x_B &= A_B^{-1}b - A_B^{-1}A_{N_1}l_{N_1} - A_B^{-1}A_{N_2}u_{N_2} - A_B^{-1}a_q\Delta_q \\ &= \hat{b} - y_q\Delta_q \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} z &= c_B^T A_B^{-1}b - \sum_{j \in N_1} (z_j - c_j)l_{N_j} - \sum_{j \in N_2} (z_j - c_j)u_{N_j} - (z_j - c_j)\Delta_q \\ &= \hat{z} - (z_j - c_j)\Delta_q \end{aligned} \tag{3.31}$$

Es wird deutlich, dass eine Erhöhung um Δ_q zu einer Minimierung des Zielfunktionswerts (Gleichung (3.31)) führt, da $z_q - c_q > 0$.

Es stellt sich nun die Frage, um wie viel die Variable x_q erhöht werden kann, ohne dass eine der Restriktionen verletzt wird und somit die Lösung im Zulässigkeitsbereich bleibt. Es gibt drei Möglichkeiten, die dazu führen, dass die Variable nicht weiter erhöht werden kann, sie wird *blockiert*. Zum einen besteht die Möglichkeit, dass durch das Erhöhen eine Basisvariable ihre obere bzw. untere Schranke erreicht, oder die zu erhöhende Variable blockiert sich selbst, indem sie ihre obere Schranke erreicht. Wie beim primalen Simplex-Verfahren wird dieser Wert mit Hilfe des *Minimum-Ratio-Tests* errechnet. Man bestimmt, welche Variable als erstes blockiert. Diese wird dann aus der Basis herausgenommen.

1. Basisvariable erreicht untere Schranke

Sei γ_1 der Wert von Δ_q , durch den die Basisvariable auf ihren minimalen Wert sinkt. Er darf maximal den Wert des Abstands zwischen der unteren Schranke l_B der Variablen x_B und der Variablen selbst annehmen. Dieser Wert gibt also an, um wie viel die Variable x_B herabgesetzt werden kann. Es gilt:

$$l_B \leq x_B = \hat{b} - y_q\Delta_q \quad \Rightarrow \quad y_q\Delta_q \leq \hat{b} - l_B$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i - l_{B_i}}{y_{iq}} : y_{iq} > 0 \right\} = \frac{\hat{b}_r - l_{B_r}}{y_{rq}} & : y_q \not\leq 0 \\ \infty & : y_q \leq 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

2. Basisvariable erreicht obere Schranke

Sei γ_2 der Wert von Δ_q , durch den die Basisvariable auf ihren maximalen Wert steigt. Er darf maximal den Wert des Abstands zwischen der oberen Schranke u_B der Variablen x_B und der Variablen selbst annehmen. Dieser Wert gibt also an, um wie viel die Variable x_B ansteigen darf, damit keine Nebenbedingung verletzt wird. Es gilt:

$$u_B \geq x_B = \hat{b} - y_q\Delta_q \quad \Rightarrow \quad y_q\Delta_q \geq \hat{b} - u_B$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_i \left\{ \frac{u_{B_i} - \hat{b}_i}{-y_{iq}} : y_{iq} < 0 \right\} = \frac{u_{B_r} - \hat{b}_r}{-y_{rq}} & : y_q \not\geq 0 \\ \infty & : y_q \geq 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

3. Variable x_q erreicht obere Schranke

x_q erreicht die obere Schranke, wenn

$$\Delta_q = u_q - l_q \tag{3.34}$$

Das Minimum aus 3.32, 3.33 und 3.34 gibt nun den maximalen Wert für Δ_q an.

$$\Delta_q = \min\{\gamma_1, \gamma_2, u_q - l_q\}$$

Ist $\Delta_q = \infty \Rightarrow x_q$ wird nicht blockiert, und damit ist das Problem unbeschränkt.

Ist $\Delta_q < \infty \Rightarrow$ eine neue zulässige Basislösung wurde gefunden mit $x_q = l_q + \Delta_q$. Die Variablen x_B und z werden gemäß den Gleichungen 3.30 und 3.31 verändert.

Tableau Update

1. $\Delta_q = u_q - l_q$: aktuelle Basis ändert sich nicht; Indextmengenwechsel für Variable x_q RHS wird gemäß 3.30 und 3.31 modifiziert.
2. $\Delta_q = \gamma_1$ bzw. $\Delta_q = \gamma_2$: x_q wird gegen Variable x_{B_r} in der Basis ausgetauscht nach 3.32 bzw. 3.33.
RHS wird gemäß 3.30 und 3.31 modifiziert, dabei wird die r-te Komponente durch $l_q + \Delta_q$ ersetzt.

Erniedrigen der Variablen x_q von ihrem aktuellen Wert u_q

Wird das Maximum aus 3.29 für $j \in N_2$ erreicht, so wird die maximale Verbesserung des Zielfunktionswertes durch Erniedrigen der Variablen x_q erreicht. Es gilt $z_q - c_q < 0$, andernfalls wäre bereits das Optimum erreicht.

$$x_q = u_q - \Delta_q \tag{3.35}$$

$$x_B = \hat{b} + \Delta_q \tag{3.36}$$

$$z = \hat{z} + (z_q - c_q)\Delta_q \tag{3.37}$$

Analog zur Berechnung des Maximums des Wertes Δ_q für einen Anstieg der Variablen x_q , wird hier die maximale Reduzierung des Wertes x_q berechnet. Die maximale Reduzierung wird durch eine maximale Erhöhung von Δ_q erzielt.

$$\Delta_q = \min\{\gamma_1, \gamma_2, u_q - l_q\}$$

mit

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_i \left\{ \frac{\hat{b}_i - l_{B_i}}{-y_{iq}} : y_{iq} < 0 \right\} = \frac{\hat{b}_r - l_{B_r}}{-y_{rq}} & : y_q \not\geq 0 \\ \infty & : y_q \geq 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \min_i \left\{ \frac{u_{B_i} - \hat{b}_i}{y_{iq}} : y_{iq} > 0 \right\} = \frac{u_{B_r} - \hat{b}_r}{y_{rq}} & : y_q \not\leq 0 \\ \infty & : y_q \leq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Ist $\Delta_q = \infty \Rightarrow$ so wird die Variable nicht blockiert, das Problem ist somit unbeschränkt.
 Ist $\Delta_q < \infty \Rightarrow$ eine neue zulässige Basislösung wurde gefunden mit $x_q = u_q - \Delta_q$. Die Basisvariablen x_B und der Zielfunktionswert z werden gemäß den Gleichungen 3.36 und 3.37 verändert.

Tableau Update

1. $\Delta_q = u_q - l_q$: aktuelle Basis ändert sich nicht; Indextmengenwechsel für Variable x_q . RHS wird gemäß 3.36 und 3.37 modifiziert.
2. $\Delta_q = \gamma_1$ bzw. $\Delta_q = \gamma_2$: x_q wird gegen Variable x_{B_r} in der Basis ausgetauscht nach 3.38 bzw. 3.39. RHS wird gemäß 3.36 und 3.37 modifiziert, dabei wird die r-te Komponente durch $u_q - \Delta_q$ ersetzt.

Ein Basiswechsel wird so oft wiederholt und durchgeführt, bis (3.29) einen nicht positiven Wert liefert und damit die Optimallösung erreicht wurde oder durch $\Delta_q = \infty$ die Unbeschränktheit des Problems bewiesen wurde.

3.1.3 Entartung und Komplexität

Eine Lösung \bar{x} eines linearen Problems ist nach M.S. Bazaraa *entartet*, wenn die Submatrix von A der straffen Restriktionen $(a^i)^T \bar{x} = b_i$ einen Rang echt kleiner als die Anzahl der straffen Restriktionen hat. Betrachtet man das Standard-Minimierungsproblem

$$\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\text{Rang}(A) = m$, so ist die primale Lösung \bar{x} entartet genau dann, wenn die Anzahl der echt positiven Variablen kleiner als m ist. Ein lineares Problem heißt nicht entartet, wenn alle Basislösungen nicht entartet sind. Dies ist eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Simplex-Algorithmus.

Ist ein Problem nicht entartet, so geht der Simplex-Algorithmus bei jeder Iteration von einer zulässigen Basislösung zu einer verbesserten Basislösung über oder zeigt, dass das System unbeschränkt ist. Demnach liefert der Algorithmus in einer endlichen Anzahl von Iterationen die Optimallösung bzw. den Nachweis der Unbeschränktheit des Problems.

Ist das Problem jedoch entartet, kann es passieren, dass das System bei einer ungeeigneten Pivotwahl zu kreiseln beginnt. D.h. in einer endlichen Anzahl von Iterationen wiederholt sich die Wahl der Basis, die aktuelle Ecke wird nicht verlassen, es führt also zu keiner Verbesserung des Zielfunktionswertes, und der Algorithmus terminiert nicht. Beim Simplex-Verfahren mit beschränkten Variablen ist dies der Fall, wenn die γ_1 oder γ_2 gleich Null; dann ändert sich die

zugrunde liegende Basis, jedoch der Extrempunkt nicht. Beim primalen Simplex-Verfahren ist dies der Fall, wenn $\bar{b}_i = 0$ für ein $i = 1, \dots, m$.

Es gibt verschiedene Regeln, die das Auftreten von Kreiseln verhindern, siehe dazu M.S. Bazaraa [3] oder D.Jungnickel [23]. Laut R.K. Martin benötigt ein Basisaustausch beim Simplex-Algorithmus schon $O(mn)$ Rechenoperationen. Bis heute konnte noch nicht bewiesen werden, dass die Laufzeit des Simplex-Algorithmus eine polynomielle Funktion in der Anzahl der Variablen eines Problems ist. Beispiele belegen nur, dass eine exponentielle Anzahl an Schritten bei einer ungeeigneten Pivotregel benötigt werden kann [24]. Im Mittel liefert der Simplex-Algorithmus in polynomieller Zeit eine Lösung (s. Borgwardt [5]).

3.1.4 Farkas' Lemma

Das Farkas' Lemma und die Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingung beschreiben notwendige und hinreichende Optimalitätskriterien für die lineare Programmierung. Das Farkas' Lemma bildet die Grundlage für die KKT-Bedingung. Es besagt, dass nur eines von zwei linearen Gleichungssystemen eine Lösung haben kann.

Lemma 3.1 *Nur eines der folgenden Systeme hat eine Lösung:*

$$\begin{aligned} \text{System 1: } & Ax \geq 0 \quad \text{und} \quad c^T x < 0 \\ \text{System 2: } & w^T A = c^T \quad \text{und} \quad w \geq 0 \end{aligned}$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und c ist n -dimensionaler Vektor und w m -dimensionaler Vektor.

Beweis 2 : Angenommen System 1 hat Lösung x . Hätte System 2 auch eine Lösung w , so wäre $c^T x = w^T Ax \geq 0$, da $w \geq 0$ und $Ax \geq 0$, aber nach Voraussetzung ist $c^T x < 0$ und damit ein Widerspruch.

Nehmen wir also an, System 1 hat keine Lösung, und versuchen daraus zu beweisen, dass System 2 eine Lösung hat. Wir betrachten das primale Problem

$$P : \min\{c^T x : Ax \geq 0\}$$

Mit optimaler Lösung Null. $c^T x = 0$ ist das Minimum, da ansonsten System 1 eine Lösung hätte. Wir transformieren P in Standardform, indem wir $x = x' - x''$ schreiben mit $x', x'' \geq 0$. Die Schlupfvariable bezeichnen wir mit s . Wir erhalten das äquivalente Problem

$$P' : \min\{c^T x' - c^T x'' : Ax' - Ax'' - s = 0, x', x'', s \geq 0\}$$

Damit ist $x' = x'' = 0, s = 0$ ein optimaler Extrempunkt für P' . Wir starten mit der Variablen s als Basis und suchen von dieser ausgehend eine optimale Basis für P' , für die gilt $z_j - c_j \leq 0$ für alle Variablen. $w = c_B^T A_B^{-1}$ seien die Simplex-Multiplikatoren der Basis B . Da für alle Variablen $z_j - c_j = wa_j - c_j \leq 0$ ist, erhalten wir $wa - c \leq 0, -wa + c \leq 0$ und $-w \leq 0$ von den Spalten der Variablen x', x'' und s . Damit existiert ein $w \geq 0$ mit $w^T A = c^T$.

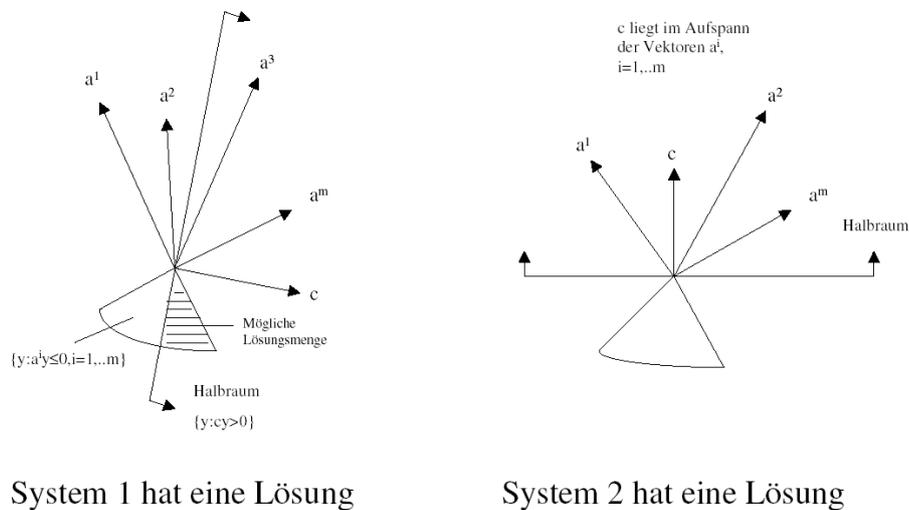


Abbildung 3.1: Geometrische Darstellung des Farkas' Lemmas

Geometrische Interpretation des Farkas' Lemma

Zur besseren Darstellung schreiben wir System 1 um, indem wir x durch $-y$ ersetzen. Wir erhalten: $Ay \leq 0$ unter $y \leq 0$ und $c^T y > 0$. Jede Zeile von A erfüllt die Ungleichung $a^i y \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$, d.h. geometrisch wird eine Fläche aufgespannt, die zu jedem Zeilenvektor mindestens einen Winkel von 90° hat. Variablen, welche die Bedingung $c^T y > 0$ erfüllen, spannen einen Halbraum auf, welcher aus allen Vektoren y gebildet wird, die zu c einen kleineren Winkel als 90° aufweisen. Existiert ein Schnitt dieser beiden Flächen, so hat System 1 eine Lösung.

System 2 hat eine Lösung, wenn gilt $w^T A = c^T$ für $w \geq 0$. D.h. $\sum_{i=1}^m w_i a_{ij} = c_j$ und $w_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$, da dies für alle Spalten $j = 1, \dots, n$ gilt, schreiben wir $\sum_{i=1}^m w_i a^i = c$. a^i bezeichnet die i -te Zeile. Mit anderen Worten bedeutet dies, das System hat eine Lösung genau dann, wenn der Vektor c im Aufspann der Vektoren a^i mit $i = 1, \dots, m$ liegt.

3.1.5 Das Karush-Kuhn-Tucker-Optimalitäts-Kriterium

Die Karush-Kuhn-Tucker (KKT)-Bedingung ist sowohl für die lineare als auch für die nicht-lineare Programmierung von großer Bedeutung. Es gibt zahlreiche KKT-Bedingungen für die nicht-lineare Programmierung. Diese unterscheiden sich nach der Struktur der Restriktionen in notwendige und hinreichende, globale oder lokale KKT-Bedingungen und sind auch von unterschiedlichen Zusatzvoraussetzungen (*constraint qualifications*) abhängig [22]. Dieses Kapitel beschränkt sich ausschließlich auf die notwendige und hinreichende KKT-Bedingung für lineare Probleme.

Wir betrachten das lineare Minimierungsproblem $\min\{cx : Ax \geq b, x \geq 0\}$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, c

ist n -dimensionaler Vektor, b ist m -dimensionaler Vektor. \bar{x} bezeichne eine beliebige zulässige Basislösung. Im Folgenden sei $Gx \geq g$ die Menge der straffen Ungleichungen von $Ax \geq b$ mit $x \geq 0$ im Punkt \bar{x} . Im Falle dass es sich bei \bar{x} um den Optimalpunkt handelt, kann es keine Abstiegsrichtung d geben, so dass $c^T d < 0$ (sonst verbessert sich der Zielfunktionswert nicht) und $Gd \geq 0$ (damit der Zulässigkeitsbereich nicht verlassen wird). Ist \bar{x} keine Optimallösung, würde sich der Zielfunktionswert verringern, da $c^T d < 0$ und man bliebe bzgl. der straffen Restriktionen $Gx \geq g$ im Zulässigkeitsbereich, da $G(\bar{x} + \lambda d) = G\bar{x} + \lambda Gd = g + \lambda Gd \geq g$, für ein beliebiges $\lambda \geq 0$. Ferner wären für $\lambda > 0$ auch die restlichen Restriktionsgleichungen erfüllt.

Da das System $c^T d < 0$ und $Gd \geq 0$ keine Lösung besitzt, existiert nach dem Farkas' Lemma (3.1) eine Variable $u \geq 0$, so dass $u^T G = c^T$. In Bezug auf das komplette System $Ax \geq b$ unter $x \geq 0$ müssen zunächst einige Notationen geklärt werden. Die i -te Zeile von A wird mit a^i bezeichnet für $i = 1, \dots, m$, und e_j ist der j -te Einheitsvektor, d.h. alle bis auf den j -ten Eintrag, welcher eine 1 ist, sind Null. I ist die Indexmenge der straffen Restriktionen in Bezug auf die Variable mit

$$I = \{i : a^i \bar{x} = b_i\}$$

und J ist die Indexmenge der sich schneidenden Restriktionen im Punkt \bar{x} aus der Menge $x \geq 0$ mit

$$J = \{j : \bar{x}_j = 0\}$$

Also besteht G aus den Zeilen a^i , $i \in I$ und e_j , $j \in J$. Der Vektor u wird unterteilt in w und v mit $u = (w_i \text{ für } i \in I, v_j \text{ für } j \in J) \geq 0$. Die Bedingung $u^T G = c^T$, $u \geq 0$ kann neu formuliert werden als

$$\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} v_j e_j = c \tag{3.40}$$

$$w_i \geq 0 \quad \text{für } i \in I \quad v_j \geq 0 \quad \text{für } j \in J \tag{3.41}$$

Die Gleichungen (3.40) und (3.41) bilden zusammen mit der Zulässigkeit von \bar{x} die KKT-Bedingungen der linearen Programmierung. Die KKT-Bedingungen sind also notwendige Kriterien für die Optimalität einer Lösung. Aus geometrischer Sicht bedeutet die KKT-Bedingung, dass eine zulässige Lösung optimal ist, wenn der Gradient der Zielfunktion c durch eine nicht-negative Linearkombination der Gradienten der straffen Restriktionen dargestellt werden kann. Dabei ist a^i der Gradient der Restriktion $a^i x \geq 0$ bzw. e_j der Gradient der Variablenrestriktion $x_j \geq 0$. Liegt c also im Aufspann der Gradienten der Restriktionen, welche sich im Punkt \bar{x} schneiden, so ist \bar{x} Optimalpunkt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die KKT-Bedingung ein hinreichendes Kriterium für die Optimalität ist. Dazu wählen wir zu der Optimallösung \bar{x} eine beliebige zulässige Lösung \hat{x} und multiplizieren die Gleichung (3.40) auf beiden Seiten von links mit $(\hat{x} - \bar{x})$ und erhalten

$$\begin{aligned} c^T (\hat{x} - \bar{x}) &= \left(\sum_{i \in I} w_i a^i + \sum_{j \in J} v_j e_j \right) (\hat{x} - \bar{x}) \\ \Leftrightarrow c^T \hat{x} - c^T \bar{x} &= \sum_{i \in I} w_i (a^i \hat{x} - a^i \bar{x}) + \sum_{j \in J} v_j (e_j \hat{x} - e_j \bar{x}) \end{aligned}$$

Da $a^i \bar{x} = b_i$ für $i \in I$ und $e_j \bar{x} = 0$ für $j \in J$ folgt

$$c^T \hat{x} - c^T \bar{x} = \sum_{i \in I} w_i (a^i \hat{x} - b_i) + \sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x}$$

Da $a^i \hat{x} \geq b_i$ für $i \in I$ und $e_j \hat{x} \geq 0$ für $j \in J$ folgt

$$c\hat{x} - c\bar{x} = \sum_{i \in I} w_i (a^i \hat{x} - b_i) + \sum_{j \in J} v_j e_j \hat{x} \geq 0 \quad (3.42)$$

und damit gilt $c^T \hat{x} \geq c^T \bar{x}$. \bar{x} ist also Optimallösung. Somit haben wir gezeigt, dass die KKT-Bedingung sowohl ein notwendiges als auch ein hinreichendes Kriterium darstellt. Eine oft verwendete Formulierung der KKT-Bedingung ist folgende:

$$Ax \geq b, \quad x \geq 0 \quad (3.43)$$

$$wA + v = c, \quad w \geq 0, v \geq 0 \quad (3.44)$$

$$w(Ax - b) = 0, \quad vx = 0 \quad (3.45)$$

Die Vektoren $w = (w_1, \dots, w_m) \geq 0$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \geq 0$ werden die Lagrange-Multiplikatoren der Restriktionen $Ax \geq b$ und $x \geq 0$ genannt, dabei sind w_i und v_j Null für die nicht straffen Restriktionen. Gleichung (3.44) gewährleistet die primale Zulässigkeit der Lösung, Gleichung (3.44) die duale Zulässigkeit. Das Zusammenspiel von primalen und dualem System wird im folgendem Abschnitt erläutert. Die letzte Gleichung (3.45) wird oft als komplementärer Schlupf bezeichnet. Diese Gleichung sagt, dass entweder $w_i = 0$ oder die i -te Schlupfvariable Null ist und damit die i -te Restriktion straff. Die Gleichung $vx = 0$ bedeutet, dass entweder v_j oder e_j Null sind. Damit sind die Gleichungen (3.44) und (3.45) eine äquivalente Darstellung der Gleichungen (3.40) und (3.41).

Zusammengefasst bedeutet das, eine Lösung ist dann optimal, wenn sie sowohl primal als auch dual zulässig ist. Während des Simplex-Algorithmus wird die primale Zulässigkeit sowie die Bedingung des komplementären Schlupfs durchgehend garantiert. Die duale Zulässigkeit wird verletzt. Diese Verletzung wird aber dazu genutzt, um den Zielfunktionswert maximal zu verbessern, indem das kleinste negative $c_j - z_j$ genutzt wird, solange bis die Lösung dual zulässig wird.

3.1.6 Das duale Problem

Wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, gibt es zu jedem primalen linearen Problem ein zugehöriges duales lineares Problem, das für die Bestimmung der Optimalität von großer Bedeutung ist. Im Folgenden werden wir das Zusammenspiel von primalem (LP) und dualem (DP) System erläutern.

Jedes primale Problem kann leicht in das zugehörige duale Problem transformiert werden. Im Prinzip gilt: Jede Variable des primalen Problems wird zu einer Restriktion des dualen Problems und umgekehrt. Aus einem Maximierungsproblem wird ein Minimierungsproblem. Die genauen Vorschriften können Tabelle 3.1.6 entnommen werden.

Beispiel Betrachte folgendes (LP):

$$\begin{aligned} \max \quad & 8x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ \text{unter} \quad & x_1 - 6x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 5x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -4 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{ frei} \end{aligned}$$

	Minimierungsproblem	Maximierungsproblem	
Variable	≥ 0 ≤ 0 frei	\leq \geq =	Restriktion
Restriktion	\geq \leq =	≥ 0 ≤ 0 frei	Variable

Tabelle 3.1: Transformationsregeln zwischen (LP) und (DP)

Das zugehörige (DP) sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad 2w_1 - 4w_2 \\
 & \text{unter} \quad w_1 + 5w_2 \leq 8 \\
 & \quad \quad -6w_1 + 7w_2 \geq 3 \\
 & \quad \quad w_1 - 2w_2 = -2 \\
 & \quad \quad w_1 \leq 0, w_2 \text{ frei}
 \end{aligned}$$

Zunächst wird von einem linearen Problem in Standard-Form ausgegangen:

$$(LP) \quad \min \quad c^T x \quad \text{unter} \quad Ax \geq b, x \geq 0.$$

Zu diesem gehört ein Maximierungsproblem in kanonischer Form

$$(DP) \quad \max \quad b^T w \quad \text{unter} \quad A^T w \leq c, w \geq 0.$$

Dabei ist c wie gewohnt ein n -dimensionaler Vektor, b ein m -dimensionaler Vektor, $A \in m \times n$. Der folgende schwache Dualitätssatz stellt einen ersten Zusammenhang zwischen den zwei Programmen dar.

Satz 3.2 (*Schwacher Dualitätssatz*) *Seien x_0 und w_0 beliebige zulässige Lösungen von oben definiertem (LP) und (DP). So gilt $Ax_0 \geq b$ mit $x_0 \geq 0$ und $A^T w_0 \leq c$ mit $w_0 \geq 0$, dann gilt:*

$$c^T x_0 \geq b^T w_0.$$

Beweis 3 :

$$c^T x_0 \geq (A^T w_0)^T x_0 = w_0^T (Ax_0) \geq w_0^T b = b^T w_0$$

Der Zielfunktionswert einer beliebigen zulässigen Lösung eines Minimierungsproblems bildet eine Obergrenze für den Zielfunktionswert einer beliebigen Lösung eines Maximierungsproblems. Damit bildet der Zielfunktionswert des Minimierungsproblems die Obergrenze für den optimalen Zielfunktionswert des Maximierungsproblems. Umgekehrt liefert eine zulässige Lösung eines Maximierungsproblems eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des Minimierungsproblems.

Als unmittelbare Folgerung aus dem schwachen Dualitätssatz erhalten wir:

Korollar 3.1 Seien (LP) und (DP) wie oben. Dann gilt

- Ist (LP) unbeschränkt, so ist (DP) unzulässig.
- Ist (DP) unbeschränkt, so ist (LP) unzulässig.

Die Unbeschränktheit eines Systems impliziert also die Unzulässigkeit des anderen Systems. Dies bedeutet jedoch nicht, dass man aus der Unzulässigkeit des einen Problems auf die Beschränktheit des jeweiligen anderen Problems schließen kann.

Korollar 3.2 x_0 und w_0 seien zulässige Lösungen der obig definierten Probleme (LP) und (DP), und es gilt $c^T x_0 = b^T w_0$, so sind x_0 und w_0 Optimallösungen für (LP) und (DP).

Der starke Dualitätssatz ist, wie der Name schon sagt, eine Verschärfung des schwachen Dualitätssatzes. Hat eines der Systeme eine Optimallösung, so besitzt das zugehörige duale Problem ebenfalls eine Optimallösung mit identischem Zielfunktionswert.

Satz 3.3 (Starker Dualitätssatz) Das lineare (LP) sei zulässig und beschränkt mit Optimallösung \bar{x} . Dann gelten folgende Aussagen:

- Das zu (LP) gehörenden duale Problem (DP) ist zulässig und beschränkt.
- Ist \bar{w} eine Optimallösung von (DP), so sind die Zielfunktionswerte gleich $c^T \bar{x} = b^T \bar{w}$.

Beweis 4 : Wir nehmen an, dass zugrunde liegende (LP) hat die Form

$$\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}.$$

Sei \bar{x} Optimallösung des (LP) mit Basis B . Damit bildet \bar{x} nach dem schwachen Dualitätssatz eine obere Schranke des dualen Problems (DP), das damit beschränkt ist. Nach dem Simplexverfahren ist \bar{x} eine Optimallösung, wenn $c_B^T A_B^{-1} A - c^T \leq 0$. D.h ist \bar{x} optimal, so gilt $c^T \geq c_B^T A_B^{-1} A$. Wir definieren $\bar{w}^T := c_B^T A_B^{-1}$. Es gilt

$$A^T \bar{w} = A^T (c_B^T A_B^{-1})^T = (c_B^T A_B^{-1} A^T) \leq (c^T)^T = c$$

\bar{w} ist damit ein zulässiger Punkt für (DP) mit $\max\{b^T w : A^T w \leq c, w \geq 0\}$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Da die dual zulässige Lösung \bar{w} die Gleichung

$$b^T \bar{w} = \bar{w}^T b = c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T \bar{x} = c^T \bar{x}$$

erfüllt, ist der zweite Teil der Aussage bewiesen.

Dualer Simplex-Algorithmus

Ziel des dualen Simplex-Algorithmus ist das Lösen eines primalen Problems. Der Name dual kommt daher, dass von einer dual zulässigen Lösung ausgegangen wird, welche bei jeder Iteration erhalten bleibt, bis primale Zulässigkeit erzielt wird und damit nach dem starken Dualitätssatz Optimalität für das (LP) vorliegt. Das lineare primale Programm (LP) hat folgende Gestalt: $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$. $A \in \mathbb{R}^m \times n$ mit $\text{Rang}(A) = m$.

Initialisierung $\hat{A} := A_B^{-1} A_N$, $\hat{b} := A_B^{-1} b$, $\hat{c}^T = c_B^T A_B^{-1} A_N - c_N^T$

Wähle beliebige dual zulässige Startlösung mit Basis B , für die gilt $z_j - c_j = c_B^T A_B^{-1} a_j - c_j \leq 0$ für alle j .

Hauptschritte

1.
 - Ist $\bar{b} = A_B^{-1} b \geq 0 \Rightarrow$ STOP Optimallösung
 - Sonst wähle Pivotzeile r mit $\bar{b}_r < 0$ durch $b_r = \min\{b_i : b_i < 0\} \Rightarrow$ Vektor a_{B_r} verlässt Basis
2.
 - Ist $y_{rj} \geq 0$ für alle $j \Rightarrow$ STOP (DP) unbeschränkt und (LP) ist unzulässig
 - Sonst wähle Pivotspalte q mit Hilfe des Minimum-Ratio-Tests:

$$\frac{z_q - c_q}{y_{rq}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0 \right\}$$

Vektor a_q wird in Basis aufgenommen.

\Rightarrow Neue Basis $B' = (B \setminus B_r) \cup q$ und $N' = (N \setminus q) \cup B_r$

3. Ersetze (B, N) durch (B', N') . Der Basiswechsel entspricht einer Gaußelimination mit y_{rq} als Pivotelement \Rightarrow Gehe zu 1.

3.1.7 Wirtschaftliche Betrachtungsweise der dualen Lösung

Seien das primale und duale Problem in der gewohnten Darstellung gegeben:

$$\min \quad cx \tag{3.46}$$

$$(LP) \quad \text{unter} \quad Ax \geq b \tag{3.47}$$

$$x \geq 0 \tag{3.48}$$

$$\max \quad wb \tag{3.49}$$

$$(DP) \quad \text{unter} \quad wA \leq c \tag{3.50}$$

$$w \geq 0 \tag{3.51}$$

B bezeichnet die Basis des (LP), c_B sind die Kosten und x^* eine nicht entartete optimale Lösung. N ist Indexmenge der Nicht-Basisvariablen. Der optimale Zielfunktionswert z^* ist:

$$z^* = c_B^T A_B^{-1} b - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j = w^* b - \sum_{j \in N} (z_j - c_j) x_j.$$

Durch Ableiten des Zielfunktionswertes nach der i -ten straffen Restriktion erhält man:

$$\frac{\delta z^*}{\delta b_i} = w_i^*.$$

w_i^* ist damit der Anstieg des Zielfunktionswertes durch die Erhöhung der i -ten Basisvariablen b_i um eine Einheit unter der Voraussetzung, dass keine weiteren Variablen verändert werden.

Sei die i -te Restriktion beispielsweise die Ungleichung, die erzwingt, dass die Nachfrage an Ort s durch Energieart p zum Zeitpunkt t gestillt sein muss, straff. Eine Erhöhung der Nachfrage in s durch p zum Zeitpunkt t um eine Einheit führt damit zu Mehrkosten in Höhe der dualen Variablen w_i . Der Vektor w der dualen Lösungen wird deshalb auch als Vektor der *marginalen Kosten* oder *Grenzkosten* bezeichnet.

Ist eine Restriktion straff durch Erreichen der oberen Schranke (\leq Restriktion), sind die marginalen Kosten negativ, da durch eine Erhöhung dieser oberen Schranke der Zulässigkeitsbereich erweitert wird und damit der Zielfunktionswert weiter herabgesetzt werden kann. Wird beispielsweise der Zielfunktionswert dadurch bestimmt, dass keine weiteren Ausbaupkapazitäten für Windenergieanlagen vorhanden sind, so haben wir eine obere Schranke erreicht. Die marginalen Kosten sind nun so zu interpretieren, dass bei der Möglichkeit eines weiteren Zubaus von Windenergieanlagen die Kosten um die zugehörige duale Lösung sinken würden.

Zwingen wir dagegen das Modell, beispielsweise Braunkohlekraftwerke zu nutzen, und wird dadurch eine untere Kapazitätsschranke erreicht, bei deren Erhöhung der Zulässigkeitsbereich eingeschränkt wird, sind die marginalen Kosten positiv. Der Zubau von einem weiteren Leistung von einem Megawatt Braunkohlkraftwerk führt also zu einem Kostenanstieg in der Stromerzeugung in Höhe der dualen Lösung.

3.2 Barrier-Methode

Die Barriere-Methode ist ein Verfahren zum Lösen von nicht linearen Problemen. Mit Hilfe der so genannten Barrier-Funktion wird das ursprüngliche beschränkte (primale) Problem in ein äquivalentes unbeschränktes Problem bzw. in eine Folge von unbeschränkten Problemen umgewandelt. Es ist eine Methode, bei welcher man sich vom Inneren des Zulässigkeitsbereichs an die Optimallösung des ursprünglichen Problems heranarbeitet. Die Barriere-Methode gehört somit zu der Klasse der *inneren Punkteverfahren*.

Startet man den Algorithmus bei einem beliebigen zulässigen Punkt im Inneren des Zulässigkeitsbereiches, verhindert die Barrier-Funktion, die zu der Zielfunktion addiert wird, dass man diesen verlässt. Man nennt die Barrier-Funktion auch *innere Straffunktion*. Mit Hilfe dieser Funktion wird eine Folge von zulässigen Punkten erzeugt, deren Grenzwert das Optimum des ursprünglichen Problems ist.

Als Voraussetzung des Funktionierens dieser Methode muss natürlich gewährleistet sein, dass das Innere des Zulässigkeitsbereichs nicht leer ist. Damit kann das Verfahren ausschließlich auf Probleme mit nur Ungleichungsrestriktionen angewendet werden. Vor der Umwandlung vom primalen ins Barrier-Problem müssen demnach Gleichungen eliminiert werden. Gäbe es

Gleichungen $h(x) = 0$, wäre die Bedingung, einen Startpunkt aus dem Inneren der nichtleeren Menge $\{x : g(x) \leq 0, h(x) = 0\}$ zu finden offensichtlich unmöglich und damit verletzt. Inhaltlich orientiert sich das folgende Kapitel an dem Buch *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms* von S. Bazaraa, D. Sherali und M. Shetty, Kapitel 9 [3].

Das primale Problem lässt sich wie folgt beschreiben:

Das primale Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) && (3.52) \\ \text{unter} \quad & g(x) \leq 0 && (3.53) \\ & x \in X && (3.54) \end{aligned}$$

g bezeichnet eine Vektorfunktion, deren Komponenten g_1, \dots, g_m und die Zielfunktion f stetige Funktionen im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n darstellen. X ist eine nichtleere Teilmenge in E_n . Das daraus resultierende Barrier-Problem sieht folgendermaßen aus:

Das Barrier-Problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \Theta(\mu) && (3.55) \\ \text{unter} \quad & \mu \geq 0 && (3.56) \end{aligned}$$

Dabei ist $\Theta(\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in X\}$, $\mu \in \mathbb{R}$. $f(x) + \mu B(x)$ wird als Hilfsfunktion bezeichnet. $B(x)$ ist die so genannte Barrier-Funktion. Eine ideale Barrier-Funktion würde für Punkte im Inneren des Zulässigkeitsbereichs $\{x : g(x) < 0\}$ den Wert Null liefern und auf dem Rand den Wert ∞ . Da die Unstetigkeit einer solchen Funktion zu Problemen bei der Berechnung führt, zieht man eine realistischere Barrier-Funktion in Betracht, an welche zwei Bedingungen gestellt werden.

- B ist nicht-negativ und stetig im Bereich $\{x : g(x) < 0\}$
- B nähert sich dem Wert ∞ , wenn man sich vom Inneren dem Rand $\{x : g(x) \leq 0\}$ nähert.

Die Barrier-Fnktion wird definiert durch

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \Phi[g_i(x)] \tag{3.57}$$

Φ ist stetig im Bereich $\{y : y < 0\}$, und es gilt :

$$\Phi(y) \geq 0 \quad \text{für} \quad y < 0 \quad \text{und} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \Phi(y) = \infty \quad (3.58)$$

Eine typische Barrier-Funktion, die obige Kriterien erfüllt, ist beispielsweise

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{-1}{g_i(x)}. \quad (3.59)$$

Das Lösen des unbeschränkten Barrier-Problems ist gegenüber dem beschränkten primalen Problem trotz der vorhandenen Bedingung $g(x) < 0$ einfacher, da die Barrier-Funktion verhindert, dass der Zulässigkeitsbereich verlassen wird. Dies gilt aber nur unter der Voraussetzung, dass der Startwert im Inneren der zulässigen Menge $S = \{x : g(x) < 0\} \cap X$ liegt. Die vorhandenen Restriktionen fallen also nicht ins Gewicht.

Lemma 3.2 *Seien f, g_1, \dots, g_m stetige Funktionen in E_n . X sei eine nichtleere abgeschlossene Menge in E_n und $\{x \in X : g(x) < 0\}$ eine nichtleere Menge. B sei Barrier-Funktion, d.h. $B(x) \geq 0$ und stetig im Bereich $x < 0$ und $\lim_{x \rightarrow 0^-} = \infty$. Ferner nehme man an, dass jede Folge $\{x_k\}$ in X mit $g(x_k) < 0$ und $f(x_k) + \mu B(x_k) \rightarrow \Theta(\mu)$ für irgendein $\mu > 0$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Dann gilt:*

1. $\forall \mu > 0 \exists x_\mu$ mit $g(x_\mu) < 0$ so dass
 $\Theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) = \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in X\}$
2. $\inf\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in X\} \leq \inf\{\Theta(\mu) : \mu > 0\}$
3. Für $\mu > 0$ sind $f(x_\mu)$ und $\Theta(\mu)$ monoton steigende Funktionen von μ und $B(x_\mu)$ eine monoton fallende Funktion von μ . D.h für $\mu > \lambda$ gilt $f(x_\mu) > f(x_\lambda)$, $\Theta(\mu) > \Theta(\lambda)$ und $B(x_\mu) < B(x_\lambda)$

Beweis: Betrachte ein $\mu > 0$. Nach Definition von Θ existiert eine Folge $\{x_k\}$ mit $x_k \in X$ und $g(x_k) < 0$, so dass $f(x_k) + \mu B(x_k) \rightarrow \Theta(\mu) = \inf\{f(x_k) + \mu B(x_k) : g(x_k) < 0, x \in X\}$. Nach Annahme hat $\{x_k\}$ eine konvergente Teilfolge $\{x_k\}_\kappa$ mit Grenzwert $x_\mu \in X$. Wegen der Stetigkeit von g ist $g(x_\mu) \leq 0$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $g(x_\mu) < 0$.

Angenommen $g(x_\mu) = 0$, dann wäre $g_i(x_\mu) = 0$ für ein $i = 1, \dots, m$, und damit gilt für ein $k \in \kappa : B(x_k) \rightarrow \infty$. Woraus $\Theta(\mu) = \infty$ folgt. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, die Menge $\{x : x \in X, g(x) < 0\}$ sei ungleich der leeren Menge. Damit wäre Teil 1 bewiesen. Da $B(x) \geq 0$ für $g(x) < 0$, gilt für alle $\mu \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Theta(\mu) &= \inf\{f(x) + \mu B(x) : g(x) < 0, x \in X\} \\ &\geq \inf\{f(x) : g(x) < 0, x \in X\} \\ &\geq \inf\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in X\} \end{aligned}$$

Teil 3: Sei nun $\mu > \lambda > 0$. Aus $B(x) \geq 0$ für $g(x) < 0$ folgt $f(x) + \mu B(x) \geq f(x) + \lambda B(x)$ und damit $\Theta(\mu) \geq \Theta(\lambda)$. Nach Teil 1 existiert x_μ und x_λ , so dass gilt

- $f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) \leq f(x_\lambda) + \mu B(x_\lambda)$
- $f(x_\lambda) + \lambda B(x_\lambda) \leq f(x_\mu) + \lambda B(x_\mu)$

Addiert man diese zwei Ungleichungen und ordnet die Glieder neu, erhält man $(\mu - \lambda)(B(x_\mu) - B(x_\lambda)) \leq 0$. Da $\mu - \lambda > 0$, folgt $B(x_\mu) - B(x_\lambda) \leq 0$ und damit $B(x_\mu) \leq B(x_\lambda)$ q.e.d.

Aus Lemma 3.2 wissen wir, dass es sich bei Θ um eine monoton steigende Funktion von μ handelt und demnach $\inf_{\mu > 0} \Theta(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu)$. Der folgende Satz zeigt, dass die Optimallösung des primalen Problems identisch mit dem Grenzwert $\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu)$ ist, so dass es möglich ist, das unbeschränkte Barrier-Problem anstelle des primalen Problems zu lösen.

Satz 3.4 Seien f, g_1, \dots, g_m stetige Abbildungen mit $f : E_n \rightarrow E_1$ und $g : E_n \rightarrow E_m$. X sei nicht-leere abgeschlossene Menge in E_n und $\{x \in X : g(x) < 0\}$ sei nicht-leer. Das primale Problem $\min f(x)$ unter $g(x) \leq 0$ mit $x \in X$ hat Optimallösung \bar{x} mit folgender Eigenschaft. Sei N die Umgebung von \bar{x} , und es existiert $x \in X \cap N : g(x) < 0$. Dann gilt $\min\{f(x) : g(x) \leq 0, x \in X\} = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu) = \inf_{\mu > 0} \Theta(\mu)$.

Gilt $\Theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu B(x_\mu)$ mit $x_\mu \in x$ und $g(x_\mu) < 0$. Nach Lemma 3.2 existiert ein solcher Punkt. Dann ist der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge von $\{x_k\}$ eine Optimallösung des primalen Problems, und ferner gilt: $\mu B(x_\mu) \rightarrow 0$ für $\mu \rightarrow 0^+$.

Beweis: Sei \bar{x} Optimallösung des primalen Problems mit obiger Eigenschaft. Sei $\epsilon > 0$. Da f stetig, und nach Voraussetzung des Satzes existiert $\hat{x} \in X$ mit $g(\hat{x}) < 0$, so dass gilt: $f(\bar{x}) + \epsilon > f(\hat{x})$. Für $\mu > 0$ gilt also $f(\bar{x}) + \epsilon + \mu B(x_\mu) > f(\hat{x}) + \mu B(x_\mu) \geq \Theta(\mu)$. Betrachtet man den Grenzwert für $\mu \rightarrow 0^+$, folgt $f(\bar{x}) + \epsilon \geq \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu)$. Nach Teil 2 von Lemma 3.2 folgt Gleichheit $f(\bar{x}) + \epsilon = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu)$.

Für $\mu \rightarrow 0^+$ und weil $B(x_\mu) \geq 0$ und x_μ zulässig für das originale Problem folgt:

$$\Theta(\mu) = f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) \geq f(x_\mu) \geq f(\bar{x})$$

Betrachten wir jetzt den Grenzwert $\mu \rightarrow 0^+$ unter der Berücksichtigung, dass $f(\bar{x}) = \lim_{\mu \rightarrow 0^+} \Theta(\mu)$, folgt: $f(x_\mu) \rightarrow f(\bar{x})$ und $f(x_\mu) + \mu B(x_\mu) \rightarrow f(\bar{x}) \Rightarrow \mu B(x_\mu) \rightarrow 0$ für $\mu \rightarrow 0^+$. Ferner existiert eine konvergente Teilfolge von $\{x_\mu\}$ mit Grenzwert $x' \Rightarrow f(x') = f(\bar{x})$. Da x_μ zulässig für das originale Problem für alle $\mu \Rightarrow x'$ ist zulässig und damit optimal. q.e.d

Beispiel

Anhand eines einfachen Beispiels soll die Idee der Barrier-Funktion veranschaulicht werden

Betrachten wir folgendes Problem:

$$\min x \tag{3.60}$$

$$\text{unter } -2x + 3 \leq 0 \tag{3.61}$$

1. Starte mit x_k und löse folgendes Problem:

$$\min f(x) + \mu_k B(x) \tag{3.62}$$

$$\text{unter } g(x) < 0 \tag{3.63}$$

$$x \in X \tag{3.64}$$

Sei x_{k+1} die dabei erzielte Optimallösung.

2. Ist $\mu_k B(x_{k+1}) < \epsilon \Rightarrow \text{STOP}$.

Sonst sei $\mu_{k+1} = \beta \mu_k$. Ersetzt $k = k + 1$ und gehe zu 1.

Bemerkung: Das Lösen des Unterproblems in Schritt 1 erfolgt je nach Struktur durch ein beliebiges unbeschränktes Optimierungsverfahren, z.B das Gradienten- oder Newton-Verfahren. Solche Verfahren werden u. a. in *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms* von S. Bazarara, D. Serali und M. Shetty, Kapitel 10 [3], beschrieben.

Bei jeder Iteration wird die Hilfsfunktion 3.62 optimiert. Aus Lemma 3.2 wissen wir, dass es sich bei der Hilfsfunktion um eine monoton steigende Funktion in μ handelt; damit wird bei jeder Iteration des Algorithmus durch die Verringerung des Wertes μ eine Annäherung an das Optimum des Originalproblems erzielt.

3.3 Laufzeitvergleiche der von Cplex zur Verfügung gestellten Algorithmen

Die Matrix, welche durch die Restriktionen des zu Anfang des Kapitels beschriebenen Energieproblems gebildet wird, ist sehr dünn besetzt. Bei einem Großteil der Restriktionen beziehen sich die Variablen nur auf einen Teil des Systems, die Erzeugung, die Speicherung oder den Transport der Energie. Damit entstehen sehr viele Nulleinträge in der jeweiligen Zeile. Die Matrix erhält dadurch eine Art Treppengestalt, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird. Auch der Vektor b der rechten Seite erhält sehr viele Nulleinträge, so dass das Problem der Entartung für fast alle Lösungen auftritt.

3.3.1 Darstellung des Problems als Matrix

In folgendem Abschnitt wird die Struktur der Restriktionsmatrix des Energieproblems skizziert. In der Matrixbeschreibung werden sowohl die Ungleichungen als auch die Gleichungen berücksichtigt.

Die Matrix A des linearen Problems lässt sich durch folgende Treppengestalt beschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & S_1 & T_1 \\ P_2 & & \\ & S_2 & \\ & & T_2 \end{pmatrix}$$

Bei den Matrixeinträgen P_1, S_1, T_1, P_2, S_2 und T_2 von A handelt es sich wiederum um Matrizen, deren Dimension in Tabelle 3.2 auf Seite 49 dargestellt ist. Die Struktur der Matrizen wird im Folgenden skizziert. Die erste Spalte der Matrix A, also die Matrizen P_1 und P_2 , beinhalten Variablen, welche für die Energieerzeugung (engl.: process) von Bedeutung sind. Die zweite Spalte, also die Matrizen S_1 und S_2 , besteht aus Variablen der Energiespeicherung und die letzte Spalte, die Matrizen T_1 und T_2 , haben als Elemente Transportvariablen. Da es sich bei der Energieerzeugung, der Stromspeicherung und dem Transport um Prozesse mit unterschiedlicher Komplexität handelt, unterscheiden sich die Dimensionen der jeweiligen Matrizen in Zeilen- und Spaltenanzahl.

Matrix	Dimension	
	Zeilen	Spalten
P_1	366t	3096t+3096
S_1	366t	129t+258
T_1	366t	430t+430
P_2	6192t+3097	3096t+3096
S_2	301t+301	129t+258
T_2	645t+215	430t+430
A	7504t+3613	3655t+3784

Tabelle 3.2: Dimension der Matrizen in Abhängigkeit der Anzahl der Zeitschritte t

Bei der in Tabelle 3.2 dargestellten Dimension handelt es sich um die maximal mögliche Anzahl an Zeilen und Spalten. Diese sind von der Wahl der Zeitschritte t abhängig. Die Zeitschritte t sind die untersuchten Stunden; damit kann t zwischen 1 und 8760 variieren. Die Anzahl der Zeilen und Spalten wurde folgendermaßen errechnet: Eine Energieerzeugungsva-

Bezeichnung	Anzahl Elemente	Beschreibung
S	43	Orte im Modell (Ersatzknoten) (engl.: sites)
P	6	Kraftwerkstypen (engl.: process)
C	183	Rohstoffe in abhängigkeit des Ortes (engl.: commodities)
ST	1	Speicher (engl.: storage)
T	$t \in \{1, \dots, 8760\}$	Zeitschritte
CO	1	CO ₂ -Emission

Tabelle 3.3: Indexmengen

riable E_{in} hängt beispielsweise vom Ort, dem Kraftwerkstyp und dem Rohstoff und natürlich der Zeit ab, also von den Indexmengen S,P,C und T. Korrekterweise müsste man schreiben $E_{in,S,P,C,T}$, was aus Gründen der Einfachheit und Übersichtlichkeit umgangen wird.

Es besteht ein starker Zusammenhang zwischen Rohstoff und Kraftwerkstyp. Ein bestimmter Primärenergieträger wird nur in einer Art von Kraftwerk eingesetzt, beispielsweise Wind in Windenergieanlagen oder Gas in Gasturbinen oder GuD. Umgekehrt kommen für einen Kraftwerkstyp maximal 4 verschiedene Rohstoffe in Betracht. Damit errechnet sich eine maximale Spaltenanzahl für diese Variable aus $|S| |P| |C|_P |T| = 43 \cdot 6 \cdot 4 \cdot t = 1032t$.

Für eine Transportvariable wurde abgeschätzt, dass ein Ort mit maximal 5 anderen Orten verbunden ist. Damit errechnet sich als Obergrenze für die Anzahl der Transportleitungen

und damit der Anzahl der Variablen bzw. Spalten $|S| \cdot 5 = 215$. Je nachdem, ob die Variable von der Zeit abhängt, wird dieser Wert noch mit t multipliziert.

Da in dem Modell nur eine Möglichkeit implementiert ist, um Energie zu speichern, ist eine Speichervariable nur von dem Ort selber und gegebenenfalls von der Zeit abhängig. Für obige Berechnung der Zeilen- und Spaltenanzahl wurde demnach ein Wert von $|S| = 43$ zu Grunde gelegt. Dies ist allerdings eine sehr hoch gegriffene Obergrenze, da es nicht in jedem Ort möglich ist, Energie zu speichern. Auf die gleiche Art wurde die Anzahl der Zeilen bestimmt, da die Restriktionen von denselben Indexmengen abhängen.

Im Folgenden wird auf die Struktur der einzelnen Matrizen genauer eingegangen. Die Bezeichnungen der Variablen und Restriktionen sind lediglich deshalb als Beschriftung der Matrizen dabei, um zu verdeutlichen, dass ganze Spalten teilweise nur aus Nulleinträgen bestehen.

$$P_1 = \begin{matrix} & EprIn & EprOut & EprOutE & NCapPr & CapPr \\ \begin{matrix} CBaSe \\ CBaDe \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1_n & 1_n \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} & & & & \end{matrix}$$

$$S_1 = \begin{matrix} & EstIn & EstOut & EstOn & NCapCst & CapCst & NCapPist & CapPist & NCapPost & CapPost \\ \begin{matrix} CBaSe \\ CBaDe \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1_n & 1_n \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} & & & & & & & & \end{matrix}$$

$$T_1 = \begin{matrix} & EtrIn & EtrOut & NCaptr & Captr \\ \begin{matrix} CBaSe \\ CBaDe \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1_n & 1_n \\ -1_n & 1_n \end{pmatrix} & & & \end{matrix}$$

$$P_2 = \begin{matrix} & EprIn & EprOut & EprOutE & NCapPr & CapPr \\ \begin{matrix} CBaEn \\ EBaSe \\ EBaIm \\ EBaEn \\ CaBaPr \\ CaOnPr \\ CaCoL \\ CaCoU \\ AcCoL \\ AcCoU \\ PCPrN \\ PCPrP \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 1_n & & \\ \eta_1 & 1_1 & & & & \\ & 1_1 & & & & sup_1 \\ -COE_1 & & & 1_1 & & \\ 1_1 & & & & -1_1 & \\ & & & & -1_1 & 1_1 \\ & & & & & 1_1 \\ & & & & & 1_1 \\ 1_1 & & & & & \\ 1_1 & & & & & \\ & & \pm 1_2 & & & PC_1 \\ & & \pm 1_2 & & & -PC_1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$S_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} EstIn & EstOut & EstOn & NCapCst & CapCst & NCapPist & CapPist & NCapPost & CapPost \end{matrix} \\ \begin{matrix} CBaStIn \\ CBaStOut \\ CBaStCo \\ CONStCo \\ CONStOut \\ CONStIn \\ CoBaSt \\ CoBaSt0 \\ CaCoStCL \\ CaCoStCU \\ CaCoStPiL \\ CaCoStPiU \\ CaCoStPoL \\ CaCoStPoU \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccccccccc} 1_1 & & & & & & -1_1 & & & \\ & 1_1 & & & & & & & & -1_1 \\ & & 1_1 & & -1_1 & & & & & \\ & & & -1_1 & 1_1 & & & & & \\ & & & & & & & & -1_1 & 1_1 \\ & & & & & & & & -1_1 & 1_1 \\ -\eta_1 & 1_1 & \pm 1_2 & & & & & & & \\ & & 1_1 & & & & & & & \\ & & & & 1_1 & & & & & \\ & & & & 1_1 & & & & & \\ & & & & & & 1_1 & & & \\ & & & & & & 1_1 & & & \\ & & & & & & & & & 1_1 \\ & & & & & & & & & 1_1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$T_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} EtrIn & EtrOut & NCaptr & Captr \end{matrix} \\ \begin{matrix} EBaTr \\ CaBaTr \\ CaONTr \\ CaSyTr \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} -\eta_1 & 1_1 & & \\ 1_1 & & & -1_1 \\ & & -1_1 & 1_1 \\ & & & \pm 1_2 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Erläuterungen zur Matrixdarstellung

Die Darstellung X_y ist dabei eine Matrix, die in jeder Zeile y -mal den Wert X als Eintrag hat. Die Dimension der Matrizen sowie die Lage des Eintrags sind bei dieser Darstellung nicht definiert. Es besteht jedoch ein Zusammenhang zwischen einigen Einträgen. Generell besitzen Teilmatrizen, welche sich in der gleichen Zeile befinden, dieselbe Struktur. Bezeichnet man beispielsweise die Matrizen $P_{2EBaSe \times EPrIn} \in m \times n$, $P_{2EBaSe \times EPrOut} \in m \times n$ und $P_{2EBaIm \times EPrOut} \in k \times n$ kurz mit P_{SI} , P_{SO} und P_{IO} mit $m = 1 \dots 1032t$, $n = 1, \dots 1032t$, $k = 1 \dots 1032t$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
 P_{SI_{i,j}} &= \eta \quad \text{für } i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\
 \Rightarrow P_{SO_{i,n+j}} &= 1 \quad \text{und} \quad P_{IO_{l,n+j}} \neq 1 \quad \forall \quad l = m + 1, \dots, m + k
 \end{aligned}$$

Die Matrix $\pm 1_2$ hat sowohl eine $+1$ also auch eine -1 in einer Zeile.

Bei den Werten η , PC , coe und sup handelt es sich um Modellparameter. Mit η wird der Wirkungsgrad eines Prozesses, Transportes oder Speichers bezeichnet. coe ist der CO_2 -Emissionskoeffizient. sup gibt das Windangebot wieder, und PC steht für „power change“ und stellt die maximale Leistungsänderung eines Kraftwerks von einen auf den nächsten Zeitschritt dar.

Wie wir hier sehen, gibt es in der Matrix A ganze Zeilen mit nur einem Element und keine Zeile, bei der alle Einträge von Null verschieden sind. Bei einer Spaltenanzahl von $3655t + 3784$ für $t = 1, \dots, 8760$ ist die Matrix nur sehr dünn besetzt.

3.3.2 Vergleich und Zusammenfassung der Algorithmen

Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen Algorithmen werden von dem Solver CPLEX zum Lösen linearer Probleme zur Verfügung gestellt. Ein Vergleich der Laufzeiten ergab, dass die Barrier-Methode in Bezug auf das Energieproblem mit Abstand das beste Ergebnis bzgl. der Laufzeit liefert.

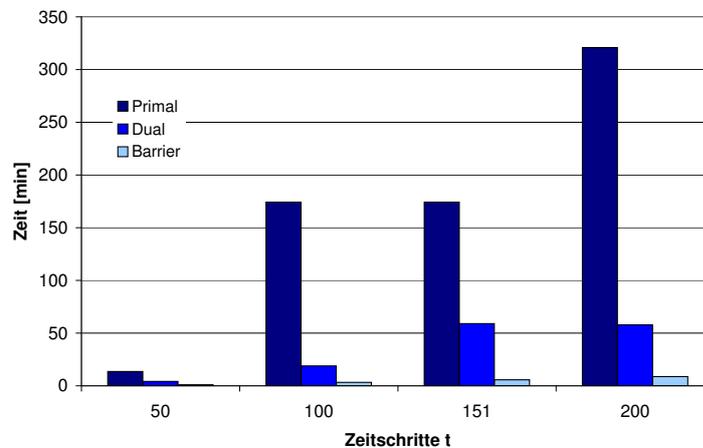


Abbildung 3.3: Laufzeit in Abhängigkeit der Zeitschritte

Der Simplex-Algorithmus findet sein Optimum, indem er von Ecke zu Ecke wandert. Bei einem Problem mit n Variablen und m Restriktionen definiert ein Polyeder mit maximal $\binom{n}{m}$ Ecken den Zulässigkeitsbereich. Im schlechtesten Fall bedeutet dies, dass der Algorithmus erst nach $\binom{n}{m} - 1$ Iterationen terminiert. Allerdings nur unter der Voraussetzung, dass keine entarteten Lösungen existieren. Da es sich hier aber um ein Problem mit entarteten Lösungen handelt, kann dieser Wert noch weitaus übertroffen werden. Primale Entartung stellt ein Problem für den primalen Simplex-Algorithmus dar, deshalb kann es passieren, dass der duale Simplex-Algorithmus ein weitaus besseres Ergebnis bzgl. der Laufzeit liefert, wenn die dualen Lösungen nicht entartet sind [24].

Das Barrier-Verfahren startet dagegen an einem beliebigen Punkt im Inneren des Zulässigkeitsbereichs und wandert in die Richtung des steilsten Anstiegs (maximale Verbesserung) durch das Innere; damit ist er unabhängig von der Anzahl der Ecken des den Zulässigkeitsbereichs definierenden Polyeders und kann zu einer wesentlich geringeren Laufzeit führen. Für $t=312$ werden im Schnitt 300000 Iterationen benötigt.

Kapitel 4

Wahl und Auswertung verschiedener Szenarien

In diesem Kapitel wird zunächst ein Verfahren vorgestellt, nach dem einige Zeitreihen ausgewählt wurden. Mit den hier gewählten Zeitreihen wurden weitere Untersuchungen und Auswertungen durchgeführt, welche im Anschluss beschrieben werden. Durch die Analysen verschiedenster Szenarien sollen folgende Fragen beantwortet werden:

- Spielt es eine Rolle, welche und wie viele Zeitschritte für die Auswertungen gewählt werden?
- Ist es möglich, die CO_2 -Emission unter Berücksichtigung der steigenden Stromnachfrage zu reduzieren, und in welchem Maße ist solch eine Reduktion durchführbar?
- Was kostet die Windenergie an den verschiedensten Standorten? Welche Mehrkosten entstehen für den Verbraucher?
- Mit welchen herkömmlichen Kraftwerken können die Schwankungen des Windangebots am kostengünstigsten ausgeglichen werden?
- In welche Richtung verändert sich der Kraftwerksmix bei einem Anstieg der Gaspreise?

Die optimale Kraftwerksinstallation und Fahrweise des Kraftwerkspark hängt stark von den spezifischen Kosten der einzelnen Kraftwerke ab. Deshalb wurden Untersuchungen und Analysen auf Basis der Stromgestehungskosten vorgenommen. Die Stromgestehungskosten sind die Vollkosten eines Kraftwerks umgelegt auf eine Stunde. Sie werden nach folgender Formel berechnet:

Variablen und Parameter:

Bezeichner	Beschreibung
K_{Inv}	Investitionskosten/Kapital in $[Euro/kW(el)]$
K_{Fix}	Fixkosten/Betriebskosten in $[Euro/kW(el)]$

K_{Var}	variable Kosten in [$Euro/kWh(el)$]
K_{Bren}	Brennstoffkosten in [$Euro/kWh(th)$]
ν	Wirkungsgrad
A	Annuität [$Euro/kW(el)$]
VL	Volllaststunden [h]
E_{CO_2}	spezifische CO_2 -Emission in [$kgCO_2/kWh(th)$]
K_{CO_2}	spezifische CO_2 -Kosten in [$Euro/tCO_2$]

Die Stromgestehungskosten K_{Strom} werden nach folgender Formel berechnet:

$$K_{Strom} = \frac{A + K_{Fix}}{VL} + K_{Var} + \frac{K_{Bren}}{\nu} + \frac{E_{CO_2}}{\nu} \frac{K_{CO_2}}{1000}. \quad (4.1)$$

Für alle nachfolgenden Untersuchungen wurde die Installation von Wasserkraftwerken auf ein Maß fixiert, das dem heutigen Niveau entspricht. Die Ressourcen der Wasserkraft werden in Deutschland komplett ausgenutzt, deshalb ist ein weiterer Ausbau nicht zu erwarten. In Bezug auf das Modell bedeutet das: Eine Nutzung dieser Kraftwerke in den entsprechenden Gebieten ist unumgänglich und führt zu keinen weiteren Investitionskosten. Die Leistung der Wasserkraftwerke in den einzelnen Orten ist in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Ort	Installierte Leistung in MW
Bielefeld	35
Erfurt	11
Essen	80
Frankfurt	12
Freiburg	250
Hannover	10
Karlsruhe	200
Kassel	32
Mainz	135
München	1036
Regensburg	5
Saarbrücken	160
Stuttgart	12
Ulm	500

Tabelle 4.1: Installierte Wasserkraftwerke

Gleiches gilt für Braunkohlekraftwerke. Aus wirtschaftlicher Sicht ist eine Nutzung der Braunkohle nur an Orten mit natürlichen Rohstoffvorkommen sinnvoll. Ein Transport der Braunkohle an andere Orte wird als unwirtschaftlich erachtet und soll somit vermieden werden. Tabelle 4.2 auf Seite 55 stellt die installierten Braunkohlekraftwerke mit ihrem Wirkungsgrad ν , der erzielbaren Leistung P_{el} und dem durchschnittlichem Bedarf je Stunde dem dar. Es gibt einige Orte, in denen der durchschnittliche stündliche Bedarf um einiges geringer ist, als die dort mit den vorhandenen Braunkohlekraftwerken erzielbare Leistung, beispielsweise

Ort	P [MW]	ν	P_{el} [MW]	dem [MWh]
Bielefeld	133,33	0,45	60	928
Cottbus	10222,22	0,45	4600	296
Dresden	4255,56	0,45	1915	718
Hannover	1355,56	0,45	610	2510
Köln	24311,11	0,45	10940	7088
Leipzig	6455,56	0,45	2905	667
Regensburg	1144,44	0,45	515	2007

Tabelle 4.2: Installierte Braunkohlekraftwerke

in Cottbus, Dresden, Köln und Leipzig. Die Stromerzeugung durch die bereits vorhandene Braunkohlekraftwerke und der damit verbundene Abtransport des erhaltenes Stroms zu den anliegenden Knoten im Verbundnetz scheint günstiger zu sein als die Errichtung neuer Kraftwerke in den angrenzenden Gebieten. In Cottbus beispielsweise werden im Schnitt 90% des dort erzeugten Stroms v.a. nach Berlin und Chemnitz transportiert. In Leipzig 70% nach Erfurt und Magdeburg, in Dresden werden 60% exportiert.

4.1 Ein Auswahlverfahren für die Zeitreihen

Aus rechnerischen Gründen ist es leider nicht möglich, jede Stunde des Jahres im Modell zu berücksichtigen. Deswegen müssen bestimmte Stunden ausgewählt werden, welche stellvertretend ein komplettes Jahr simulieren. Um einen Überblick über die einzelnen Stunden zu bekommen, ist es hilfreich, die vorhandenen Winddaten und die zugehörigen Stromnachfragedaten in einer Graphik gegenüberzustellen (Abbildung 4.1, Seite 55). Die x-Achse stellt

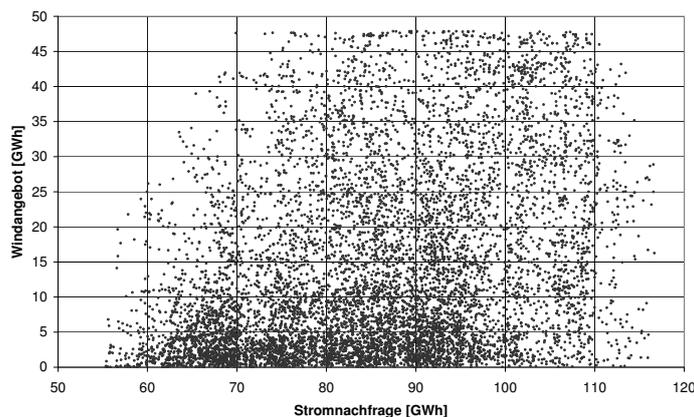


Abbildung 4.1: Windangebot versus Stromnachfrage

die Stromnachfrage dar, die y-Achse das Windangebot. Die Stromnachfrage erreicht Werte von 55 GWh bis maximal 117 GWh und das Windangebot von 0 GWh bis maximal 47 GWh. Dieser Bereich wurde in neun Teile untergliedert, um die Verteilung der Stunden zu betrachten (siehe Abbildung 4.2, Seite 56). Man sieht deutliche Häufungspunkte in den Bereichen mit wenig Wind (unter 15 GWh) und niedriger (unter 80 GWh) bzw. mittlerer Nachfrage (zwischen 80 GWh und 100 GWh). Hier liegen 2447 bzw. 2591 Stunden von insgesamt 8760 Stunden, das entspricht einem Anteil von 28% bzw. 30%. Viel Windenergie und eine geringe Nachfrage gibt es nur in den seltensten Fällen (308 Stunden im Jahr).

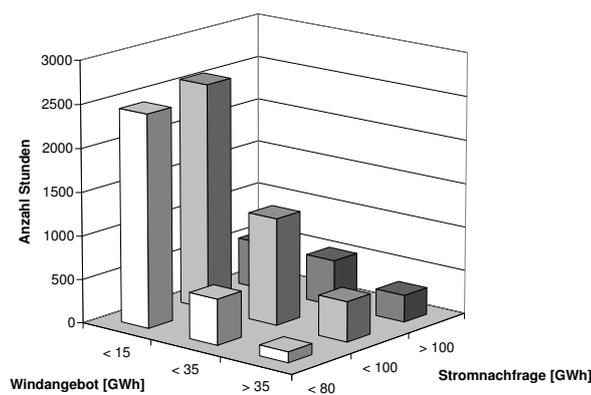


Abbildung 4.2: Häufigkeitsverteilungen der Stunden unterteilt nach den Kategorien Windangebot und Stromnachfrage

Zum einen stellt sich nun die Frage nach der Auswahl der Stunden bzw. Tage und zum anderen nach der Gewichtung. Dabei sollen einige Bedingungen berücksichtigt werden. Die Auswahl der insgesamt 13 Stunden erfolgte nun nach folgendem Prinzip:

- Eine Stunde aus jedem der neun Bereiche, wobei möglichst darauf geachtet wurde, dass der ganze Tag aus diesem Bereich ist.
- Vier Ausreißer, welche die gesamten Extremsituationen widerspiegeln sollen.

Die Gewichtung wurde nach folgenden Kriterien vorgenommen:

- Es sollte sichergestellt werden, dass die simulierte Nachfrage der tatsächlichen entspricht, bzw. die Abweichung minimal ist; dasselbe gilt für das simulierte und tatsächliche Windangebot
- Die Summe der Gewichte muss der Anzahl der Stunden im gesamten Jahr entsprechen (8760)

- Die Höhe der Gewichte sollte so gewählt werden, dass die jeweilige Stunde die Häufigkeit des Auftretens wiedergibt.
- Stunden am selben Tag bekommen das gleiche Gewicht.

Im Folgenden bezeichnet

Bezeichner	Bezeichnung
d_i	Stromnachfrage an Tag i
D	Stromnachfrage im Jahr (hier: 749.693.620 MWh)
s_i	Windangebot an Tag i
S	Windangebot im Jahr (hier: 121.384.730 MWh)
w_i	Gewichtung für Tag i
k_i	Anzahl Stunden in Kategorie von Tag i
K	Anzahl Stunden im Jahr (hier: 8760)

Da jede Stunde an einem Tag das gleiche Gewicht bekommen soll, läuft die Optimierung der Gewichte über die Tage. Es stellt sich nun die Frage, wie die Gewichte gewählt werden sollen, damit folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\sum_i w_i d_i = D \quad \text{und} \quad \sum_i w_i s_i = S \quad (4.2)$$

Da die Tage so gewählt wurden, dass mindestens 75% der Stunden eines Tages in eine der neun Kategorien einzuordnen sind, wird diese Kategorie für die Berechnung der Gewichte herangezogen. D.h. das Verhältnis der gewichteten Nachfrage an Tag i zur Gesamtnachfrage im Jahr sollte proportional zur Wahrscheinlichkeit des Auftretens der entsprechenden Kategorie sein und gleiches sollte für das Verhältnis des gewichteten Windangebots an Tag i zum Gesamtangebot im Jahr gelten. Dazu werden Hilfgewichte w_{d_i} für die Nachfrage und w_{s_i} für das Angebot eingeführt.

$$\begin{aligned} \frac{w_{d_i} d_i}{D} &= \frac{k_i}{K} \quad \text{und} \quad \frac{w_{s_i} s_i}{S} = \frac{k_i}{K} \quad \forall i \\ \Leftrightarrow w_{d_i} &= \frac{k_i D}{K d_i} \quad \text{und} \quad w_{s_i} = \frac{k_i S}{K s_i} \quad \forall i \end{aligned}$$

Eine optimale Gewichtung hätte man erreicht, wenn gilt:

$$w_{d_i} = w_{s_i} =: w_i \quad \forall i$$

Und damit wäre Gleichung 4.2 erfüllt. Dies ist aber unmöglich und kann nur näherungsweise erreicht werden.

Beweis:

Angenommen $w_{d_i} = w_{s_i} =: w_i \quad \forall i$, dann gilt $\frac{k_i D}{K d_i} = \frac{k_i S}{K s_i} \Leftrightarrow \frac{D}{d_i} = \frac{S}{s_i} \Leftrightarrow \frac{D}{S} = \frac{d_i}{s_i} \Leftrightarrow 6 = \frac{d_i}{s_i}$, also $6s_i = d_i$. Das hieße die Daten wären korreliert und lägen auf einer Geraden, was aber ein Widerspruch ist.

Um weiterhin die Häufigkeit des Auftretens bei der Berechnung der optimalen Gewichte zu berücksichtigen, werden mit Hilfe der Werte w_{d_i} und w_{s_i} Intervallgrenzen berechnen:

$$l_i = \min(w_{d_i}, w_{s_i}) \quad \text{und} \quad u_i = \max(w_{d_i}, w_{s_i})$$

Das folgende nicht lineare Optimierungsproblem berechnet die Gewichte für eine Stunde, da jede Stunde eines Tages das gleiche Gewicht erhält und sonst das Problem mit den berechneten Intervallgrenzen nicht lösbar ist, da $\sum_i u_i < K$. Dazu sei $\bar{d}_i = d_i/24$, $\bar{s}_i = s_i/24$ und \bar{w}_i das Gewicht für eine Stunde an Tag i .

$$\min \quad \left| \sum_i \bar{w}_i \bar{d}_i - D/24 \right| + \left| \sum_i \bar{w}_i \bar{s}_i - S/24 \right| \quad (4.3)$$

$$\text{unter} \quad \sum_i \bar{w}_i = K/24 \quad (4.4)$$

$$l_i \leq \bar{w}_i \leq u_i \quad (4.5)$$

Das Ergebnis liefert die optimalen Gewichte für jede Stunde.

4.2 Vergleich unterschiedlicher Zeitreihen

Untersucht wurden sechs Modelldurchläufe mit gleichen Parametern, aber unterschiedlichen Zeitschritten: ein Datensatz mit 24 gleich gewichteten Tagen (24-ZF¹), die zufällig ausgewählt wurden, drei Datensätze, die mit obigen Verfahren optimiert wurden, hierbei handelt es sich um Zeitreihen mit 13 Tagen (13-OPT-1; 13-OPT-2; 13-OPT-3), sowie zwei Datensätze mit 12 Tagen (12-FrSaSo; 12-ZF), bei denen jede Stunde das gleiche Gewicht hat. Beim ersten der beiden Datensätze wurden vier Wochenenden betrachtet, jeweils Freitag, Samstag und Sonntag, im Winter, Frühling, Sommer und Herbst. Die zweite Zeitreihe mit 12 Tagen ist wie Datensatz 24-ZF eine Zufallsauswahl mit gleich gewichteten Stunden, allerdings unter der Berücksichtigung, dass nicht zu viele Wochenenden gewählt wurden, da diese auf Grund einer geringeren Nachfrage die Berechnung verfälschen.

Ziel dieser Analyse ist es, Aussagen darüber zu treffen, ob es nötig ist, Auswahlregeln obiger Art durchzuführen, um eine realitätsgetreue Situation zu simulieren.

Die Installation von mindestens 22,5 GW, das entspricht 50% der Windenergieanlagen, die im Jahr 2030 als möglich angenommen werden, wurde bei diesen Szenarien erzwungen.

In Abbildung 4.3 auf Seite 59 sind die Stromerzeugung und die installierte Leistung der Kraftwerke zusammengestellt. Sowohl bei der Stromerzeugung als auch bei den installierten Kapazitäten sind wesentliche Unterschiede bei den Steinkohlekraftwerken, den Gasturbinen und GuD sowie bei den Windenergieanlagen im On- und Offshore-Bereich zu erkennen. Das ist hauptsächlich durch ein überhöhtes Windangebot, durch eine zu hohe Gewichtung und eine zu geringe Nachfrage zu erklären. Gasturbinen werden vor allem als Back-Up-Kraftwerke für die Windenergie eingesetzt, um auch in windstillen Stunden der Nachfrage gerecht zu werden.

¹Zur Bezeichnung: 24 Tage, die zufällig gewählt wurden

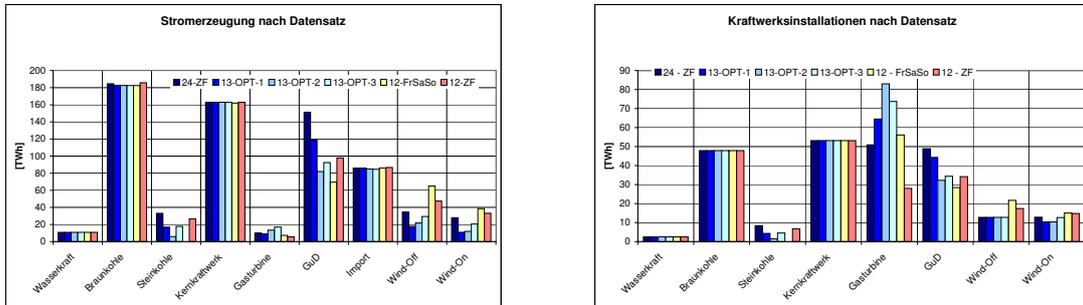


Abbildung 4.3: Stromerzeugung und Kraftwerksinstallation ausgewählter Zeitreihen

Auch bei den Kosten und der CO_2 -Emission sind unterschiede zu erkennen. Die Gesamtkosten der Erzeugung und Übertragung belaufen sich auf 43 - 47 Mrd. Euro. Die CO_2 -Emissionen schwanken zwischen 162 Mio. und 216 Mio. t CO_2 . Beide sind abhängig von der Erzeugungsmenge, die durch eine unterschiedliche Gewichtung stark schwankt.

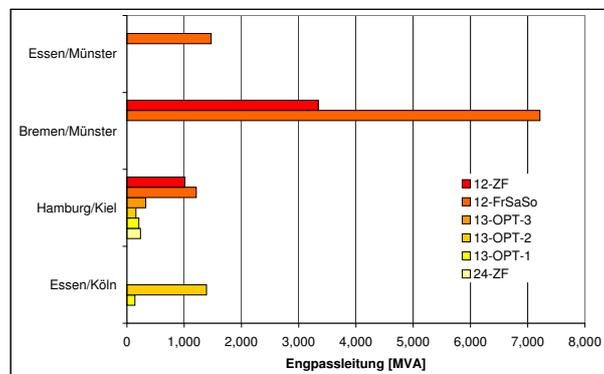


Abbildung 4.4: Engpassleitung des Stromnetzes

Bei der Übertragung im Verbundnetz kommt es bei den Datensätzen ebenfalls zu Unterschieden. Die Leitung Hamburg/Kiel stellt generell einen Engpass dar. Eine nötige Kapazitätserweiterung liegt zwischen 156 und 1200 MW. Auf Grund eines zu hohen Windangebots bei Datensatz 12-ZF und 12-FrSaSo kommt es zu vermehrtem Transport von Bremen, einem windreichen Standort, nach Münster und von dort aus nach Essen. Bei Datensatz 13-OPT-1 und -2 wird in windstillen Stunden die nötige Energie in Essen durch Gasturbinen in Köln erzeugt, was auf dieser Strecke zu einem nötigen Ausbau führt.

Es kann allerdings davon ausgegangen werden, dass prozentual nicht allzu große Unterschiede

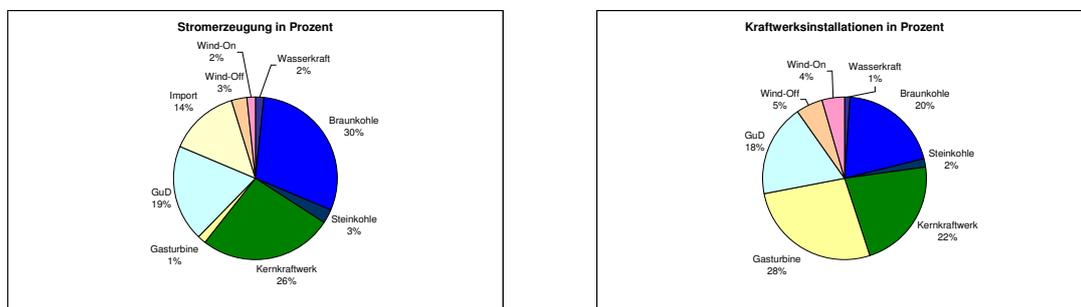


Abbildung 4.5: Typische Anteile der Kraftwerke an der Stromerzeugung und Kraftwerkskapazität

in der Installation und Kraftwerksnutzung auftreten. Der Kraftwerkspark besteht im Schnitt aus 20 - 30% Braunkohlekraftwerken, maximal 3% Steinkohlekraftwerken, 13 - 17% GuD, 14 - 34% Gasturbinen, 22 - 26% Kernkraftwerken und 10 - 17% Windenergieanlagen inklusive 1% Laufwasserkraftwerken (Abbildung 4.5, Seite 60).

4.2.1 Zusammenfassung

Es treten große Unterschiede im gewichteten Windangebot und der gewichteten Stromnachfrage auf. Dies sind die Elemente, welche die Optimierung am stärksten beeinflussen; somit ist es notwendig, diese durch eine optimierte Gewichtung zu simulieren, um genaue Aussagen über Kosten, Kapazitäten, Emissionen und Erzeugungs- und Transportmengen treffen zu können.

Die Anzahl der Zeitschritte spielt nur bedingt eine Rolle: Die Simulation wird exakter, wenn eine Stunde aus jedem Bereich (starker Wind, hohe Nachfrage; starker Wind, niedrige Nachfrage etc.) in die Berechnung mit einfließt. Es sollten also mindestens 12 Tage betrachtet werden, die über das Jahr verteilt sind und damit auch jahreszeitliche Schwankungen und extreme Stunden (niedrige Windgeschwindigkeiten, hohe Nachfrage) abgedeckt werden können. Der Vorteil an einer hohen Anzahl an betrachteten Zeitschritten liegt darin, dass die optimale Gewichtung mehr in den Hintergrund tritt und damit durch eine Gleichgewichtung der Zeitschritte bessere Ergebnisse erzielt werden; dazu müsste aber eine wesentlich höhere Anzahl an Zeitschritten betrachtet werden, als es bisher an handelsüblichen Rechnern möglich ist.

4.3 Gaspreisvariation

Bei den nachfolgenden Szenarien wurde die Kraftwerksinstallation anhand der Stromgestehungskosten nachvollzogen.

4.3.1 Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh

Die Leistung der installierten Braunkohle- und Wasserkraftwerke beläuft sich auf 47,88 GW bzw. 2,48 GW. Die Stromgestehungspreise für 8760 Volllaststunden bzw. 3500 Volllaststunden für Windenergieanlagen der möglichen Kraftwerkstypen sind in Abbildung 4.6 auf Seite 61 (links) graphisch dargestellt. Anhand der Stromgestehungskosten kann man leicht bestimmen, welche Kraftwerke bei der zu Grunde liegenden Preiskonstellation als optimal bezüglich der Kosten bestimmt werden.

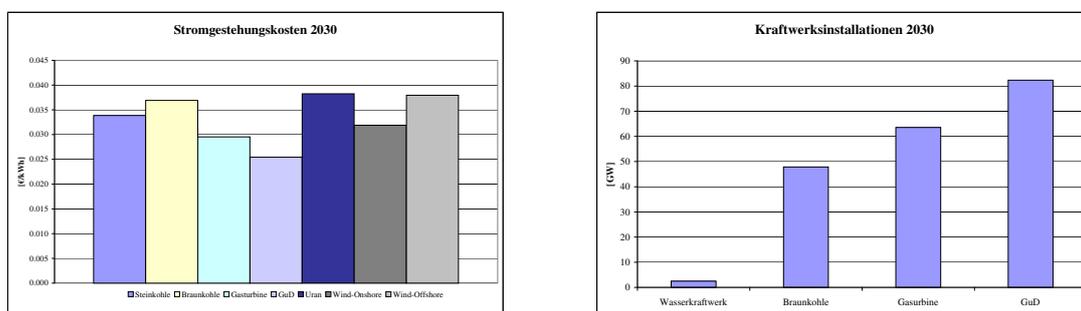


Abbildung 4.6: Stromgestehungskosten und Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh

Die Gas- und Dampfturbinen (GuD) weisen mit einer Höhe von ca. 2,5 Euro Cent die geringsten Stromgestehungskosten auf und werden demnach zur Deckung der Grundlast (siehe auch Abbildung 4.7 auf Seite 62) herangezogen. Ihre Gesamtleistung beträgt 82,35 GW. Mit der Nutzung der bereits installierten Braunkohle- und Wasserkraftwerke in obiger Höhe wird die Stromnachfrage schon zu 97%² gedeckt. Für die Deckung der Spitzenlast werden Gasturbinen mit einer Gesamtleistung von 63,56 GW installiert; diese weisen nach den GuD mit einer Höhe von ca. 2,8 Euro Cent die geringsten Stromgestehungskosten auf.

In Abbildung 4.6 auf Seite 61 (links) sind die Stromgestehungskosten für 8760 Volllaststunden abgebildet. Die rechte Graphik zeigt die Leistung der Kraftwerke, die das Optimierungsmodell auf der Basis der links dargestellten Kosten errechnet.

In Abbildung 4.7 auf Seite 62 ist die optimale Fahrweise des gesamten Kraftwerksparks auf der Basis der zugrunde gelegten Preise dargestellt.

4.3.2 Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh

Für dieses Szenario wurde der Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh auf 1,3 Euro ct/kWh erhöht.

²inklusive Stromimport aus den umliegenden UCTE-Mitgliedstaaten

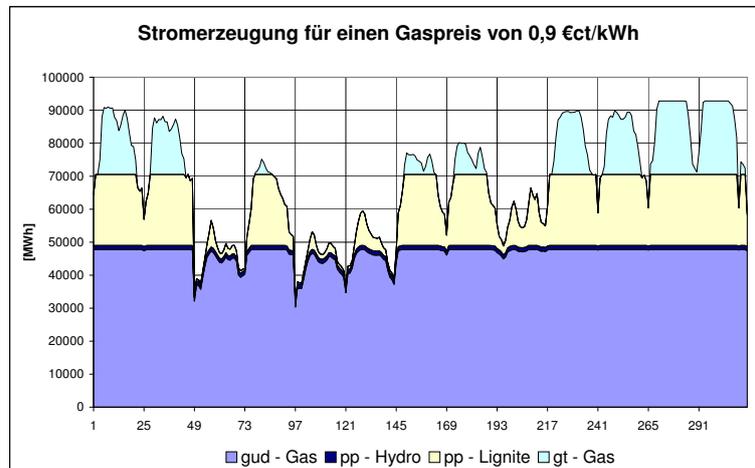


Abbildung 4.7: Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 0,9 Euro ct/kWh

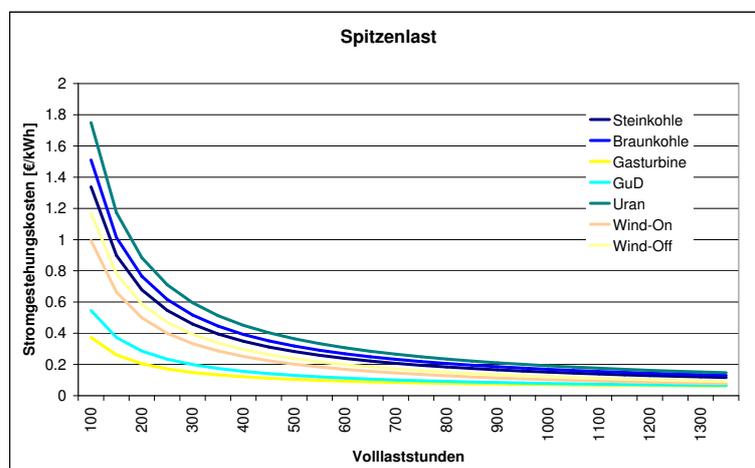


Abbildung 4.8: Stromgestehungskosten der Spitzenlast für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh

Abbildung 4.8 und 4.9 stellt die Stromgestehungskosten in Abhängigkeit der Volllaststunden dar. Windenergieanlagen können maximale Volllaststunden von 3500 Stunden im Jahr

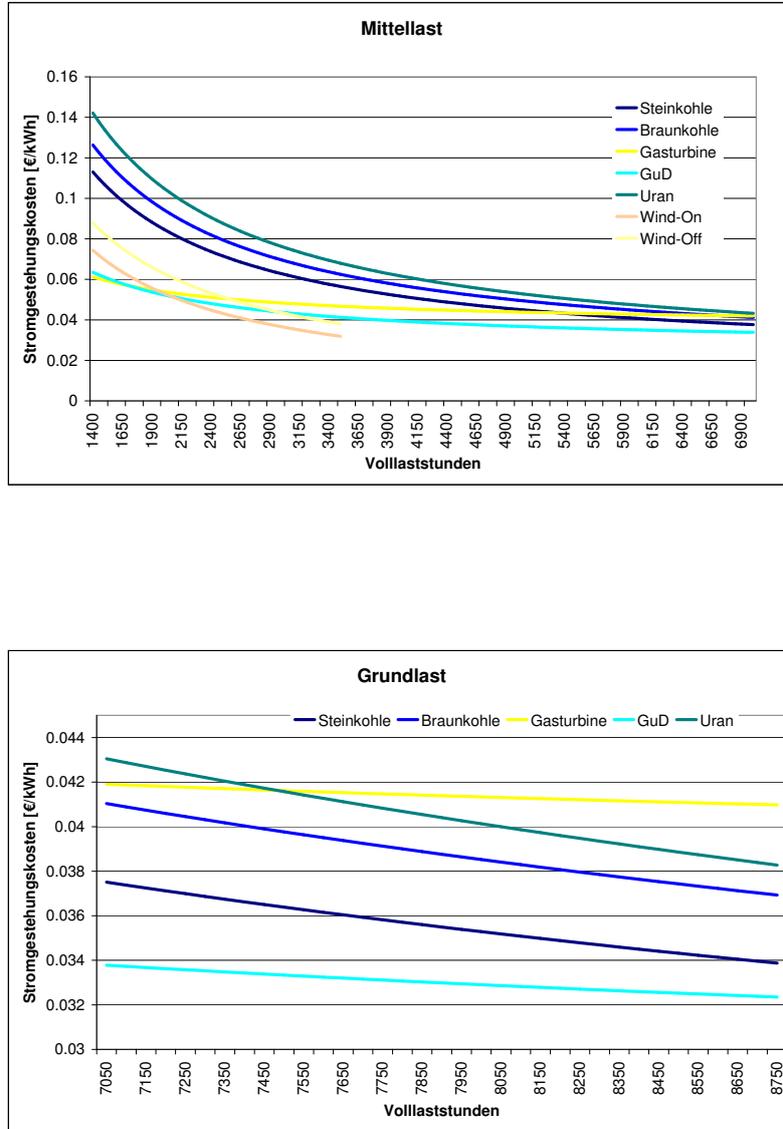


Abbildung 4.9: Stromgestehungskosten der Mittel- und Grundlast für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh

erreichen; deshalb kommen sie zur Deckung der Grundlast nicht in Frage. Der Gaspreis für diese Berechnung liegt hier bei 1,3 Euro ct. Am kostengünstigsten für die Deckung der Spitzenlast sind bei diesem Gaspreis in aufsteigender Reihenfolge Gasturbine, GuD, Onshore-Windenergieanlage, Offshore-Windenergieanlage, Steinkohle-, Braunkohle- und schließlich Kernkraftwerke. Die Reihenfolge von Gasturbine und GuD ändert sich ab 1500 Volllaststunden.

Windenergieanlagen nehmen im Intervall von 2000 für Onshore-Windenergieanlagen und 2750 für Offshore-Windenergieanlagen bis 3500 die führende (kostengünstigste) Position ein. Im Mittellastbereich ändert sich die Rangreihenfolge der kostenoptimalen Kraftwerke. Ab ca. 5500 Volllaststunden wird das Steinkohlekraftwerk gegenüber der Gasturbine bevorzugt. Ab ca. 6750 Stunden unterbieten schließlich das Steinkohlekraftwerk und bei ca. 7500 Volllaststunden das Kernkraftwerk. Zur Deckung der Volllast nimmt also die Gasturbine die Schlussposition ein.

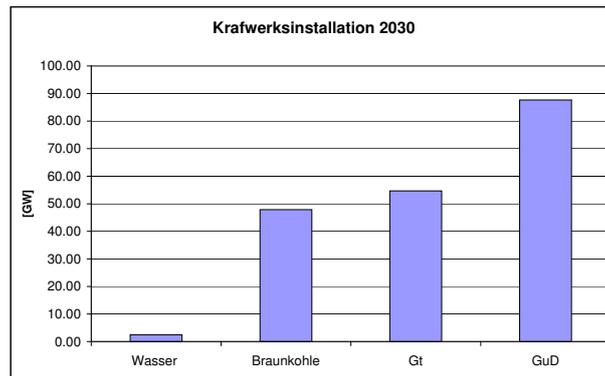


Abbildung 4.10: Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh

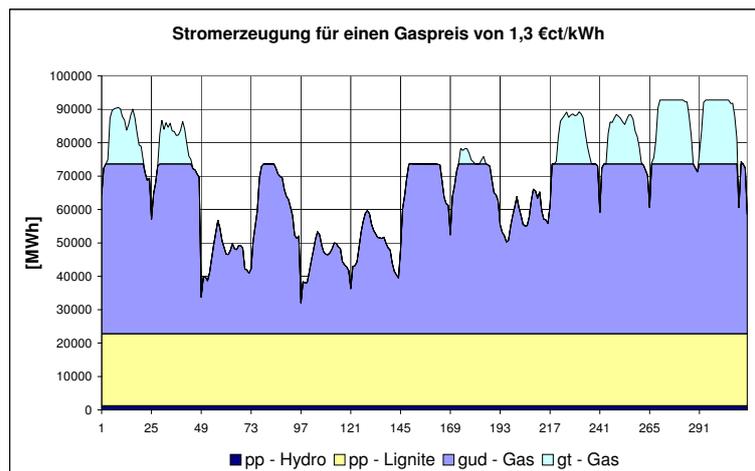


Abbildung 4.11: Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 1,3 Euro ct/kWh

Obwohl der Gaspreis im Vergleich zum vorhergehenden Szenario von 0,9 auf 1,3 Euro Cent je Kilowattstunde angehoben wurde, weisen die GuD noch die geringsten Stromgestehungskosten von 3,25 Euro ct/kWh auf. Die Stromnachfrage wird durch die bereits installierten Braunkohle- und Wasserkraftwerke inklusive Import aus den umliegenden UCTE-Mitgliedstaaten zu 46% gedeckt. Die Onshore-Windenergieanlagen, die hier zusammen mit den GuD geringere Stromgestehungskosten haben, können auf Grund der fluktuierenden Eigenschaft des Windes nicht zur Deckung der Mittellast herangezogen werden. Folglich werden 87,68 GW GuD installiert. Damit ist die Deckung zu 98% erfolgt.

Zur Deckung der kompletten Stromnachfrage werden noch 10,34 TWh Strom benötigt. Dafür sind Kraftwerke notwendig, die zur Deckung von Spitzenlasten geeignet sind. Gasturbinen sind bis zu 5500 Volllaststunden nach den GuD die kostengünstigste Variante (siehe Abbildung 4.9, Seite 63). Außer im Bereich von 2000 bzw. 2750 bis 3500 Volllaststunden würden Offshore- bzw. Onshore-Windenergieanlagen die Gasturbinen bzgl. der Stromgestehungskosten unterbieten. In diesem Fall ist jedoch lediglich die Stromnachfrage in 864 Stunden nicht gedeckt. Es genügt also der Einsatz von Gasturbinen mit einer Leistung von 54,69 GW, welche mit 15 Volllaststunden die fehlende Stromnachfrage von 2% decken können.

In Abbildung 4.11 auf Seite 64 ist die optimale Fahrweise des Kraftwerkparks für die ausgewählten Zeitschritte dargestellt. Es wird deutlich, dass Gasturbinen nur als Spitzenlastkraftwerke fungieren, sie werden nur an Tagen mit sehr hoher Nachfrage eingesetzt.

4.3.3 Bestimmung des Kraftwerkeinsatzes für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

Bei diesem Szenario wurden die Gaspreise auf 2,4 Euro ct je Kilowattstunde erhöht.

Aufgrund der hohen Brennstoffkosten nehmen die Gasturbinen, gefolgt von den GuD, die Schlussposition bei den Stromgestehungskosten für 8760 Volllaststunden ein (vergleiche Abbildung 4.12). Zur Deckung der Grundlast sind Steinkohlekraftwerke die günstigste Alternative, gefolgt von Braunkohle- und Kernkraftwerken. Im Bereich von 4500 Volllaststunden erzielen die GuD den Vorsprung gegenüber der Kernenergie, im Bereich von 3750 Volllaststunden gegenüber der Braunkohle und im Bereich von 3000 Volllaststunden gegenüber den Steinkohlekraftwerken (vergleiche Abbildung 4.13). Im Bereich zwischen 3500 und 1500 sind Windenergieanlagen die kostengünstigste Alternative für die Stromerzeugung unter der Voraussetzung, dass Wind im angemessenen Maße zur Verfügung steht.

Grundlast

Durch die Erhöhung der Brennstoffkosten für Gas ist der Einsatz von GuD zur Deckung der Grundlast nicht mehr rentabel. Für diese Preiskonstellation nehmen die Steinkohlekraftwerke ab ca. 4000 Volllaststunden das Minimum der Stromgestehungskosten an (siehe Abbildungen 4.12, 4.13). Zu den bereits installierten Braunkohle- und Wasserkraftwerken von jeweils 47,88 GW bzw. 2,48 GW werden nun Steinkohlekraftwerke mit einer Leistung von 104 GW errichtet. Damit kann der Strombedarf inklusive Import aus den umliegenden UCTE-Mitgliedstaaten zu 97% gedeckt werden. Importiert werden insgesamt 86 TWh Strom.

Mittellast

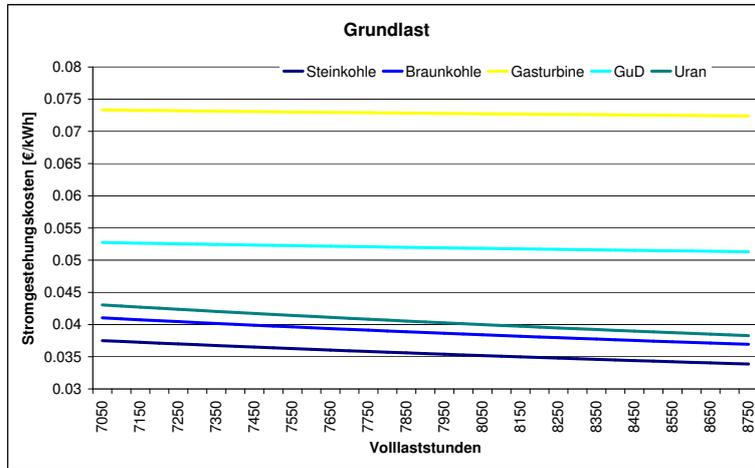


Abbildung 4.12: Stromgestehungskosten der Grundlast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

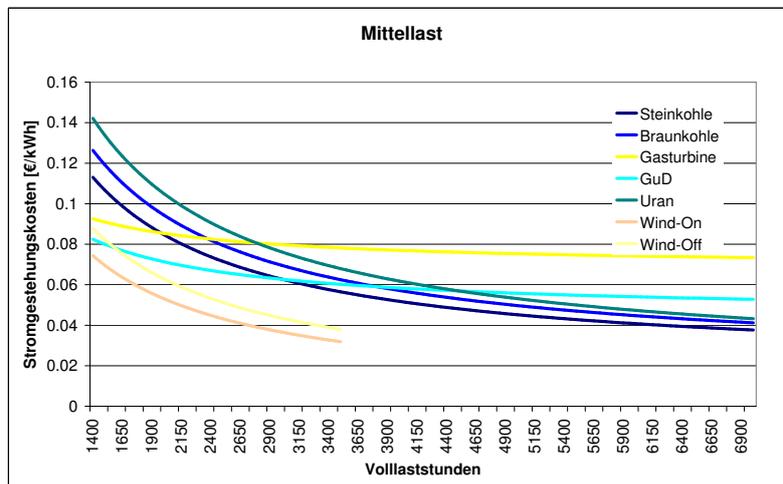


Abbildung 4.13: Stromgestehungskosten der Mittellast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

Bei den restlichen 2336 Stunden, in welchen die Nachfrage nicht gedeckt ist, handelt es sich

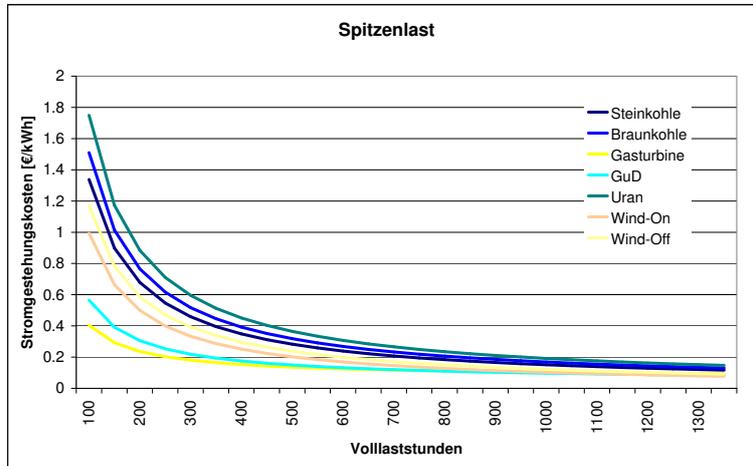


Abbildung 4.14: Stromgestehungskosten der Spitzenlast für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

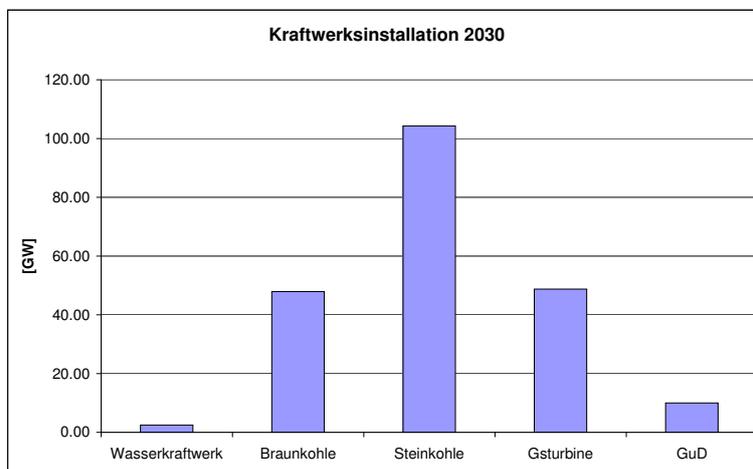


Abbildung 4.15: Kraftwerksinstallationen für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

um sehr windstille Stunden (vergleiche Abbildung 4.17 auf Seite 68). Das Windangebot ist in Abbildung 4.16 auf Seite 68 mit der jeweiligen Gewichtung dargestellt. Wenn in den Stunden mit nicht gedeckter Nachfrage ein hohes Windangebot herrscht, ist die Gewichtung sehr gering

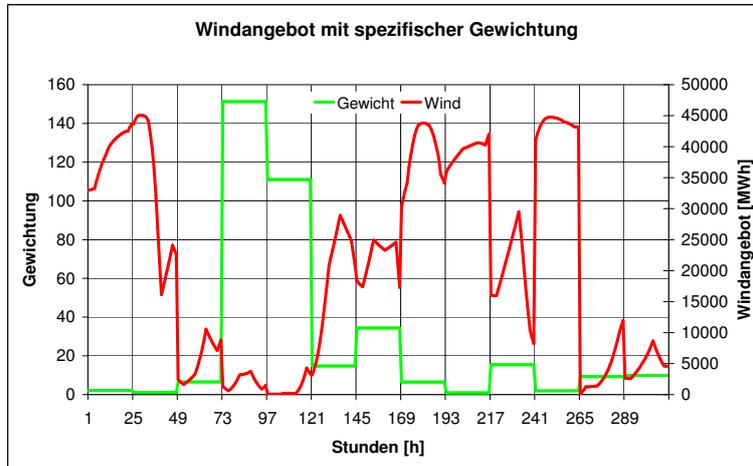


Abbildung 4.16: Windangebot der untersuchten Zeitschritte mit der jeweiligen Gewichtung

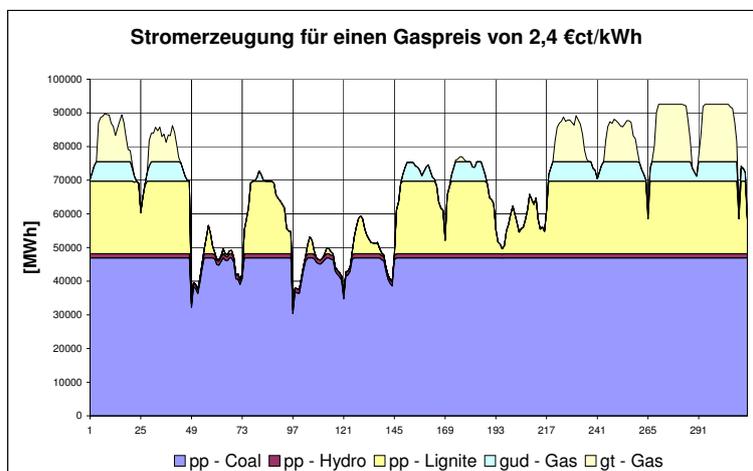


Abbildung 4.17: Optimale Fahrweise des Kraftwerksparks für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

(siehe Stunde 1 bis 49 und 241 bis 265). Die Stunden mit geringer Windgeschwindigkeit dagegen haben eine höhere Gewichtung (vergleiche Stunden 265 bis 312 und 121 bis 145). Das Gewicht gibt die Häufigkeit des Auftretens dieser Stunde im gesamten Jahr an. Die

Installation von Windenergieanlagen ist damit aus Mangel an Windenergie nicht rentabel.

Spitzenlast

Zur Deckung der Spitzenlast ist nach Abbildung 4.14 die Installation von GuD und Gasturbinen von Vorteil; diese weisen die geringsten Stromgestehungskosten auf. Es werden GuD mit einer Leistung von 10 GW installiert; damit werden 8,4 TWh Strom erzeugt. Die restlichen 8,7 TWh werden durch die Installation von 49 GW Gasturbinen erzielt.

4.3.4 Zusammenfassung

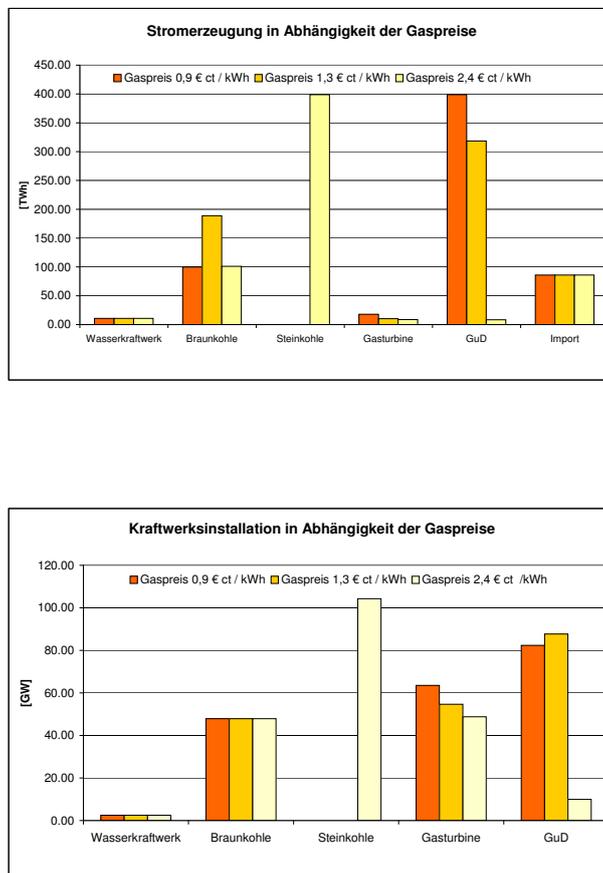


Abbildung 4.18: Szenarienvergleich für die Gaspreiserhöhung

Ein Anstieg der Gaspreise führt zu einer erweiterten Nutzung der Kohlekraftwerke (siehe Abbildung 4.18). Bei Brennstoffkosten von 2,4 Euro ct/kWh werden erstmals Steinkohlekraftwerke errichtet, mit denen 65% der Stromnachfrage gedeckt werden. Im Gegenzug dazu nimmt die Nutzung der Braunkohlekraftwerke und der GuD ab. Die Installation von Gasturbinen wird von 83 GW auf 10 GW reduziert.

Die Kosten der Erzeugung und Übertragung steigen durch die Erhöhung des Gaspreises von 14,5 Mrd. auf 18,6 Mrd. Euro an. Die CO_2 -Emission steigt von 213 Mio t durch die vermehrte Nutzung der Steinkohlekraftwerke um 63% an.

4.4 CO_2 -Emissionsreduzierung

Ort	Onshore-WEA [MW]	Offshore-WEA [MW]
Berlin	1742	
Bielefeld	663	
Bodensee	60	
Bremen	3919	8287
Chemnitz	309	
Cottbus	905	
Dresden	309	
Erfurt	642	
Essen	585	
Frankfurt	256	
Freiburg	46	
Greifswald	675	2918
Hamburg	1009	8982
Hannover	1903	
Karlsruhe	59	
Kassel	255	
Kiel	1954	4491
Köln	482	
Leipzig	308	
Magdeburg	2410	
Mainz	445	
München	95	
Münster	613	
Nürnberg	95	
Regensburg	95	
Rostock	652	876
Saarbrücken	186	
Stuttgart	60	
Ulm	61	

Tabelle 4.3: Installierte Windenergieanlagen

In diesem Abschnitt wurde untersucht, wie weit die CO_2 -Emission im Ausblick auf das Jahr 2030 reduziert werden kann. Es wurde angenommen, dass bis dahin die Technik und der Ausbau der Windenergieanlagen v.a. auf See soweit ausgereift sind, dass Windenergieanlagen mit einer Gesamtleistung von 45 GW errichtet und genutzt werden können. Die Kapazitäten der Windenergieanlagen können Tabelle 4.4, Seite 70, entnommen werden. Weiterhin wurde an-

genommen, dass Kernkraftwerke mit maximal heutigen Leistungen bei Bedarf zur Verfügung stehen.

Ort	Kernkraftwerk [MW]
Hamburg	9717,14
Hannover	3885,71
Karlsruhe	6714,29
Mainz	7214,29
Münster	3800
Nürnberg	3842,86
Regensburg	4314,29
Stuttgart	6300
Ulm	7342,86

Tabelle 4.4: Installierte Kernkraftwerke

Bei jeden Durchlauf wurde die CO_2 -Emission durch Herabsetzen der oberen Schranke mehr und mehr beschränkt, bis das Problem unzulässig wurde. Die Ergebnisse sind im nächsten Abschnitt zusammengefasst. Bei einer Kraftwerkswahl ohne CO_2 -Emissionsbeschränkung wurden 354 Mio t CO_2 erzeugt.

Als Basis für die folgenden Berechnungen wurden die Kosten für das Jahr 2030 herangezogen. Als Brennstoffkosten für Gas wurde hier mit dem Wert 2,4 Euro Cent gerechnet. Die restlichen Kosten können Tabelle 2.1 Abschnitt 2.2 entnommen werden. Die Stromgestehungskosten für 8760 Volllaststunden sind in Abbildung 4.19 auf Seite 72 dargestellt. Windenergieanlagen sind aus der Abbildung herausgenommen, da diese maximal 3500 Stunden im Jahr zur Verfügung stehen. Man sieht deutlich, dass Gas bei dieser Preiskonstellation mit Abstand die kostenintensivste Alternative zur Deckung der Grundlast darstellt. Steinkohle und Braunkohle erzielen die geringsten Kosten mit einer Höhe von 0,0339 Euro/kWh bzw. 0,0389 Euro/kWh, aber auch die höchste CO_2 -Emission. Bei keinen weiteren Beschränkungen und Vorgaben würden damit Kohlekraftwerke genutzt werden, um die Grundlast zu decken.

Energieträger	CO_2 -Emission
Steinkohle	0,3
Braunkohle	0,33
Gas	0,2

Tabelle 4.5: CO_2 -Emission der einzelnen Energieträger

4.4.1 Ergebnisse

Zunächst wurde die Stromerzeugung in Abhängigkeit des CO_2 -Ausstoßes verglichen. Die Daten der Stromerzeugung sind nach Kraftwerkstypen unterteilt und in Abbildung 4.20 auf Seite 73 graphisch dargestellt. Schon bei einer CO_2 -Emissionsbeschränkung von 354 auf 300 Mio t wird der Einsatz von Kernkraftwerken (23,7 GW) nötig, es kommt allerdings erst ab einer Beschränkung auf 200 Mio t zur vollen Auslastung; dies entspricht einer installierten Leistung von 53,13 GW. Die installierten Leistungen je Kraftwerkstyp in Abhängigkeit der

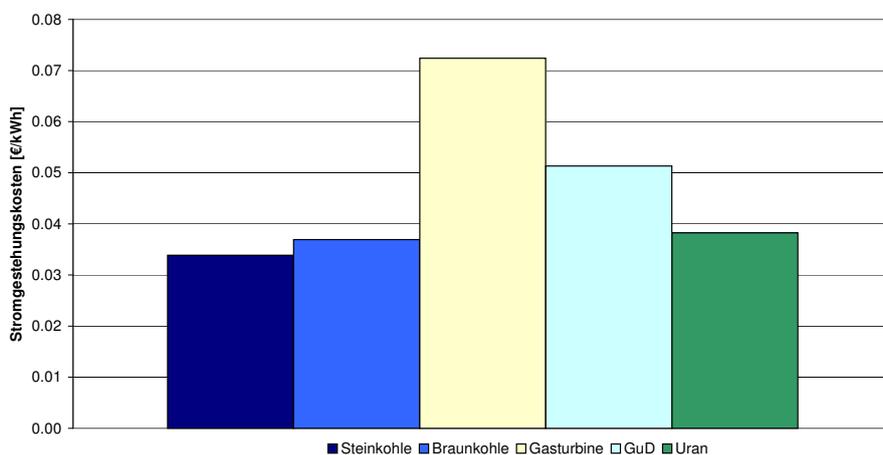


Abbildung 4.19: Stromgestehungskosten für einen Gaspreis von 2,4 Euro ct/kWh

CO_2 -Emissionsbeschränkung sind in Abbildung 4.21 auf Seite 74 dargestellt. Es ist selbst erklärend, dass bei einer zunehmenden Beschränkung Kraftwerke mit geringer bzw. keiner CO_2 -Emission genutzt werden, wie beispielsweise Kernkraftwerke oder Windenergieanlagen im On- und Offshore-Bereich. Wasserkraftwerke werden aus der Betrachtung ausgeschlossen, da deren Installation und Nutzung dem Modell vorgeschrieben wurde. Gleiches gilt für die Installation der Braunkohlekraftwerke.

Windenergieanlagen sowohl im Onshore- als auch im Offshore-Bereich werden auch ohne CO_2 -Beschränkung installiert, allerdings nur mit einer Leistung von zusammen 13 GW. Damit werden 36 TWh Strom erzeugt. Ab einer Beschränkung der CO_2 -Emissionsbeschränkung auf 200 Mio t nimmt die Installation und Nutzung von Windenergieanlagen stark zu. Im Offshore-Bereich wird schnell die Obergrenze von ca. 25 GW erreicht. Im Onshore-Bereich wird zunächst mit 11,6 GW begonnen und anschließend auf 18,3 GW und schließlich auf 20 GW mit fortschreitender CO_2 -Emissionsbeschränkung aufgestockt.

Die Installation und Nutzung von Steinkohlekraftwerken nimmt ab der ersten Beschränkung stark ab. Bei einer Beschränkung auf 200 Mio t CO_2 beträgt die installierte Leistung nur noch 30,13 GW von ursprünglichen 96,7 GW. Aufgrund hoher Emissionen, wird die Steinkohle ab einer Beschränkung auf 150 Mio t CO_2 nicht mehr zur Stromerzeugung genutzt.

Die Nutzung der GuD nimmt als kostengünstigstes Kraftwerk stark zu. Insbesondere ab einer Beschränkung auf 150 Mio t CO_2 zu großen Anteilen zur Stromerzeugung mit 154 TWh bei. Gasturbinen werden ab einer Beschränkung auf 200 Mio t CO_2 kaum installiert. Sie tragen

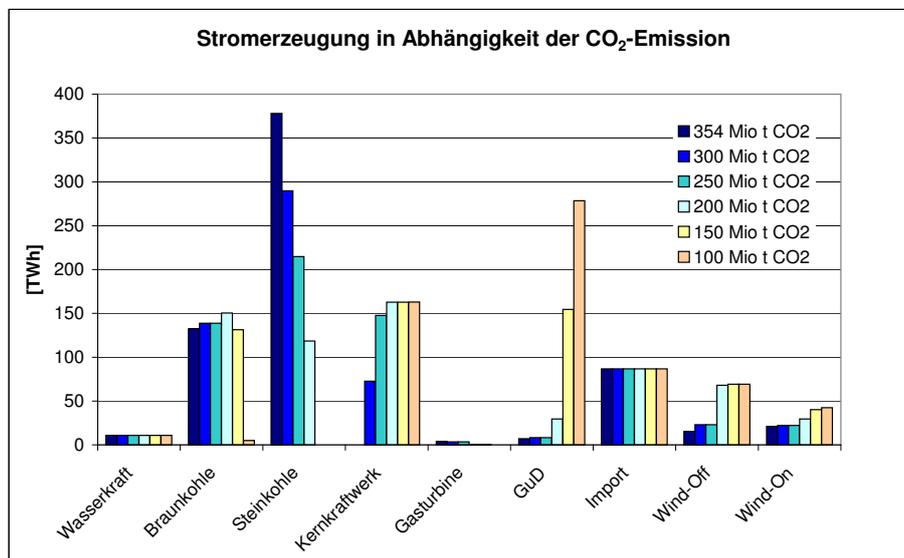


Abbildung 4.20: Stromerzeugung in Abhängigkeit der CO_2 -Emission

nur noch mit maximal 0,4 TWh zur Stromerzeugung bei.

Bei den Braunkohlekraftwerken nimmt die Nutzung zunächst zu bis zu einer Beschränkung auf 200 Mio t CO_2 zu und sinkt dann sehr schnell. Bei einer maximalen Beschränkung der CO_2 -Emission ist deren Nutzung als stärkster Schadstoff-Emittent nur noch zu 5 TWh möglich. Die Installation der Braunkohlekraftwerke bleibt, wie vorher erwähnt, konstant bei 47,88 GW.

In der Abbildung 4.22 auf Seite 74 ist die kostengünstigste und schadstoffärmste Variante der Kraftwerksnutzung dargestellt. In dem linken Diagramm wurde die CO_2 -Emission nicht beschränkt. Stein- und Braunkohlekraftwerk sind, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, am kostengünstigsten und machen damit den Hauptanteil der Stromerzeugung aus. Inklusiv Import, der im Modell fest vorgegeben ist, wird allein durch die Kohlekraftwerke die Stromnachfrage zu 91% gedeckt. Die Restnachfrage wird durch Windanlagen im Onshore- und Offshore-Bereich zu 5% und durch Gasturbinen und GuD zu je 1% gedeckt. Wasserkraftwerke werden zu 2% genutzt. Bei dieser Kraftwerkskonstellation werden 354 Mio t CO_2 ausgestoßen.

In der rechten Abbildung sieht man die schadstoffärmste Variante der Kraftwerksnutzung; die CO_2 -Emission beträgt 100 Mio t, damit wurde eine Reduktion von 254 Mio t CO_2 erzielt. Die Gesamtkosten sind von 19 Mrd. Euro beim linken Beispiel auf 27 Mrd. Euro rechts angestiegen.

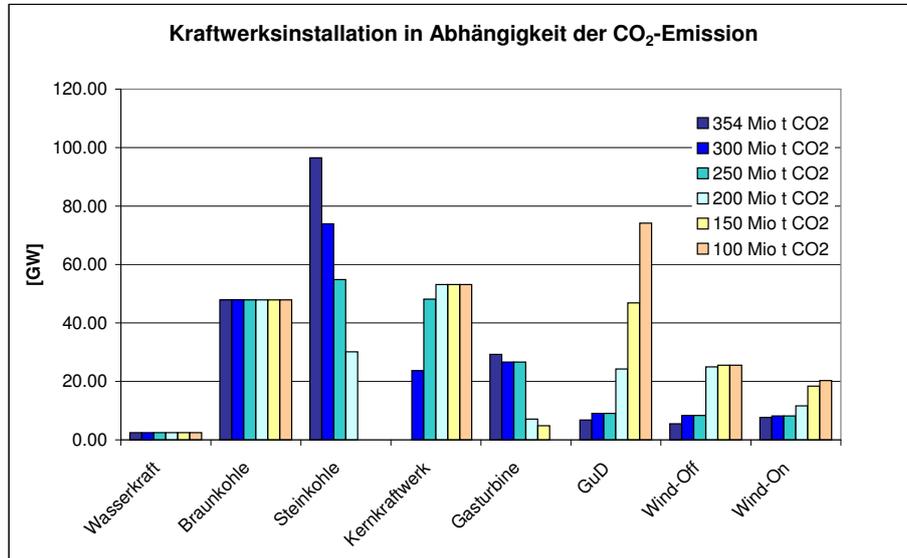


Abbildung 4.21: Kraftwerksinstallation in Abhängigkeit der CO₂-Emission

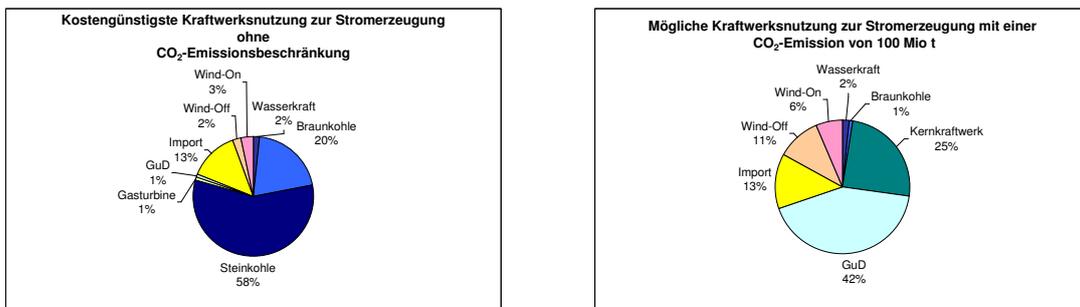


Abbildung 4.22: Kraftwerkswahl mit und ohne Beschränkung der CO₂-Emission

Durch eine komplette Auslastung der schadstoffarmen Kraftwerke (Kernkraftwerke, Windenergieanlagen, Wasserkraftwerke) sowie des Imports können gerade mal 57% der Stromerzeugung gedeckt werden. Die Stromerzeugung durch erneuerbare Energien macht hier einen Anteil von 19% (inklusive Wasserkraft) aus. Für die Deckung der restlichen Nachfrage, die im Volllaststundenbereich von ca. 3000 Stunden liegt, weisen die Kohlekraftwerke zwar günstigere Preise auf, werden jedoch wegen ihrer höheren Schadstoffemission nicht für die Stromerzeugung herangezogen. GuD stellen gegenüber den Gasturbinen die rentablere Variante dar;

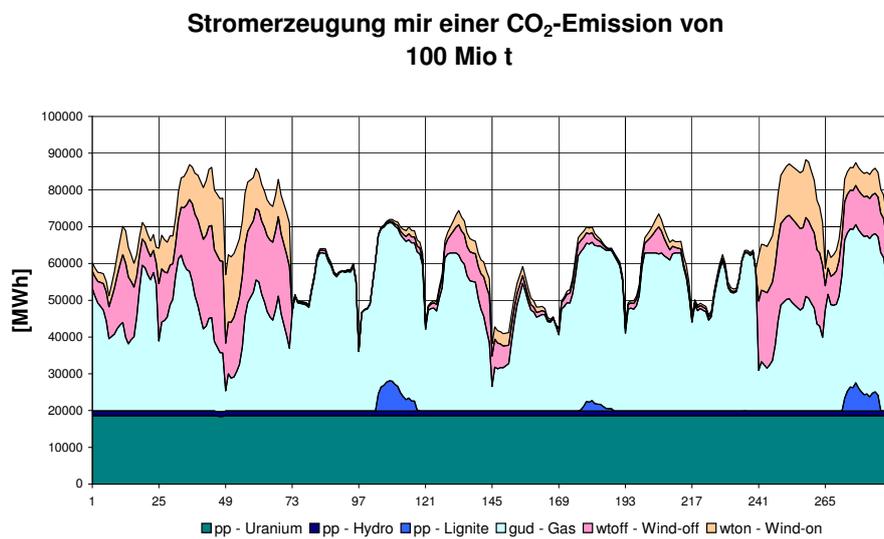
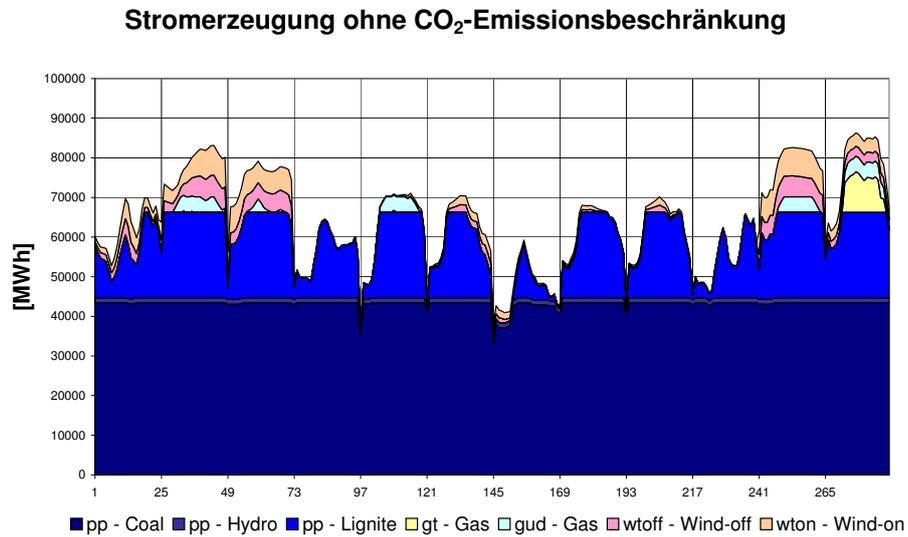


Abbildung 4.23: Stromerzeugung in Abhängigkeit der CO₂-Emission

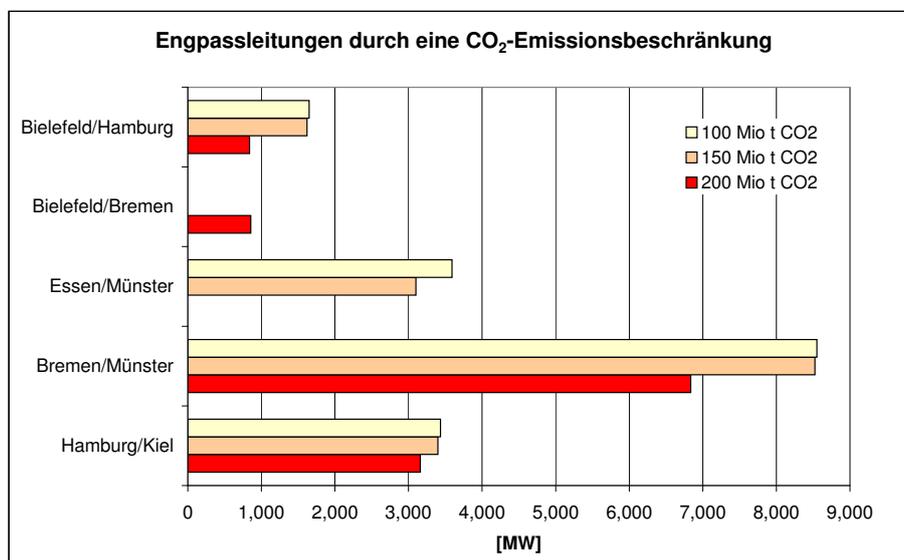


Abbildung 4.24: Engpassleitungen durch eine Beschränkung der CO₂-Emission

damit haben sie einen Anteil von 42% an der Stromerzeugung.

In der Abbildungen 4.23 ist die optimale Fahrweise der Kraftwerke für oben dargestellte Szenarien abgebildet. Man sieht hier deutlich (unten), dass die Nutzung des Windes ohne den Einsatz von GuD in keiner Stunde in so hohem Maße zur Verfügung steht, dass sie zur Deckung der Nachfrage ausreicht. Im Gegenzug dazu treten aber Stunden auf, in denen die Windenergieanlagen kaum genutzt werden können (73-100; 217-241).

In Abbildung 4.23 (oben) wird deutlich, dass an einigen wenigen Tagen die Nutzung der Kohlekraftwerke ohne den Einsatz von Spitzenlastkraftwerken vollkommen genügt. So beispielsweise an den Tagen 4 und 10³.

Durch die Beschränkung der CO₂-Emission werden vermehrt Windenergieanlagen in Betrieb genommen. Da in Deutschland eine räumliche Konzentration der Windenergieanlagen in Norddeutschland auftritt, entstehen zunehmend Leitungsengpässe, da die Windenergie von Nord nach Süd transportiert werden muss. Die Engpassleitungen sind in Abbildung 4.24 dargestellt. Den größten Engpass stellt die Leitung zwischen Bremen und Münster dar.

³An der x-Achse angetragen sind die Stunden; damit ist Tag 1 von Stund 1-24, Tag 2 von Stunde 25-48 u.s.w.

4.5 Variation der WEA

Die angenommene Obergrenze für die Installation von Windenergieanlagen im Jahr 2030 liegt bei 20 GW im Onshore-Bereich und 25 GW im Offshore-Bereich. Es wurden Szenarien ohne Windenergieanlagen mit 10%, 20%, 50% und 100% installierter Leistung berechnet und untersucht. Die Investitionskosten K_{Inv} , die Fixkosten K_{fix} und die variablen Kosten K_{var} für die einzelnen Kraftwerke, welche die Basis der Berechnung bilden, können Tabelle 4.6 auf Seite 77 entnommen werden. Bei den Investitionskosten handelt es sich hier um die jährliche Annuität für einen Kalkulationszinssatz von 4%. Die Brennstoffkosten sind in den variablen Kosten bereits enthalten.

Kraftwerk	K_{Inv} [Euro/kW]	K_{fix} [Euro/kW]	K_{var} [Euro/kWh]
Steinkohlekraftwerk	86	42	0,013
Braunkohlekraftwerk	100	51	0,013455
Gasturbine	23,50	0	0,02
GuD	34	19	0,022
WEA-Onshore	58	36	0,003
WEA-Offshore	76	34	0,0047
Kernkraftwerk	122	0	0,008

Tabelle 4.6: Investitions-, Fix- und variable Kosten der Kraftwerke

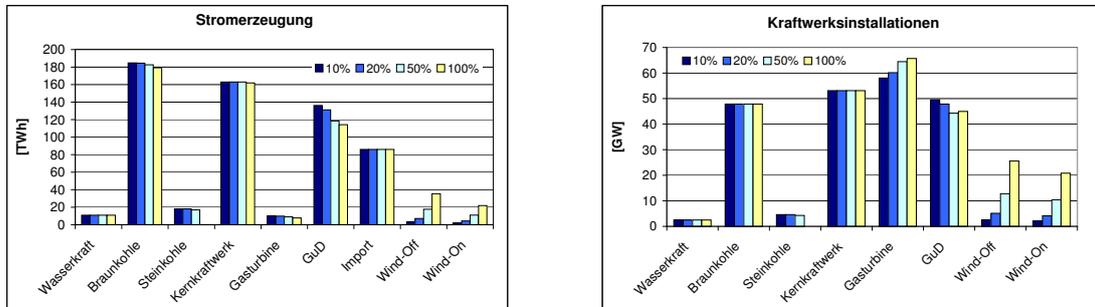


Abbildung 4.25: Stromerzeugung und Kraftwerksinstallation in Abhängigkeit der Windenergie

Parallel zur Installation von Windenergieanlagen nimmt die Leistung der Gasturbinen als Back-Up-Kraftwerk zu, um windstille Stunden auszugleichen. Bei den Gasturbinen ist ein Anstieg von 55 GW auf 66 GW zu verzeichnen (vgl. Abbildung 4.25, Seite 77). Die Stromerzeugung mit Gasturbinen dagegen nimmt um 2 TWh ab.

Die Installation und Nutzung von GuD kann durch die Integration von Windenergie reduziert werden. Die Installation nimmt von 50 GW auf 45 GW ab. Die Stromerzeugung verringert sich von ursprünglichen 136 TWh auf 114 TWh.

Kohlekraftwerke können im geringen Maße durch den Einsatz von Windenergieanlagen reduziert werden. Steinkohlekraftwerke werden bei einem Ausbau der Windenergie auf 45 GW

nicht mehr installiert. Ohne Windenergie trugen sie noch mit 18 TWh zur Stromerzeugung bei. Die Stromerzeugung in Braunkohlekraftwerken wird von ursprünglichen 185 TWh um 5 TWh reduziert.

Die Nutzung der Kernenergie verringert sich nur um 1 TWh. Eine Deckung der Grund- und Mittellast erfolgt nach wie vor durch Kernkraft, GuD und Braunkohle.

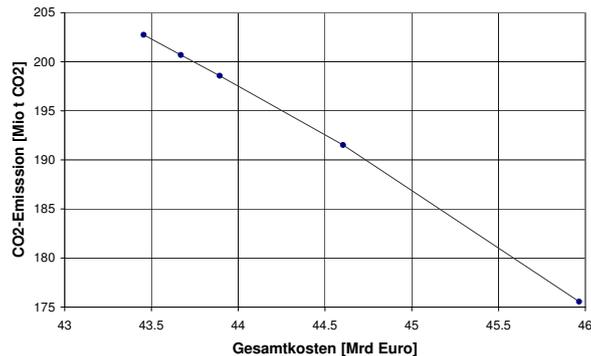


Abbildung 4.26: Gegenüberstellung der CO_2 -Emission und der Gesamtkosten in Abhängigkeit der Installation von Windenergieanlagen

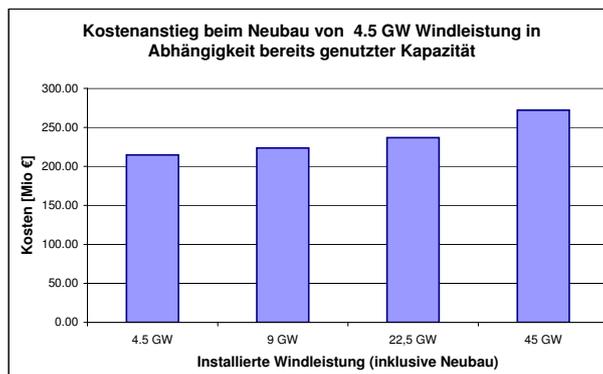


Abbildung 4.27: Kostenanstieg beim Neubau von 4,5 GW Windleistung in Abhängigkeit bereits genutzter Kapazitäten

Durch den Einsatz von Windenergie kann eine CO_2 -Emission von 27 Mio t vermieden werden. Die CO_2 -Emission des Szenarios ohne Windenergieanlagen beträgt 202 Mio t und nimmt kontinuierlich mit der Erhöhung der Installation von Windenergieanlagen ab. Die Gesamtkosten steigen dagegen um 2,5 Mrd. Euro an, von 43,5 Mrd. auf 46 Mrd. Euro (siehe Abbildung 4.26,

Seite 78). Dabei ist der Kostenanstieg allerdings nicht linear (siehe Abbildung 4.27, Seite 78). Der Neubau von 4,5 GW Windenergieanlagen und die damit verbundene Energieübertragung ist mit Zusatzkosten zwischen 215 Mio. und 272 Mio. Euro verbunden: Der Kostenanstieg von 0 GW auf 4,5 GW beträgt 215 Mio. Euro, von 4,5 GW auf 9 GW beträgt er 224 Mio. Euro, im Bereich von 9 GW bis 18 GW um 4,5 GW beträgt er im Schnitt 237 Mio. Euro, und zwischen 22,5 und 45 GW ist ein Anstieg von 272 Mio. Euro zu verzeichnen.

4.5.1 Preisbildung im öffentlichen Strommarkt

Die Grenzkosten des teuersten noch von der Nachfrage verlangten Kraftwerks bestimmen in einem öffentlichen Strommarkt den Preis. Da es sich bei der elektrischen Energie um ein nicht lagerbares Gut handelt und sie deshalb direkt im Verbraucherzeitpunkt erzeugt und zur Verfügung gestellt werden muss, orientieren sich die Grenzkosten an den variablen Kosten des Grenzkraftwerkes⁴.

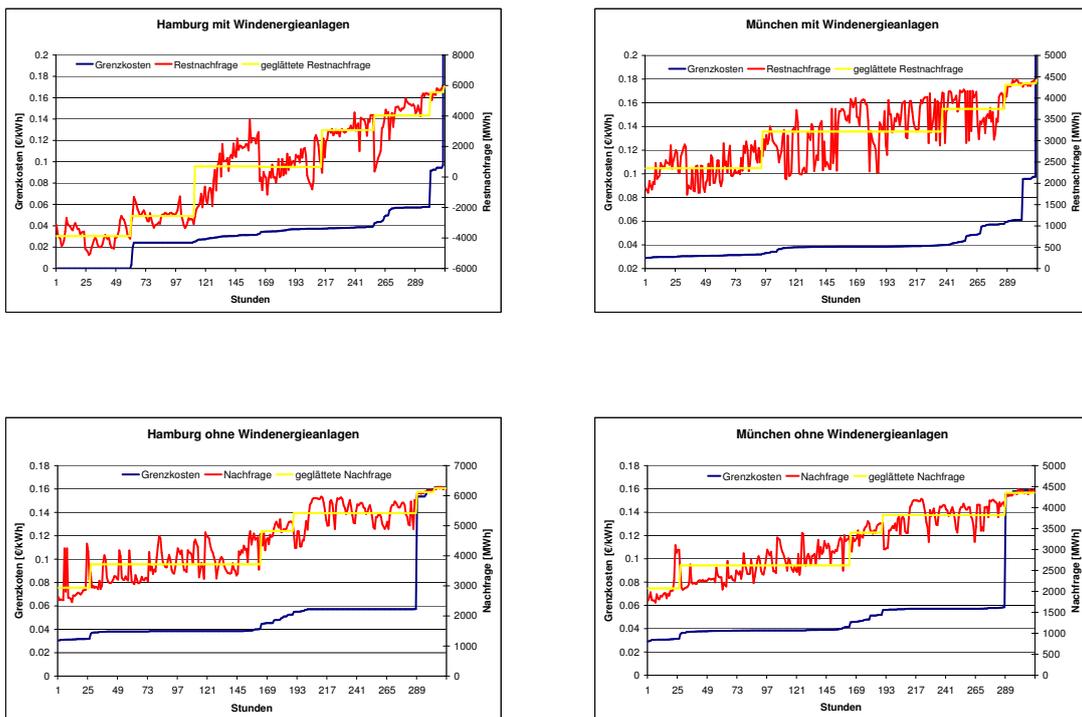


Abbildung 4.28: Strompreisbildung in Nord- und Süddeutschland mit und ohne Windenergieanlagen

Der Einsatz eines Kraftwerks ist also nur dann sinnvoll, wenn der aktuell erzielbare Strompreis

⁴Das Grenzkraftwerk ist das teuerste Kraftwerk, das noch zur Deckung der Nachfrage eingesetzt werden muss; Durch dieses Kraftwerk wird die Höhe des Strompreises bestimmt.

die laufenden Betriebskosten auch deckt. Je nachdem welche Kraftwerke für die Stromerzeugung zur Deckung der Nachfrage in Anspruch genommen werden, schwankt der Preis entsprechend den Grenzkosten der einzelnen Kraftwerke.

Abbildung 4.28 auf Seite 79 stellt die Entwicklung des Strompreises mit zugehöriger Restnachfrage für einen Standort im Norden Deutschlands mit hohem Windenergieanteil (Hamburg) und einen Standort in Süddeutschland (München), an dem die Windenergie nur in geringem Maße zur lokalen Stromerzeugung beiträgt, dar (oben). Hier wird die Restnachfrage, die Differenz aus Verbraucherlast und Windangebot betrachtet, da durch die Nutzung des Stroms aus Windenergie die Nachfrage in unterschiedlichem Maße bereits gedeckt wird. In den unteren Diagrammen wird die Strompreisentwicklung für ein Szenario ohne Windenergie dargestellt. In allen vier Graphiken sieht man eine parallele Entwicklung des Strompreises zu der Nachfrage (bzw. Restnachfrage): Bei steigender Nachfrage (bzw. Restnachfrage) steigt der Preis.

Der Strompreis in Hamburg fällt im Gegensatz zu München beim Szenario mit Windenergie bis auf Null. Hier ist durch hohe Windgeschwindigkeiten ein Überangebot an elektrischer Energie vorhanden, so dass die Restnachfrage in den negativen Bereich fällt. Mit Ausnahme der letzten Stunde (entspricht Stunde 273 im Modell) liegen die Strompreise zwischen 0 und 0,1 Euro/kWh in Hamburg und 0,03 bis 0,1 Euro/kWh in München.

Beim Szenario ohne Wind liegen die Strompreise in Hamburg und München gleichermaßen im Intervall von 0,03 Euro/kWh 0,06 bei niedriger bis mittlerer Nachfrage und bei hoher Nachfrage bei 0,16 Euro/kWh. Im Raum München ist die Verbraucherlast allerdings geringer als im Raum Hamburg, dadurch ergeben sich Unterschiede im Preisniveau. In München liegt der Strompreis bei einer Nachfrage von knapp 4000 MWh bei 0,058 Euro/kWh in Hamburg bei einer gleichen Nachfrage bei 0,04 Euro/kWh.

Aufgrund der Nutzung von Windenergieanlagen schwankt der Strompreis stärker, dies resultiert aus den zunehmenden Transportkosten, damit ist die Preisentwicklung nicht mehr ausschließlich von den Betriebskosten eines Kraftwerks abhängig und lässt sich somit nicht in reiner Treppengestalt abbilden. Ohne Windenergienutzung ist eine klarere Treppengestalt erkennbar, Schwankungen treten allerdings auch hier bei einer Nachfrage von knapp 5000 MWh in Hamburg und 3750 MWh in München auf.

Beim Verkauf zum kurzfristigen Strompreis wird bei den Kraftwerken, welche die Grenzkosten bestimmen, nur die Deckung der Betriebskosten erzielt. Zur Erlangung einer Fixkostendeckung müssten diese Betreiber ihren Strom oberhalb dieses Preises verkaufen. In Zeiten mit hoher Marktmenge steigen somit die Strompreise zum einen durch Preisaufschläge der Betreiber der Grenzkraftwerke und zum anderen durch höhere Betriebskosten dieser Kraftwerke. Hier handelt es sich meist um Kraftwerke, die nur wenige Stunden im Jahr zur Deckung von Spitzenlasten eingesetzt werden.

Kraftwerke mit Grenzkosten unter dem Marktpreis erwirtschaften bei hoher Nachfrage einen Deckungsbeitrag⁵, der zur Deckung der Fixkosten beiträgt. Inwieweit allerdings eine Deckung der Gesamtkosten stattfindet, ist von den Nachfragebedingungen und der Struktur des Erzeugungssystems abhängig. Aus Anbietersicht ist ein Markt mit knappen, gerade ausreichenden

⁵Der betriebswirtschaftliche Deckungsbeitrag eines Unternehmens entspricht der Differenz aus Umsatz und Kosten des Unternehmens

Kapazitäten wirtschaftlich profitabler, da hier das durchschnittliche Preisniveau höher ist als bei reichlich vorhandenen Kapazitäten; allerdings können dann Engpässe bei der Versorgung auftreten [26].

4.5.2 Interpretation der marginalen Kosten

Grenzkosten der Nachfrage

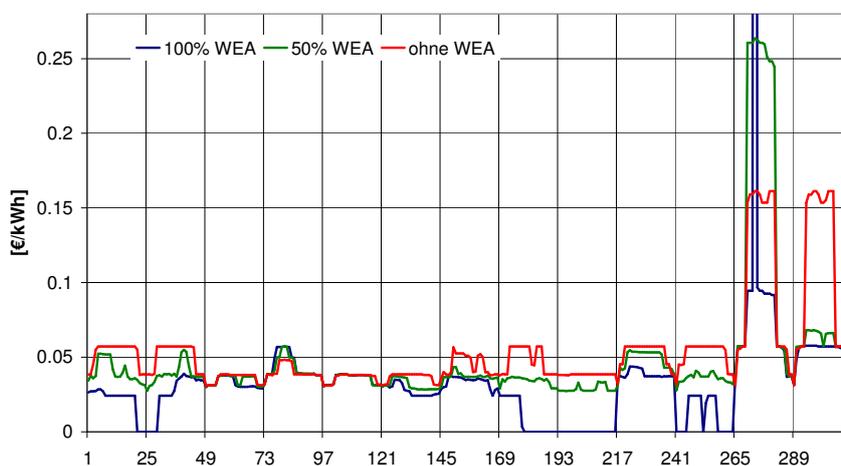


Abbildung 4.29: Verlauf der Grenzkosten der Nachfrage

Die marginalen Kosten der Nachfrage, auch Grenzkosten genannt, sind die Zusatzkosten im Jahr, welche durch einen Anstieg der Nachfrage im entsprechenden Zeitpunkt um eine Megawattstunde anfallen würden. In einem ökonomischen Markt sind die Grenzkosten gleichbedeutend mit dem Strompreis. Dieser ist, wie oben gezeigt, stark abhängig von dem Angebot und der Nachfrage.

Die Grenzkosten sind von den installierten Kraftwerkskapazitäten abhängig. Würde ein Anstieg der Nachfrage zu einer gewissen Stunde die Installationen neuer Anlagen nach sich ziehen, stiegen die marginalen Kosten enorm an. Sind bereits genügend Kraftwerkskapazitäten vorhanden, um die Deckung einer erhöhten Nachfrage zu befriedigen, orientieren sich die Grenzkosten in der Größenordnung an den variablen Kosten der Stromerzeugung. Allerdings muss beachtet werden, dass eine Veränderung in der Nutzung der Kraftwerke ebenso die

Stromspeicherung und den Transport beeinflusst und damit zu einem Kostenanstieg beitragen kann. Dies wird in den Grenzkosten mit berücksichtigt.

In Abbildung 4.29 auf Seite 81 sind die Grenzkosten der Nachfrage für einen Modelldurchlauf mit 45 GW installierten Windenergieanlagen, mit 22,5 GW installierten Windenergieanlagen (50% der möglichen Installationen) und ohne Windenergieanlagen je Stunde dargestellt. Im Allgemeinen ist an deren Verlauf der Tagesgang gut erkennbar. Aufgrund einer geringeren Nachfrage in der Nacht sind bestehende Kapazitäten nicht völlig ausgelastet, so dass die kostengünstigste Variante der Stromerzeugung gewählt werden kann und damit die Grenzkosten geringer ausfallen. Sie liegen überwiegend im Intervall von 0,02 bis 0,06 Euro/kWh.

Betrachtet man nun die Grenzkosten in Abhängigkeit von den installierten Windkraftwerken, erkennt man große Unterschiede in der Höhe der Kosten. Bei einem Anstieg der Nachfrage muss mehr Strom erzeugt werden. Steht nun Windenergie zur Verfügung, welche von bereits installierten Windenergieanlagen umgewandelt werden kann, so entstehen weniger Kosten, je mehr freie Kapazität zur Verfügung steht. Damit sinken die marginalen Kosten bei einer großen Menge an Windenergieanlagen bis auf 0 Euro/kWh. Vergleiche hierzu beispielsweise die Stunden 21- 29, 179 - 216 oder 141 - 245 und 258 - 264 aus den Abbildungen 4.29 auf Seite 81 und 4.30 auf Seite 83. Hier ist ein Überschuss an Windenergie vorhanden, so dass der Strom als wirtschaftliches Gut an Wert verliert.

Wurde nun das Windangebot schon völlig ausgeschöpft, steigen die marginalen Kosten, je mehr überschüssige Anlagen installiert sind, da diese trotz Nichtnutzung finanziert werden müssen. Dieses Phänomen tritt beispielsweise in Stunde 81, 113 oder 273 auf. In Stunde 273 wird die maximale Nachfrage erreicht, bei der die Anlagen komplett ausgelastet sind, da hier zudem kaum Windenergie genutzt werden kann. Eine Erhöhung der Nachfrage führt zum Bau eines neuen Kraftwerks.

Parallel zum Bau von Windenergieanlagen müssen so genannte Back-Up-Kraftwerke existieren, durch die in windstillen Stunden die Nachfrage gedeckt werden kann. Stehen nun mehr Windenergieanlagen zur Verfügung, werden alternative Kraftwerke zur Deckung der Spitzenlast, z.B. Gasturbinen, in geringerem Maße zur Stromerzeugung genutzt. Die Leistung herkömmlichen Kraftwerke wird auf die Installation von Windenergieanlagen abgestimmt. Bei einer ausgeprägten Windenergienutzung besteht damit eine starke Abhängigkeit des Erzeugungssystems von der Windenergie, so dass bei einem Anstieg der Nachfrage in eine Stunde mit niedrigen Windgeschwindigkeiten ein Neubau eines anderen Kraftwerks nötig wird. Solch ein Engpass tritt beispielsweise in Stunde 273 auf, es müssen neue Kapazitäten errichtet werden, was durch eine gleich bleibende Nachfrage vermieden werden kann. Die Grenzkosten für den Modelldurchlauf mit 100% installierten Windenergieanlagen erreichen so eine Höhe von 2,16 Euro/kWh. Der Strom als knappes Gut gewinnt an Wert und kann damit teurer vermarktet werden.

Es besteht ein starker Zusammenhang zwischen dem Windangebot, der Stromnachfrage und den Grenzkosten. Der größte Zusammenhang lässt sich zwischen den Daten der Differenz aus Stromnachfrage und Windangebot (=Restnachfrage) und den Grenzkosten erkennen. Hier liegt der Korrelationskoeffizient bei 0,8, d.h. ist die Energienachfrage hoch, aber nur geringe Windenergie vorhanden, welche für die Stromerzeugung genutzt werden kann, steigen die Preise an.

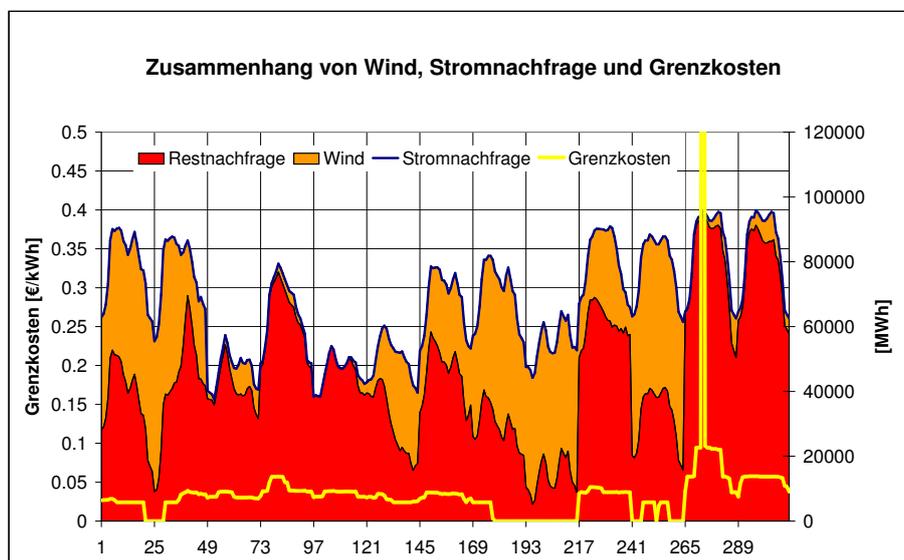


Abbildung 4.30: Zusammenhang von Windangebot, Nachfrage und Grenzkosten

Die Restnachfrage ist in Abbildung 4.30 auf Seite 83 durch die rote Fläche dargestellt. Die orange Fläche spiegelt das Windangebot wider. Folglich deckt die komplette Fläche in dieser Graphik die Nachfrage ab. Das absolute Maximum der Kosten wird in der 273. Stunde erreicht. In dieser Stunde nimmt sowohl die Nachfrage als auch die Restnachfrage ihr Maximum an; deshalb steigen die Kosten auf 2,19 Euro/kWh.

Grenzkosten der Kraftwerkskapazität

Die Abbildung 4.31 auf Seite 84 zeigt die Grenzkosten der Kraftwerkskapazität für Windenergieanlagen. Die Grenzkosten geben die Kosten an, welche bei einer zusätzlichen Installation von Windenergieanlagen von einem Megawatt entstehen würden. Ein Neubau von Kraftwerken rechnet sich nur dann, wenn während der Lebensdauer mindestens eine Deckung der Fixkosten erzielt wird. Erfolgt ein Neubau trotz ausreichender Kapazität, wird zwar die Versorgungssicherheit erhöht, die Investition wird aber nicht ausreichend vergütet. Wird der Energiemarkt von Kraftwerken mit hohen Brennstoffkosten dominiert, sind die Strompreise höher, so dass diese zu einer besseren Fixkostendeckung eines Neubaus beitragen. Je mehr Windenergieanlagen an einem Ort bereits installiert sind, umso teurer wird ein Neubau.

An der Höhe der Grenzkosten sieht man deutliche Unterschiede für Küstenregionen oder solche, die mit diesen direkt durch Stromleitungen verbunden sind, und Gebieten im Binnenland. Die marginalen Kosten für Küstengebiete belaufen sich auf 20 - 60 Euro/kW und

Grenzkosten der Kraftwerkskapazität

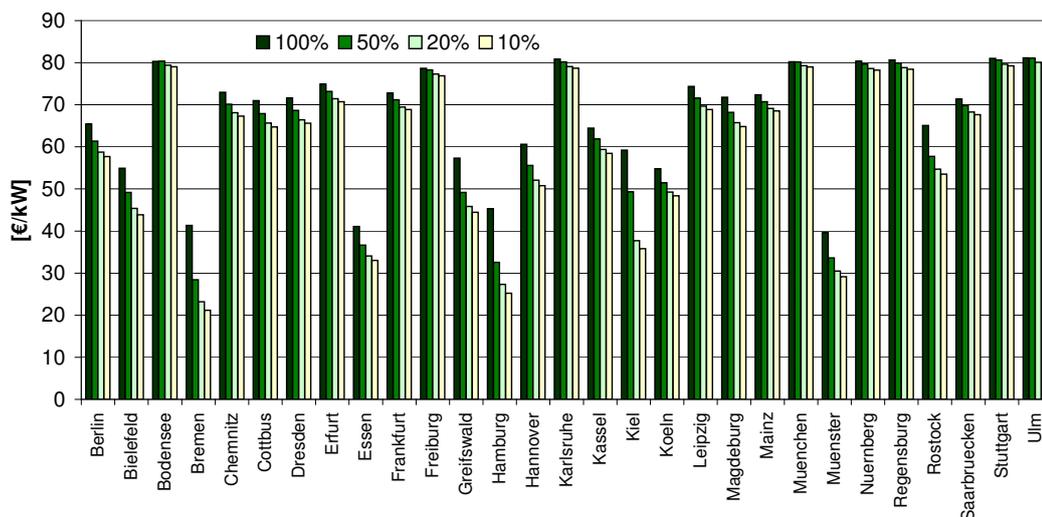


Abbildung 4.31: Grenzkosten der Onshore-Windenergieanlagen

im Binnenland auf 80 Euro/kW. Damit orientieren sie sich grob an der Annuität, die bei Onshore-Windenergieanlagen bei 58 Euro/kW liegt.

Durch einen Zubau an Windenergieanlagen entstehen Investitionskosten in Höhe der Annuität von 58 Euro/kW. Reduziert werden diese Kosten durch den Wegfall der variablen Kosten inklusive Brennstoffkosten der herkömmlichen Energieträger, da diese für die Stromerzeugung nicht mehr genutzt werden müssen. Da jeder Energieträger unterschiedliche Brennstoffkosten aufweist, entstehen Unterschiede in den Grenzkosten der Kraftwerkskapazität, die eine Spanne von 20 - 80 Euro/kW abdecken. In den Küstengebieten kann, aufgrund eines hohen Windaufkommens und dessen Umwandlung in elektrische Energie, ein Teil an herkömmlichen Energieträgern eingespart werden. Im Binnenland dagegen führt eine weitere Installation von Windenergieanlagen zu keinen Einsparungen andere Energieträger, da durch ein zu geringes Windangebot dieses nicht effizient eingesetzt werden kann; damit entstehen unterschiedliche Kosten in den verschiedenen Gebieten.

Im Binnenland, wo kaum Windenergie genutzt werden kann, gibt es nur geringe Unterschiede zwischen den Szenarien. Ein weiterer Ausbau in diesen Regionen ist also kostenmäßig nicht von den dort bestehenden Anlagen abhängig, da die Windenergie in den seltensten Fällen

und dann auch nur im minimalen Maße genutzt werden kann. Ein Bau ist also überflüssig und damit auch sehr kostenintensiv.

In Küstengebieten wie beispielsweise in Kiel, Bremen, Hamburg und Greifswald ist trotz geringeren Grenzkosten eine starke Erhöhung der Grenzkosten zwischen den Szenarien zu erkennen. Sind nur wenige Windenergieanlagen in Betrieb, ist der Hauptteil der Kraftwerksnutzung durch herkömmliche Kraftwerke und der Nutzung von Spitzenlast-Kraftwerken optimal gedeckt, so dass kaum Abhängigkeit vom Wind gegeben ist. Durch den Zubau von einem Megawatt Windenergieanlage wird die Optimallösung nur minimal beeinflusst, und so entstehen auch geringere Kosten in Höhe von 20 Euro/kW.

Bei einem hohen Anteil der Windenergie an der Stromerzeugung ist die optimale Fahrweise der Kraftwerke stark von dieser abhängig. Damit kommt es bei einem weiteren Ausbau zu einer Neustrukturierung der Energieerzeugung, da die Speicherung der Energie in Pumpspeicherkraftwerken sowie ein ausgeprägter Transport von Nord nach Süd stark mit der Nutzung von Windenergie verbunden sind. Damit nehmen die Kosten zu und erreichen eine Höhe von bis zu 60 Euro/kW.

Zusammenfassung

Ein Kostenanstieg durch die Integration von Windenergie ist nicht linear. Es besteht eine starke Abhängigkeit von bereits in Nutzung befindlichen Anlagen und dem lokalen Windaufkommen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die Errichtung von Windenergieanlagen an Standorten mit hohem Windaufkommen durchaus rentabel sein kann, in Gebieten, die von Windarmut gekennzeichnet sind, nur Kosten durch die Errichtung entstehen würden. Alles in allem ist die Nutzung von Windenergie zwar teurer als die Nutzung herkömmlicher Kraftwerke, im Hinblick auf die geplante CO_2 -Emissionsreduzierung jedoch nötig.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

Probleme des Kraftwerkseinsatzes der Energiewirtschaft können mit Hilfe der linearen Optimierung angemessen gelöst werden. Das betrachtete Modell ist eine einfache Abbildung des deutschen Kraftwerksparks und Verbundnetzes. Es erzeugt einen kostenoptimalen Kraftwerksmix und Lastfluss unter Berücksichtigung der sich ändernden Stromnachfrage und der fluktuierenden Windenergie. Die softwaretechnische Realisierung in GAMS wird den Anforderungen an die Qualität der Lösung und der Rechenzeit in gleicher Weise gerecht. GAMS stellt dafür eine sehr hilfreiche Software dar, in der Optimierungsprobleme übersichtlich und unabhängig vom Lösungsalgorithmus implementiert werden können. Als Solver wurde Cplex gewählt; dieser stellt mehrere Algorithmen zur Verfügung. Laufzeitanalysen ergaben, dass ein inneres Punkteverfahren, die Barriere-Methode, auf Grund einer sehr dünn besetzten Restriktionsmatrix in viel kürzerer Zeit die Optimallösung bzw. den Nachweis über die Unbeschränktheit des Problems liefert als verschiedene Simplex-Verfahren.

Die Betrachtung eines kompletten Jahres mit stündlicher Auflösung stellt aus Gründen des Speicherbedarfs und der Rechenzeit herkömmlicher Personalcomputer allerdings noch ein Problem dar. Es müssen Einschränkungen bezüglich der Zeitschritte gemacht werden. Dazu wurde ein Auswahlverfahren entwickelt und gezeigt, dass eine exakte Simulation der Wind- und Nachfragedaten durch eine geeignete Wahl und Gewichtung von Zeitschritten nötig ist.

Durch die externe Speicherung der Eingabedaten können schnell und einfach Änderungen der elementaren Voraussetzungen vorgenommen werden, ohne dass in die Modellierung selbst eingegriffen werden muss.

Anhand der Stromgestehungskosten kann die optimierte Kraftwerkswahl einfach erklärt werden. Durch die Interpretation der dualen Lösung, der so genannten Grenzkosten, können wichtige Aussagen über die Kosten einzelner Kraftwerke gemacht werden. Im Gegensatz zu gewöhnlichen Kraftwerken nehmen die Installationskosten für Windenergieanlagen zu, je mehr Anlagen schon in Betrieb sind. Die Grenzkosten der Nachfrage bilden den Strompreis. Dieser ist nicht nur von der Höhe der Nachfrage sondern auch vom lokal genutzten Kraftwerksmix abhängig. Bei sehr hoher Windenergienutzung kann es passieren, dass der Strompreis trotz hoher Energiekosten bis auf Null sinkt, da Strom als wirtschaftliches Gut betrachtet durch ein Überschussangebot an Wert verliert. Die Kosten für die Windenergie sind stark abhängig

von lokalen Gegebenheiten. Je nach genutzter Leistung und örtlichem Windaufkommen unterscheiden sich die Kosten enorm.

Das vorgestellte Modell kann noch erweitert werden, um eventuell genauere Ergebnisse zu erhalten. Mögliche Erweiterungen sind im Folgenden kurz dargestellt. Die modellierten Kraftwerke unterscheiden sich durch die spezifischen Kosten, ihren Wirkungsgrad und den Laständerungskoeffizienten. Hier könnte eine Erweiterung der Modellierung stattfinden, welche die Kraftwerke detailgetreuer abbildet. Eine Berücksichtigung des Teillastbetriebes von Kraftwerken wäre denkbar; dabei muss beachtet werden, dass der Wirkungsgrad niedriger ist als beim Volllastbetrieb. So entsteht eine Abhängigkeit des Wirkungsgrades vom Schaltzustand des Kraftwerks. Anfahrvorgänge und Mindeststillstandzeiten von Kraftwerken werden ebenfalls in der Implementierung nicht berücksichtigt, sie sind abhängig von der letzten Inbetriebnahme. In der Realität gibt es Mengen-Preis-Staffelungen für Brennstoffe. In diesem Modell werden jedoch die Brennstoffkosten als konstant angesehen. Die Übertragungsverluste des Netzes sind abhängig vom aktuellen Lastfluss. Die Berücksichtigung all dieser Details würde weg von einer linearen Programmierung hin zu einer gemischt-ganzzahligen Programmierung führen. Des Weiteren wäre die Hinzunahme von zusätzlichen erneuerbaren Energien wie beispielsweise der Solarenergie eine denkbare Erweiterung der Modellierung.

Literaturverzeichnis

- [1] AGEB Arbeitsgemeinschaft Energiebilanzen, www.ag-ernegiebilanzen.de, Stand 25. Juli 2005
- [2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, J. J. Jarvis, *Linear programming and network flows*, John Wiley and Sons.Inc., New York, Second Edition, 1990
- [3] M. S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty, *Nonlinear Programming, Theory and Algorithms* Kapitel 2 u. 9, John Wiley and Sons.Inc., USA, Second Edition, 1993
- [4] BINE Informationsdienst, *Weltenergieverbrauch*, Online-Wissenskatalog der Deutschen Energie-Agentur GmbH (dena), 2004
- [5] K. H. Borgwardt, *The Average Number of Pivot Steps Required by the Simplex-Method is Polynomial*, Zeitschrift für Operations Research, Vol. 7, No. 3, 1982
- [6] Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, *Klimaschutz*, www.bmu.de/klimaschutz, Stand August 2005
- [7] Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, *Entwicklung der erneuerbaren Energien*, Stand November 2004
- [8] Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, *Erste vorläufige Abschätzung zur Entwicklung der erneuerbaren Energien im Jahr 2004 in Deutschland*, unter Verwendung aktueller Daten der Arbeitsgruppe Erneuerbare Energien-Statistik (AGEE-Stat), Stand Februar 2005
- [9] Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz und Reaktorsicherheit, *Umweltpolitik, Erneuerbare Energien in Zahlen - nationale und internationale Entwicklung*, Internet-Update, Stand November 2004
- [10] dena Deutsche Energie-Agentur, *Energiewirtschaftliche Planung für die Netzintegration von Windenergie in Deutschland an Land und Offshore bis zum Jahr 2020*, dena-Netzstudie 2005
- [11] DEWI Deutsches Windenergie-Institut GmbH, Wilhelmshaven, Dezember 2004
- [12] EIA Energy Information Administration, *World Carbon Dioxide Emission from the Consumption and Flaring of Fossil Fuels, 1980-2003*, International Energy Annual 2003, www.eia.doe.gov/env/intlenv.htm, Stand Juli 2005

- [13] Paul van der Eijk, *GDX facilities in GAMS, GDX interface to Excel, GDX text dump, GDX difference tool*, GAMS Development Corporation, November 2002
- [14] Enquete-Kommission des Deutschen Bundestages, *Nachhaltige Energieversorgung unter den Bedingungen der Globalisierung und der Liberalisierung*
- [15] Europäischer Stromverbund, *Europäischer Stromverbund*, www.vpe.ch, Stand September 2005
- [16] European Commission, Directorate-General for Energy and Transport, *EU Energy and Transport in Figures 2004*, Statistical pocketbook, 2004
- [17] T. Haase, *Anforderungen an eine durch erneuerbare Energien geprägte Energieversorgung - Untersuchung des Regelverhaltens von Kraftwerken und Verbundnetzen*, Dissertation Universität Rostock, Rostock, 2005
- [18] T. Hamacher, T. Haase, H. Weber, *Simulation des UCTE-Netzes mit fluktuierenden Dargeboten*, Arbeitskreis Energie der DPG, Bad Honnef (Rhein), Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Universität Rostock, 17. Oktober 2003
- [19] T. Hamacher, T. Haase, H. Weber, J. Düweke, *Integration of large scale wind power into the grid*, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, Universität Rostock, Rostock 2004
- [20] T. Hamacher, T. Haase, H. Weber, *Einfluss der Einspeisung von Windenergie auf die Struktur des Kraftwerksparks und des Übertragungsnetzes*, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching, Universität Rostock, Rostock 2004
- [21] International Energy Agency, *Resources to Reserves - Oil and Gas Technologies for the Energy of the Future*, Online-Bookshop, ISBN-2-64-10947-1, 2005
- [22] D. Jungnickel, *Optimierungsmethoden, Eine Einführung*, Springer-Verlag, 1999
- [23] D. Jungnickel, *Optimierungsmethoden, Teil-2-WS 2003/4*, Institut für Mathematik, Universität Augsburg, eine Komposition aus Dirk Hachenberger Optimierungsmethoden I und II, Winter 1999/2000 und Sommer 2000, 1999
- [24] R. K. Martin, *Large Scale Linear and Integer Optimization*, Kluwer Academic Publisher, 2. Auflage, USA 1999
- [25] K. Mönnich, *Vorhersage der Leistungsabgabe netzeinspeisender Windkraftanlagen zur Unterstützung der Kraftwerkseinsatzplanung*, Dissertation Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Oldenburg 2000
- [26] W. Pfaffenberger, M. Hille, *Investitionen im liberalisierten Energiemarkt: Optionen, Marktmechanismen, Rahmenbedingungen*, Bremer Energie Institut, Abschlussbericht, Bremen, Januar 2004
- [27] V. Quaschnig, *Systemtechnik einer klimaverträglichen Elektrizitätsversorgung in Deutschland für das 21. Jahrhundert*, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf 2000
- [28] Regierung Online, *Deutschland ist der weltgrößte Windenergiemarkt*, www.bundesregierung.de, Stand 20. September 2005

- [29] E. Roth, *Mensch, Umwelt und Energie*, etv-Verlag, Düsseldorf, 1991
- [30] Shell, *Zukunftszenarien: Weltenergieverbrauch bis 2060 - denkbare Entwicklung*, www.shell-wollishofen.ch/tips.html, Stand September 2005
- [31] WDR Fernsehen, *CO₂-Einsparung in Deutschland*, www.wdr.de/tv/q21/614.0.phtml, Stand September 2005
- [32] Wikipedia, *Windenergieanlagen*, www.wikipedia.org/wiki/Windenergieanlagen, Stand September 2005
- [33] World-Wind-Atlas, Sander und Partner GmbH, Schweiz