

Wolf-Christian Müller

**Makroskopische und statistische  
Eigenschaften dreidimensionaler  
magnetohydrodynamischer  
Turbulenz**

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik

# **Makroskopische und statistische Eigenschaften dreidimensionaler magnetohydrodynamischer Turbulenz**

**Wolf-Christian Müller**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Physik der Technischen Universität  
München zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Naturwissenschaften**

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. H.-J. Körner

Prüfer der Dissertation: 1. Hon.-Prof. Dr. F. Wagner  
2. Univ.-Prof. Dr. H. Friedrich

Die Dissertation wurde am 14.12.1999 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Physik am 26.1.2000 angenommen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die inkompressible Magnetohydrodynamik</b>	<b>3</b>
2.1	Das Modell . . . . .	3
2.2	Entdimensionierung und Kennzahlen . . . . .	4
2.3	Der hydrostatische Druck $p$ und die Wirbelstärke $\omega$ . . . . .	5
2.4	Die idealen Erhaltungsgrößen . . . . .	6
2.5	Die Elsässer-Variablen . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Turbulenz-Theorie</b>	<b>9</b>
3.1	Der statistische Ansatz . . . . .	9
3.2	Die Kolmogoroff-Theorie . . . . .	10
3.2.1	Die K41-Phänomenologie . . . . .	10
3.2.2	Die Rolle der Reynoldszahl $Re$ . . . . .	12
3.2.3	Ergebnisse des K41-Modells . . . . .	13
3.3	Die Iroschnikoff-Kraichnan-Theorie . . . . .	14
3.3.1	Ergebnisse des IK-Modells . . . . .	15
3.4	Intermittenz . . . . .	15
3.4.1	Das She-L��v��que-Modell . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Die verwendeten numerischen Methoden</b>	<b>17</b>
4.1	Das Pseudospektralverfahren . . . . .	18
4.1.1	Die MHD-Gleichungen im diskreten Fourier-Raum . . . . .	18
4.1.2	Hyperdissipation . . . . .	19
4.1.3	Der Aliasing-Fehler . . . . .	19
4.2	Die Zeitintegration . . . . .	20
4.3	Anfangsbedingungen und Systemparameter . . . . .	21
4.3.1	Die Initialisierung der magnetischen Helizität $H$ . . . . .	21
4.3.2	Die Initialisierung der Kreuzhelizität $K$ . . . . .	22
4.3.3	Die Wahl von $Re$ und $Rm$ . . . . .	22
4.4	Das Simulationsprogramm . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Makroskopische Eigenschaften zerfallender MHD-Turbulenz</b>	<b>25</b>
5.1	Die drei idealen Invarianten $E$ , $H$ und $K$ . . . . .	28
5.1.1	Selektiver Zerfall . . . . .	28
5.1.2	Der Energiezerfall . . . . .	30
5.2	Die Dynamik zwischen $E^M$ und $E^K$ . . . . .	33
5.2.1	Generelle Eigenschaften der $(E^K \leftrightarrow E^M)$ -Dynamik . . . . .	33

5.2.2	Das Verhalten von $\Gamma$ . . . . .	35
5.3	Die Energiedissipation . . . . .	40
5.4	Ein Modell des Energiezerfalls . . . . .	41
5.4.1	Das $H$ -Modell . . . . .	42
5.4.2	Einbeziehung des nichtlinearen Energietransfers . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Statistische Eigenschaften zerfallender MHD-Turbulenz</b>	<b>47</b>
6.1	Die Energiespektren . . . . .	48
6.1.1	Die Normierung der Spektren . . . . .	48
6.1.2	Normierung mittels eines Hybridmodells . . . . .	49
6.1.3	Das Gesamtenergiespektrum . . . . .	50
6.1.4	Kinetisches und magnetisches Energiespektrum . . . . .	52
6.2	Die Strukturfunktionen . . . . .	54
6.2.1	Die Strukturfunktionen der Elsässer-Felder . . . . .	54
6.2.2	Die erweiterte Selbstähnlichkeit . . . . .	55
6.2.3	Die räumliche Turbulenzstruktur . . . . .	60
6.3	Ein Intermittenz-Modell für MHD-Turbulenz . . . . .	65
6.4	Die Wahrscheinlichkeitsverteilung . . . . .	68
6.5	Vergleich mit getriebener MHD-Turbulenz . . . . .	71
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>77</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Turbulente Strömungen sind ein in der Natur allgegenwärtiges Phänomen. Im Gegensatz zur laminaren Strömung, die durch eine zeitlich weitgehend stationäre Stromlinientopologie charakterisiert wird, beobachtet man in einem turbulent fließenden Medium ein im Zeitverlauf scheinbar zufälliges, lokal nicht vorhersagbares, intermittentes Geschwindigkeitsfeld.

Für uns Erdbewohner sind Begegnungen mit gas- und hydrodynamischer Turbulenz in Luft und Wasser alltäglich. Der sich kräuselnde Rauch einer Zigarette, das Flimmern in einer Luftspiegelung oder die unberechenbaren Wasserbewegungen eines reißenden Flusses mögen als Beispiele dienen.

Von diesen vergleichsweise kleinen Größenskalen ausgehend findet man fortlaufend, bis in Bereiche planetarer Größenordnung mit einer Ausdehnung von mehreren tausend Kilometern, ähnliche turbulente Strömungsmuster in den Ozeanen und der Atmosphäre, wie kartierte Meereströmungen oder meteorologische Satellitenbilder zeigen.

Auch bei der Umströmung von Grenzflächen – eines Flugzeugflügels, dem Rumpf eines Schiffes oder den Innenwänden einer Pipeline – kann es zum Auftreten von Turbulenz kommen, was Auswirkungen auf die effektive Reibung zwischen der Grenzfläche und dem fließenden Medium hat und sich bei Fahrzeugen u.a. direkt im Treibstoffverbrauch niederschlägt.

Das Verständnis gas- und hydrodynamischer Turbulenz ist deshalb ein essentieller Baustein in der Beschreibung und Vorhersage des Erdklimas mit all seinen Facetten, z.B. dem lokalen Wetter oder den komplexen Vorgängen in den Ozeanen, und gleichermaßen wichtig bei technischen Anwendungen, wie beispielsweise der Konstruktion von Luft-, Wasser- oder Landfahrzeugen.

Doch neben gas- und hydrodynamischer Turbulenz gibt es eine weitere wichtige, auf der Erde nur schwer zu beobachtende Gruppe turbulenter Strömungen: Die Plasmaturbulenz.

Sie ist auf der Erde fast ausschließlich in den Laborexperimenten zur nuklearen Kernfusion realisiert. Dabei wird ein Deuterium-Tritium-Plasma auf bis zu 100 Millionen Grad Celsius erhitzt, um die freiwerdende Bindungsenergie bei der Verschmelzung der leichten Atomkerne zu nutzen.

Jenseits der inneren Erdatmosphäre, in dem vom Sonnenwind erfüllten, interplanetaren Raum und den Magnetosphären der Planeten kann mit Hilfe von Raumsonden Plasmaturbulenz direkt beobachtet werden. In viel entfernteren, interstellaren Gaswolken scheinen turbulente Plasmaströmungen ein entscheidender Faktor für das Entstehen

von Sternen zu sein.

Weiterhin sind turbulente Plasmabewegungen geeignet, als selbsterregende Dynamos die beobachteten Magnetfelder vieler Himmelskörper zu erklären. So wird z.B. der flüssige Teil des Erdkerns aufgrund von vermuteten, turbulenten Plasmaströmungen als Erzeuger des Erdmagnetfelds angesehen.

Somit ist die korrekte Beschreibung der Turbulenz in Plasmen entscheidend für unser Modell der Sonne, das Verständnis vieler Phänomene in der Heliosphäre und anderen, von strömendem Plasma erfüllten Bereichen des Weltraums. Auch für die erfolgreiche Entwicklung eines Fusionskraftwerks auf Basis des magnetischen Plasma-Einschlusses ist eine korrekte Beschreibung des von der turbulenten Bewegung des Fusionsplasmas hervorgerufenen Energie- und Materietransports vonnöten.

Da die kontrollierte Erzeugung und genaue Beobachtung eines turbulenten Plasmas im Experiment äußerst schwierig ist (In Tokamak-Fusionsexperimenten führt das volle Einsetzen der in dieser Arbeit betrachteten MHD-Plasmaturbulenz sogar häufig zum schlagartigen, die Maschine oft beschädigenden Erlöschen der Plasmaentladung.), hat man vor etwa 30 Jahren mit numerischen Simulationen auf diesem Gebiet begonnen. Bis vor wenigen Jahren waren die technischen Möglichkeiten jedoch so begrenzt, daß ausreichend komplexe Systeme nur in maximal zweidimensionaler Geometrie berechnet werden konnten.

Mittlerweile ist es mit Hilfe massiv-paralleler Großrechner jedoch möglich auch dreidimensionale Plasmaturbulenz mit mindestnötiger Genauigkeit numerisch zu studieren. Von diesem Vorhaben soll die vorliegende Arbeit berichten, in deren Rahmen die bisher genauesten direkten numerischen Simulationen dreidimensionaler MHD-Turbulenz mit bis zu  $512^3$  räumlichen Fourier-Moden durchgeführt wurden.

Kapitel 2 stellt das zur Beschreibung des Plasmas genutzte Modell der inkompressiblen Magnetohydrodynamik (MHD) mit seinen für diese Arbeit wichtigen Eigenschaften vor. In Kapitel 3 wird ein straffer Überblick über die notwendigen theoretischen Konzepte der Turbulenztheorie gegeben. Kapitel 4 beschreibt die genutzten numerischen Werkzeuge und ihre Eigenschaften.

In Kapitel 5 werden die Ergebnisse zu den makroskopischen Eigenschaften zerfallender MHD-Turbulenz dargestellt. Das in der Zeit selbstähnliche Abnehmen der Energie wird in seiner Abhängigkeit von den beiden anderen quadratischen idealen Invarianten der MHD — magnetischer Helizität und Kreuzhelizität — untersucht. Darauf aufbauend wird ein phänomenologisches Modell entwickelt, das den Energiezerfall in dreidimensionaler MHD-Turbulenz endlicher magnetischer Helizität erstmalig in Übereinstimmung mit den Beobachtungen beschreibt.

Kapitel 6 behandelt die statistischen Eigenschaften zerfallender und getriebener inkompressibler MHD-Turbulenz. Es wird gezeigt, daß in beiden Fällen die für Navier-Stokes-Turbulenz entwickelte Kolmogoroff-Phänomenologie im Einklang mit allen anhand der Simulationsläufe gemachten Beobachtungen steht. Somit wird die bisher für MHD-Turbulenz als gültig angesehene Iroshnikov-Kraichnan-Theorie weitgehend widerlegt. Ein entsprechend für MHD-Turbulenz modifiziertes Intermittenzmodell zeigt eine hervorragende Übereinstimmung mit den gemachten Beobachtungen.

Kapitel 7 faßt die Ergebnisse abschließend zusammen.

## Kapitel 2

# Die inkompressible Magnetohydrodynamik

### 2.1 Das Modell

In dieser Arbeit werden turbulente Plasmaströmungen untersucht, deren typische makroskopische Längen- und Zeitskalen sehr viel größer als die mittlere freie Weglänge und die Stoßzeit der mikroskopischen Plasmabestandteile angenommen werden. Dies ermöglicht eine kontinuumsmechanische Beschreibung des Plasmas als Gemisch aus Elektronen- und Ionenflüssigkeit, welche über viskose Reibung sowie elektrische und magnetische Felder miteinander wechselwirken.

Das magnetohydrodynamische Plasmamodell (MHD), das beide Flüssigkeiten als *ein* elektrisch leitendes Medium beschreibt, folgt mittels umfangreicher Annahmen, die z.B. in [9] ausführlich dargelegt und hier anschaulich zusammengefaßt werden, aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und elektrische Ladung der beiden Flüssigkeiten sowie den Maxwell-Gleichungen.

Die Masse des MHD-Mediums wird wegen des großen Massenunterschieds zwischen Ionen und Elektronen fast ausschließlich von der Ionenflüssigkeit getragen. Die ebenfalls aufgrund dieses Massenunterschieds relativ zur Ionenflüssigkeit nahezu trägheitsfrei bewegliche Elektronenflüssigkeit ist für die elektrische Leitfähigkeit der MHD-Einflüssigkeit verantwortlich. Die Kollisionalität im MHD-Medium ist weiterhin so hoch, daß ein skalarer, hydrostatischer Druck  $p$  eingeführt<sup>1</sup> und die innere Reibung in der Newtonschen Näherung behandelt werden kann. Zusätzlich werden alle Phänomene im Plasma vernachlässigt, deren typische Zeitskalen kleiner sind als die der schnellen magnetoakustischen Welle. Dies führt u.a. zum Verschwinden des Verschiebungsstrom-Terms in den Maxwell-Gleichungen sowie der Quasineutralität des MHD-Mediums. Quasineutralität bedeutet, daß Raumladungen makroskopischer Ausdehnung vernachlässigbar klein sind, da auftretende Ladungsdichteunterschiede auf Zeitskalen ausgeglichen werden, die sehr viel kleiner sind als die im MHD-Modell zugelassenen.

Die inkompressible MHD folgt unabhängig von der Kompressibilität des MHD-Mediums unter der Zusatzannahme, daß die Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  im gesamten betrachteten System klein gegenüber den Ausbreitungsgeschwindigkeiten der magnetoakustischen Wellen im Plasma ist. In diesem Fall kann selbst die Bewegung eines

---

<sup>1</sup> Sofern nicht ausdrücklich anders angegeben, verstehen sich alle physikalischen Größen als Funktionen des Ortes  $\mathbf{r}$  in Euler-Koordinaten sowie der Zeit  $t$ .



kompressiblen Mediums als inkompressibel behandelt werden (Siehe z.B. [41], S.64 ff.). Eine weitere Vereinfachung besteht in der aufgrund der Inkompressibilität möglichen Annahme, daß die Massendichte  $\rho_0$  nicht nur zeitlich sondern auch räumlich konstant ist (Ihr Betrag wird im folgenden auf 1 normiert).

Die Gleichungen der inkompressiblen MHD in gaußschen Einheiten lauten somit

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{1}{4\pi\rho_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mu \Delta \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (2.4)$$

mit dem Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , der kinematischen Viskosität  $\mu$  und der magnetischen Diffusivität  $\eta$ . Der hydrostatische Druck  $p$  stellt in der inkompressiblen MHD keine unabhängige dynamische Variable dar, wie in Abschnitt 2.3 näher erläutert wird.

Gleichung (2.1) ist die aus der Massenkontinuitätsgleichung abgeleitete Inkompressibilitätsbedingung für das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$ , während Gleichung (2.2) die Impulsbilanz für ein Flüssigkeitsteilchen des MHD-Mediums darstellt. Die beiden Gleichungen sind bis auf den zweiten Term der rechten Seite von (2.2), der den Einfluß der Lorentzkraft beschreibt, mit den Navier-Stokes-Gleichungen der Hydrodynamik identisch und werden durch die Induktionsgleichung (2.4), die das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  an das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  koppelt, und die aus den Maxwell-Gleichungen stammende Quellenfreiheitsbedingung für  $\mathbf{B}$  (2.3) ergänzt.

Die jeweils letzten Terme auf den rechten Seiten der Impulsbilanz wie der Induktionsgleichung beschreiben den Impulsverlust aufgrund viskoser Reibung (in (2.2)) und die Schwächung des Magnetfelds bei der Diffusion durch ein Medium endlichen elektrischen Widerstands (in (2.4)).

## 2.2 Entdimensionierung und Kennzahlen

Für eine effektive numerische Behandlung und zur Herauspräparierung intrinsischer Parameter des partiellen Differentialgleichungssystems (2.1)-(2.4) werden alle physikalischen Größen auf Grundlage einer charakteristischen Länge  $L_0$ , Geschwindigkeit  $v_0$  und Massendichte  $\rho_0$  des betrachteten Systems entdimensioniert. Es gilt:

$$\mathbf{r}' := \frac{\mathbf{r}}{L_0}, \quad \mathbf{v}' := \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad t' := \frac{v_0}{L_0} t, \quad \mathbf{B}' := \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{4\pi\rho_0} v_0}, \quad p' := \frac{p}{\rho_0 v_0^2}.$$

Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung (2.1) und der magnetischen Quellenfreiheitsbedingung (2.3), die ihre Form bei dieser Transformation nicht ändern, lauten die Gleichungen (2.2) und (2.4) in den gestrichenen, dimensionslosen Größen<sup>2</sup>:

$$\nabla' \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (2.5)$$

$$\partial_{t'} \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla') \mathbf{v}' = -\nabla' p' - \mathbf{B}' \times (\nabla' \times \mathbf{B}') + \text{Re}^{-1} \Delta' \mathbf{v}', \quad (2.6)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (2.7)$$

$$\partial_{t'} \mathbf{B}' = \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}') + \text{Rm}^{-1} \Delta' \mathbf{B}'. \quad (2.8)$$

<sup>2</sup>Da die weitere Darstellung ausschließlich in den entdimensionierten Größen erfolgt, werden die Striche im folgenden der besseren Lesbarkeit wegen weggelassen.

mit der hydrodynamischen Reynoldszahl

$$\text{Re} := \frac{L_0 v_0}{\mu}, \quad (2.9)$$

sowie der magnetischen Reynoldszahl

$$\text{Rm} := \frac{L_0 v_0}{\eta}. \quad (2.10)$$

Die hydrodynamische Reynoldszahl  $\text{Re}$  tritt bereits in den entdimensionierten Navier-Stokes-Gleichungen als Parameter für das dynamische Verhalten einer Strömung auf<sup>3</sup>. Sie kann in Gleichung (2.6) als Maß für den Einfluß der nichtlinearen Terme für Advektion  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$  und Lorentzkraft relativ zum viskosen Reibungsterm interpretiert werden. Analoges gilt in (2.8) für  $\text{Rm}$  bezogen auf den nichtlinearen Induktionsterm und den Resistivitätsterm.

Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, daß die magnetische Energie  $E^M$  des Plasmas ungefähr gleich dessen kinetischer Energie  $E^K$  ist, um einen hohen Grad an nichtlinearer Wechselwirkung zwischen den beiden Vektorfeldern  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  sicherzustellen. Andernfalls würde entweder das Magnetfeld  $\mathbf{B}$  weitgehend passiv von der Plasmaströmung transportiert werden ohne nennenswert auf das Geschwindigkeitsfeld zurückzuwirken ( $E^K \gg E^M$ ), oder  $\mathbf{v}$  wäre bezogen auf die Richtung des lokalen Magnetfelds stark anisotrop ( $E^K \ll E^M$ ). Die Anisotropie im zweiten Fall entsteht aus der Überlagerung einer von  $\mathbf{B}$  ungehinderten Strömung entlang der lokalen Magnetfeldlinien und einem quasi-zweidimensionalen, von Driftbewegungen hervorgerufenen Geschwindigkeitsfeld senkrecht zu den lokalen Magnetfeldlinien.

Um den schnellen dynamischen Übergang in einen dieser beiden Extremfälle zu vermeiden, werden die kinematische Viskosität  $\mu$  und die magnetische Diffusivität  $\eta$  als gleich groß angenommen. Somit ist die magnetische Prandtlzahl  $\text{Pr}_m := \frac{\mu}{\eta}$  gleich eins und es gilt  $\text{Re} = \text{Rm}$ .

## 2.3 Der hydrostatische Druck $p$ und die Wirbelstärke

### $\omega$

Aufgrund der Inkompressibilitätsforderung (2.5), welche für das beschriebene Medium die thermodynamische Zustandsgleichung  $\frac{dp}{dt} = 0$  impliziert, ist der hydrostatische Druck  $p$  zu einer passiven Größe geworden. Er stellt sich so ein, daß Divergenzen im Geschwindigkeitsfeld nicht auftreten.

Man erhält mittels der Divergenz der Impulsbilanzgleichung (2.6) unter Einbeziehung der Inkompressibilitätsbedingung eine Poissongleichung für  $p$ :

$$\Delta p = \nabla \cdot [\mathbf{v} \times \omega - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] - \frac{1}{2} \Delta v^2 \quad (2.11)$$

mit der Wirbelstärke des Geschwindigkeitsfeldes  $\omega := \nabla \times \mathbf{v}$ .

Da das Geschwindigkeitsfeld aufgrund von (2.5) divergenzfrei ist, wird es durch sein Wirbelfeld  $\omega$  eindeutig festgelegt. Durch Anwendung des Rotationsoperators auf

<sup>3</sup>Reynolds, einer der Pioniere der hydrodynamischen Turbulenzforschung, fand 1883 experimentell heraus, daß Rohrströmungen oberhalb eines  $\text{Re}$ -Werts von ungefähr 2000 vom laminaren in den turbulenten Zustand übergehen.

die Impulsbilanz (2.6) erhält man die Vortizitätsgleichung für die Zeitentwicklung der Wirbelstärke  $\omega$ :

$$\partial_t \omega = \nabla \times [\mathbf{v} \times \omega - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})] + \text{Re}^{-1} \Delta \omega \quad (2.12)$$

Zusammen mit (2.5), (2.7) und der Induktionsgleichung (2.8) bildet (2.12) eine Beschreibung der inkompressiblen MHD, in welcher der hydrostatische Druck  $p$  nicht mehr auftritt, jedoch, falls nötig, aus  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  über Gleichung (2.11) bestimmt werden kann.

## 2.4 Die idealen Erhaltungsgrößen

Falls man das dreidimensionale, inkompressible MHD-System durch geeignete, z.B. periodische, Randbedingungen räumlich schließt, existieren im idealen Fall ( $\mu = \eta = 0$ ) verschiedene Erhaltungsgrößen (Siehe z.B. [44]), von denen die drei quadratischen besonders ausgezeichnet sind: Die Gesamtenergie  $E$

$$E = \frac{1}{2} \int_V dV (v^2 + B^2), \quad (2.13)$$

die magnetische Helizität

$$H = \frac{1}{2} \int_V dV (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.14)$$

mit dem magnetischen Vektorpotential  $\mathbf{A}$  sowie die Kreuzhelizität

$$K = \frac{1}{2} \int_V dV (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.15)$$

Diese sogenannten unverwüstlichen Invarianten („rugged invariants“) bleiben in der idealen MHD auch dann noch erhalten, wenn in der Fourier-Darstellung des betrachteten Systems nur eine endliche Anzahl räumlicher Fourier-Moden zugelassen wird. Sie sind in der MHD-Turbulenztheorie für die globale Charakterisierung und die Zeitentwicklung des turbulenten Systems von großer Bedeutung.

Für endliches  $\mu$  und  $\eta$  zerfallen diese drei Invarianten gemäß ([4], S.186)

$$\dot{E} = - \int_V dV (\mu \omega^2 + \eta j^2), \quad \dot{H} = -\eta \int_V dV \mathbf{j} \cdot \mathbf{B}, \quad \dot{K} = -\frac{\mu + \eta}{2} \int_V dV \omega \cdot \mathbf{j} \quad (2.16)$$

mit der dimensionslosen elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B}$ . Anhand des Ausdrucks für  $\dot{E}$  lassen sich verschiedene Energiedissipationsraten definieren: Die Gesamtdissipationsrate  $\varepsilon := -\dot{E}$  sowie die Dissipationsraten der kinetischen Energie  $\varepsilon^K := -\mu \int_V dV \omega^2$  und der magnetischen Energie  $\varepsilon^M := -\eta \int_V dV j^2$ .

## 2.5 Die Elsässer-Variablen

Eine zum System (2.5)-(2.8) äquivalente, auf Elsässer [14] zurückgehende Formulierung der inkompressiblen MHD-Gleichungen lautet in der eingeführten Entdimensionierung

$$\nabla \cdot \mathbf{z}^\pm = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial_t \mathbf{z}^\pm + (\mathbf{z}^\mp \cdot \nabla) \mathbf{z}^\pm = -\nabla(p + \frac{B^2}{2}) + \frac{\text{Re}^{-1} + \text{Rm}^{-1}}{2} \Delta \mathbf{z}^\pm + \frac{\text{Re}^{-1} - \text{Rm}^{-1}}{2} \Delta \mathbf{z}^\mp, \quad (2.18)$$

in den Variablen  $\mathbf{z}^{\pm} = \mathbf{v} \pm \mathbf{B}$ .

Die Elsässer-Variablen werden in der theoretischen Beschreibung der MHD-Turbulenz wegen ihrer grundlegenden Bedeutung, die sich in der Symmetrie von (2.17) und (2.18) äußert, gegenüber den einzelnen  $\mathbf{v}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feldern bevorzugt.

Weiterhin können die  $\mathbf{z}^{\pm}$ -Felder bei Anwesenheit eines Hintergrund-Magnetfelds  $\mathbf{B}_0$  mit  $|\mathbf{B}_0| \gg |\mathbf{B}|$  als Alfvén-Wellen interpretiert werden, die in jeweils entgegengesetzte Richtungen entlang der Feldlinien von  $\mathbf{B}_0$  laufen. Dieses Bild wird bei der phänomenologischen Beschreibung von MHD-Turbulenz häufig herangezogen.

In den folgenden Kapiteln werden je nach Zweckmäßigkeit  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  oder  $\mathbf{z}^{\pm}$  verwendet.



## Kapitel 3

# Grundlagen der Turbulenz-Theorie

Bis heute gibt es keine Theorie der Turbulenz, die deduktiv von den Navier-Stokes- oder MHD-Gleichungen ausgehend zu einer vollständigen Beschreibung dieses Strömungszustands führt. Man ist sich nicht einmal sicher, welche Art von Observablen bzw. mathematischen Methoden für die Beschreibung von Turbulenz die geeignetste ist (Für eine Zusammenfassung der bekannten stochastischen oder mit statistischen Momenten der Navier-Stokes-Gleichungen arbeitenden Ansätze siehe [25], S.213 ff.).

Aus diesem Grund besteht der aktuelle theoretische Rahmen der Turbulenzphysik aus Teiltheorien, die jeweils auf Hypothesen fußen, deren Rechtfertigung im Nachhinein aufgrund des Vergleichs von theoretischen Vorhersagen und (computer-)experimentellen Messungen geschieht.

Der bisher erfolgreichste Satz von Hypothesen geht auf den russischen Mathematiker Kolmogoroff zurück, der Anfang der vierziger Jahre mit der K41-Theorie für Navier-Stokes-Turbulenz ([23], [22]) das Fundament der heutigen Betrachtungsweise turbulenter Systeme legte.

Iroschnikoff und Kraichnan entwickelten in den sechziger Jahren eine Erweiterung der K41-Theorie für MHD-Turbulenz, genannt IK-Theorie ([21],[24]), die zwar bis heute keine ausreichende experimentelle Bestätigung erfahren hat aber in der Beschreibung von MHD-Turbulenz noch immer eine wichtige Rolle spielt.

Allerdings zeigen experimentelle Ergebnisse, daß die K41- bzw. die IK-Theorie selbst bei den Aspekten von Turbulenz, die zu beschreiben sie in der Lage sind, verfeinert werden müssen, um beispielsweise der sogenannten Intermittenz kleinster, dissipativer Turbulenzstrukturen Rechnung zu tragen.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels werden die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen der Beschreibung von MHD-Turbulenz zusammen mit den Schlüsselkonzepten und wichtigsten Resultaten der oben genannten Theorien kurz vorgestellt. Weiterhin wird auf das Intermittenz-Problem und dessen möglicher Lösung im Rahmen der sogenannten She-Lévêque-Theorie eingegangen.

### 3.1 Der statistische Ansatz

Betrachtet man in einer turbulenten Strömung den Wert einer physikalischen Observablen, z.B. einer Komponente des Geschwindigkeitsfeldes, an einem festen Ort in

Abhängigkeit von der Zeit bzw. zu einem festen Zeitpunkt an verschiedenen Orten, so nimmt dieser im allgemeinen zufällige, d.h. nicht vorhersagbare Werte an. Allerdings folgen diese zufälligen Werte einer statistischen Verteilung um ein eindeutig bestimmtes Mittel. Aus diesem Grund scheint es sinnvoll, Turbulenz mit Hilfe statistischer Methoden zu beschreiben.

Dabei wird mit den Observablen des turbulenten Systems in Form von Ensemble-Mittelwerten gearbeitet, die durch die übliche Klammer-Notation  $\langle \cdot \rangle$  gekennzeichnet werden.

Man betrachtet weiterhin voll entwickelte Turbulenz, d.h., daß sich das System in einem Zustand befindet, in dem sich ein nicht zwingend stationäres Gleichgewicht zwischen den turbulenz-erzeugenden und den turbulenz-dämpfenden Prozessen eingestellt hat.

Darüberhinaus werden die turbulenten Felder  $\mathbf{v}$  (und  $\mathbf{B}$  im MHD-Fall) als räumlich homogen und isotrop in ihren statistischen Eigenschaften angenommen. Diese Annahmen sind zwar in realer Turbulenz nur näherungsweise in kleinen Raumbereichen erfüllt, vereinfachen jedoch die statistische Behandlung von Navier-Stokes- und MHD-Turbulenz in hohem Maße bzw. machen bestimmte, fundamentale Berechnungen erst möglich (Für eine historische Darstellung der Entwicklung dieses statistischen Ansatzes siehe [1], S.7 ff.).

Die angenommene statistische Homogenität und Isotropie sowie das Hinzuziehen der Quasi-Ergodenhypothese<sup>1</sup> erlauben, die oben eingeführten Ensemble-Mittelwerte mit einfacher zu bildenden Orts- oder (in stationärer Turbulenz) Zeit-Mittelwerten gleichzusetzen. Damit gilt für eine beliebige Observable  $f(\mathbf{r}, t)$  in einem turbulenten System eines endlichen Volumens  $V$  unter den obigen Bedingungen

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V} \int_V dV f(\mathbf{r}, t) .$$

Da man im Rahmen dieser Arbeit an den inhärenten Eigenschaften der Turbulenz ohne den Einfluß physikalischer Ränder interessiert ist, sollen an den Grenzen des Volumens  $V$  periodische Randbedingungen für die turbulenten Felder gelten.

## 3.2 Die Kolmogoroff-Theorie

Zur theoretischen Beschreibung voll entwickelter, statistisch homogener und isotroper Navier-Stokes-Turbulenz wurde die K41-Theorie entwickelt. Die in diesem Abschnitt geschilderten Aspekte dieses Modells bilden auch für MHD-Turbulenz die theoretische Grundlage. Die folgende Darstellung beschränkt sich aus Gründen der Verständlichkeit zunächst auf Navier-Stokes-Turbulenz. In Abschnitt 3.3 werden dann die Änderungen und Erweiterungen der K41-Theorie dargestellt, die für die Anwendung auf den MHD-Fall gemacht werden.

### 3.2.1 Die K41-Phänomenologie

Im K41-Bild besteht ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld aus einer Überlagerung von Strukturen, deren jeweils typische Größenskalen  $\ell$  sich kontinuierlich über einen weiten Bereich erstrecken. Der räumliche Aufbau der „Eddies“ genannten Strukturen bleibt unbestimmt, es wird lediglich mit der typischen Eddy-Geschwindigkeit  $v_\ell$  gearbeitet.

<sup>1</sup>Die Quasi-Ergodenhypothese postuliert, daß ein statistisches System fester Energie jedem ihm erreichbaren Punkt des Phasenraums beliebig nahe kommt. Sie ist weder für die Navier-Stokes- noch für die MHD-Gleichungen bewiesen.

Diese typische Geschwindigkeit kann beispielsweise durch den quadratischen Mittelwert des longitudinalen Geschwindigkeitsinkrements  $\delta v(\ell) := [\mathbf{v}(\mathbf{r} + \ell) - \mathbf{v}(\mathbf{r})] \cdot \ell / |\ell|$  folgendermaßen definiert werden:

$$v_\ell := \sqrt{\langle \delta v^2(\ell) \rangle} .$$

Die Inkremente der turbulenten Felder hängen zwar formal von  $\mathbf{r}$  und  $\ell$  ab – da jedoch statistische Homogenität und Isotropie angenommen werden (Abschnitt 3.1) reduziert sich die Abhängigkeit auf eine vom Betrag der Inkrementdistanz  $\ell := |\ell|$ .

Das K41-Modell unterscheidet drei unterschiedliche Größenskalenbereiche in der Turbulenz. Die Eddies in der Größenordnung der *integralen Länge*  $L$ , die z.B. der typischen Ausdehnung des die Turbulenz verursachenden Gradienten in einer Scherströmung entspricht, tragen den Großteil der Turbulenz-Energie und sind für die makroskopischen Eigenschaften des turbulenten Systems verantwortlich. Der Energieverlust durch Dissipation ist hier vernachlässigbar. Wird Turbulenz durch einen Mechanismus angeregt oder aufrechterhalten, so injiziert dieser im Normalfall Energie in diesen Makroskalenbereich.

Die Energie wird von den größeren Eddies im Laufe der Zeit an immer kleinere Strukturen weitergegeben. Dieser als *Richardson-Kaskade* bekannte Prozeß ist im Fourier-Raum eng lokalisiert, d.h. der Energieaustausch findet im wesentlichen zwischen Eddies gleicher räumlicher Ausdehnung statt. Die mathematische Ursache der Kaskade ist der nichtlineare, advective Term in den Navier-Stokes-Gleichungen. Er hat auf die Gesamtenergiebilanz bei den hier gewählten, periodischen Randbedingungen keine Auswirkung, sondern sorgt für eine Verteilung der Energie zwischen verschiedenen Größenskalen. Der resultierende, nichtlineare Energiefluß kann größenordnungsmäßig als  $v_\ell^2 / \tau_\ell$  abgeschätzt werden. Dabei ist  $\tau_\ell := \ell / v_\ell$  die nichtlineare Transferzeit oder „Eddy turnover-time“, in der ein Eddy der Größe  $\ell$  einen signifikanten Teil seiner Energie abgibt.

Ein weiterer Skalenbereich  $\mathcal{L}$ , der ausreichend von den Makroskalen entfernt ist, um von den Details der turbulenzzeugenden Mechanismen nicht merkbar beeinflusst zu werden, und in dem zugleich die dissipativen Effekte vernachlässigbar sind, heißt *Inertialgebiet*. Hier wird die Turbulenzdynamik von der nichtlinearen Energieumverteilung dominiert.

Das Inertialgebiet ist ein ausgezeichneter Skalenbereich, da man experimentell beobachtet, daß die Strukturfunktionen der Ordnung  $p$  des Geschwindigkeitsfelds

$$S_p^v(\ell) := \langle \delta v^p(\ell) \rangle$$

für  $\ell \in \mathcal{L}$  selbstähnlich, d.h. invariant unter Skalierungstransformationen von  $\ell$ , sind. Sie können deshalb im Inertialgebiet als Potenzfunktionen  $\sim \ell^{\zeta_p}$  dargestellt werden. Dabei sind die Exponenten  $\zeta_p$  von der Ordnung  $p$  abhängende Konstanten. Die Kernergebnisse der K41-Theorie bestehen aus Vorhersagen für diese Skalierungsexponenten. Die Menge der Strukturfunktionen des Geschwindigkeitsfelds (im MHD-Fall der Elsässer-Felder) aller Ordnungen  $p$  enthält die gesamte statistische Information über die Turbulenz, d.h. über die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion  $P(\delta v(\ell))$ , deren statistische Momente die Strukturfunktionen sind. Neben Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilung wie Schiefe und Flachheit (Abschnitt 6.4) kann beispielsweise aus dem Verhalten der Strukturfunktion zweiter Ordnung auf die Skalierung des Energiespektrums geschlossen werden (Abschnitt 3.2.3). Die Abhängigkeit der Skalierungsexponenten  $\zeta_p$  von der Ordnung  $p$  liefert u.a. Informationen über die Ausprägung und



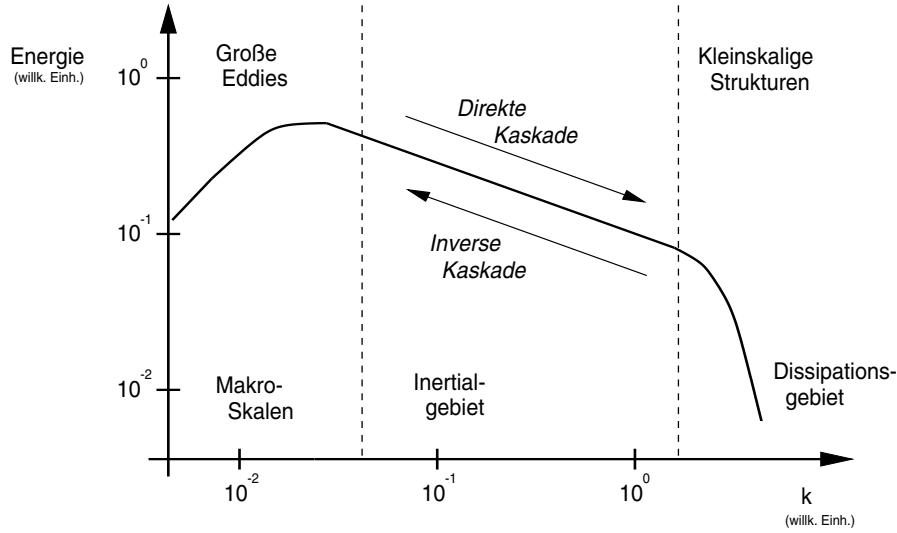


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung des K41-Turbulenzbildes am Beispiel der Fourier-spektralen Energieverteilung. In Abhängigkeit von der Systemdimension und der jeweils betrachteten idealen Invarianten tritt statt der direkten Kaskade eine entgegengesetzte inverse Kaskadenbewegung von kleineren zu größeren räumlichen Skalen auf.

den statistischen Einfluß der Intermittenz kleinster turbulenter Strukturen (Abschnitt 3.4).

Bei sehr kleinen räumlichen Skalen wird die Energiedissipation durch Viskositätseffekte dominant und entfernt Energie aus dem System. Die typische Länge dieser dissipativen Skalen ist die Kolmogoroff-Dissipationslänge  $\ell_{K41}$ , die im anschließenden Abschnitt 3.2.3 explizit angegeben wird.

### 3.2.2 Die Rolle der Reynoldszahl $Re$

Der Abstand des Dissipationsgebiets um  $\ell_{K41}$  vom Makroskalenbereich bei  $L$  und somit die Ausdehnung des Inertialgebietes ist, wie man im Experiment feststellt, direkt von der Größe der Reynoldszahl  $Re$  abhängig. Das K41-Modell, wie auch seine MHD-Erweiterung von Iroshnikov und Kraichnan, macht Aussagen für Turbulenz im Grenzwert unendlich hoher  $Re$  (und  $Rm$  im MHD-Fall), d.h. für ein unendlich weit ausgedehntes Inertialgebiet. Die Vernachlässigung der Einflüsse aus dem Makroskalen- bzw. Dissipationsbereich ist eine Annahme, die in realer Turbulenz mit endlicher Reynoldszahl eine entscheidende Gültigkeitsbeschränkung der Theorie darstellt.

Da sich bei einem homogenen turbulenten System die für die Definition der Reynoldszahl nötige, typische Länge  $L_0$  und typische Geschwindigkeit  $v_0$  (Siehe (2.9.)) nicht eindeutig festlegen lassen, werden zur Bestimmung von  $Re$  globale, das System charakterisierende Größen herangezogen. Mit Hilfe der Gesamtenergie  $E$ , der kinetischen Energie  $E^K$  und der Gesamtenergie-Dissipation  $\varepsilon = -\dot{E}$  lassen sich aus Dimensionsüberlegungen eine typische Länge  $L_0 = E^{3/2}/\varepsilon$  und eine typische Geschwindigkeit  $v_0 = (E^K)^{1/2}$  bestimmen. Damit ergibt sich die im weiteren benutzte Reynoldszahl-

Definition (für Rm analog mit  $\eta$ )

$$\text{Re} := \frac{(E^K)^{1/2} E^{3/2}}{\varepsilon \mu} . \quad (3.1)$$

### 3.2.3 Ergebnisse des K41-Modells

Über folgende Argumente kann im Rahmen der K41-Phänomenologie das Skalierungsverhalten der Geschwindigkeitsfeld-Strukturfunktionen  $S_p^v(\ell) \sim \ell^{\zeta_p}$  bestimmt werden: Unter den bereits vorgestellten Annahmen ist der nichtlineare Energiefluß im Inertialgebiet gleich der dort als  $\ell$ -unabhängig angenommenen Energiedissipationsrate  $\varepsilon$  eines stationär turbulenten Systems. Daraus folgt:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \varepsilon &\stackrel{!}{\sim} \frac{v_\ell^2}{\tau_\ell} = \frac{v_\ell^3}{\ell} \quad \Rightarrow v_\ell \sim (\varepsilon \ell)^{1/3} \\ &\Rightarrow S_p^v(\ell) \sim (\varepsilon \ell)^{p/3} \quad \forall \ell \in \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Für  $p = 3$  ist es sogar möglich unter Zuhilfenahme der von-Kármán-Howarth-Beziehung (Siehe z.B. [16], S. 78) eine exakte Beziehung herzuleiten, das  $\frac{4}{5}$ -Gesetz:

$$S_3^v(\ell) = -\frac{4}{5} \varepsilon \ell . \quad (3.3)$$

Wird  $S_2^v(\ell)$  räumlich Fourier-transformiert, so erhält man eine Funktion, die im Inertialgebiet das gleiche Skalierungsverhalten aufweist wie das eindimensionale Energiespektrum  $E_\parallel(k_1) = \int dk_2 \int dk_3 E(k_1)$  mit den Wellenvektor-Komponenten  $k_i := (2\pi)/\ell_i$ . Im Falle homogener Turbulenz wird üblicherweise das raumwinkelintegrierte Energiespektrum

$$E(k) := \int_0^{4\pi} d\Omega E(\mathbf{k})|_{|\mathbf{k}|=k} \quad (3.4)$$

angegeben, das im folgenden abkürzend als Energiespektrum bezeichnet wird. Das Skalierungsverhalten der  $S_2^v(\ell)$  im Realraum-Inertialgebiet  $\mathcal{L}$  entspricht für statistisch homogene Turbulenz einem selbstähnlichen Verlauf des Energiespektrums im zugehörigen Fourier-Raum Inertialgebiet  $\mathcal{K}$  als Potenzfunktion  $\sim k^{-(1+\zeta_2)}$ .

Damit ergibt sich das Kolmogoroff-Spektrum der Navier-Stokes-Turbulenz zu

$$E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad k \in \mathcal{K} . \quad (3.5)$$

Der Wert der Kolmogoroff-Konstanten  $C_K$  liegt laut experimentellen Ergebnissen im Bereich 1 bis 2.

Die Kolmogoroff-Dissipationslänge  $\ell_{K41}$  gibt größenordnungsmäßig den räumlichen Skalenbereich an, in dem die Energiedissipationsrate (abgeschätzt durch  $v_\ell^2 \mu / \ell^2$ ) ungefähr gleich dem nichtlinearen Energiefluß (abgeschätzt durch  $v_\ell^2 / \tau_\ell$ ) ist, also das Dissipationsgebiet (Abschnitt 3.2.1) beginnt. Mit den eingeführten Abschätzungen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\ell^2} &\stackrel{!}{\sim} \tau_\ell^{-1} = v_\ell / \ell \sim (\varepsilon \ell)^{1/3} / \ell \\ &\Rightarrow \ell_{K41} := \left( \frac{\mu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} . \end{aligned} \quad (3.6)$$

Somit ist  $\ell_{K41}$  bis auf eine Konstante der Größenordnung  $O(1)$  bestimmt.

<sup>2</sup>Das im weiteren verwendete Symbol „ $\sim$ “ steht für „gleich, bis auf einen Faktor  $O(1)$ “.

### 3.3 Die Iroschnikoff-Kraichnan-Theorie

Die für MHD-Turbulenz entwickelte IK-Theorie übernimmt im wesentlichen das K41-Modell und ist deshalb in ihren Ergebnissen auf den gleichen Rahmen beschränkt wie dieses (Abschnitt 3.2.3).

Der Übergang von Navier-Stokes- zu MHD-Turbulenz gelingt hier durch das Ersetzen der K41-Größe  $v_\ell$  durch  $z_\ell$ , analog definiert wie in Abschnitt 3.2.1 mit Hilfe der Elsässer-Variablen  $\mathbf{z}^\pm$ . Eine Unterscheidung zwischen  $z_\ell^+$  und  $z_\ell^-$  wird durch die zusätzliche Annahme kleiner globaler Geschwindigkeitsfeld-Magnetfeld-Korrelation (Ausrichtung)

$$\rho := \frac{\int_V dV (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})}{2(E^K E^M)^{1/2}} = \frac{K}{(E^K E^M)^{1/2}} \quad (3.7)$$

vermieden. Für endliches  $\rho$  ist eine mathematisch aufwendigere Theorie notwendig, die einen Zusammenhang zwischen den Skalierungen der  $z^\pm$ -Spektren ergibt, nicht jedoch die absoluten Werte der Skalierungsexponenten [19].

Der entscheidende Unterschied der IK- zur K41-Theorie liegt in der Vorstellung vom nichtlinearen Energiefluß. Während im Kolmogoroff-Bild das Geschwindigkeitsfeld selbst die Energie, die durch Deformationen der turbulenten Eddies nichtlinear umverteilt wird, transportiert, wird im Iroschnikoff-Kraichnan-Bild angenommen, daß der dominante Energie-Transportmechanismus die transversale Scher-Alfvén-Welle<sup>3</sup> ist. Der nichtlineare Energieübertrag findet dabei während der gegenseitigen Streuung sich durchdringender Alfvén-Wellenpakete statt.

Die Kopplung zwischen den Alfvén-Wellen und dem Geschwindigkeitsfeld, das die Anregungsenergie liefert und nach einer möglichen nichtlinearen Umverteilung unter verschiedenen Wellenpaketen später auch wieder aufnimmt, findet über den *Alfvén-Effekt* statt.

Dieser beruht bei der Alfvén-Wellen-Anregung darauf, daß Geschwindigkeitsfluktuationen  $\delta \mathbf{v}$  der räumlichen Ausdehnung  $\ell$  in einem Führungs-Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , das durch Bewegungen des MHD-Mediums auf räumlichen Skalen größer als  $\ell$  erzeugt wird, transversale Magnetfeld-Störungen  $\delta \mathbf{B}$  mit  $|\delta \mathbf{B}| \ll |\mathbf{B}|$  hervorrufen. Die so angeregten Alfvén-Wellen bewegen sich entlang der Feldlinien des Führungsfelds. Sind die Störungen  $|\delta \mathbf{v}|, |\delta \mathbf{B}|$  klein gegenüber dem Betrag des Führungs-Magnetfelds  $|\mathbf{B}|$ , so gilt  $\delta \mathbf{v} = \pm \delta \mathbf{B}$ . Bei der Dämpfung von Alfvén-Wellen findet der beschriebene Vorgang in umgekehrter Richtung statt.

Da zwei sich begegnenden Alfvén-Wellenpaketen der Ausdehnung  $\ell$  nur die im Vergleich zur nichtlinearen, K41-analogen Transferzeit  $\tau_\ell = \ell/z_\ell$  kurze Zeitspanne  $\tau_A := \ell/v_A$  zum Energieaustausch zur Verfügung steht (wegen  $v_A \gg z_\ell$ ), verlängert sich die nichtlineare IK-Transferzeit, die zum Austausch des gleichen Energiebetrags benötigt wird, im Vergleich zur K41-Theorie um den Faktor  $\tau_\ell/\tau_A$ . Der Betrag der Alfvén-Geschwindigkeit  $v_A$  ist in der hier gewählten dimensionslosen Schreibweise gleich dem des Führungs-Magnetfelds  $\mathbf{B}$ .

<sup>3</sup>Im weiteren einfach Alfvén-Welle genannt, da die anderen MHD-Wellentypen im hier betrachteten, inkompressiblen Fall nicht auftreten.

### 3.3.1 Ergebnisse des IK-Modells

Mit den im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Annahmen und den Transformationen

$$v_\ell \longrightarrow z_\ell, \quad \tau_\ell \longrightarrow \frac{\tau_\ell}{\tau_A} \tau_\ell,$$

lassen sich die Ergebnisse der IK-Theorie mit den gleichen Ansätzen wie in der K41-Theorie (Siehe (3.2), (3.5), (3.6)) bestimmen. Man erhält für die Elsässer-Strukturfunktionen im Inertialgebiet  $\mathcal{L}$

$$S_p^z(\ell) \sim (\epsilon v_A \ell)^{p/4} \quad \forall \ell \in \mathcal{L}, \quad (3.8)$$

womit, ebenfalls analog, die Iroschnikoff-Kraichnan-Skalierung für das Energiespektrum im Fourier-Raum Inertialgebiet  $\mathcal{K}$  folgt:

$$E(k) = C_{IK} (\epsilon v_A)^{1/2} k^{-3/2}, \quad k \in \mathcal{K}. \quad (3.9)$$

Die IK-Dissipationslänge erhält man entsprechend zu (3.6) als:

$$\ell_{IK} := \left( \frac{v_A \eta^2}{\epsilon} \right)^{1/3}. \quad (3.10)$$

Auch eine Entsprechung des  $\frac{4}{5}$ -Gesetzes ist für die inkompressible, dreidimensionale MHD herleitbar ([33], [32]):

$$\langle \delta z^\mp(\ell) \sum_{i=1}^3 \delta^* z_i^\pm(\ell)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \epsilon^\pm \ell \quad \text{mit } \epsilon^\pm := -\frac{d}{dt} \int_V \frac{|\mathbf{z}^\pm|^2}{4}. \quad (3.11)$$

Hier sind die  $\delta z^\mp(\ell)$  die aus Abschnitt 3.2.1 bekannten, longitudinalen Feldinkremente, während  $\delta^* z_i^\pm(\ell)$  für  $(z_i^\pm(\mathbf{r} + \ell) - z_i^\pm(\mathbf{r}))$  steht, also für Inkremente der Feldkomponenten in einer beliebigen Raumrichtung.

## 3.4 Intermittenz

Die Skalierungsexponenten  $\zeta_p$  der Strukturfunktionen  $S_p(\ell)$  der turbulenten Felder im Inertialgebiet  $\mathcal{L}$  werden von der K41-Theorie,  $\zeta_p^{K41} = p/3$  (Siehe (3.2)), sowie der IK-Theorie,  $\zeta_p^{IK} = p/4$  (Siehe (3.8)), als lineare Funktionen der Strukturfunktionsordnung  $p$  vorhergesagt.

Allerdings gibt es für Navier-Stokes-Turbulenz überzeugende experimentelle Befunde, die zeigen, daß die  $\zeta_p^{K41}$  nichtlinear von  $p$  abhängen (Für eine Zusammenfassung siehe [38]). Für MHD-Turbulenz existieren Ergebnisse aus Raumsonden-Messungen im turbulenten Sonnenwind [10] sowie zweidimensionalen direkten numerischen Simulationen [30], die darauf hinweisen, daß auch die Strukturfunktionen der Elsässer-Felder  $S_p^z(\ell)$  anomal skalieren.

Diese Abweichungen von den theoretischen Vorhersagen, die für  $p \geq 3$  in zunehmendem Maße erkennbar werden, lassen sich darauf zurückführen, daß die Energiedissipation im Bereich der Dissipationsskalen nicht räumlich homogen stattfindet, wie die K41- und IK-Phänomenologie implizit annehmen. Stattdessen wird die Energie in Strukturen dissipiert, in denen sich kleine Bereiche hoher Dissipationsrate mit größeren Gebieten sehr viel niedrigerer Dissipationsrate abwechseln. Die Energie wird also nicht in raumfüllenden sondern *intermittenten, dissipativen Strukturen* aus dem turbulenten System entfernt.

### 3.4.1 Das She-L  v  que-Modell

Unter den verschiedenen theoretischen Ansätzen, die das anomale Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen für Navier-Stokes-Turbulenz erklären wollen (Siehe [4], S.217 ff., [38] für eine Übersicht), nimmt das Modell von She und L  v  que [35] eine besondere Stellung ein, da es: 1. in seiner generalisierten Form ausschließlich Parameter enthält, die entweder physikalisch oder mit den Teilen der K41- bzw. IK-Theorie bestimmt werden können, die nur marginal durch die Intermittenz beeinfl  t werden, und 2. mit den experimentellen Resultaten hervorragend übereinstimmt.

Die alle Parameter sichtbar machende, generalisierte Form des SL-Modells lautet (Siehe z.B. [31]):

$$\zeta_p^{GSL} = \frac{p}{g} \left( 1 - \frac{2}{g} \right) + C_0 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2}{gC_0} \right)^{p/g} \right]. \quad (3.12)$$

Die Parameter  $g$  und  $C_0$  erklären sich wie folgt:  $g$  bestimmt sich aus der Basisskalierung der Feldinkremente  $v_\ell \sim \ell^{1/g}$  (Siehe (3.2) und (3.8)).  $C_0$  ist die Kodimension der kleinsten, dissipativen Strukturen, d.h.  $C_0 := (\text{Raumdimension}) - (\text{Dissipationsstruktur-Dimension})$ .

Unter Annahme der K41-Basisskalierung (3.2) folgt  $g = 3$ . Weiterhin beobachtet man in dreidimensionalen Navier-Stokes-Turbulenz-Simulationen als kleinste, dissipative Strukturen sogenannte Vortex-Filamente (Siehe z.B. [42]), d.h. quasi-eindimensionale Wirbelstärke-Schläuche – also  $C_0 = 2$ . Damit erhält man das ursprüngliche She-L  v  que-Modell für Navier-Stokes-Turbulenz:

$$\zeta_p^{SL} = \frac{p}{9} + 2 - 2 \left( \frac{2}{3} \right)^{p/3}. \quad (3.13)$$

Die Erweiterung des SL-Intermittenzmodells auf MHD-Turbulenz wird in Abschnitt 6.3 dieser Arbeit behandelt.

Unter den Hypothesen, auf denen das SL-Modell fußt, sticht eine besonders hervor. Sie postuliert einen bestimmten, hierarchischen Zusammenhang zwischen den statistischen Momenten der mittleren lokalen Dissipation  $\epsilon_\ell := \frac{1}{V'} \int_{V'} dV' \epsilon(\mathbf{r})$  ( $V'$  ist eine Kugel mit Radius  $\ell$ ), dessen Ursache She und L  v  que in ihrer Originalarbeit in einer „versteckten Symmetrie der Navier-Stokes-Gleichungen“ vermuten. Mittlerweile konnte gezeigt werden [13], daß diese Hypothese   quivalent zu der Forderung ist, daß der natürliche Logarithmus der  $\epsilon_\ell$  einer Poisson-Verteilung folgt.

Die von She und L  v  que vermutete Symmetrie ist inzwischen als generalisierte Skalen-Kovarianz der Turbulenz identifiziert worden ([36],[13]).

## Kapitel 4

# Die verwendeten numerischen Methoden

Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten direkten numerischen Simulationen von MHD-Turbulenz wird das partielle Differentialgleichungssystem der inkompressiblen MHD ((2.5), (2.12), (2.7), (2.8)) von einem festgelegten Anfangszustand aus in der Zeit fortintegriert.

Das turbulente System, d.h. die turbulenten Felder  $\omega^1$  und  $\mathbf{B}$ , wird dabei durch eine diskretes, dreidimensionales, äquidistantes Gitter in Würfelform repräsentiert, dessen Kantenlänge  $2\pi$  beträgt und bei dem in allen drei Raumrichtungen periodische Randbedingungen gelten.

Auf dieses Gitter werden die räumlichen Fourier-Moden der turbulenten Felder,  $\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)$  und  $\hat{B}(\mathbf{k}, t)$ , für diskrete Wellenvektoren  $\mathbf{k}_i$  mit  $k_x = -k_{\max}, \dots, k_{\max}$ ,  $k_y = -k_{\max}, \dots, k_{\max}$  und  $k_z = 0, \dots, k_{\max}$  abgebildet ( $k_x, k_y, k_z \in \mathbb{Z}$ )<sup>2</sup>. In  $z$ -Richtung wird die Ursprungs-Symmetrie der Fourier-Repräsentation reeller Funktionen ausgenutzt. Die maximale räumliche Auflösung des Gitters wird über den größtmöglichen Wellenvektorbetrag  $k_{\max}$  festgelegt. Der in dieser Arbeit maximale verwendete Wert  $k_{\max} = 256$  geht an die Grenze des auf dem zur Verfügung stehenden, massiv-parallelen Cray-T3E Rechnersystems Möglichen<sup>3</sup> und stellt zur Zeit die beste direkte Fourier-Raum-Näherung eines realen, inkompressiblen MHD-Systems ( $k_{\max} = \infty$ ) dar.

In diesem Kapitel werden die numerischen Methoden beschrieben, mit denen das diskretisierte, turbulente MHD-System in der Zeit weitergerechnet wird. Weiterhin werden die verschiedenen Maßnahmen zur Erzeugung definierter Anfangsbedingungen und Kriterien für die Wahl der Systemparameter  $Re$  bzw.  $Rm$  erläutert. Abschließend werden einige Aspekte der Implementierung des Simulationsprogramms auf dem massiv-parallelen Rechnersystem Cray T3E dargelegt.

---

<sup>1</sup>Da die mathematische Beziehung zwischen einem quellenfreien Vektorfeld und dessen Wirbelfeld eindeutig ist, sind  $\omega$  und  $\mathbf{v}$  für die Beschreibung des Geschwindigkeitsfelds äquivalente Variable.

<sup>2</sup>Alle im weiteren Text angegebenen Fourier-Variablen (Vektoren sind durch „ $\hat{\cdot}$ “ gekennzeichnet, Skalare durch die explizite Angabe der Abhängigkeit von  $\mathbf{k}$ ) verstehen sich als Funktionen von  $\mathbf{k}$  und  $t$ , soweit nicht ausdrücklich anders angegeben.

<sup>3</sup>Die Begrenzung liegt in erster Linie an dem hohen Speicherbedarf des Gitters.

## 4.1 Das Pseudospektralverfahren

Fourier-spektrale numerische Verfahren zur Lösung partieller Differentialgleichungen arbeiten auf einem diskreten Gitter, auf das die Fourier-Transformierte der Lösungsfunktionen abgebildet wird. Diese numerische Form der Darstellung ist bei Simulationen homogener und isotroper Turbulenz üblich, da sie dem theoretischen Turbulenz-Bild, das mit Strukturen verschiedener räumlicher Ausdehnung arbeitet, entspricht.

Während sich die räumlichen Differentiationsoperatoren der Differentialgleichungen im Fourier-Raum gemäß der Transformation  $\partial_{x_j} \longrightarrow ik_j$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , als einfache Wellenvektor-Multiplikationen ausführen lassen, werden Produkte aus dem Ortsraum zu sogenannten Faltungen (hier als Beispiel für den schon eingeführten, endlichen, diskreten Fourier-Raum):

$$[a(r) \cdot b(r)]_{\text{Fourier}(k)} = \sum_{k'=-k_{\max}}^{k_{\max}} a(k) b(k - k') .$$

Da der Aufwand zur Berechnung einer Faltung in einem dreidimensionalen, diskreten Fourier-Raum mit  $N$  Gitterpunkten in jeder Raumrichtung allgemein von der Ordnung  $O(N^6)$  ist, im Vergleich zu  $O(N^3)$  für die Produktbildung mit einem Finiten-Differenzen-Algorithmus im Realraum, sind spektrale Verfahren nur für Gitter mit kleinen  $N$  praktikabel.

Pseudospektrale Verfahren im Fourier-Raum umgehen dieses Problem durch die Anwendung schneller Fourier-Transformations-Algorithmen. Dabei werden die Fourier-Darstellungen der zu multiplizierenden Funktionen einzeln zurück in den Ortsraum transformiert, dort miteinander in jedem Gitterpunkt multipliziert, und danach das Ortsraum-Produkt wieder in den Fourier-Raum zurücktransformiert.

Der Rechenaufwand pseudospektraler Verfahren ist in drei Raumdimensionen mit  $O(N^3 \ln(N))$  ([11], S.83) im Vergleich zu spektralen Verfahren deutlich geringer und ermöglicht die sinnvolle Anwendung pseudospektraler Algorithmen auf Turbulenz-Probleme, wie in dieser Arbeit.

### 4.1.1 Die MHD-Gleichungen im diskreten Fourier-Raum

Da die Forderungen nach Divergenzfreiheit von  $\mathbf{v}$  (2.5) und  $\mathbf{B}$  (2.7) reine Anfangsbedingungen sind<sup>4</sup>, werden für die direkte, zeitliche Fortentwicklung des MHD-Systems nur die beiden Gleichungen (2.12) und (2.8) benötigt. Sie lauten im diskreten, endlichen Fourier-Raum

$$\partial_t \hat{\omega}_m = i\mathbf{k}_m \times \left[ \widehat{\mathbf{v} \times \omega - \mathbf{B} \times (i\mathbf{k}_m \times \hat{B}_m)} \right]_m - \text{Re}_v^{-1} k_m^{2v} \hat{\omega}_m \quad (4.1)$$

$$\partial_t \hat{B}_m = i\mathbf{k}_m \times \left[ \widehat{\mathbf{v} \times \mathbf{B}} \right]_m - \text{Rm}_v^{-1} k_m^{2v} \hat{B}_m . \quad (4.2)$$

Der Index  $m$  numeriert die jeweilige Fourier-Mode, für welche die indizierte Größe ausgewertet wird. Die mit Überstrich und Hut gekennzeichneten Klammern beinhalten die nichtlinearen Terme, welche Faltungen im Fourier-Raum entsprechen. Diese Faltungen werden nach der Pseudospektralmethode berechnet.

<sup>4</sup>Diese Aussage kann durch Anwenden des Divergenzoperators auf (2.8) für  $\mathbf{B}$  direkt bewiesen werden. Für das Geschwindigkeitsfeld wird mit  $\omega$  ohnehin ausschließlich der Wirbelanteil von  $\mathbf{v}$  berechnet. Es gilt dabei im Fourier-Raum:  $\hat{\omega} = i\mathbf{k} \times \hat{v}$ ,  $\hat{v} = i/k^2 \mathbf{k} \times \hat{\omega}$ .

Man sieht, daß die beiden diskreten Gleichungen in ihrer Struktur fast identisch sind. In der Vortizitätsgleichung muß lediglich ein zusätzlicher Faltungsterm berechnet werden. Diese Symmetrie ist ein Vorteil bei der numerischen Bearbeitung, da die Struktur des Simulationsprogramms dadurch sehr einfach bleiben kann.

Die Reynoldszahlen und Dissipationsterme in (4.1) und (4.2) sind mit Hilfe der Dissipativität  $\nu = 1, 2, 3, \dots$  verallgemeinert worden. Während  $\nu = 1$  die ursprünglichen MHD-Gleichungen ergibt, führt  $\nu > 1$  zu einem hyperdissipativen System. Anstatt der normalen Viskosität  $\mu_1 = \mu$  und der magnetischen Diffusivität  $\eta_1 = \eta$  gehen in die Reynoldszahlen in diesem Fall die entsprechende Hyperviskosität  $\mu_\nu$  und Hyperdiffusivität  $\eta_\nu$  ein.

### 4.1.2 Hyperdissipation

Die Einführung von Dissipationsoperatoren höherer Ordnung ist ein numerischer Trick, der ausnutzt, daß der Dissipationsbereich für zunehmendes  $\nu$  bei immer größeren Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  konzentriert ist. Durch Ausnutzung dieses Effekts kann versucht werden, den in einer Rechner-Simulation zur Verfügung stehenden, begrenzten Spektralbereich optimal auszunutzen, d.h. das hauptsächlich interessierende Inertialgebiet auf Kosten der Ausdehnung des Dissipationsbereichs zu vergrößern.

Zur theoretischen Rechtfertigung dieses Vorgehens kann man anführen, daß die K41- und IK-Phänomenologie jeweils bis auf die Forderung, daß das Dissipationsgebiet erst bei sehr großen  $|\mathbf{k}|$  beginnt, keine Annahmen über die Art der Dissipationsmechanismen machen. Andererseits wird der in Turbulenz endlicher Reynoldszahl auftretende Bottleneck-Effekt ([15], [26]) – eine in das Inertialgebiet zurückreichende Anhäufung von Energie im Bereich des Energiespektrums kurz vor Beginn des Dissipationsgebiets – für zunehmendes  $\nu$  immer ausgeprägter [5]. Um eine Veränderung der Inertialgebietsskalierungen aufgrund des Bottleneck-Effekts so gering wie möglich zu halten, wird deshalb in dieser Arbeit höchstens  $\nu = 2$  verwendet.

Die Reynoldszahlen von Systemen verschiedener Dissipativitäten  $\nu$  können mangels eines formulierbaren physikalischen Zusammenhangs nicht miteinander verglichen werden. Man nimmt jedoch an, daß sich die Skalierungseigenschaften normaldissipativer Turbulenz, vom Bottleneck-Effekt abgesehen, nicht von denen eines entsprechenden hyperdissipativen Systems unterscheiden.

Im Rahmen des K41- bzw. IK-Modells lassen sich Ausdrücke für die Dissipationslängen  $\ell_{K41}$  (3.6) bzw.  $\ell_{IK}$  (3.10) unter Einbeziehung der Dissipativität angeben. Mit einer verallgemeinerten Näherung für die Dissipationsrate  $\sim \nu_\ell^2 \mu / \ell^{2\nu}$  ergibt sich in analoger Herleitung:

$$\ell_{K41\nu} := \left( \frac{\mu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6\nu-2}}, \quad (4.3)$$

$$\ell_{IK\nu} := \left( \frac{\nu_A \eta^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4\nu-1}}. \quad (4.4)$$

### 4.1.3 Der Aliasing-Fehler

Bei der Berechnung der Faltungen tritt der sogenannte Aliasing-Fehler auf. Er entsteht dadurch, daß bei der Pseudospektralverfahren kennzeichnenden Produktbildung im Ortsraum räumliche Fourier-Moden erzeugt werden, deren Wellenvektorbetrag über  $k_{\max}$  liegt und die deshalb bei der Rücktransformation in den endlichen Fourier-Raum



nicht korrekt auf das bis  $k_{\max}$  reichende Gitter abgebildet werden können. Die Fourier-Moden mit  $|\mathbf{k}| > k_{\max}$  werden vom schnellen Fourier-Transformationsverfahren von den äußeren Gittergrenzen kommend, fälschlicherweise auf die korrekt transformierten Moden addiert.

Zur vollständigen Vermeidung des Aliasing-Fehlers (De-aliasing) ist es nötig, eine Pufferzone der Breite  $k_{\max}/2$  um das eigentliche Rechengitter herumzulegen ([11], S.84 ff.). Diese Zone dient ausschließlich dazu, die zusätzlichen und ungewollten Aliasing-Moden aufzunehmen, die nach jeder Faltungsberechnung sofort auf Null gesetzt und somit aus dem System entfernt werden.

Allerdings rechnet man in drei Dimensionen bei vollständigem De-Aliasing in einem würfelförmigen Gitter mit nur ungefähr 30% der Fourier-Moden, die zur Verfügung stünden, wenn auch die Pufferzone in das Rechenggebiet einbezogen würde. Weiterhin ist in dreidimensionalen, direkten Navier-Stokes-Turbulenzsimulationen gezeigt worden, daß der Einfluß des Aliasing-Fehlers auf die makroskopischen und räumlich-statistischen Turbulenz-Eigenschaften von der Ordnung des Diskretisierungsfehlers ist [42].

Aus diesen Gründen ist es bei dreidimensionalen Simulationen statistisch homogener und isotroper Turbulenz üblich, das Rechenggebiet auf eine Kugel auszudehnen, deren Durchmesser gleich der Kantenlänge des würfelförmigen Gesamtgitters ist. Die von der Kugel nicht erfassten Bereiche des Gesamtgitters werden als Pufferzonen behandelt. Dieses als sphärisches Modenabschneiden bekannte Verfahren wird in dieser Arbeit ausschließlich angewandt.

## 4.2 Die Zeitintegration

Die Vorwärtsintegration der beiden räumlich Fourier-diskretisierten Gleichungen (4.1) und (4.2) geschieht mit Hilfe eines Leapfrog-Verfahrens ([34], S.833 ff.), das eine leichte numerische Viskosität zur Vermeidung der bei diesem Algorithmus auftretenden Gitterinstabilität aufweist. Der Diskretisierungsfehler hängt in zweiter Ordnung von der Größe des Zeitschritts ab.

Da das Leapfrog-Verfahren aufgrund der Dissipationsterme in (4.1) und (4.2) numerisch nicht stabil wäre, werden diese Terme mit Hilfe einer Umformung der beiden Differentialgleichungen analytisch exakt behandelt. Hier als Beispiel die Umformung und anschließende zeitliche Diskretisierung der Induktionsgleichung (Für die Vortizitätsgleichung analog):

$$\stackrel{(4.2)}{\Rightarrow} \partial_t \left( \hat{B}_m e^{\text{Rm}_v^{-1} k_m^{2v} t} \right) = e^{\text{Rm}_v^{-1} k_m^{2v} t} \left( i \mathbf{k}_m \times \widehat{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_m} \right)$$

Wird diese Gleichung gemäß dem Leapfrog-Algorithmus mit dem Zeitschritt  $\Delta t$  diskretisiert, so ergibt sich (Für die Vortizitätsgleichung analog):

$$\Rightarrow \hat{B}_m^{n+1} = \hat{B}_m^{n-1} e^{-\text{Rm}_v^{-1} k_m^{2v} 2\Delta t} + 2\Delta t e^{-\text{Rm}_v^{-1} k_m^{2v} 2\Delta t} \left( i \mathbf{k}_m \times \widehat{[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]_m}^{n-1} \right),$$

wobei der Index  $n$  die Zeitebenen numeriert und jeden zweiten Zeitschritt zwischen den Zeitebenen mit geradem und ungeradem Index gemittelt wird.

Die maximal mögliche Größe des Zeitschritts kann mit Hilfe des Courant-Friedrichs-Levy-Kriteriums ([34], S. 829) als

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{v_0} \sim E^{-1/2} k_{\max}^{-1}$$

mit der höchstmöglichen Geschwindigkeit  $v_0$  und der kleinsten räumlichen Gitterbreite  $\Delta x$  abgeschätzt werden. Da die CFL-Bedingung jedoch nur für lineare Probleme streng gilt, muß der Zeitschritt in der Regel kleiner gewählt werden, als nach diesem hier ohnehin schon bis auf einen Faktor der Ordnung 1 genäherten Kriterium möglich wäre.

### 4.3 Anfangsbedingungen und Systemparameter

Die räumlichen Fourier-Moden der turbulenten Felder  $\hat{\omega}_m$  und  $\hat{B}_m$  des Anfangszustands werden so generiert, daß ihr Amplituden einer kugelsymmetrischen Gaußfunktion  $e^{-k_m^2/(2k_0^2)}$  in Abhängigkeit des Wellenvektorbetrags  $k_m$  folgen. Der Parameter  $k_0$  gibt den Wellenvektorbetrag an, bei dem das Maximum des auf eins normierten Gesamtenergiespektrums liegt. Die Gesamtenergie wird zu gleichen Teilen auf  $\hat{\omega}$  (kinetische Energie  $E^K$ ) und  $\hat{B}$  (magnetische Energie  $E^M$ ) verteilt. Die komplexen Phasen der Fourier-Moden werden zufällig gewählt.

Mit Hilfe einer Orthonormalbasis  $\{\mathbf{e}_m := \mathbf{k}_m/|\mathbf{k}_m|, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  mit  $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{k}_m$  (beliebig in jedem Gitterpunkt gewählt) und  $\mathbf{e}_2 := \mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_1$  wird die Orientierung der Fourier-Moden durch Linearkombination von  $\mathbf{e}_1$  und  $\mathbf{e}_2$  so festgelegt, daß die initialisierten Vektorfelder in jedem Gitterpunkt divergenzfrei sind, d.h.  $\mathbf{k}_m \cdot \hat{\omega}_m = \mathbf{k}_m \cdot \hat{B}_m = 0$  gilt.

Unter den Zwangsbedingungen  $E^K$  und  $E^M$  nicht zu verändern sowie die Divergenzfreiheit der erzeugten Felder zu erhalten, können die idealen Invarianten magnetische Helizität  $H$  und Kreuzhelizität  $K$  für den Anfangszustand festgelegt werden.

#### 4.3.1 Die Initialisierung der magnetischen Helizität $H$

Die Initialisierungsfunktion für die Komponente  $j$  des magnetischen Vektorpotentials  $\hat{A}$  im Gitterpunkt  $m$  lautet

$$\hat{A}_{mj} = e^{-k_m^2/(2k_0^2)} \left[ q_+(\phi) \underbrace{(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)}_{=: \gamma^+} e^{i2\pi\alpha_m} + q_-(\phi) \underbrace{(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2)}_{=: \gamma^-} e^{i2\pi\beta_m} \right], \quad (4.5)$$

wobei  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  Zufallszahlen im Intervall  $[0, 1]$  sind.

Da es sich bei  $\gamma^\pm$  um Eigenvektoren des Rotationsoperators handelt [43], ist die lokale Helizität des so erzeugten Vektorfeldes, die für  $\hat{A}$  gleich der lokalen magnetischen Helizität ist, in jedem Gitterpunkt  $H_m = \frac{1}{2} \hat{A}_m^* \cdot (i\mathbf{k}_m \times \hat{A}_m) = k_m \exp(-k_m^2/k_0^2) [q_+^2(\phi) - q_-^2(\phi)]$ .

Über die Gewichtungsfaktoren  $q_\pm(\phi)$ , die folgendermaßen mit dem Parameter  $\phi \in [-1, 1]$  definiert sind

$$q_\pm := \cos\left(\frac{\pi}{4}\phi\right) \pm \sin\left(\frac{\pi}{4}\phi\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}(1 \pm \phi)\right),$$

läßt sich die magnetische Helizität des Magnetfelds, das gemäß  $\hat{B}_m = i\mathbf{k}_m \times \hat{A}_m$  aus dem magnetischen Vektorpotential erzeugt wird, einstellen ohne die magnetische Energie  $E^M$  zu verändern.

Die Wahl  $\phi = 0$  führt zu  $H = 0$ , während  $\phi = \pm 1$  den Betrag der magnetischen Helizität maximieren.

### 4.3.2 Die Initialisierung der Kreuzhelizität $K$

Zur Festlegung von  $K$  ohne die Beeinflussung der bereits eingestellten Parameter (inklusive  $H$ ) wird das Geschwindigkeitsfeld  $\hat{v}_m$  über eine in jedem Gitterpunkt lokal durchgeführte Drehung um den Wellenvektor  $\mathbf{k}_m$  aus dem Magnetfeld erzeugt:

$$\hat{v}_m = D_{\mathbf{k}_m}^{-1} D_\varphi D_{\mathbf{k}_m} \hat{B}_m .$$

Die Transformationsmatrizen  $D_{\mathbf{k}_m}$  und  $D_\varphi$  sind mit Hilfe des bereits eingeführten Orthonormalsystems  $\{\mathbf{e}_m, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  definiert als

$$D_{\mathbf{k}_m} := \begin{pmatrix} \mathbf{e}_m^T \\ \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{e}_2^T \end{pmatrix}, \quad D_\varphi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Die Drehwinkel  $\varphi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$  entsprechen lokal  $K = 0$  während  $\varphi \in \{0, \pi\}$  den Betrag der lokalen Kreuzhelizität maximieren.

### 4.3.3 Die Wahl von $\text{Re}$ und $\text{Rm}$

Um ein turbulentes System zu beschreiben, daß dem theoretischen Idealfall  $\text{Re} = \text{Rm} = \infty$  möglichst nahekommt, sollten die Reynoldszahlen des simulierten Systems maximiert, d.h. Viskosität und magnetische Diffusivität minimiert werden.

Da mit steigenden Reynoldszahlen jedoch Eddies auf immer kleineren räumlichen Größenskalen angeregt werden, setzt das begrenzte räumliche Auflösungsvermögen des verwendeten Rechengitters dem Betrag der Reynoldszahlen eine obere Grenze.

Eine direkte numerische Turbulenzsimulation ist nur dann physikalisch begründet, wenn  $\text{Re}$  und  $\text{Rm}$  so gewählt sind, daß das Energiespektrum vor Erreichen der maximal aufzulösenden Wellenzahl  $k_{\max}$  auf einen vernachlässigbaren Bruchteil des Inertialgebietsniveaus abgesunken ist.

## 4.4 Das Simulationsprogramm

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine FORTRAN90-Version eines pseudospektralen Simulationsprogramms zur Berechnung des beschriebenen, periodischen MHD-Systems entwickelt. Dabei konnte von einer Basisversion ausgegangen werden, die Andreas Zeiler am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) ursprünglich für die Elektronen-MHD entwickelt hat und die von Reinhard Tisma (ebenfalls IPP) für den Einsatz auf dem massiv-parallelen Cray-T3E Rechnersystem des dortigen Rechenzentrums angepaßt worden ist. Mehrere Diagnostik-Module wurden von Antonio Celani beigesteuert.

Die Programmstruktur ist einfach-linear, dem Leapfrog-Algorithmus folgend. Die einzige Ausnahme bildet die pseudospektrale Faltungsberechnung – genauer: die dreidimensionale schnelle Fourier-Transformation, die alle komplexeren Aspekte des Datenflusses und der Parallelisierung des Simulationsprogramms beinhaltet und in der von Cray zur Verfügung gestellten Form genutzt wird. Das Rechengitter wird gemäß den Anforderungen der schnellen Fourier-Transformation auf den verteilten Speicher der verfügbaren Prozessorelemente (PE) abgebildet.

Die Fourier-Transformation grenzt die erreichbare Rechenleistung pro PE auf 30-40 MFLOPS<sup>5</sup> ein. Sie ist weiterhin hauptverantwortlich für das parallele Skalierungs-

<sup>5</sup>1 MFLOPS  $\triangleq$  1 Million Fließkomma-Operationen pro Sekunde.

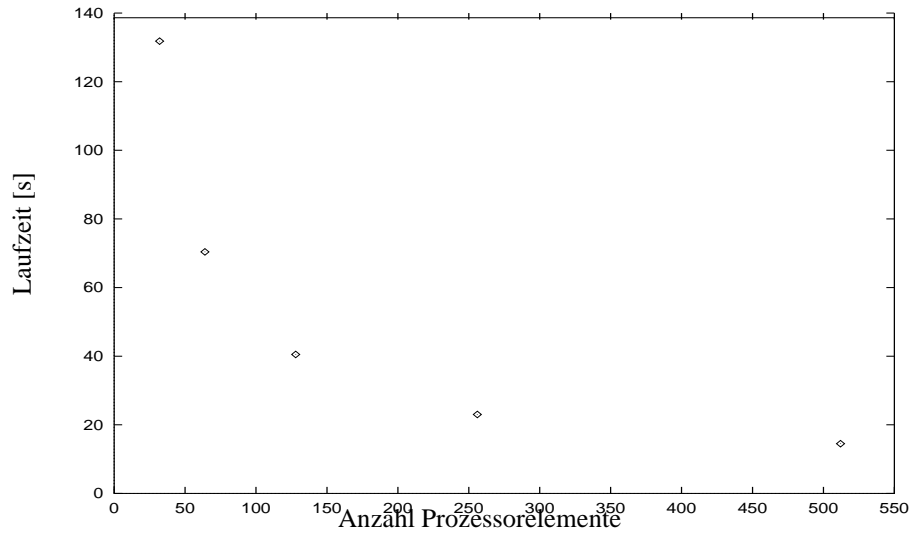


Abbildung 4.1: Benötigte Laufzeit für die Berechnung von 20 Zeitschritten bei einem  $128^3$ -Rechengitter in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten PE.

verhalten des Simulationsprogramms, d.h. die Abhängigkeit des Rechenzeitaufwands für ein bestimmtes Problem von der Anzahl der verwendeten PE.

Das Skalierungsverhalten bei einem Testproblem ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Es weicht erheblich vom Idealfall ab, der einer linearen Rechenzeitabnahme bei zunehmender PE-Anzahl entspricht. Dies ist jedoch ein erwarteter Effekt, da sich schnelle Fourier-Transformationen nur schwer effektiv parallelisieren lassen, weil sie einen sehr hohen Anteil zeitintensiver PE-zu-PE-Kommunikation bedingen.

Die erreichte Rechenleistung ist jedoch ausreichend, um mit vertretbarem Aufwand physikalisch signifikante Systeme zu behandeln. Darüberhinaus zwingt die Größe eines Rechengitters mit  $k_{\max} \geq 128$  allein aus Speichergründen zur Verwendung von bis zu 512 PE.

Eine Leistungssteigerung des verwendeten Programms ist bei einer Optimierung der zugrundeliegenden schnellen Fourier-Transformation zu erwarten.



## Kapitel 5

# Makroskopische Eigenschaften zerfallender MHD-Turbulenz

Den einfachsten Zugang zu den inhärenten Eigenschaften dreidimensionaler MHD-Turbulenz stellt das Studium der globalen Systemeigenschaften dar. Die entsprechenden Observablen sind die drei quadratischen idealen Invarianten Energie  $E$  (2.13), magnetische Helizität  $H$  (2.14), Kreuzhelizität  $K$  (2.15) sowie die aus ihnen abgeleiteten Größen, wie z.B. die Dissipationsrate  $\varepsilon$  und die Reynoldszahlen  $Re$  und  $Rm$ .

Zu diesem Zweck wird das MHD-System von einem anhand der drei Invarianten definierten Anfangszustand aus in seiner freien Zeitentwicklung verfolgt. Der Verzicht auf ein treibendes Eingreifen in die Turbulenz vermeidet unerwünschte, durch das Treiben aufgeprägte Modifikationen der Dynamik, führt jedoch wegen endlicher Viskosität und magnetischer Diffusivität zu einer streng monotonen Abnahme der Gesamtenergie: Die Turbulenz *zerfällt*.

Dieser Umstand begrenzt das Zeitfenster, innerhalb dessen die Eigenschaften voll entwickelter Turbulenz beobachtet werden können, nach hinten. Ein Indikator für eine ausreichende Turbulenzdynamik ist die Selbstähnlichkeit<sup>1</sup> der Gesamtenergiefunktion  $E(t)$ , die in Abschnitt 5.1.2 betrachtet wird.

Zusätzlich weisen die gemäß Abschnitt 4.3 zufällig erzeugten Anfangszustände noch nicht die Phasenkorrelationen zwischen den Fourier-Moden der turbulenten Felder auf, die den physikalischen Inhalt der MHD-Turbulenz ausmachen. Deren Ausbildung gilt als abgeschlossen, wenn das Maximum der Gesamtenergie-Dissipationsrate  $\varepsilon$  erreicht wird (Für einen typischen Verlauf der Energiedissipationsraten zerfallender MHD-Turbulenz siehe Abbildung 5.1.). Zu diesem Zeitpunkt haben sich die räumlich-kleinsten, für die Dissipation verantwortlichen Turbulenzstrukturen voll ausgebildet. Er entspricht einer „Large eddy turnover-time“ (LET).

In den folgenden Kapiteln erstreckt sich der Beobachtungszeitraum für voll entwickelte, zerfallende MHD-Turbulenz mit ausreichend starker nichtlinearer Dynamik über das Intervall von 1 bis maximal 10 LET (mit normaler Dissipation) bzw. 20 LET (mit Hyperdissipation), was  $t = 0 - 10$  entspricht.<sup>2</sup> Für alle behandelten Simulations-

---

<sup>1</sup>Eine Funktion  $f(x)$  heißt selbstähnlich, wenn sie sich unter einer Skalierungstransformation ihrer Variablen folgendermaßen verhält:  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \lambda x} \lambda^\alpha f(x)$  mit  $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ . Der einfachste Ansatz für  $f(x)$  ist eine Potenzfunktion:  $f(x) \sim x^\alpha$ .

<sup>2</sup>Zeit, Längen und alle physikalischen Observablen werden im weiteren gemäß der in Abschnitt 2.2 dargestellten Entdimensionierung dimensionslos, d.h. in willkürlichen Einheiten, angegeben.

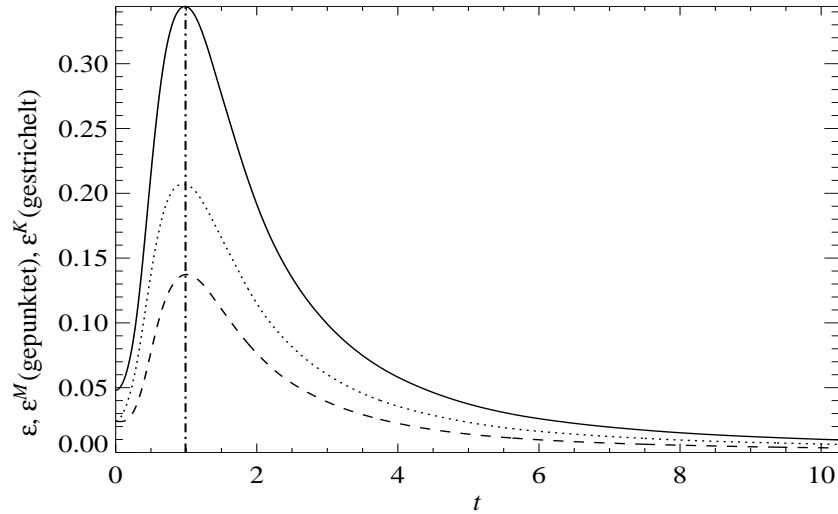


Abbildung 5.1: Typischer zeitlicher Verlauf der Dissipationsraten der kinetischen ( $\epsilon^K$ ), magnetischen ( $\epsilon^M$ ) und totalen ( $\epsilon$ ) Energie in zerfallender MHD-Turbulenz. Der Zeitraum bis zum Erreichen der Maxima (markiert durch die Strichpunkt-Linie) definiert eine „Large eddy turnover-time“ (LET). Während für den hier gezeigten, normaldissipativen Fall  $1 \text{ LET} \approx 1$  gilt, führt die Verwendung von Hyperdissipation zu  $1 \text{ LET} \approx 0.5$  (Abschnitt 5.3).

$k_{\max}$	$\nu$	$\mu = \eta$	$\text{Re}=\text{Rm}$
64	1	$3 \cdot 10^{-3}$	170
128	1	$10^{-3}$	760
128	2	$10^{-6}$	-
256	1	$3 \cdot 10^{-4}$	3000
256	2	$3 \cdot 10^{-8}$	-

Abbildung 5.2: Auflistung der Parameter  $\mu$  und  $\eta$  für durchgeführte Läufe mit verschiedenen  $k_{\max}$  und  $\nu$ . Es sind nur die physikalisch relevanten Reynoldszahlen der normaldissipativen Läufe mit verschwindendem anfänglichen  $H$  und  $K$  eingetragen. Da  $\text{Re}$  und  $\text{Rm}$  mit der Zeit leicht zunehmen (Abschnitt 5.4.2) werden die Werte für  $t = 4$  angegeben.

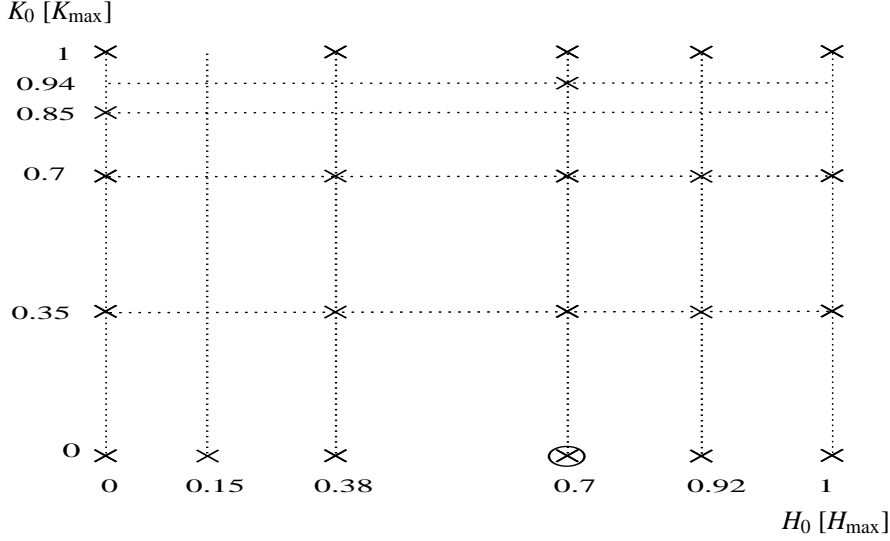


Abbildung 5.3: Schema der Simulationslaufverteilung über die  $(H_0, K_0)$ -Parameterenebene. Kreuze kennzeichnen Läufe mit  $k_{\max} = 128$  und Hyperdissipation  $\nu = 2$ , der Kreis steht für zwei Simulationen mit  $k_{\max} = 256$  (normal- und hyperdissipativ).

läufe gilt  $k_{\max} \in \{128, 256\}$  (Siehe Abbildung 5.2 für eine Auflistung der erreichten Reynoldszahlen in Abhängigkeit von  $k_{\max}$ ).<sup>3</sup>

Die Anfangszustände dieser Läufe wurden mit  $E_0^K = E_0^M = 0.5$  und  $k_0 = 4$  (gemäß Abschnitt 4.3) erzeugt. Abbildung 5.3 gibt eine Übersicht der betrachteten  $(H_0 := H(t=0), K_0 := K(t=0))$ -Konfigurationen.

Der gewählte Wert für  $k_0$  ermöglicht während des Beobachtungszeitraums die freie Entwicklung einer inversen, spektralen Kaskade, wie sie in der dreidimensionalen MHD von der magnetischen Helizität erwartet wird ([4], S.184 ff.) und in direkten numerischen Simulationen zweidimensionaler MHD-Turbulenz nachgewiesen wurde<sup>4</sup> [6]. Die inverse  $H$ -Kaskade führt zur Bildung kohärenter, großskaliger Magnetfeld-Strukturen und ist deshalb direkt mit dem turbulenten Dynamo-Effekt verknüpft, der als Ursache für die beobachteten Magnetfelder vieler Himmelskörper gilt. Ein zu kleiner  $k_0$ -Wert würde im Simulations-System zu einer Anhäufung magnetischer Helizität bei kleinen  $k$  führen (Kondensation), die unerwünschte Rückwirkungen auf die Makroskalendynamik der Turbulenz hätte.

In den folgenden Abschnitten wird das zeitliche Verhalten der Gesamtenergie, ihres kinetischen und magnetischen Anteils sowie der magnetischen Helizität und der Kreuzhelizität in Abhängigkeit von den initialen Werten von  $H$  und  $K$  untersucht. Die Einbeziehung der zugrundeliegenden nichtlinearen Dynamik führt zu einem einfachen Modell des Energiezerfalls, das sehr gut mit den Beobachtungen übereinstimmt. Darüberhinaus wird eine qualitative Deutung des Einflusses von  $H$  und  $K$  auf die MHD-Turbulenz vorgeschlagen, mit der sich das zeitliche Verhalten der Energiedissipation und des Austauschs zwischen kinetischer und magnetischer Energie erklären läßt.

<sup>3</sup>Die folgenden Simulationsergebnisse wurden mit  $k_{\max} = 128$  gewonnen, falls nicht ausdrücklich auf  $k_{\max} = 256$  hingewiesen wird.

<sup>4</sup>Dort allerdings für das mittlere quadratische Potential  $A$ , der Vektorpotentialkomponente senkrecht zum zweidimensionalen System, die das Pendant der magnetischen Helizität für die zweidimensionale MHD ist.



## 5.1 Die drei idealen Invarianten $E$ , $H$ und $K$

Für alle gewählten Anfangsbedingungen nehmen die Beträge der drei idealen Invarianten kontinuierlich ab, sie *zerfallen*. Während der Energiezerfall jedoch stark von den anfänglichen Beträgen der magnetischen Helizität  $H_0$  und der Kreuzhelizität  $K_0$  beeinflußt wird, reagiert  $H$  in ihrem zeitlichen Verlauf nicht nachweisbar auf Änderungen von  $K_0$ .  $K$  zeigt ebenfalls eine nur schwache Verlangsamung ihres Zerfalls unter Zunahme von  $H_0$ , d.h., daß sich der Endwert der Kreuzhelizität bei  $t = 10$  um maximal 18% von  $K_0$  unter  $H_0 : 0 \rightarrow H_{\max}$  erhöht.

Die schwache bzw. nicht nachweisbare gegenseitige Beeinflussung von  $H$  und  $K$  ist verständlich, da die von den beiden Invarianten beschriebenen Aspekte der Turbulenz, Magnetfeld-Topologie ( $H$ ) und mittlere  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{B}$ -Ausrichtung ( $K$ ), nicht unmittelbar voneinander abhängig sind. Außerdem steuern  $H$  und  $K$  die nichtlineare Dynamik der dritten Invarianten Energie ebenfalls weitgehend unabhängig voneinander (Abschnitt 5.1.2).

Diese Beobachtungen legen es nahe,  $H_0$  und  $K_0$  als unabhängige Parameter des turbulenten Systems fester Anfangsenergie aufzufassen.

Einen Sonderstellung in der von  $H_0$  und  $K_0$  aufgespannten Parameterebene nimmt die Gerade mit  $K_0 = K_{\max}$  ein. In diesen Fällen ist der Betrag der Ausrichtung  $\rho$  (3.7) gleich 1, d.h. in jedem Rechengitterpunkt sind  $\hat{\mathbf{v}}_m$  und  $\hat{\mathbf{B}}_m$  parallel bzw. antiparallel. Da die Amplituden der Fourier-Moden der beiden Felder anfänglich im Betrag gleich gewählt werden, verschwinden die Nichtlinearitäten in den zugrundeliegenden Differentialgleichungen (4.1) und (4.2), woraufhin  $\hat{\mathbf{v}}_m$  und  $\hat{\mathbf{B}}_m$  voneinander entkoppelt, diffusiv dissipiert werden. Diese quasi-statischen, nicht-turbulenten Grenzfälle sind von den folgenden Betrachtungen ausgeschlossen.

### 5.1.1 Selektiver Zerfall

In allen Simulationsläufen zerfallen die drei Größen  $E(t)$ ,  $H(t)$  und  $K(t)$  mit jeweils unterschiedlichen relativen, mittleren Zerfallsraten  $\sigma_E := \Delta E/E_0$ ,  $\sigma_H := \Delta H/|H_0|$  sowie  $\sigma_K := \Delta K/|K_0|$  mit  $\Delta f(t) := |f(1) - f(10)|$ .

Dieses als selektiver Zerfall bezeichnete Phänomen ([4], S.185 ff.) tritt für alle turbulenten  $(H_0, K_0)$ -Konfigurationen auf und läßt sich näherungsweise durch einfache Mittelwertbildung über die durchgeführten Läufe quantifizieren als:

$$\overline{\sigma}_E = 0.7, \quad \overline{\sigma}_K = 0.5, \quad \overline{\sigma}_H = 0.06.$$

Diese Beobachtung wird analog auch bei direkten numerischen Simulationen zweidimensionaler MHD-Turbulenz gemacht. Gesamtenergie und Kreuzhelizität zerfallen mit Raten gleicher Größenordnung, wobei  $\sigma_E > \sigma_K$  gilt. Daraus folgt eine zeitliche Zunahme der Ausrichtung  $\rho$  (3.7). Das Verhalten dieser Größe liefert bei der anfänglich räumlich-homogen generierten Orientierung von  $\mathbf{v}$  zu  $\mathbf{B}$  für endliche  $K_0$  (Abschnitt 4.3) ein Indiz für die Tendenz der turbulenten Felder, sich parallel bzw. antiparallel auszurichten, um das Gesamtsystem in den energetisch günstigsten Zustand einer kräftefreien  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{B}$ -Konfiguration zu bringen. Dieser aufgrund theoretischer Überlegungen vorhergesagte Prozeß der dynamischen Ausrichtung von  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  ([4], S.193 ff.), der als Ursache der ausgeprägten  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{B}$ -Korrelationen im Sonnenwind vermutet wird [19], verlangsamt sich aufgrund des Energiezerfalls kontinuierlich, so daß innerhalb des verfügbaren Zeitfensters das Erreichen des asymptotischen Zustands  $|\rho| = 1$  nur für ausreichend hohe  $|K_0|$  beobachtet werden kann (Abbildung 5.4).

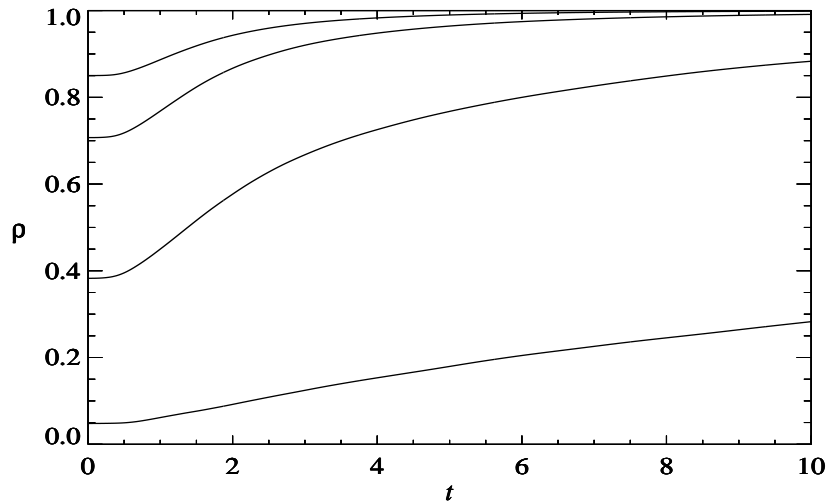


Abbildung 5.4: Zeitlicher Verlauf der globalen  $\mathbf{v}\text{-}\mathbf{B}$ -Ausrichtung  $\rho$  für festes  $H_0 = 0.7H_{\max}$  in Abhängigkeit von  $K_0$  (ablesbar als  $\rho(t=0)/2$ ). Aufgrund des Energiezerfalls sättigt  $\rho$  unter dem asymptotischen Wert 1, falls  $|K_0|$  nicht bereits ausreichend groß gewählt wurde.

Für anfänglich verschwindendes  $K_0$ , dem zweiten Sonderfall neben  $|K_0| = K_{\max}$ , ist jedoch keine monotone Zunahme des Betrags der Ausrichtung  $\rho$  zu beobachten. Stattdessen bleibt der Betrag von  $\rho$  über den gesamten Beobachtungszeitraum hinweg unter  $10^{-3}$ . Offensichtlich erleichtern bereits im System vorhandene Bereiche mit endlichem mittleren  $\rho$  den Prozeß der dynamischen Ausrichtung analog zur Kondensation einer Gasphase oder der Magnetisierung eines magnetisierbaren Festkörpers.

Da  $\rho(t)$  für alle hier angesetzten Anfangsbedingungen weitestgehend unbeeinflusst von  $H_0$  monoton zunimmt, und eine ansteigende globale Ausrichtung das Gewicht der für die Turbulenzdynamik verantwortlichen, nichtlinearen Terme in den zugrundeliegenden Differentialgleichungen (4.1) und (4.2) gegenüber den dissipativen Termen vermindert, läßt sich die Kreuzhelizität  $K$  als Dämpfungsparameter der dreidimensionalen MHD-Turbulenz auffassen.

Die magnetische Helizität zerfällt im Vergleich zu  $E$  und  $K$  mit einer sehr viel kleineren mittleren Rate. Dies impliziert zwar nicht zwingend, wie in der zweidimensionalen MHD-Turbulenz, eine inverse  $H$ -Kaskade, ermöglicht jedoch,  $H$  bei der Betrachtung des Energiezerfalls wegen  $\sigma_E \gg \sigma_H$  als quasi-konstant anzunehmen (Abschnitt 5.4).

Die magnetische Helizität charakterisiert die Topologie des Magnetfelds. Ihr Betrag kann in direkter Analogie zu der für Navier-Stokes-Turbulenz wichtigen, kinetischen Helizität  $\mathbf{\Pi} = 1/2 \int_V dV (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\omega})$  als globaler Drehsinn des magnetischen Vektorpotentials  $\mathbf{A}$  aufgefaßt werden. Dieser bestimmt den Grad der gegenseitigen Umschlingung der Flußröhren<sup>5</sup> des resultierenden Magnetfelds [28].

<sup>5</sup>Bereiche konstanten magnetischen Flusses durch eine Fläche, deren geschlossene, deformierbare Randkurve vom MHD-Medium transportiert wird.

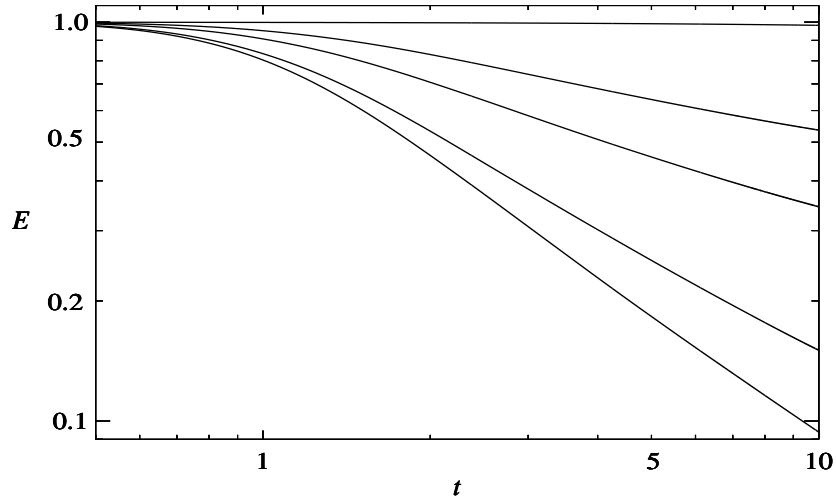


Abbildung 5.5: Zeitlicher Verlauf der Gesamtenergie für  $H_0 = 0$  und verschiedene Werte von  $K_0 = 0.04, 0.38, 0.70, 0.85, 1.0$  [ $K_{\max}$ ] (unterste bis oberste Kurve).

### 5.1.2 Der Energiezerfall

Experimentelle Ergebnisse zur Navier-Stokes-Turbulenz zeigen, daß die Gesamtenergie voll entwickelter, zerfallender Turbulenz einen in der Zeit selbstähnlichen Verlauf nimmt, d.h.  $E(t) \sim t^{-\alpha_{\text{NS}}}$  mit  $\alpha_{\text{NS}} = \text{const} \in \mathbb{R}$ . Der genaue Wert von  $\alpha_{\text{NS}}$  wird in Abhängigkeit von Experiment [12], [37]. und theoretischem Modell [22] zwischen 1 und 2 angegeben.

Für MHD-Turbulenz haben direkte numerische Simulationen in zwei [8] und drei Dimensionen (kompressible MHD) [27], [39] selbstähnlichen Energiezerfall nachgewiesen, wobei im dreidimensionalen Fall  $\alpha_{\text{MHD}} = 1 \pm 0.2$  gefunden wurde. Theoretische Betrachtungen im Rahmen des IK-Bildes [17] sowie anhand der Quasi-Konstanz von  $H$  ([4], S.195 ff.) führen zu  $\alpha_{\text{MHD}} = 5/6$  bzw.  $\alpha_{\text{MHD}} = 2/3$ .

Auch im hier simulierten MHD-System folgt  $E(t)$  für alle  $(H_0, K_0)$ -Konfigurationen im Intervall  $t = 3 - 10$  in guter Näherung einem Potenzgesetz  $\sim t^{-\alpha_{\text{MHD}}}$ , wie anhand der doppelt-logarithmischen Darstellung in den Abbildungen 5.5 und 5.6 erkennbar ist.

Allerdings führt die logarithmische Darstellung durch die starke Streckung der kleinen Zeitskalen zu einer Überbetonung des Zeitbereichs, innerhalb dessen sich die Turbulenz ausbildet und dem deshalb für das selbstähnliche Skalierungsverhalten weniger Bedeutung zukommt.

Zur Bestimmung des Skalierungsexponenten  $\alpha_{\text{MHD}}$ , der eine Funktion von  $H_0$  und  $K_0$  ist, wird im weiteren das Zeitintervall  $t = 8 - 10$  herangezogen, da dort für alle betrachteten  $(H_0, K_0)$ -Konfigurationen angenommen werden kann, daß  $E(t)$  annähernd asymptotisch selbstähnlich verläuft.

Anhand der Abbildungen 5.5 und 5.6 ist ersichtlich, daß der Energiezerfall ausgeprägt und sehr unterschiedlich auf die Variation von  $K_0$  bzw.  $H_0$  reagiert, wobei der jeweils andere Parameter Null gesetzt wurde. Eine Betragszunahme von  $K_0$  oder  $H_0$  verlangsamt zwar in jedem Fall die Energieabnahme, während jedoch die Energiezerfallsrate mit  $K_0 \rightarrow K_{\max}$  bis auf die rein diffusive Dissipationsrate reduziert werden kann, stößt die Rate des Energiezerfalls unter Maximierung von  $H_0$  bei  $\alpha_{\text{MHD}} \approx 0.5$  an

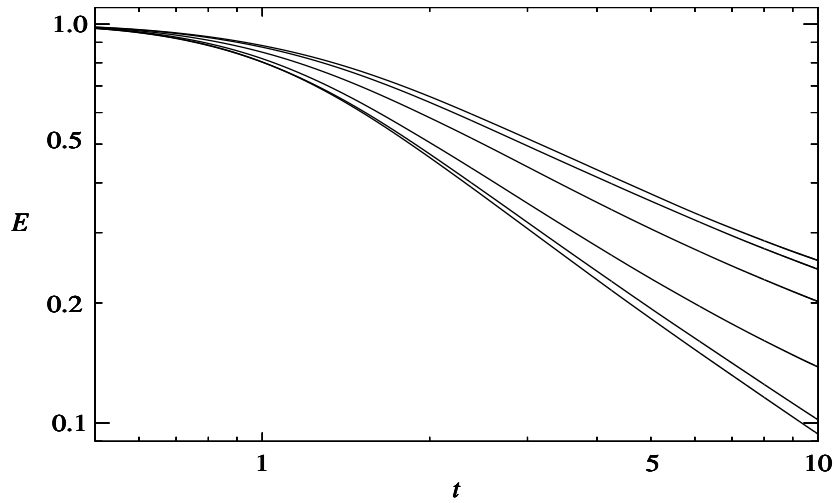


Abbildung 5.6: Zeitlicher Verlauf der Gesamtenergie für  $K_0 = 0$  und verschiedene Werte von  $H_0 = 0.0, 0.15, 0.38, 0.7, 0.92, 1.0 [H_{\max}]$  (unterste bis oberste Kurve).

eine asymptotische Grenze.

Dies wird bei der Betrachtung der logarithmischen Zeitableitungen  $d(\ln(E))/d(\ln(t))$  (Abbildungen 5.7 und 5.8) besonders deutlich. Nach dem Erreichen eines Maximums sinkt der Wert von  $\alpha_{\text{MHD}}$  kontinuierlich für jeden Lauf, wobei das Einstellen eines asymptotischen Wertes vom Effekt der abnehmenden Turbulenzdynamik überlagert wird. Läufe bis  $t = 20$  haben gezeigt, daß  $\alpha_{\text{MHD}}$  nach  $t = 10$  signifikant abnimmt: Ein klares Indiz für das Überhandnehmen der diffusiven Dissipation im Vergleich zu den nichtlinearen Turbulenzmechanismen.

In Abbildung 5.8 ist zusätzlich das Ergebnis eines hyperdissipativen Simulationslaufs mit  $H_0 = 0.7 H_{\max}$ ,  $K_0 = 0$  und  $k_{\max} = 256$  dargestellt, das keine signifikanten Abweichungen zum dem Lauf unter gleichen Anfangsbedingungen und  $k_{\max} = 128$  aufweist.

Die Abbildungen 5.9 und 5.10 zeigen die aus Mittelung über den Bereich  $t = 8 - 10$  gewonnenen Skalierungsexponenten  $\alpha_{\text{MHD}}$  in Abhängigkeit vom variierten Parameter  $K_0$  bzw.  $H_0$ . Wie schon in Abschnitt 5.1.1 erwähnt, kann über  $K_0$  die für den selbst-ähnlichen Energiezerfall verantwortliche nichtlineare Turbulenzdynamik beliebig abgeschwächt werden. Da dabei direkt die (anfängliche) Gewichtung der nichtlinearen Terme der MHD-Gleichungen relativ zu den dissipativen Termen variiert wird, ist der beobachtete, fast lineare Zusammenhang zwischen  $\alpha_{\text{MHD}}$  und  $K_0$  nicht verwunderlich.

Im Falle der Variation der anfänglichen magnetischen Helizität (Abbildung 5.10) ist die Rückwirkung auf  $\alpha_{\text{MHD}}$  subtiler. Man erkennt zwei Asymptoten:  $\alpha_{\text{MHD}} \approx 0.96 - 1$  für  $H_0 \rightarrow 0$  und  $\alpha_{\text{MHD}} \approx 0.5$  für  $H_0 \rightarrow H_{\max}$ . Die Grenzfälle werden durch einen relativ schnellen Übergang von  $H_0$  um  $0.3 H_{\max}$  verbunden.

Da  $H$  im Gegensatz zu  $K$  eine rein magnetische Größe ist und keinen direkten Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld hat, ist die Wirkung von  $H_0$  auf die Energiedynamik begrenzt und andersartig, als die von  $K_0$ . Das erklärt die maximal erreichbare Verlangsamung des Energiezerfalls auf einen Wert weit über dem des diffusiv-dissipativen Zerfalls.

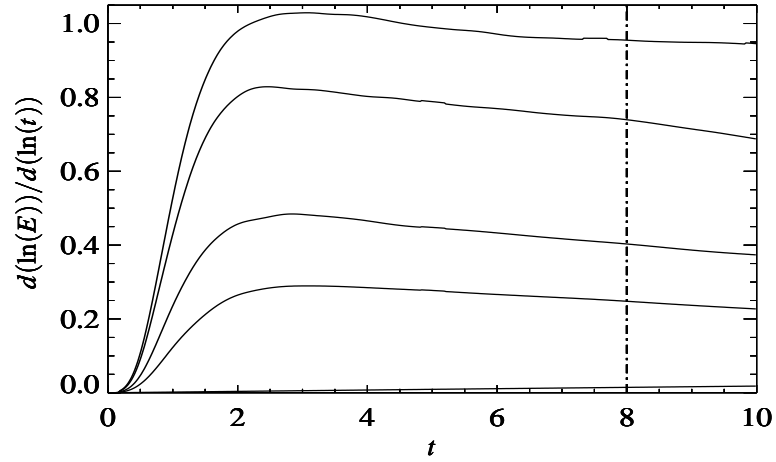


Abbildung 5.7: Logarithmische Zeitableitung von  $E(t)$  für  $H_0 = 0$  und  $K_0 = 0.04, 0.38, 0.70, 0.85, 1.0 [K_{\max}]$  (oberste bis unterste Kurve). Die Strichpunktlinie gibt den Beginn des relevanten Skalierungsbereichs an.

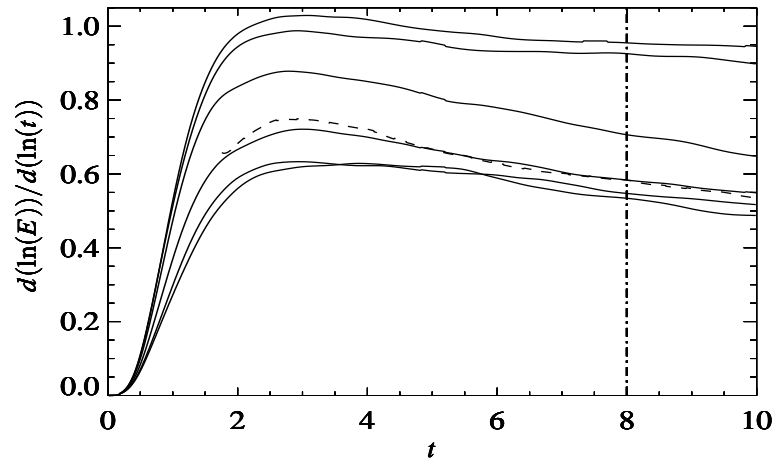
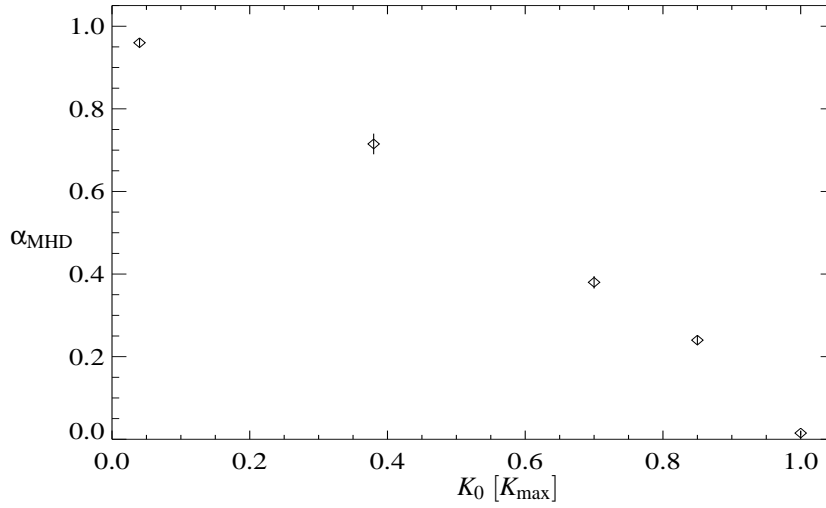


Abbildung 5.8: Logarithmische Zeitableitung von  $E(t)$  für  $K_0 = 0$  und  $H_0 = 0.0, 0.15, 0.38, 0.7, 0.92, 1.0 [H_{\max}]$  (oberste bis unterste Kurve). Die gestrichelte Kurve wurde aus den Daten eines Simulationslaufs mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $k_{\max} = 256$  gewonnen. Die Strichpunktlinie gibt den Beginn des relevanten Skalierungsbereichs an.

Abbildung 5.9:  $\alpha_{\text{MHD}}$  in Abhängigkeit von  $K_0$  mit  $H_0 = 0$ .

Simulationsläufe mit endlichen Werten *beider* Parameter  $K_0$  und  $H_0$  zeigen, daß deren bremsende Wirkung auf den Energiezerfall additiv ist, wobei jedoch  $K_0$  immer den dominanten Einfluß ausübt. Auf welchen physikalischen Prozeß in der MHD-Turbulenz die magnetische Helizität direkten Einfluß hat, wird im nächsten Abschnitt deutlich werden.

## 5.2 Die Dynamik zwischen $E^M$ und $E^K$

Während  $\Gamma := E^K/E^M$  in direkten numerischen Simulationen zerfallender, zweidimensionaler MHD-Turbulenz zeitlich annähernd konstant ist ( $\Gamma \approx 0.5$  für  $K_0 = 0.065$ ,  $H_0 \approx 0$ ) [8], wird in den für diese Arbeit durchgeführten Läufen, in Abhängigkeit von  $K_0$  und  $H_0$ , ein sehr unterschiedliches Verhalten von  $\Gamma$  beobachtet. Da  $\Gamma = \text{const}$  dabei nur einen Spezialfall darstellt, ist der Zerfall der Gesamtenergie strenggenommen nicht selbstähnlich. Um zu einem einfachen theoretischen Modell des Energiezerfalls zu gelangen, wie es in Abschnitt 5.4 entwickelt wird, ist deshalb die Einbeziehung von  $\Gamma$  als dynamischer Variable notwendig.

Aus diesem Grund wird das zeitliche Verhalten von  $\Gamma$  in diesem Abschnitt näher untersucht. Dabei kann über den Einfluß der Parameter  $H_0$  und  $K_0$  auf das Verhalten von  $\Gamma$  auf den physikalischen Prozeß geschlossen werden, den die magnetische Helizität in der dreidimensionalen MHD-Turbulenz parametrisiert.

### 5.2.1 Generelle Eigenschaften der $(E^K \leftrightarrow E^M)$ -Dynamik

Abbildung 5.11 zeigt einen qualitativ typischen, zeitlichen Verlauf von  $E^K$  und  $E^M$  für zerfallende, dreidimensionale MHD-Turbulenz. Innerhalb der ersten LET ( $t \approx 0.5$ ), während sich aus dem ursprünglichen Anfangszustand die Turbulenz entwickelt, findet ein Energieübertrag vom Geschwindigkeits- auf das Magnetfeld statt.

Die Energieübertragungsrate  $\varepsilon^{K \rightarrow M} := -\dot{E}^K - \varepsilon^K$  wird von einer endlichen magnetischen Helizität  $H_0$  erhöht (Abbildung 5.12), innerhalb der Schranken, die von der

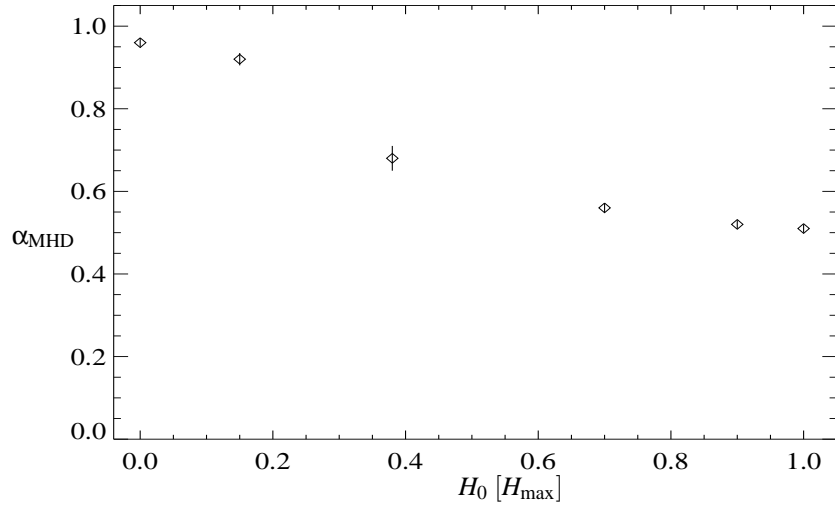


Abbildung 5.10:  $\alpha_{\text{MHD}}$  in Abhängigkeit von  $H_0$  mit  $K_0 = 0$ .

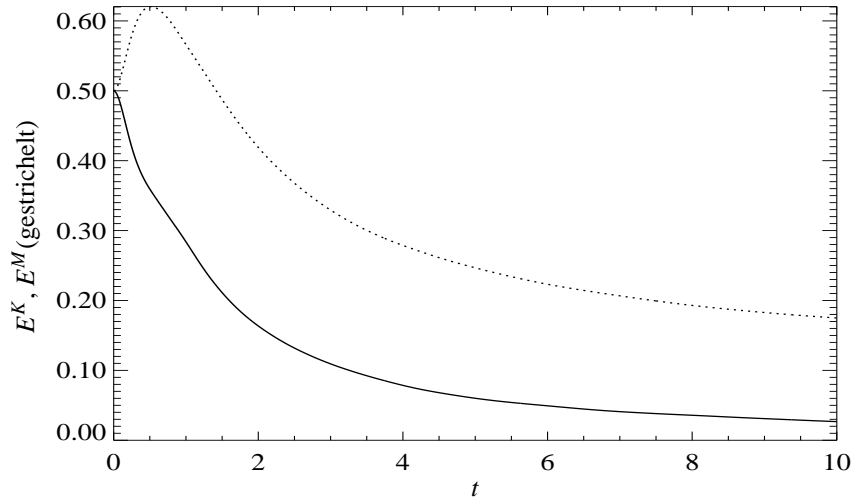


Abbildung 5.11: Qualitativ typischer, zeitlicher Verlauf von kinetischem ( $E^K$ ) und magnetischem ( $E^M$ ) Anteil der Gesamtenergie am Beispiel der Konfiguration  $H_0 = 0.7H_{\text{max}}$ ,  $K_0 = 0$ .

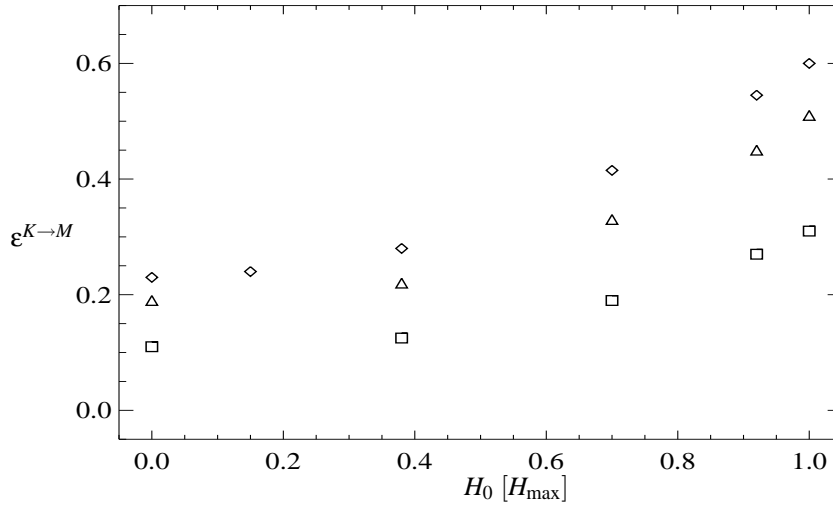


Abbildung 5.12: Maximum der Energieübertragungsrate  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  vom Geschwindigkeits- zum Magnetfeld in Abhängigkeit von  $H_0$  (Vergleiche Abbildung 5.14). Diamanten stehen für  $K_0 = 0$ , Dreiecke für  $K_0 = 0.38K_{\max}$ , Quadrate für  $K_0 = 0.7K_{\max}$ .

Kreuzhelizität  $K_0$  gesetzt werden. Wie schon anhand des Energiezerfalls festgestellt, ist  $K_0$  auch für den Energieaustausch der dominante Parameter. In Abbildung 5.13 ist klar zu erkennen, daß eine Zunahme von  $K_0$  die anfängliche Energieübertragungsrate für jedes  $H_0$  in annähernd linearer Weise bis auf Null reduziert. In Abschnitt 5.4 wird jedoch gezeigt, daß die Kreuzhelizität nur indirekt über die allgemeine Dämpfung der nichtlinearen Dynamik auf  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  wirkt, während  $H$  der intrinsische Parameter für den Energieaustausch zwischen  $\mathbf{v}$ - und  $\mathbf{B}$ -Feld ist.

Nach dem anfänglichen Dynamo-Effekt während der Turbulenzentwicklung fällt der Betrag der Energieübertragungsrate  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  auf ein sehr niedriges Niveau relativ zur Gesamtdissipationsrate ab (Abbildung 5.14).  $E^K$  und  $E^M$  zerfallen dann, im Unterschied zu zweidimensionaler MHD-Turbulenz, mit verschiedenen Raten. Dabei weist das konstante Verhältnis von kinetischer zu magnetischer Dissipationsrate  $\gamma := \epsilon^K / \epsilon^M < 1$  nur eine geringe  $H_0$ -Abhängigkeit auf (Abbildung 5.21). Unter  $K_0 : 0 \rightarrow K_{\max}$  nimmt  $\gamma$  dagegen fast linear bis auf den Wert 1 zu (Abbildung 5.22). Die Energiedissipation und ihre Abhängigkeit von  $H_0$  und  $K_0$  wird in Abschnitt 5.3 näher betrachtet.

### 5.2.2 Das Verhalten von $\Gamma$

Für verschwindende anfängliche Kreuzhelizität zeigt  $\Gamma$  einen Abfall, der für  $H_0 > 0.15H_{\max}$  qualitativ weder von der Viskosität bzw. der magnetischen Diffusivität, d.h. den Reynoldszahlen, noch vom verwendeten Dissipationsoperator ( $\nu = 1$  bzw. 2) abhängt (Abbildung 5.15). Darüberhinaus gilt in diesem Parameterbereich näherungsweise  $\Gamma \propto HE$  (Abbildung 5.16)

Allgemein erreicht  $\Gamma$  unter zunehmendem  $H_0$  bei  $t = 10$  jeweils niedrigere Werte (Abbildung 5.17), die mit der einhergehenden Zunahme der anfänglichen Energieübertragungsrate  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  korreliert sind (Abbildung 5.12) und dort auch ihre Ursache haben,



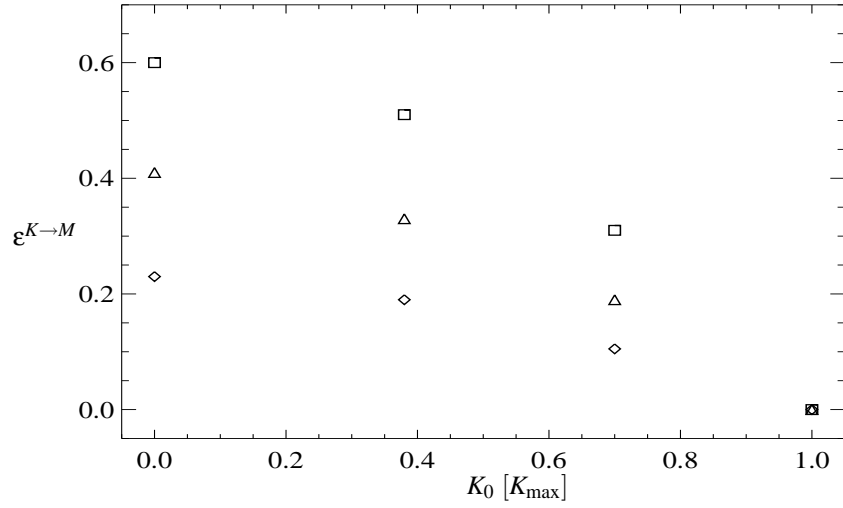


Abbildung 5.13: Maximum der Energieübertragungsrate  $\varepsilon^{K \rightarrow M}$  vom Geschwindigkeits- zum Magnetfeld in Abhängigkeit von  $K_0$  (Vergleiche Abbildung 5.14). Diamanten stehen für  $H_0 = 0$ , Dreiecke für  $H_0 = 0.7H_{\max}$ , Quadrate für  $H_0 = H_{\max}$ .

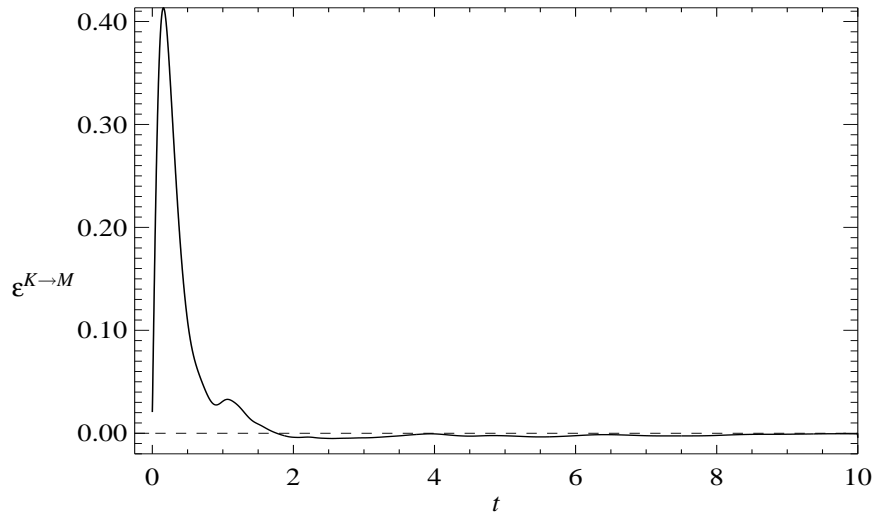


Abbildung 5.14: Qualitativ typischer, zeitlicher Verlauf der Energieübertragungsrate von  $E^K$  zu  $E^M$  am Beispiel eines Laufs mit  $K_0 = 0$  und  $H_0 = 0.7H_{\max}$ .

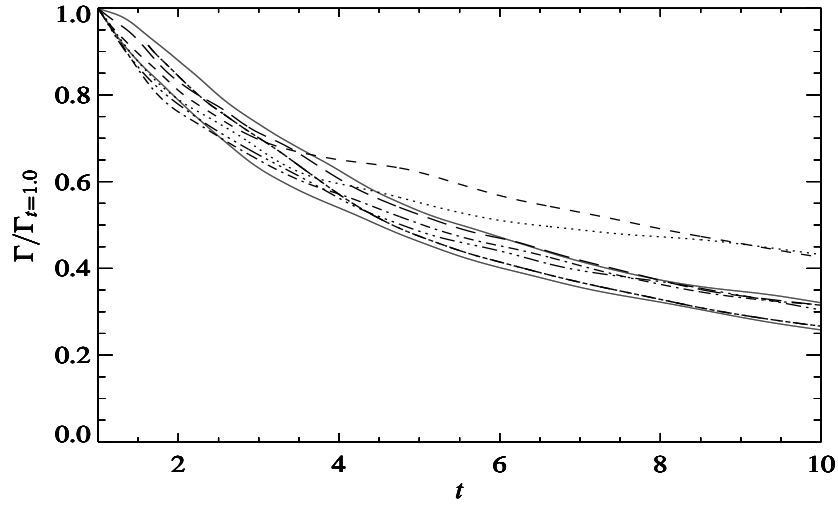


Abbildung 5.15: Verlauf von  $\Gamma$  (normiert auf  $\Gamma(t=1)$ ) für  $K_0 = 0$  und  $H_0 \in \{0, 0.15, 0.38, 0.7, 0.92, 1\} [H_{\max}]$ . Die beiden oberen, aus dem Bündel ausscherenden Kurven entsprechen  $H_0 = 0$  und  $0.15H_{\max}$ . Die beiden untersten Kurven stammen von Läufen mit  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $k_{\max} = 256$  (normal- und hyperdissipativ).

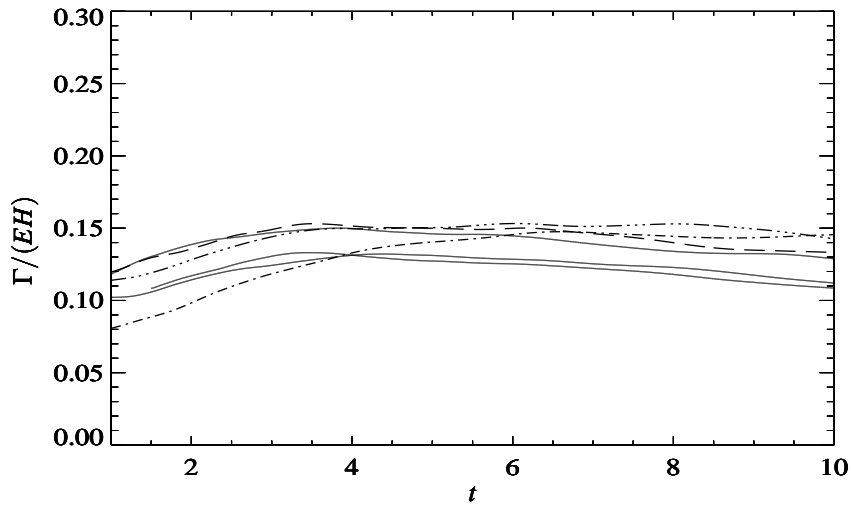


Abbildung 5.16: Dargestellt ist der Proportionalitätsfaktor der Beziehung  $\Gamma \propto HE$  für die gleichen Läufe wie in Abbildung 5.15 außer jenen mit  $H_0 = 0$  und  $H_0 = 0.15H_{\max}$ .

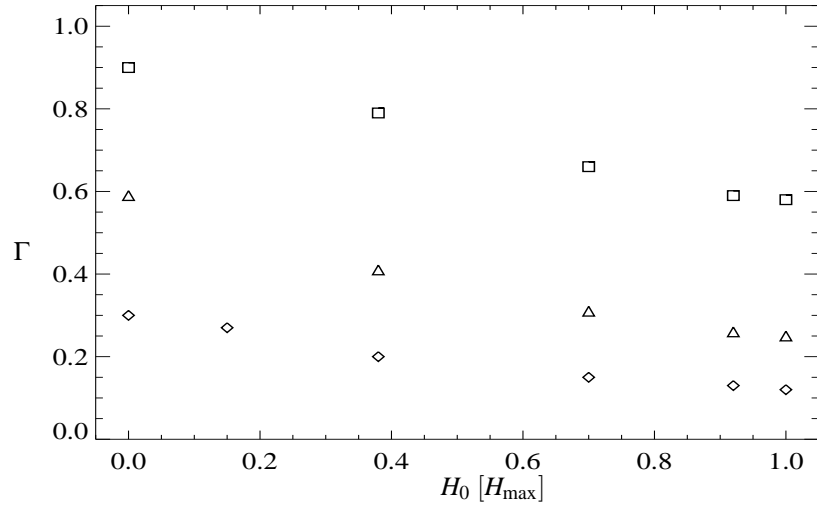


Abbildung 5.17: Die Werte von  $\Gamma$  am Ende des Beobachtungszeitraums ( $t = 10$ ) in Abhängigkeit von  $H_0$ . Diamanten stehen für  $K_0 = 0$ , Dreiecke für  $K_0 = 0.38K_{\max}$ , Quadrate für  $K_0 = 0.7K_{\max}$ .

da, wie bereits bemerkt, das Verhältnis  $\gamma$  von kinetischer zu magnetischer Dissipationsrate konstant und unabhängig von  $H_0$  ist.

Die Variation von  $K_0$  zeigt die bereits zu erwartende Wirkung:  $\Gamma(t = 10)$  läßt sich vom minimal möglichen, von  $H_0$  abhängigen Wert bis auf  $\Gamma = 1$  einstellen (Abbildung 5.18). Der Grund ist wieder die Unterdrückung der nichtlinearen Dynamik bei zunehmendem  $K_0$ , was hier der Erniedrigung der anfänglichen Energieübertragungsrates  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  entspricht.

Allerdings ist der zeitliche Verlauf von  $\Gamma$  nicht ausschließlich monoton fallend. Mit zunehmendem  $K_0$  verringert sich der zeitliche Abfall, geht in einen Bereich mit  $\Gamma \approx \text{const}$  über, um schließlich, bei weiterer Erhöhung von  $K_0$ , in einen Wiederanstieg von  $\Gamma$  zu münden (Abbildung 5.19).

Dieses Verhalten läßt sich mit einer einfachen Rechnung plausibel machen. Es ist

$$\partial_t \Gamma = \frac{1}{E^M} (\dot{E}^K - \Gamma \dot{E}^M) .$$

Weiterhin gilt  $\dot{E}^K = -\epsilon^{K \rightarrow M} - \epsilon^K$  und  $\dot{E}^M = \epsilon^{K \rightarrow M} - \epsilon^M$ . Da  $|\epsilon^{K \rightarrow M}|$ , wie bereits bemerkt, in der voll entwickelten Turbulenzphase gegenüber  $\epsilon^K$  und  $\epsilon^M$  vernachlässigbar klein ist, folgt:

$$\partial_t \Gamma = \frac{\epsilon^K}{E^M} (\Gamma \gamma^{-1} - 1) .$$

Wegen  $\epsilon^K/E^M > 0$  entscheidet das Produkt  $\Gamma \gamma^{-1}$  über das Vorzeichen der ersten Ableitung von  $\Gamma$ . Bei niedrigen  $K_0$  ist der anfängliche Energieübertrag in der Regel ausreichend groß, um für  $\Gamma < \gamma$  zu sorgen, d.h.  $\Gamma$  fällt. Für  $K_0$  ab ungefähr  $0.7K_{\max}$  ist  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  bereits so herabgesetzt, daß  $\Gamma > \gamma$  gilt, und  $\Gamma$  demnach zunimmt. Diese Aussagen sind konsistent mit den Beobachtungen (Abbildung 5.19).

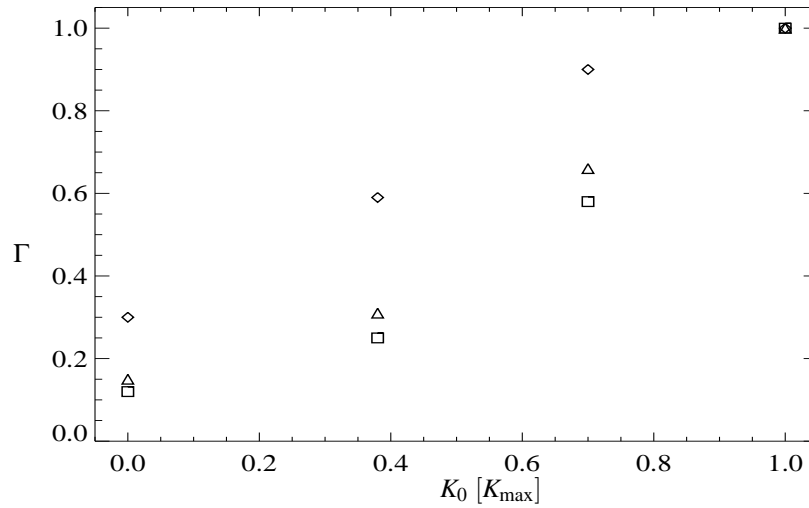


Abbildung 5.18: Die Werte von  $\Gamma$  am Ende des Beobachtungszeitraums ( $t = 10$ ) in Abhängigkeit von  $K_0$ . Diamanten stehen für  $H_0 = 0$ , Dreiecke für  $H_0 = 0.7H_{\max}$ , Quadrate für  $H_0 = H_{\max}$ .

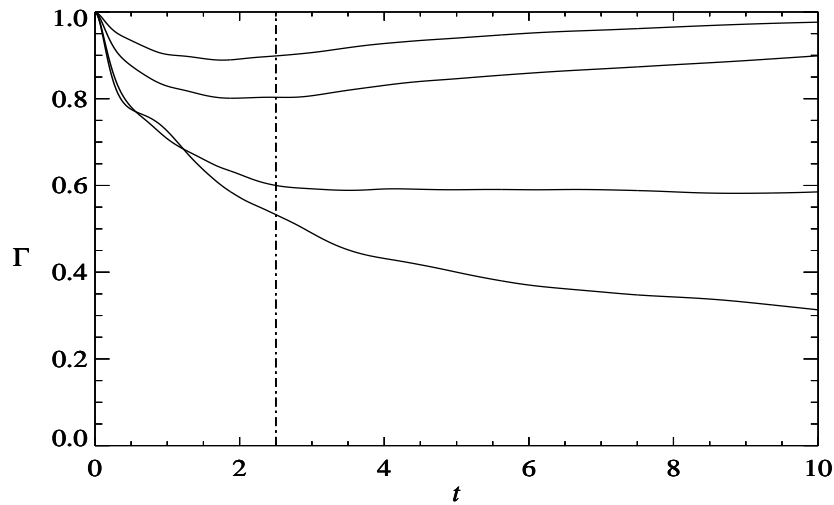


Abbildung 5.19: Zeitlicher Verlauf von  $\Gamma$  für  $H_0 = 0$  und  $K_0 = 0, 0.38, 0.7, 0.85 [K_{\max}]$  (unterste bis oberste Kurve). Die Strichpunktlinie gibt den Zeitpunkt an, bei dem  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  für die dargestellten Fälle gegenüber der Dissipation vernachlässigt werden kann. Für die einzelnen Kurven gilt dort (von unten nach oben)  $\Gamma\gamma^{-1} \approx 0.82, 0.92, 1.07, 1.13$ .

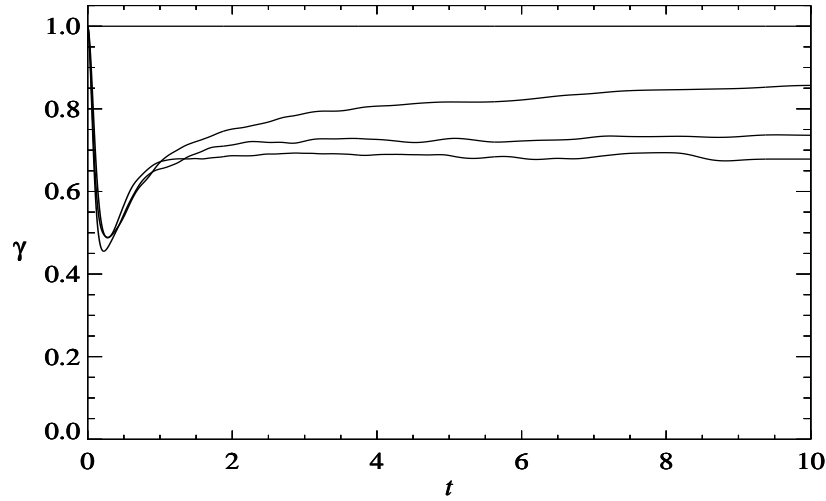


Abbildung 5.20: Das Verhältnis  $\gamma$  von kinetischer zu magnetischer Energiedissipation für  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $K_0 = 0, 0.38, 0.7, 1 [K_{\max}]$  (unterste bis oberste Kurve).

### 5.3 Die Energiedissipation

Die Gesamtdissipationsrate  $\epsilon$  sowie die Dissipationsraten der kinetischen,  $\epsilon^K$ , und magnetischen,  $\epsilon^M$ , Energie sind für ein inkompressibles, räumlich periodisches MHD-System bereits mit Hilfe der ersten Beziehung in (2.16) definiert worden. Bei Verwendung einer Dissipativität  $\nu > 1$  läßt sich dieser Ausdruck verallgemeinern zu

$$\dot{E} = - \int_V dV \{ \mu_\nu \omega \cdot (\Delta^{\nu-1} \omega) + \eta_\nu \mathbf{j} \cdot (\Delta^{\nu-1} \mathbf{j}) \} . \quad (5.1)$$

Dabei gilt  $\Delta^0 := 1$ . Die Ausdrücke für  $\epsilon^K$  und  $\epsilon^M$  ändern sich entsprechend. Die am Anfang dieses Kapitels angesprochene Verringerung des LET-Intervalls bei Erhöhung des Dissipativität läßt sich mit der dadurch hervorgerufenen Verschiebung der räumlichen Gewichtung der Dissipation erklären. Im Vergleich zu  $\nu = 1$  ist die Dissipation für  $\nu = 2$  stärker bei kleineren räumlichen Skalen konzentriert und wirkt weniger hemmend auf die direkte Energie-Kaskade bei größeren Skalen. Somit können sich die kleinsten, dissipativen Strukturen entsprechend schneller ausbilden, d.h. das die LET definierende Dissipationsmaximum wird früher erreicht (Vergleiche Abbildung 5.1).

In Abbildung 5.20 ist zu erkennen, daß sich  $\gamma = \epsilon^K / \epsilon^M$  schnell auf einen konstanten Wert einstellt, wobei ein zunehmendes  $K_0$  bremsend auf die Dynamik wirkt (Abbildung 5.22). Die für alle  $(H_0, K_0)$ -Konfigurationen beobachtete, für hohe  $K_0$  asymptotische Konstanz von  $\gamma$  läßt sich auf die kleinsten räumlichen Strukturen zurückführen, in denen die Energie in der Turbulenz dissipiert wird. Es handelt sich dabei um Mikro-Stromschichten, die mit Wirbelschichten verknüpft sind (Siehe nächstes Kapitel). Man erkennt anhand von (5.1) (speziell für  $\nu = 1$ ), daß sich somit  $\epsilon^K$  und  $\epsilon^M$  nur um einen Faktor unterscheiden sollten, der den mittleren relativen Unterschied der Wirbelstärke zur Stromdichtenintensität bei den Dissipationsskalen angibt.

Daß dieser Intensitätsunterschied nicht direkt mit  $\Gamma$  zusammenhängt, d.h. unabhängig vom makroskopischen Verhältnis von kinetischer zu magnetischer Energie ist, läßt

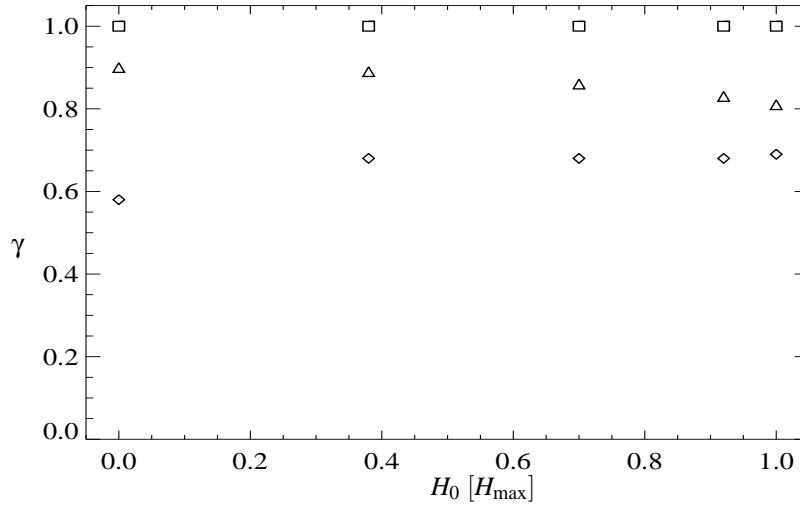


Abbildung 5.21: Das Verhältnis  $\gamma$  von kinetischer zu magnetischer Energiedissipation in Abhängigkeit von der initialen magnetischen Helizität  $H_0$ . Diamanten stehen für  $K_0 = 0$ , Dreiecke für  $K_0 = 0.7K_{\max}$ , Quadrate für  $K_0 = K_{\max}$ .

sich aus Abbildung 5.21 ablesen. Dort zeigt sich  $\gamma$  von Änderungen in  $H_0$  in guter Näherung unbeeinflusst (im Gegensatz zu  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  und  $\Gamma$ ).

Bei Erhöhung von  $K_0$  wird die Bildung der dissipativen Schichtstrukturen aufgrund der zunehmenden lokalen  $\mathbf{v}\text{-}\mathbf{B}$ -Ausrichtung unterdrückt und die Dissipationsraten fallen auf die der rein diffusiven Dissipation zurück. Das bedeutet mit  $\text{Pr}_m = 1$  einen Anstieg von  $\gamma$  auf eins (Abbildung 5.22).

Die Mechanismen, die zum Aufbau von Strom- und damit Wirbelschichten führen, sind demnach von den makroskopischen Eigenschaften der Turbulenz, exklusive der Kreuzhelizität, weitestgehend unabhängig.

## 5.4 Ein Modell des Energiezerfalls

Das vorrangige Ziel bei der theoretischen Modellierung des Verlaufs von  $E(t)$  ist die Bestimmung des Skalierungsexponenten  $\alpha_{\text{MHD}}$  (Abschnitt 5.1.2) während der Phase des selbstähnlichen Zerfalls.

Ein für zweidimensionale MHD-Turbulenz mit  $K_0 \approx 0$  erfolgreicher Ansatz basiert auf der Quasi-Konstanz der als endlich angenommenen magnetischen Helizität  $H$  im Vergleich zur Gesamtenergie  $E$  ([4], S.195 ff., im weiteren als  $H$ -Modell bezeichnet). Das  $H$ -Modell, das im ersten Teil dieses Abschnitts vorgestellt wird, ist jedoch nicht in der Lage die zeitliche Skalierung der Energie während des selbstähnlichen Zerfalls in dreidimensionaler MHD-Turbulenz korrekt vorherzusagen.

Deshalb wird im zweiten Abschnitt eine verfeinerte Form des  $H$ -Modells entwickelt, das unter Berücksichtigung des nichtlinearen Energietransfers eine sehr gute Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen erzielt [7].

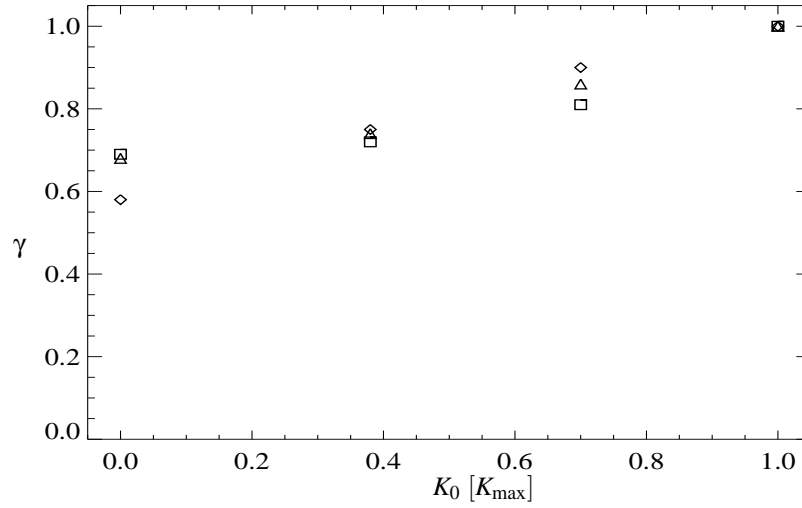


Abbildung 5.22: Das Verhältnis  $\gamma$  von kinetischer zu magnetischer Energiedissipation in Abhängigkeit von der initialen Kreuzhelizität  $K_0$ . Diamanten stehen für  $H_0 = 0$ , Dreiecke für  $H_0 = 0.7H_{\max}$ , Quadrate für  $H_0 = H_{\max}$ .

### 5.4.1 Das $H$ -Modell

Das  $H$ -Modell basiert, wie hier anhand des dreidimensionalen Falles gezeigt, auf der Quasi-Konstanz der magnetischen Helizität  $H$ , die mit Hilfe einer typischen Gradientenlänge  $\ell_0$  im Rahmen einer Dimensionsbetrachtung<sup>6</sup> genähert wird als

$$H \sim E^M \ell_0 \sim E \ell_0. \quad (5.2)$$

Der Übergang von  $E^M$  zu  $E$  lässt sich durch den asymptotischen Zustand  $\Gamma \ll 1$  (Abbildung 5.15) rechtfertigen.  $\ell_0$  wird nun ausschließlich mit Hilfe makroskopischer Größen abgeschätzt als

$$\ell_0 \sim \frac{E^{3/2}}{\varepsilon}, \quad (5.3)$$

wodurch sich, mit  $\varepsilon = -\dot{E}$ , folgende Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{E^{5/2}}{H\varepsilon} = \text{const}. \quad (5.4)$$

Mit dem Ansatz  $E(t) \sim t^{-\alpha_{\text{MHD}}}$  folgt für dreidimensionale MHD-Turbulenz direkt  $\alpha_{\text{MHD}} = 2/3$ . Für den zweidimensionalen Fall, unter Verwendung des mittleren quadratischen Potentials  $A$ , ergibt sich  $\alpha_{\text{MHD}}^{2D} = 1$ . Dieser Wert ist durch direkte numerische Simulationen bestätigt worden [8].

Die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationsläufe zeigen jedoch keine gute Übereinstimmung mit dem vorhergesagten Wert des Energie-Zerfallsexponenten  $\alpha_{\text{MHD}} = 2/3$  für die dreidimensionale, zerfallende MHD-Turbulenz (Abschnitt 5.1.2). Auch ein alternatives Zerfallsmodell mit der Vorhersage  $\alpha_{\text{MHD}} = 5/6$  (ebenfalls  $K_0 \approx 0$ ) [17]

<sup>6</sup>Dimension hier im Sinne von Maßeinheit.

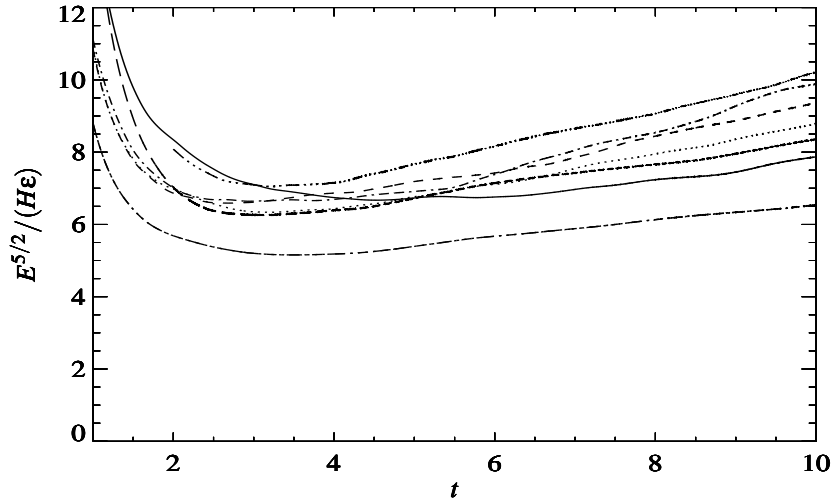


Abbildung 5.23: Zeitlicher Verlauf des Differentialausdrucks (5.4) für die gleichen Simulationsläufe wie in Abbildung 5.16. Zusätzlich ist ein normaldissipativer Lauf mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $k_{\max} = 128$  eingezeichnet, der etwas unter der restlichen Schar verläuft, da er die niedrigste Reynoldszahl und somit die geringste Selbstähnlichkeit aufweist.

führt zu keiner Übereinstimmung mit den Simulationen. Dies ist allein schon deshalb verständlich, weil es den offensichtlichen Einfluß der magnetischen Helizität auf den Energiezerfall nicht berücksichtigt.

Um einen späteren Vergleich des  $H$ -Modells mit einem verbesserten Zerfallsmodell zu ermöglichen, ist in Abbildung 5.23 der zeitliche Verlauf der „konstanten“ linken Seite der Differentialgleichung (5.4) für die gleichen Läufe, wie in Abbildung 5.16 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die für die Gültigkeit des  $H$ -Modells nötige Konstanz des Ausdrucks (5.4) nicht gegeben ist.

Die gewählte Art der Darstellung des Energie-Zerfallsgesetzes ist vorteilhaft, da eine exaktere Form der selbstähnlichen Lösung von (5.4)  $E(t) \sim (t - t_*)^{-\alpha_{\text{MHD}}}$  lautet. Die Lösung liegt demnach erst für  $t \gg t_*$  asymptotisch in ihrer selbstähnlichen Form vor. Weil man  $t_*$  jedoch nicht genau kennt, ist das übliche (und in Abschnitt 5.1.2 verwendete) „Anlegen einer Geraden“ in der doppelt-logarithmischen Darstellung von  $E(t)$  eine Näherung, die hier, bei der Überprüfung der Gültigkeit des analytischen Ausdrucks (5.4), vermieden werden kann.

### 5.4.2 Einbeziehung des nichtlinearen Energietransfers

Eine mögliche Erklärung für den geringen Erfolg des  $H$ -Modells bei der Beschreibung des Energiezerfalls der dreidimensionalen Simulationsläufe ist die Vernachlässigung des Energietransfers, der durch die Nichtlinearitäten in den MHD-Gleichungen (2.6) und (2.8) verursacht wird. Die folgende Betrachtung der nichtlinearen Energiedynamik eines MHD-Flüssigkeitsteilchens kann zwar nicht auf den nichtlinearen Energiefluß im Inertialgebiet verallgemeinert werden, ermöglicht jedoch einen Einblick in die beteiligten Mechanismen.

Skalare Multiplikation von (2.6) mit  $\mathbf{v}$  unter Vernachlässigung des dissipativen



Terms liefert die nichtlineare Energiebilanz der kinetischen Energie  $E_F^K$  eines MHD-Flüssigkeitsteilchens:

$$\partial_t E_F^K|_{\text{NL}} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) v^2/2 - \mathbf{v} \cdot \nabla p - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) . \quad (5.5)$$

Der erste Term auf der rechten Gleichungsseite beschreibt die kinetische Energieänderung aufgrund von Advektion, der zweite Term aufgrund der Beschleunigung bzw. Abbremsung entlang eines hydrostatischen Druckgradienten. Der dritte Term ist für die Energieänderung aufgrund der Lorentzkraft verantwortlich und stellt die Kopplung des Geschwindigkeitsfelds an das Magnetfeld dar.

Skalare Multiplikation von (2.8) mit  $\mathbf{B}$  unter Vernachlässigung des Resistivitätsterms ergibt die magnetische Energiebilanz:

$$\partial_t E_F^M|_{\text{NL}} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) B^2 + \mathbf{B} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})) . \quad (5.6)$$

Der erste, rechtsseitige Term liefert analog zu (5.5) die Änderung der magnetischen Energie des Flüssigkeitsteilchens durch Advektion und beschreibt zusätzlich die Energieänderung durch eine Strömung entlang bzw. gegen einen magnetischen Druckgradienten. Der zweite Term ist für die Energieänderung verantwortlich, die durch die Orientierungsänderung des Magnetfelds relativ zur Strömungsrichtung hervorgerufen wird. Der letzte Term vermittelt die Energieänderung durch von der Strömung induzierte Magnetfelder. Er ist das Gegenstück zum Lorentzkraft-Term in der kinetischen Energiebilanz.

Induktionsterm in (5.6) und Lorentzkraftterm in (5.5) sind für den Energieaustausch zwischen Geschwindigkeits- und Magnetfeld verantwortlich. Der Betrag dieser Terme hängt neben der alles beeinflussenden  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{B}$ -Ausrichtung entscheidend von der Magnetfeld-Topologie ab, die durch  $H$  parametrisiert wird. Hier wird deutlich, weshalb eine Änderung der anfänglichen magnetischen Helizität einen direkten Einfluß auf  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  und somit  $\Gamma$  haben muß. Die skalare Multiplikation mit  $\mathbf{v}$  erklärt auch, warum über die Wahl von  $K_0$ , d.h. der mittleren  $\mathbf{v}$ - $\mathbf{B}$ -Ausrichtung, der Energieaustausch zwischen den beiden Feldern in fast linearer  $K_0$ -Abhängigkeit eingestellt werden kann.

Addition von (5.5) und (5.6) führt zur Gesamtenergiebilanz eines MHD-Flüssigkeitsteilchens:

$$\partial_t E_F|_{\text{NL}} = -\mathbf{v} \cdot \nabla(E_F + p + B^2/2) + \mathbf{B} \cdot \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) . \quad (5.7)$$

Die Summe im ersten Gradienten der rechten Gleichungsseite, setzt sich aus den von der Materieströmung selbst hervorgerufenen dynamischen Drücken ( $E_F := \frac{1}{2}(v^2 + B^2)$ ) und den statischen Drücken ( $p + B^2/2$ ) zusammen, auf die die Flüssigkeitsteilchen treffen.

Eine mögliche Annahme für ein verfeinertes Energiezerfallsmodell ist, den nichtlinearen Energiefluß im Inertialgebiet durch eine advective Nichtlinearität zu nähern, d.h.  $\partial_t E|_{\text{NL}} \approx \mathbf{v} \cdot \nabla E$ . Damit folgt für den Energiefluß voll entwickelter MHD-Turbulenz im Inertialgebiet:

$$\partial_t E|_{\text{NL}} \stackrel{!}{=} \epsilon .$$

Aufgrund einer Dimensionsbetrachtung zusammen mit  $\ell_0 \sim H/E^M$  (Siehe (5.2)) ergibt sich

$$\epsilon \sim (E^K)^{1/2} \frac{E}{\ell_0} \sim (E^K)^{1/2} \frac{E^M E}{H} .$$

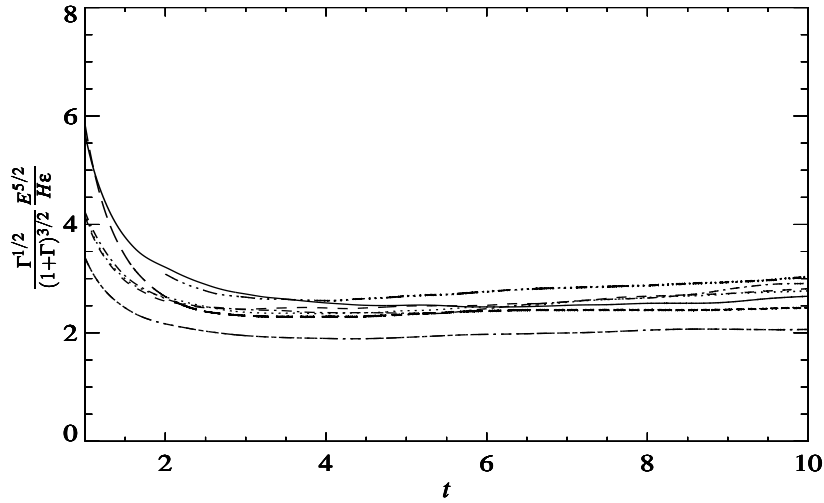


Abbildung 5.24: Zeitlicher Verlauf des Differentialausdrucks (5.8) für die gleichen Simulationsläufe, wie in Abbildung 5.23.

Kinetische und magnetische Energie können jeweils durch eine Kombination von  $\Gamma$  und  $E$  ausgedrückt werden,

$$E^K = \frac{\Gamma}{1+\Gamma} E, \quad E^M = \frac{1}{1+\Gamma} E,$$

so daß sich ein (5.4) analoger Differentialausdruck ergibt:

$$\left( \frac{\Gamma}{(1+\Gamma)^3} \right)^{1/2} \frac{E^{5/2}}{H\epsilon} = \text{const}. \quad (5.8)$$

Dieser Ausdruck ist im Vergleich zu (5.4) um eine Korrekturfunktion erweitert worden, die dem nicht streng selbstähnlichen Energiezerfall mit Hilfe von  $\Gamma = E^K/E^M$  Rechnung trägt.

Abbildung 5.24 zeigt deutlich, daß Gleichung (5.8) im Beobachtungszeitraum für verschiedene magnetische Helizitäten, Reynoldszahlen und Dissipativitäten sehr gut erfüllt ist. Damit ist das in (5.8) mündende, äußerst einfache Energiezerfallsmodell für den Anwendungsbereich verschwindender Kreuzhelizität und endlicher magnetischer Helizität ausreichend bestätigt.

Für den asymptotischen Grenzfall mit  $H_0 = H_{\max}$ , d.h.  $\Gamma \ll 1$ , und unter Ausnutzung der Beobachtung  $\Gamma \propto E$  (Abbildung 5.16) erhält man aus (5.8)

$$\frac{E^3}{\epsilon} = \text{const}$$

mit der selbstähnlichen Lösung  $E \sim t^{-0.5}$  in Übereinstimmung mit den Beobachtungen (Abbildung 5.10). Auch die Tendenz, daß, von der asymptotischen Lösung ausgehend,  $\alpha_{\text{MHD}}$  für zunehmendes  $H$  ebenfalls größer wird, ist konsistent mit den bereits dargestellten Ergebnissen.

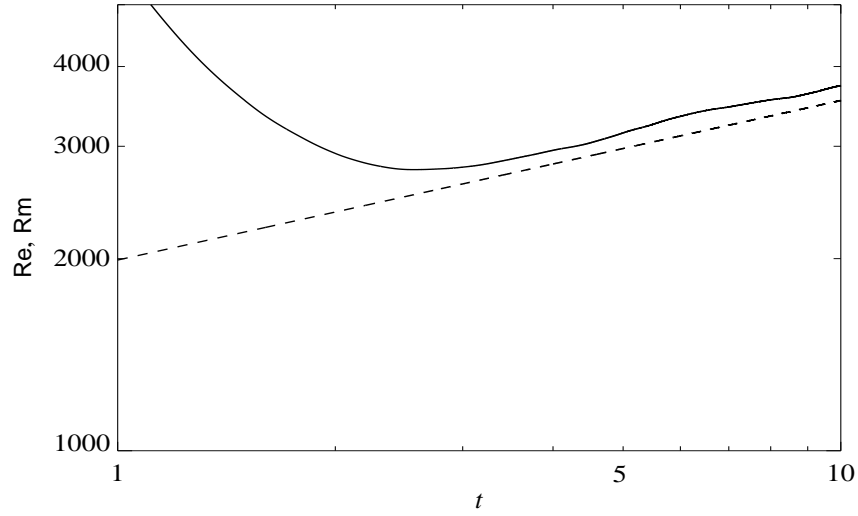


Abbildung 5.25: Zeitlicher Verlauf der Reynoldszahlen  $Re$  und  $Rm$  (identisch) für eine Simulation mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $k_{\max} = 256$ . Die gestrichelte Gerade entspricht einer  $t^{1/4}$ -Zunahme.

Darüberhinaus ergibt sich mit  $\Gamma \ll 1$ ,  $\Gamma \propto E$  aus der asymptotischen Lösung direkt ein Zerfallsgesetz für  $E^K$ . Es gilt

$$\Gamma = \frac{E^K}{E^M} \sim \frac{E^K}{E} \propto E.$$

Mit  $E \sim t^{-0.5}$  folgt daraus  $E^K \sim t^{-1}$ . Dieser Zusammenhang ist jedoch schlecht verifizierbar, da der Wert des Zerfallsexponenten von  $E^K$  durch den nichtlinearen Energieaustausch mit der magnetischen Energie  $E^M$  verschleiert wird.

Es folgt jedoch, daß die gemäß (3.1) definierten Reynoldszahlen im asymptotischen Grenzfall mit der Zeit zunehmen sollten:  $Re \sim Rm \sim t^{1/4}$ . Anhand eines Simulationslaufs mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $k_{\max} = 256$  (Abbildung 5.25) wird diese Aussage überzeugend bestätigt.

## Kapitel 6

# Statistische Eigenschaften zerfallender MHD-Turbulenz

Ein Charakteristikum turbulenter Systeme, dem besondere Bedeutung zukommt, ist die in Abschnitt 3.2.1 beschriebene Selbstähnlichkeit der Ensemblemittelwerte der Strukturfunktionen der turbulenten Felder innerhalb des Inertialgebiets.

Neben der direkten experimentellen Bestimmung der Skalierungsexponenten, die für Navier-Stokes-Turbulenz aufwendige Meßreihen erfordert und für MHD-Turbulenz nur in direkten numerischen Simulationen befriedigend ausgeführt werden kann, spielt das Energiespektrum aus historischen Gründen eine wichtige Rolle. Es ist experimentell einfacher zu bestimmen und gibt im Inertialgebiet Aufschluß über die Skalierung der Strukturfunktionen zweiter Ordnung. Die Kernaussagen der K41-Phänomenologie und ihrer MHD-Erweiterung von Iroshnikov und Kraichnan bestehen denn auch aus Werten für die Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen bzw. des Energiespektrums.

Während die K41-Vorhersagen bzw. die Abweichungen davon für Navier-Stokes-Turbulenz mittlerweile experimentell sehr genau geprüft werden können, besteht für MHD-Turbulenz noch keine gesicherte Erkenntnis über das in der Natur vorliegende räumliche Skalierungsverhalten (Siehe z.B. [10]).

Aus diesem Grund kommt den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen eine besondere Bedeutung zu, da sie eine in der direkten numerischen Behandlung bisher unerreicht hohe Ortsauflösung von insgesamt bis zu  $512^3$  räumlichen Fourier-Moden aufweisen. Die Ergebnisse der höchstauflösenden Simulationsläufe für zerfallende MHD-Turbulenz<sup>1</sup> bezüglich der verschiedenen Energiespektren sowie der Strukturfunktionen bis zur Ordnung acht werden in den ersten beiden Hauptteilen dieses Kapitels vorgestellt.

Den nichtlinearen Abweichungen im Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen aufgrund der Intermittenz der kleinsten, dissipativen Turbulenzstrukturen ist der dritte Hauptabschnitt dieses Kapitels gewidmet. Dort wird gezeigt, wie das für Navier-Stokes-Turbulenz sehr erfolgreiche Intermittenz-Modell von She und Lévyque im Licht der gewonnenen Ergebnisse auf den dreidimensionalen MHD-Fall erweitert werden kann und die beobachteten Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen in sehr guter Übereinstimmung wiedergibt.

---

<sup>1</sup>Dargestellt durch den Kreis in Abbildung 5.3.

Der vierte Hauptabschnitt dieses Kapitels stellt die Ergebnisse bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung dar, deren statistische Momente die betrachteten Strukturfunktionen sind. Den Abschluß bilden Vergleiche mit den statistischen Eigenschaften getriebener MHD-Turbulenz, die die anhand zerfallender Turbulenz gemachten Beobachtungen bestätigen.

## 6.1 Die Energiespektren

Die Spektren der magnetischen, kinetischen und Gesamtenergie liefern, obwohl sie nur einen Teilaspekt der räumlich-statistischen Turbulenzeigenschaften darstellen, wichtige Informationen über das turbulente System. Neben der selbstähnlichen Skalierung des Gesamtenergiespektrums im Inertialgebiet, die eine Überprüfung der verschiedenen Turbulenztheorien ermöglicht, kann u.a. am Verlauf der Spektren im Dissipationsgebiet festgestellt werden, ob die räumliche Auflösung des Rechengitters für die vorgegebenen Reynoldszahlen ausreicht, um die kleinsten, energetisch noch signifikanten turbulenten Strukturen zu erfassen. Der Vergleich von kinetischen und magnetischen Spektren ermöglicht darüberhinaus den Nachweis des Alfvén-Effekts (Abschnitt 3.3) und dessen spektralen Aktivitätsgebiets.

### 6.1.1 Die Normierung der Spektren

Da die Turbulenz zerfällt, und deshalb der Gesamtenergieinhalt des simulierten Systems kontinuierlich abnimmt sowie das Dissipationsgebiet (Abbildung 3.1) zu immer größeren räumlichen Skalen vorrückt, erfährt das Energiespektrum in der  $E$ - $k$ -Darstellung eine zeitabhängige Verschiebung. Gleiches gilt bei Variation der Reynoldszahlen, die den spektralen Abstand zwischen Makroskalen und Dissipationsbereich parametrisieren.

Um Spektren für unterschiedliche Reynoldszahlen, d.h. in zerfallender Turbulenz zu unterschiedlichen Zeiten, vergleichen zu können, ist deshalb eine Normierung von Abszisse und Ordinate auf Reynoldszahl-unabhängige Skalen nötig. Die Annahme, daß eine Normierung dieser Art möglich ist, impliziert die hypothetische Universalität der qualitativen Form der Spektren, die erst im Nachhinein nachgewiesen werden kann. Weiterhin muß entschieden werden, welche Phänomenologie für das betrachtete System als gültig vermutet wird (K41 oder IK).

Um die Verschiebung des Dissipationsgebiets relativ zu den festen, durch die Systemgröße vorgegebenen Makroskalen aufzufangen, wird die Wellenzahl  $k = 2\pi/\ell$  mit Hilfe der dem gewählten Modell entsprechenden Dissipationslänge  $\ell_{K41}$  (3.6) bzw.  $\ell_{IK}$  (3.10) normiert, d.h.  $k \rightarrow \hat{k} := k\ell_{K41/IK}$ . Bezüglich der Ordinate kann dann mit Hilfe von (3.5) bzw. (3.9) folgende Form des Energiespektrums erzeugt werden:

$$E(\hat{k}) = F(\epsilon, v_A) \ell_D^\beta \hat{k}^{-\beta}$$

mit  $\ell_D = \ell_{K41}$ ,  $\beta = 5/3$ ,  $F = \epsilon^{2/3}$  für das K41-Spektrum und  $\ell_D = \ell_{IK}$ ,  $\beta = 3/2$ ,  $F = (\epsilon v_A)^{1/2}$  für das IK-Spektrum. Damit ergibt sich die als zeitunabhängig angenommene Form

$$\hat{E}(\hat{k}) := F^{-1}(\epsilon, v_A) \ell_D^{-\beta} E(\hat{k}) . \quad (6.1)$$

Die Gültigkeit der gemachten Annahmen (Qualitative Universalität des Spektrums, Turbulenz-Modell) läßt sich anhand einer zeitlichen Abfolge von Spektren oder durch

direkte Variation der Reynoldszahlen mittels  $\mu$  und  $\eta$  überprüfen. Dabei ist letztere Methode vorzuziehen, da innerhalb der maximal zur Verfügung stehenden Rechengitterauflösung eine größere Reynoldszahlvariation mit geringerem Aufwand erreicht werden kann, als durch die Berechnung der Energiespektren während eines langen Zeitintervalls.

### 6.1.2 Normierung mittels eines Hybridmodells

Wie später näher ausgeführt wird, folgt das Energiespektrum des normaldissipativen Simulationslaufs mit  $k_{\max} = 256$  nicht der für MHD-Turbulenz aufgrund der IK-Phänomenologie erwarteten Inertialgebiets-Skalierung  $\beta = 3/2$ , sondern es erfüllt in guter Näherung die K41-Vorhersage  $\beta = 5/3$ .

Allerdings führt eine Normierung gemäß (6.1) bei Zugrundelegung des Kolmogoroff-Modells weder in der Amplitude noch in der Lage des Dissipationsgebiets zu einer Universalität des resultierenden Energiespektrums.

Da im simulierten System der für die IK-Phänomenologie grundlegende Alfvén-Effekt nachgewiesen werden kann (Abschnitt 6.1.4), wird zur Normierung des Energiespektrums ein verallgemeinertes IK-Modell entwickelt (im weiteren Hybridmodell genannt), das den Alfvén-Effekt berücksichtigt und eine K41-Skalierung im Inertialgebiet zuläßt.

Das zusätzliche Einbringen der magnetischen Helizität  $H$ , einer Größe deren Bedeutung für die Energiedynamik in der MHD-Turbulenz bereits im vorigen Kapitel deutlich wurde, in die Funktion  $F(\epsilon, v_A)$  in (6.1) erlaubt eine entsprechend allgemeine Formulierung des Spektralgesetzes.

Ausgehend von der Grundüberlegung in Abschnitt 3.3 wird für voll entwickelte MHD-Turbulenz im Inertialgebiet die Energiedissipationsrate mit dem von Scher-Alfvén-Wellen verursachten nichtlinearen Energiefluß gleichgesetzt:

$$\epsilon \stackrel{!}{=} \chi(v_A, H, \ell) \frac{\tau_A}{\tau_\ell^2} z_\ell^2 .$$

Der Ansatz beinhaltet eine dimensionslose Funktion  $\chi$ , die einen Einfluß unbekannter Form der Größen  $v_A$  und  $H$  sowie aus Dimensionsgründen der jeweiligen Größenskalen  $\ell$  auf den nichtlinearen Energiefluß in das Modell einbringt.

Man erhält als Basisskalierung des quadratischen Mittelwerts der Elsässer-Inkremente  $z_\ell$ :

$$z_\ell \sim (\epsilon v_A \chi^{-1})^{1/4} \ell^{1/4} .$$

Für die dimensionslose Funktion  $\chi$  wird ein Produktansatz gemacht,

$$\chi := v_A^i H^j \ell^k, \quad i, j, k \in \mathbb{R} .$$

Unter der Randbedingung  $z_\ell^2 \sim \ell^{2/3}$ , daß das zugehörige Energiespektrum, wie beobachtet, der K41-Skalierung folgt, ergibt sich für  $\chi$  nach einer Dimensionsanalyse

$$\chi = \left( \frac{v_A^2 \ell}{H} \right)^{-1/3} = \left( \frac{\ell}{\ell_1} \right)^{-1/3}$$

mit der magnetischen Länge  $\ell_1 := H/v_A^2$ .

Somit gilt für die Dissipationslänge des modifizierten Modells

$$\ell_{\text{Hyb}} = \ell_{K41} \left( \frac{\ell_0}{\ell_1} \right)^{1/8} \quad (6.2)$$

mit der typischen Turbulenzlänge  $\ell_0 = v_A^3/\epsilon$  (Siehe (5.2) und (5.3)) und der K41-Dissipationslänge (3.6).

Für das Energiespektrum folgt im Inertialgebiet

$$E(k) = C_H \epsilon^{2/3} (\ell_0/\ell_1)^{1/6} k^{-5/3} . \quad (6.3)$$

Alle weiteren, in diesem Kapitel angegebenen Spektren sind mit Hilfe von (6.2) und (6.3) normiert.

### 6.1.3 Das Gesamtenergiespektrum

Abbildung 6.1 zeigt die über Teilintervalle gemittelten, normierten Energiespektren im Zeitraum  $t = 4.5 - 10$  für  $k_{\text{max}} = 256$ ,  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\text{max}}$  und normale Dissipation. Die geringe zeitliche Streuung der Kurven bestätigt die Anwendbarkeit des im vorigen Abschnitt entwickelten Hybridmodells. Eine weitere Bestätigung erfährt die verwendete Normierung durch Abbildung 6.2, in der die über das Zeitintervall  $t = 4.5 - 10$  gemittelten, normierten Energiespektren für verschiedene Reynoldszahlen dargestellt sind. Neben den zu erwartenden, unterschiedlichen Ausdehnungen des Inertialgebiets zeigen die dort abgebildeten Spektren eine gute Reynoldszahl-Unabhängigkeit.

Man erkennt in Abbildung 6.1 deutlich ein über ungefähr eine  $\hat{k}$ -Dekade ausge dehntes Inertialgebiet, dessen Skalierung der K41-Vorhersage  $\beta = 5/3$  (Abschnitt 6.1.1) mit einer Konstanten  $C_H \approx 1.7$  folgt (gepunktete Linie). Diese Beobachtung, die konsistent mit der gemessenen Skalierung der Strukturfunktionen zweiter Ordnung der Elsässer-Felder ist (Abschnitt 6.2), steht in klarem Widerspruch zu der Vorhersage der IK-Theorie  $\beta = 3/2$  (gestrichelte Linie).

Auch die Energiespektren, die mit Raumsonden im MHD-turbulenten Sonnenwind gemessen werden, skalieren mit  $\beta \approx 5/3$  (Siehe z.B. [18]) und stimmen im Rahmen der Meßgenauigkeit mit den Ergebnissen der betrachteten Simulationsläufe überein. In direkten numerischen Simulationen zweidimensionaler MHD-Turbulenz [8] wurden zwar IK-Energiespektren gefunden, diese Ergebnisse scheinen jedoch im Licht zur Zeit durchgeführter, höherauflösender 2D-Simulationen nicht asymptotisch zu sein [3].

Die in Abbildung 6.3 dargestellten Energiespektren des hyperdissipativen Simulationslaufs mit  $k_{\text{max}} = 256$ ,  $H_0 = 0.7H_{\text{max}}$  und  $K_0 = 0$  sind effektiv flacher als die Spektren des entsprechenden normaldissipativen Laufs (Abbildung 6.1). Eine genauere Betrachtung legt die Erklärung nahe, daß es sich hier um den durch Gebrauch von Hyperdissipation verstärkten Bottleneck-Effekt handelt (Abschnitt 4.1.2). Tatsächlich läßt sich in den Energiespektren in Abbildung 6.3 ein horizontaler, gemäß  $\hat{k}^{-5/3}$  skalierender Teil erkennen, der vor dem dissipativen Abfall lokal überhöht ist. Die horizontale, gepunktete Linie gibt den Verlauf des Inertialgebietsspektrums des entsprechenden ( $v = 1$ )-Falls wieder.

Das in Abbildung 6.3 gestrichelt eingezeichnete, eindimensionale Energiespektrum  $E_{\parallel}(k_1)$  (Abschnitt 3.2.3) läßt keinen Bottleneck-Effekt erkennen. Im Inertialgebiet verläuft es gemäß  $\hat{k}^{-5/3}$ , die Amplitude ist gegenüber den winkelintegrierten Spektren um einen Faktor reduziert, der mit dem theoretischen Wert  $3/5$  gut übereinstimmt.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Der Unterschied in den Amplituden und der Ausdehnung des Inertialgebiets zwischen dem eindimen-

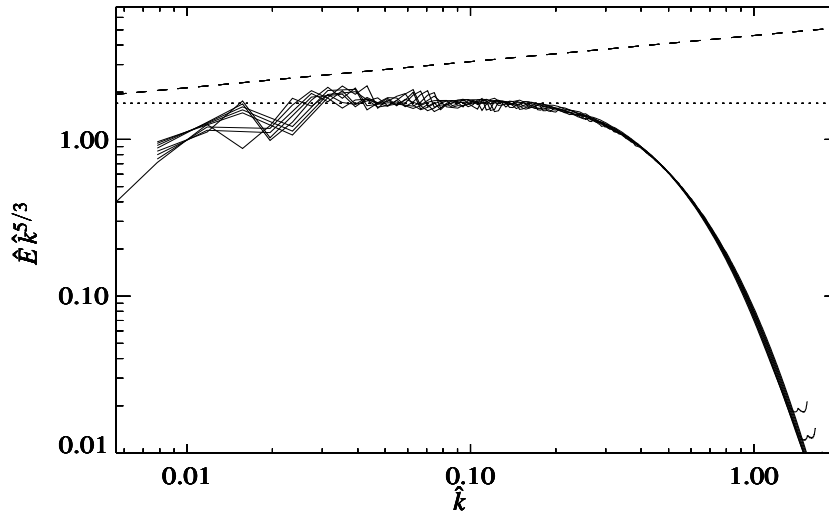


Abbildung 6.1: Die zeitgemittelten und normierten Gesamtenergiespektren für  $t = 4.5 - 10$ ,  $k_{\max} = 256$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $K_0 = 0$  und  $\nu = 1$ . Die Kurven sind mit  $\hat{k}^{5/3}$  kompensiert, um die K41-Skalierung im Inertialgebiet deutlich zu machen. Die gestrichelte Gerade gibt den Verlauf eines IK-Spektrums in dieser Kompensation an. Die gepunktete Horizontale gibt Amplitude und Skalierung des Inertialgebiets wieder. Die kleinen Haken im Dissipationsgebiet zeigen, daß dort die turbulenten Strukturen an die vorgegebene Auflösungsgrenze des Rechengitters stoßen. Da die Dissipationslänge während des Turbulenzerfalls jedoch zunimmt, verschwinden die Haken nach kurzer Zeit.

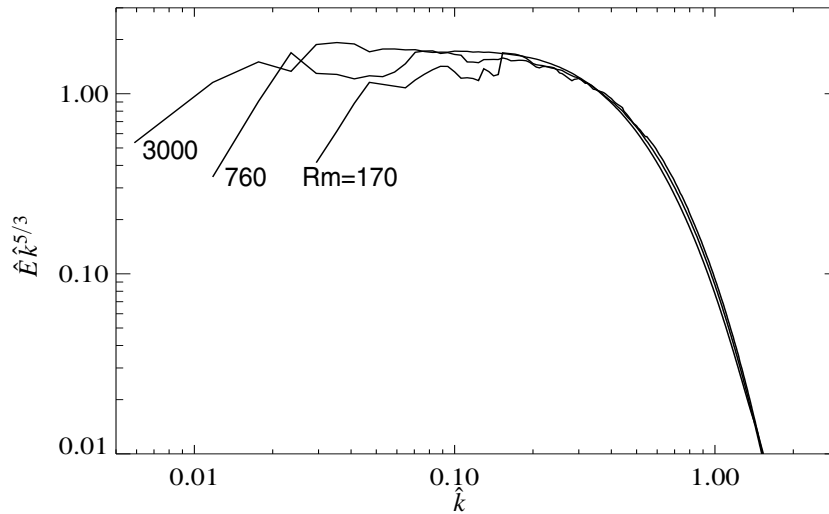


Abbildung 6.2: Die zeitgemittelten und gemäß Hybridmodell normierten Gesamtenergiespektren für  $t = 4.5 - 10$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $K_0 = 0$ ,  $\nu = 1$  und verschiedene Reynoldszahlen ( $Re = Rm$ ). Die Kurven sind mit  $\hat{k}^{5/3}$  kompensiert.



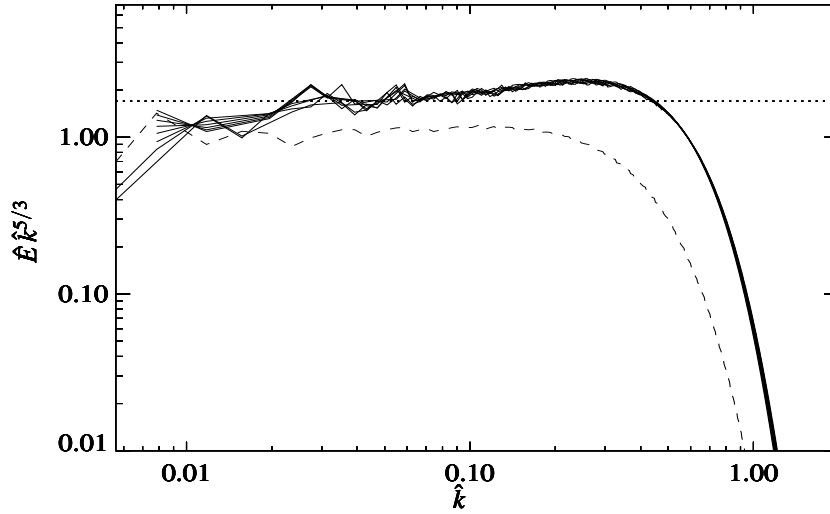


Abbildung 6.3: Die zeitgemittelten und normierten Gesamtenergiespektren für  $t = 4.5 - 10$ ,  $k_{\max} = 256$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $K_0 = 0$  und  $\nu = 2$ . Die gestrichelte Kurve ist das über den gleichen Zeitraum gemittelte und kompensierte eindimensionale Energiespektrum. Die Graphen sind mit  $\tilde{k}^{5/3}$  kompensiert, die gepunktete Linie gibt Amplitude und Skalierung des Inertialgebiets des entsprechenden normaldissipativen Laufs (Abbildung 6.1) an.

Aus der Beobachtung von K41-Gesamtenergiespektren in dreidimensionaler MHD-Turbulenz folgt, daß die Alfvén-Wellen in diesem System (Siehe nächsten Abschnitt) nicht die große Bedeutung für den nichtlinearen Energiefluß im Inertialgebiet haben, die ihnen im Rahmen der IK-Phänomenologie zugestanden wird.

#### 6.1.4 Kinetisches und magnetisches Energiespektrum

Die Abbildungen 6.4 ( $\nu = 1$ ) und 6.5 ( $\nu = 2$ ) zeigen die kinetischen und magnetischen Anteile der in den Abbildungen 6.1 und 6.3 dargestellten Gesamtenergiespektren.

In beiden Fällen liegt in der Umgebung des Dissipationsgebiets eine annähernde Gleichverteilung von  $E^K$  und  $E^M$  vor. Dies ist eine deutliche Signatur des Alfvén-Effekts (Abschnitt 3.3), bei dem die direkte Kopplung zwischen Geschwindigkeits- und Magnetfeld zur beobachteten Äquipartition zwischen kinetischer und magnetischer Energie führt [24].

Die dreidimensionale MHD-Turbulenz weist demnach durchaus den physikalischen Prozeß auf, der für das IK-Bild grundlegend ist. Wie jedoch im vorigen Abschnitt gezeigt worden ist, spielt der Alfvén-Effekt in der Inertialgebiets-Dynamik keine dominante Rolle. Dort liegt gesamtenergetisch kein beobachtbarer Unterschied zu dreidimensionaler, hydrodynamischer Turbulenz vor.

Für Normal- und Hyperdissipation wird der überwiegende Großteil der Energie des turbulenten Systems im Magnetfeld gespeichert. Dies ist auf den anfänglichen Energieübertrag  $\epsilon^{K \rightarrow M}$  zurückzuführen, der besonders im Makroskalenbereich starke Auswir-

---

sionalen Spektrum und den winkelintegrierten Energiespektren erklärt sich durch die unterschiedlichen Integrationsvolumina im Fourierraum, über die die jeweiligen Spektren gebildet werden.

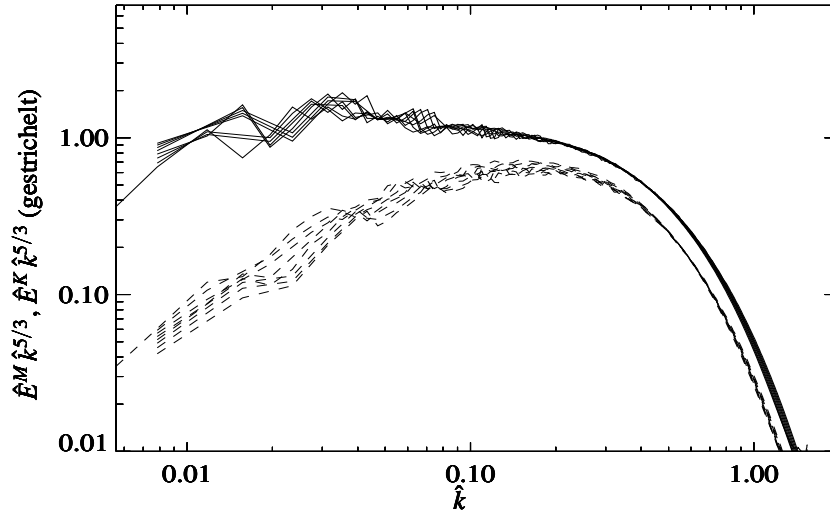


Abbildung 6.4: Die zeitgemittelten und normierten Spektren der magnetischen und kinetischen (gestrichelt) Energie für  $t = 4.5 - 10$  mit den gleichen Parametern wie in Abbildung 6.1. Die Kurven sind mit  $\hat{k}^{5/3}$  kompensiert.

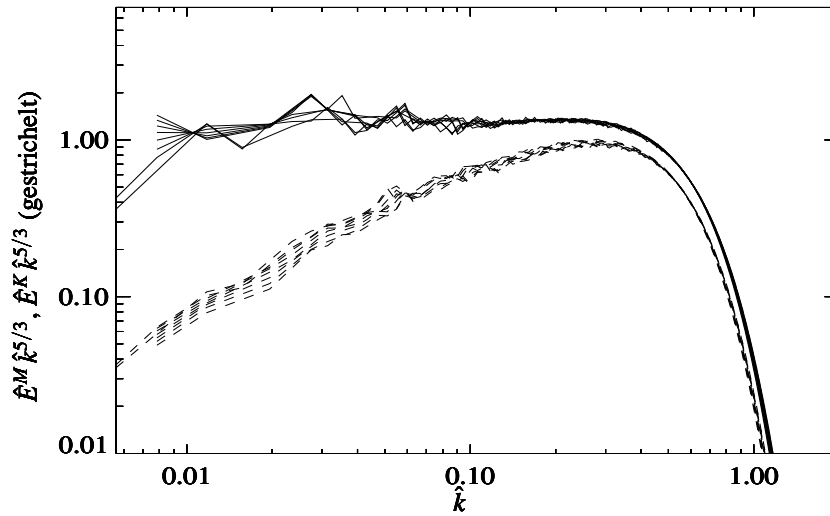


Abbildung 6.5: Die zeitgemittelten und normierten Spektren der magnetischen und kinetischen (gestrichelt) Energie für  $t = 4.5 - 10$  mit den gleichen Parametern wie in Abbildung 6.3. Die Kurven sind mit  $\hat{k}^{5/3}$  kompensiert.

kungen hat (Abschnitt 5.2.2). Darüberhinaus ist im Inertial- und Makroskalengebiet ein im Vergleich zu  $E^M$  stärkerer Zerfall der kinetischen Energie zu beobachten, der im vorigen Kapitel bereits als zeitliche Abnahme von  $\Gamma = E^K/E^M$  bemerkt wurde.

## 6.2 Die Strukturfunktionen

Die Strukturfunktionen der Ordnung  $p$  der Elsässer-Felder  $S_p^{\pm}(\ell) =: S_p^{\pm}$  (Abschnitt 3.2.1), die jetzt betrachtet werden, zeigen für eine Inkrementdistanz  $\ell$  im Inertialgebiet einen selbstähnlichen Verlauf. Die zugehörigen Skalierungsexponenten  $\zeta_p^{\pm}$  geben Aufschluß darüber, welches der beiden bereits vorgestellten Turbulenz-Bilder (K41, IK) zur Beschreibung dreidimensionaler MHD-Turbulenz geeigneter ist.

Durch Ausnutzung der Eigenschaft der erweiterten Selbstähnlichkeit der Strukturfunktionen ist es möglich, die Skalierungsexponenten bis zur Ordnung  $p = 8$  mit guter Genauigkeit anzugeben. So kann die Auswirkung der Intermittenz der Energiedissipation auf die Skalierung der Strukturfunktionen beobachtet werden.

Abschließend wird ein Überblick über die räumlichen Strukturen des simulierten turbulenten Systems und ihre Abhängigkeit von der verwendeten Dissipativität gegeben.

### 6.2.1 Die Strukturfunktionen der Elsässer-Felder

Für die Bildung der Strukturfunktionen des betrachteten MHD-Systems gibt es mehrere Alternativen: Die primitiven Variablen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{B}$  sowie die Elsässer-Felder  $\mathbf{z}^{\pm}$  (Abschnitt 2.5).

Wie sich herausstellt, ist nur für die  $S_p^{\pm}(\ell) = \langle (\delta z^{\pm}(\ell))^p \rangle$  ein ausgeprägter Skalierungsbereich zu beobachten, was als Hinweis auf die fundamentale Bedeutung der  $\mathbf{z}^{\pm}$  in der MHD zu verstehen ist. Um das Ergebnis der Mittelwertbildung bei den für ungerade Ordnungen  $p$  nicht positiv-definiten  $S_p^{\pm}$  zu verbessern, werden die Strukturfunktionen folgendermaßen umdefiniert:  $S_p^{\pm} := \langle |\delta z^{\pm}|^p \rangle$ .

Damit in zerfallender Turbulenz ein Zeitmittel über die Strukturfunktionen gebildet werden kann, wird, analog zu den Energiespektren, eine Normierung der Inkrementdistanz mit Hilfe der Dissipationslänge,  $\ell \rightarrow \hat{\ell} := \ell/\ell_{\text{Hyb}}$ , durchgeführt. Die so gebildeten  $S_p^{\pm}(\hat{\ell})$  werden mit Hilfe der Gesamtenergie normiert, was, unter den gleichen Annahmen wie in Abschnitt 6.1, zu den universellen Strukturfunktionen  $\hat{S}_p^{\pm} := S_p^{\pm}(\hat{\ell})E^{-p/2}$  führt.

Zur Untersuchung der Strukturfunktionen wurden zwei hochaufgelöste Simulationsläufe mit  $k_{\text{max}} = 256$ ,  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\text{max}}$  und  $v \in \{1, 2\}$  ausgewertet. Da die Strukturfunktionen nur für  $v = 2$  einen erkennbaren selbstähnlichen Skalierungsbereich aufweisen und dabei nicht den von den Energiespektren bekannten Bottleneck-Effekt zeigen, werden im folgenden die Ergebnisse des hyperdissipativen Laufs beschrieben und, wenn möglich, mit denen des normaldissipativen Systems verglichen.<sup>3</sup> In Abschnitt 6.2.2 wird gezeigt, daß die Werte der relativen und absoluten Skalierungsexponenten im Rahmen der Meßgenauigkeit nicht von der Dissipativität abhängen. Wegen  $K_0 = 0$  sind  $\hat{S}_p^+$  und  $\hat{S}_p^-$  nicht zu unterscheiden, weshalb im weiteren nur  $\hat{S}_p^+$  angegeben wird.

<sup>3</sup>Bei den Strukturfunktionen des normaldissipativen Systems ist der Ansatz einer selbstähnlichen Skalierung zu sehen. Diese ist aufgrund des bei  $v = 1$  zu kleinen Inertialgebiets jedoch direkt nur mit einem großen, jede Deutung ausschließenden Meßfehler zu quantifizieren.

Die Abbildungen 6.6 und 6.7 zeigen die von  $t = 3 - 9$  gemittelten, normierten Strukturfunktionen bis einschließlich zur Ordnung  $p = 8$ . Im Intervall  $\hat{\ell} = 10 - 100$  ist ein selbstähnliches Skalierungsverhalten der  $\hat{S}_p^+$  zu erkennen, das allerdings für zunehmendes  $p$  undeutlicher wird, da die Strukturfunktionen immer empfindlicher auf statistische Schwankungen der Inkremente  $\delta z^+(\ell)$  reagieren. Das anhand der Strukturfunktionen erkennbare Inertialgebiet, welches in etwa dem Inertialgebiet der eindimensionalen Energiespektren entspricht, ist kleiner als das der winkelintegrierten Energiespektren. Dies ist darauf zurückzuführen, daß sich die winkelintegrierten Energiespektren aus Integralen über Schalen jeweils ausschließlich einer Wellenzahl  $k$  zusammensetzen, während bei der Bildung der eindimensionalen Spektren  $E_{\parallel}(k_1)$  (Abschnitt 3.2.3) für jedes  $k_1$  alle Fourier-Moden mit dieser Wellenvektor-Komponente beitragen.

Theoretisch besonders interessant sind die Strukturfunktionen dritter und vierter Ordnung (Abbildung 6.6). Wie den Basisskalierungen des K41- (3.2) und des IK-Modells (3.8) zu entnehmen ist, gilt im K41-Bild  $\zeta_p^+ = p/3$ , während im IK-Bild  $\zeta_p^+ = p/4$  ist, d.h. insbesondere gilt exakt, gemäß (3.3),  $\zeta_3^+ = 1$  (K41) bzw. mit einer für die IK-Phänomenologie angenommenen, ähnlichen exakten Relation  $\zeta_4^+ = 1$  (IK). Anhand der Sattelpunkte der logarithmischen Ableitungen der Strukturfunktionen lassen sich wahrscheinlichste Werte für die beiden entscheidenden Skalierungsexponenten angeben:  $\zeta_3^+ \approx 0.95$  und  $\zeta_4^+ \approx 1.15$ .

Damit ist ein weiteres Indiz für das K41-Modell und gegen die Gültigkeit der IK-Phänomenologie gefunden. Zusätzlich kann die Beobachtung  $\zeta_3^+ \approx 1$ , die durch eine theoretische Betrachtung (Siehe (3.11)) untermauert wird, für die Berechnung der restlichen Skalierungsexponenten mit Hilfe der erweiterten Selbstähnlichkeit der Strukturfunktionen genutzt werden (Siehe folgenden Abschnitt.)

### 6.2.2 Die erweiterte Selbstähnlichkeit

Eine bis heute nicht vollständig verstandene Eigenschaft der Strukturfunktionen turbulenter Systeme ist ihre erweiterte Selbstähnlichkeit (ESS) [2]. Durch das Auftragen zweier Strukturfunktionen verschiedener Ordnungen  $p_1 = r$  und  $p_2 = s$  gegeneinander erhält man aufgrund der ESS eine Funktion mit dem relativen Skalierungsexponenten  $\xi_r^s = \zeta_r / \zeta_s$ , deren Skalierungsbereich, verglichen mit dem der Strukturfunktionen selbst, signifikant erweitert ist. Falls der Wert von  $\zeta_s$  bekannt ist, wie im vorhergehenden Abschnitt für  $s = 3$  und  $s = 4$ , können mit Hilfe der ESS Skalierungsexponenten für Strukturfunktionen hoher Ordnung sehr einfach bestimmt werden.

Die Abbildungen 6.8 und 6.9 zeigen die im vorigen Abschnitt dargestellten Strukturfunktionen, diesmal jedoch aufgetragen gegen  $\hat{S}_3^+$ . Unter der Annahme, daß  $\zeta_3^+ = 1$  exakt gilt, läßt sich aus der Steigung der entstehenden Geraden der jeweilige Skalierungsexponent der zugehörigen Strukturfunktion direkt ablesen.

Die relativen Skalierungsexponenten  $\xi_p^{3,+}$  sind im Rahmen der Meßgenauigkeit von der verwendeten Dissipativität unabhängig (Abbildung 6.10). In Abschnitt 6.5 wird darüberhinaus gezeigt, daß sie auch von Änderungen der Reynoldszahlen und dem Unterschied zwischen zerfallender und getriebener Turbulenz nicht beeinflußt werden.

Der übereinstimmende Wert  $\approx 0.7$  der relativen Exponenten zweiter Ordnung für  $v = 1$  und  $v = 2$  (Abbildung 6.10) steht in direkter Beziehung zu der gefundenen K41-Skalierung der Energiespektren (im hyperdissipativen Fall: des eindimensionalen Energiespektrums ohne Bottleneck-Effekt, im normaldissipativen Fall: des winkelintegrierten Energiespektrums), da für die Inertialgebiets-Skalierung  $\beta$  (Abschnitt 6.1.1) der

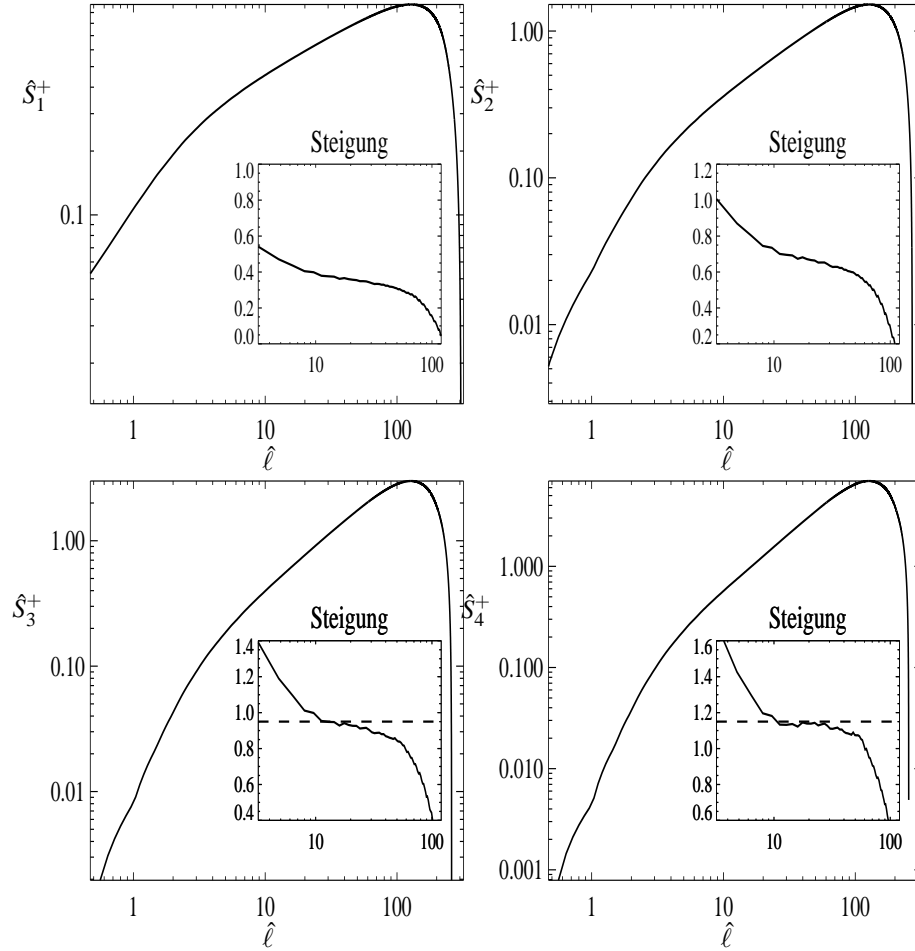


Abbildung 6.6: Die normierten Strukturfunktionen gemittelt über die Zustände  $t = 3 - 9$  eines hyperdissipativen Simulationslaufs mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$  und  $k_{\max} = 256$ . Dargestellt sind die Ordnungen  $p = 1 - 4$  zusammen mit den logarithmischen Ableitungen, über deren Sattelpunkte sich die Skalierungsexponenten ablesen lassen. Es gilt speziell  $\zeta_3^+ \approx 0.95$  und  $\zeta_4^+ \approx 1.15$  (gestrichelte Linien).

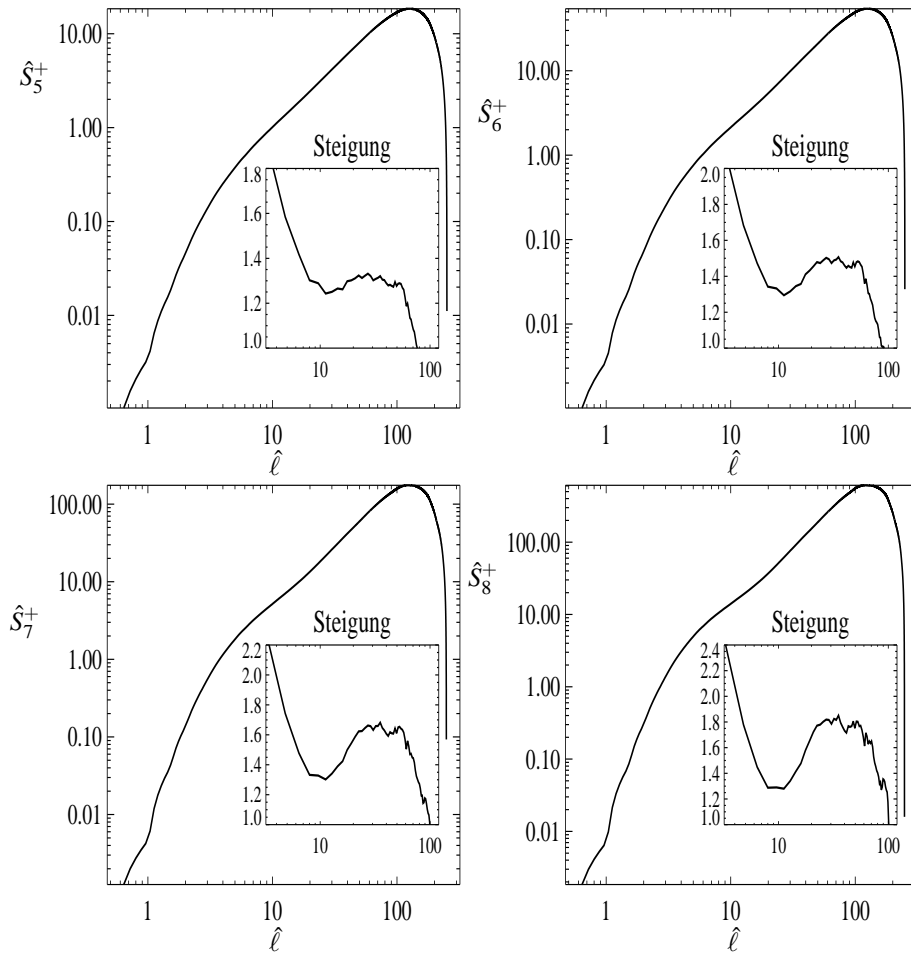


Abbildung 6.7: Ergänzende Serie der Strukturfunktionen zu Abbildung 6.6. Die zunehmenden Störungen des Skalierungsbereiches durch statistische Schwankungen sind für  $p \geq 5$  deutlich zu erkennen.

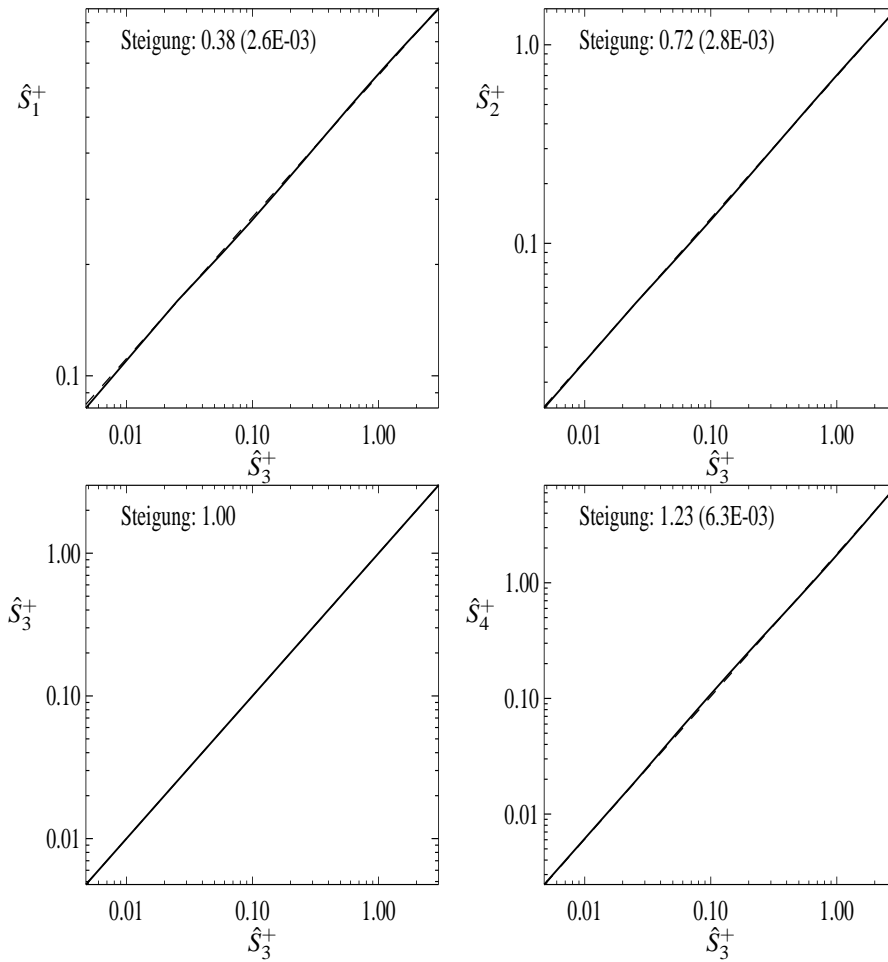


Abbildung 6.8: Die Strukturfunktionen aus Abbildung 6.6, aufgetragen gegen  $\hat{S}_3^+$ . Die ESS führt zu einer beeindruckenden Selbstähnlichkeit der resultierenden Funktionen. Deren Skalierungsexponenten werden über eine angelegte Gerade (gestrichelt, Methode der kleinsten Fehlerquadrate) ermittelt und sind zusammen mit dem aus der Zeitmittelung folgenden Fehler angegeben.

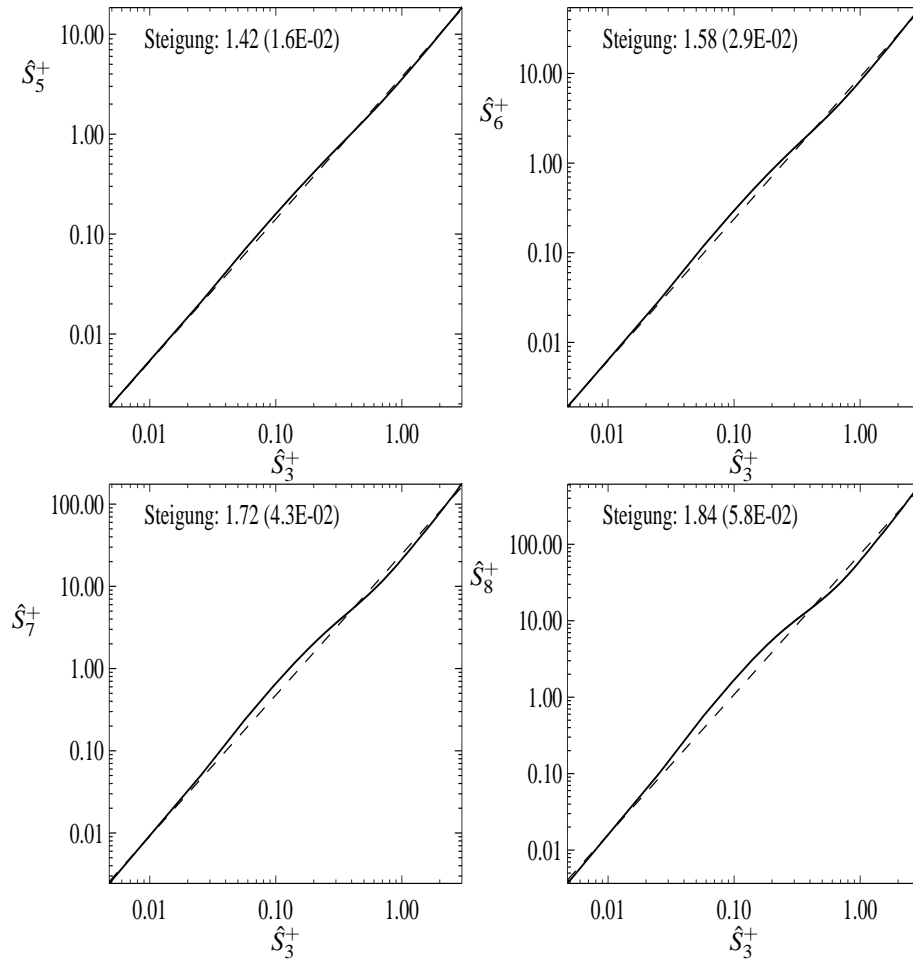


Abbildung 6.9: Analoge Folge zu Abbildung 6.7. Auch die ESS-Technik kann die statistischen Störungen für  $p \geq 5$  nicht vollständig eliminieren.

Ordnung $p$	$\xi_p^{3,+} (v = 2)$	$\Delta[10^{-2}]$	$\xi_p^{3,+} (v = 1)$	$\Delta[10^{-2}]$
1	0.38	0.26	0.38	0.42
2	0.72	0.28	0.71	0.66
3	1.00	-	1.00	-
4	1.23	0.63	1.24	0.93
5	1.42	1.6	1.44	2.2
6	1.58	2.9	1.61	3.6
7	1.72	4.3	1.76	5.0
8	1.84	5.8	1.89	6.3

Abbildung 6.10: Die Unabhängigkeit der ESS-Skalierungsexponenten  $\xi_p^{3,+} = \zeta_p^+$  von der Dissipativität  $v$  im Rahmen des jeweiligen absoluten Fehlers  $\Delta$  wird anhand dieser Gegenüberstellung demonstriert.



Energiespektren gilt:  $\beta = 1 + \zeta_2^+$ .

Im hyperdissipativen Fall gelingt durch die Betrachtung der Strukturfunktions-Skalierung  $\xi_2^{3,+} = \zeta_2^+$  der direkte Nachweis, daß die beobachtete, scheinbare Abflachung des Energiespektrums  $E(k)$  eine Folge des Bottleneck-Effekts ist. Im normaldissipativen Fall dagegen kann umgekehrt von der Skalierung des Energiespektrums auf  $\zeta_2^+ \approx 0.7$  geschlossen werden. Wegen der Gleichheit der relativen Skalierungsexponenten für  $\nu = 1$  und  $\nu = 2$  folgt  $\zeta_3^+ \approx 1$  auch für  $\nu = 1$ . Somit legt die Invarianz der relativen Skalierungsexponenten bei Änderung der Dissipativität zusammen mit den beobachteten Skalierungen der Energiespektren die weitgehende Unabhängigkeit der absoluten Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen von der Dissipativität nahe.

Anhand der in Abbildung 6.10 zusammengestellten Skalierungswerte ist erkennbar, daß eine deutliche Abweichung von der Gerade  $\zeta_p^+ = p/3$  vorliegt. Für  $p < 3$  liegen die Exponenten über der theoretischen Vorhersage, für  $p > 3$  darunter. Diese nichtlineare Variation der Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen ist für alle turbulenten Systeme zu beobachten. Sie hat ihren Ursprung in der räumlichen Verteilung der dissipativen Turbulenzelemente und deren Struktur.

Die K41-Phänomenologie und auch ihre IK-Erweiterung nehmen implizit an, daß die Dissipation räumlich homogen stattfindet. Stattdessen beobachtet man eine unregelmäßige räumliche Verteilung der dissipativen Strukturen, die sogenannte Intermittenz. Es wurden mehrere Modelle entwickelt, um eine Intermittenzkorrektur in das K41-Bild einzuflechten, eines sogar von Kolmogoroff selbst (Siehe [4], S. 217 ff., [16], S. 120 ff. für eine Übersicht.). Jedes dieser Modelle weist jedoch freie Parameter auf, die in Abstimmung mit den experimentellen Ergebnissen gewählt werden müssen.

Vor kurzem haben She und Lévéque ein Intermittenz-Modell für Navier-Stokes-Turbulenz vorgeschlagen, das eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten erzielt und dessen zwei freie Parameter aus physikalischen Überlegungen abgeleitet werden können. Die Anwendung und der Erfolg dieser Theorie bei der hier betrachteten dreidimensionalen MHD-Turbulenz ist in Abschnitt 6.3 dargestellt.

### 6.2.3 Die räumliche Turbulenzstruktur

Abbildung 6.11 zeigt eine Außenansicht des Rechengebiets für  $k_{\max} = 256$  mit dem farbkodierten Betrag der Wirbelstärke  $\omega$  im hyperdissipativen Fall.

Das Bild vermittelt den Eindruck eines homogen-turbulenten Systems. Bei näherer Betrachtung wird deutlich, daß das fast ausschließliche Auftreten länglicher Strukturen nur mit der Existenz zweidimensionaler Wirbelschichten zu erklären ist. Diese Wirbelschichten bilden sich auf beiden Seiten von Sweet-Parker Stromschichten, die in der inkompressiblen MHD-Turbulenz zwangsläufig durch das Gegeneinanderfließen von Flüssigkeitsteilchen mit entgegengesetzt orientierten Magnetfeld-Komponenten entstehen ([4], S.128 ff.). Eine Bestätigung erfährt diese Deutung durch das häufige Auftreten von Doppel-Wirbelschichten, die eine in dieser Darstellung unsichtbare Stromschicht einschließen.

Abbildung 6.12 zeigt für den gleichen Zustand wie in Abbildung 6.11 die Bereiche des Rechengebiets, in denen der Betrag der elektrische Stromdichte auf 5% des Maximalwerts abfällt. Die zweidimensionalen Stromschichtstrukturen sind klar zu erkennen. Sie stellen, zusammen mit den sie umschließenden Wirbelschichten, die kleinsten, dissipativen Strukturen des turbulenten MHD-Systems dar.

Im Gegensatz dazu beobachtet man in direkten numerischen Simulationen von Navier-Stokes-Turbulenz quasi-eindimensionale Vortex-Filamente [42]. Dieser Unterschied in den Raumdimensionen der kleinsten, dissipativen Strukturen ist ein wichtiger

Aspekt bei der theoretischen Behandlung des Intermittenz-Phänomens im Rahmen der She-Lévêque Theorie (Abschnitt 6.3).

Die Ausfransungen kleiner Schichten bzw. der Ränder größerer Schichten sind ein numerischer Effekt, die mit dem Gibbs-Phänomen zusammenhängen, das auftritt, wenn Funktionen mit großen Gradienten aus dem Realraum in einen endlichen, diskreten Fourier-Raum transformiert werden. Es wird mit zunehmender Gitterauflösung schwächer.



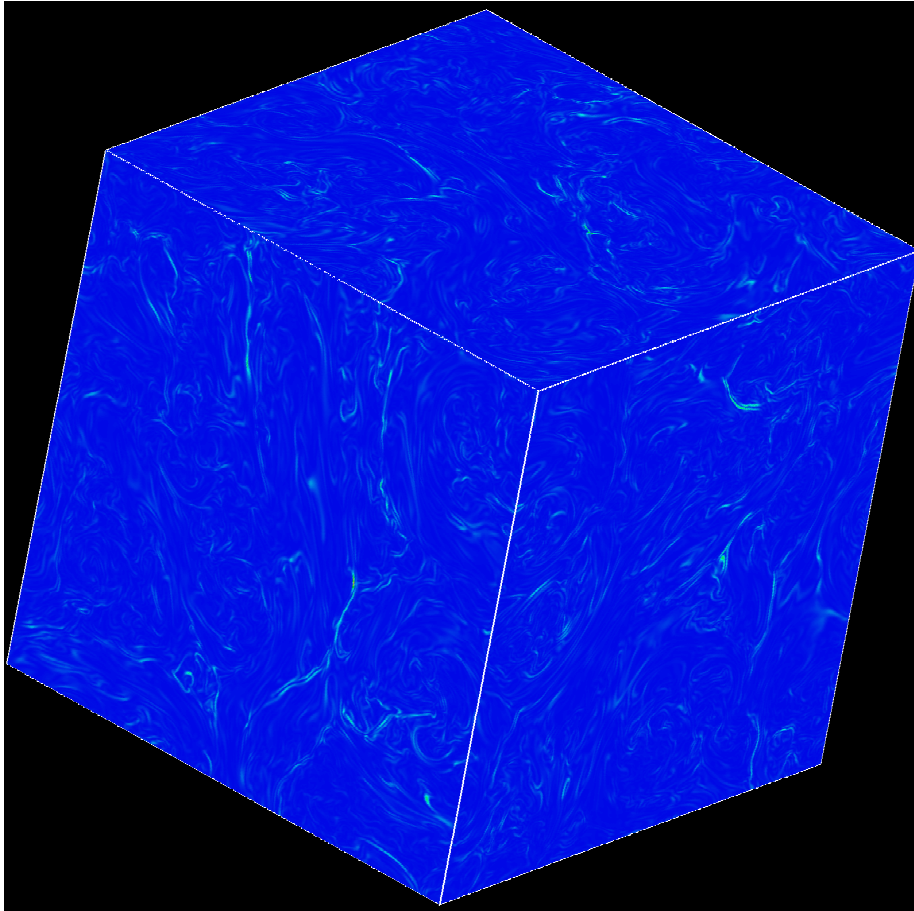


Abbildung 6.11: Betrag der Wirbelstärke für den hyperdissipativen Simulationslauf mit  $k_{\max} = 256$  bei  $t = 6$ . Auf einer Skala von 0 bis 255 geben dunkle Blautöne niedrige, helle Blau- bis Gelbtöne hohe Werte von  $|\omega|$  an.

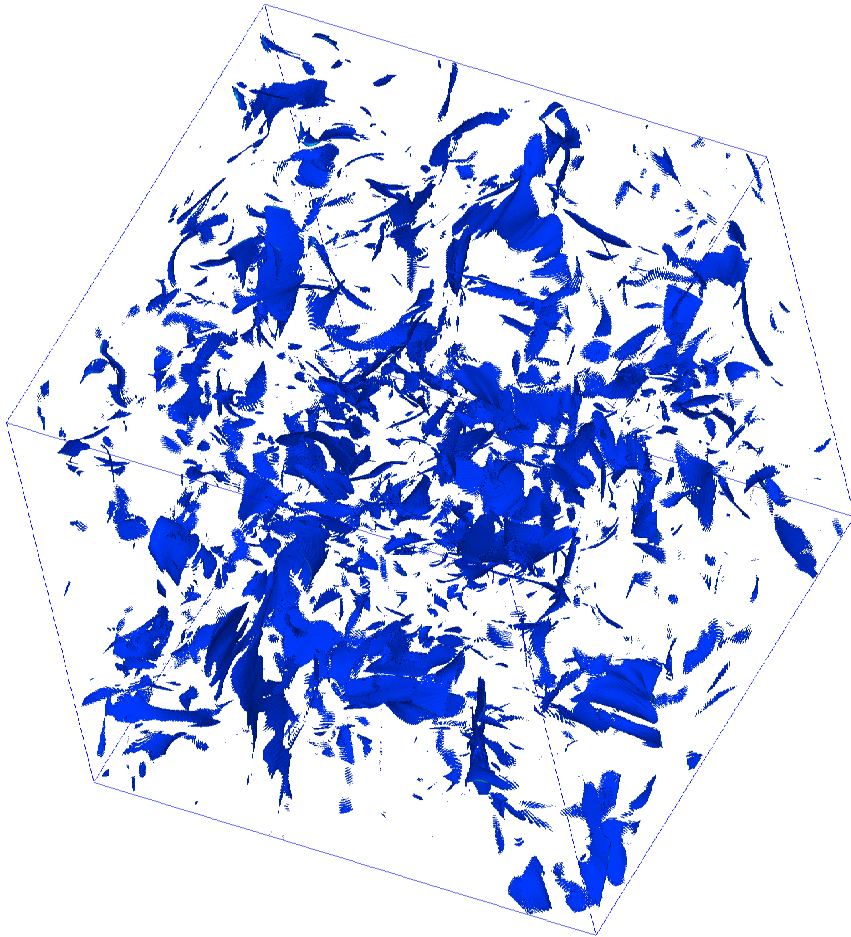


Abbildung 6.12: Volumina, in denen der Betrag der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$  auf 5% des Maximalwertes abfällt, für den gleichen Zustand wie in Abbildung 6.11. Die zweidimensionalen Mikro-Stromschichten sind deutlich zu erkennen.



Abbildung 6.13: Betrag der elektrischen Stromdichte in einem Schnitt durch das Rechengebiet (Dunkel:Niedrige Werte, hell:Hohe Werte) des Simulationslaufs mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $k_{\max} = 256$  und  $\nu = 1$ .

Die Abbildungen 6.13 und 6.14 zeigen zweidimensionale Schnitte durch das Rechengebiet für die beiden Simulationsläufe mit  $k_{\max} = 256$  und  $\nu = 1$  bzw.  $\nu = 2$ . Dargestellt ist der Betrag der elektrischen Stromdichte.

Der Einfluß einer höheren Dissipativität in Form der Ausbildung kleinskaligerer Turbulenzstrukturen ist deutlich erkennbar. Die gleiche Wirkung ist auch im hier nicht gezeigten Wirbelstärkefeld zu beobachten.

### 6.3 Ein Intermittenz-Modell für MHD-Turbulenz

Zur korrekten theoretischen Beschreibung der beobachteten anomalen Skalierung der Strukturfunktionen aufgrund der Intermittenz der Energiedissipation bietet sich das generalisierte She-Lévyque-Modell (SL-Modell) (3.12) an.

Die beiden Modellparameter,  $g$ , der Nenner des Exponenten der Basisskalierung des verwendeten Turbulenz-Bildes ( $g = 3$  für K41 (3.2),  $g = 4$  für IK (3.8)), und  $C_0$ , die Kodimension der kleinsten, dissipativen Strukturen ( $C_0 = 2$  im dreidimensionalen



Abbildung 6.14: Betrag der elektrischen Stromdichte in einem Schnitt durch das Rechengebiet (Dunkel:Niedrige Werte, hell:Hohe Werte) des Simulationslaufs mit  $K_0 = 0$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $k_{\max} = 256$  und  $\nu = 2$ .

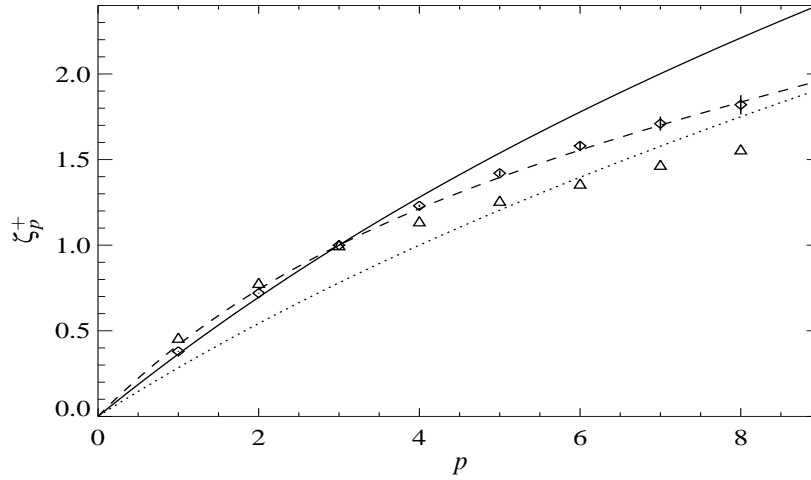


Abbildung 6.15: Die beobachteten Skalierungsexponenten  $\zeta_p^+$  der Strukturfunktionen der Ordnung  $p$  (Dreidimensionale MHD, diese Arbeit: Diamanten. Zweidimensionale MHD, [30]: Dreiecke.). Die durchgezogene Linie entspricht dem SL-Modell für Navier-Stokes-Turbulenz, die gepunktete Linie dem IK-Modell (6.4), die gestrichelte Linie dem vorgeschlagenen MHD-Modell (6.5).

Navier-Stokes-Fall,  $C_0 = 1$  im dreidimensionalen MHD-Fall), ermöglichen eine einfache Anpassung des Modells auf die bereits beschriebenen Beobachtungen.

Neben dem ursprünglichen SL-Modell für Navier-Stokes-Turbulenz ( $g = 3$ ,  $C_0 = 2$ , siehe (3.13)) ist versucht worden, das generalisierte SL-Modell (3.12) auf die dreidimensionale MHD-Turbulenz anzupassen [31], [20]. Dabei wurde ebenfalls von dissipativen Schichtstrukturen ausgegangen, d.h.  $C_0 = 1$ , und die Iroschnikoff-Kraichnan Basisskalierung zugrundegelegt, also  $g = 4$ . Damit erhält man das  $SL^{IK}$ -Intermittenzmodell für die Skalierungsexponenten der MHD-Strukturfunktionen

$$\zeta_p^{IK} = \frac{p}{8} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p/4}. \quad (6.4)$$

Da das in den durchgeführten Simulationsläufen beobachtete Skalierungsverhalten jedoch für die K41-Theorie spricht, wird eine alternative Modifikation von (3.12) vorgeschlagen:  $C_0 = 1$ , den beobachteten Schichtstrukturen entsprechend, sowie  $g = 3$  wegen der Gültigkeit des K41-Modells.

Dies führt zu

$$\zeta_p^{MHD} = \frac{p}{9} + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p/3}. \quad (6.5)$$

Abbildung 6.15 zeigt einen Vergleich zwischen den verschiedenen Intermittenz-Modellen und den Meßwerten der  $\zeta_p^+$  aus der vorliegenden Arbeit (Diamanten) und direkten numerischen Simulationen zweidimensionaler MHD-Turbulenz (Dreiecke). Man erkennt, daß weder das SL-Modell für Navier-Stokes-Turbulenz noch das IK-Modell eine Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigen. Das gemäß K41-Theorie modifizierte



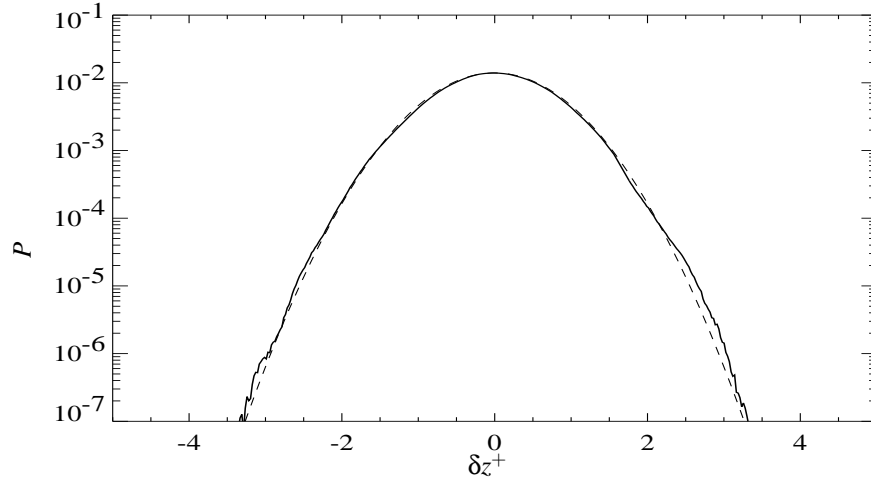


Abbildung 6.16: Die auf eins normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  der  $\delta z^+$  für eine Inkrementdistanz im Makroskalenbereich (Normaldissipativer Lauf mit  $k_{\max} = 256$ ). Die gestrichelte Kurve entspricht einer Gaußverteilung.

SL-Modell dagegen gibt die aus den dreidimensionalen Simulationen erhaltenen Skalierungsexponenten im Rahmen des Meßfehlers hervorragend wieder [29].

Dies ist der überzeugendste Beweis für die Gültigkeit der K41-Phänomenologie in dreidimensionaler MHD-Turbulenz. Weiterhin sieht man, daß die IK-Theorie für das simulierte System nicht anwendbar ist, obwohl Alfvén-Effekt-Aktivität bei kleinen räumlichen Skalen nachgewiesen wurde.

Am Vergleich mit den Meßwerten aus den zweidimensionalen Simulationen [30] ist erkennbar, daß in zweidimensionaler MHD-Turbulenz ein anderes Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen vorliegt, das auf eine höhere Intermittenz hinweist.

## 6.4 Die Wahrscheinlichkeitsverteilung

Die Strukturfunktionen sind die Momente der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  der Feld-Inkmente  $\delta z^+(\ell)$ . Die übliche statistische Annahme in der Turbulenz-Theorie besteht darin, die Komponenten der turbulenten Felder als normalverteilte Zufallsvariable zu betrachten. Daraus folgt, daß die Inkmente  $\delta z^+(\ell)$  ebenfalls gaußverteilt sind, wenn die Inkrementdistanz  $\ell$  sehr groß wird, d.h. im Makroskalenbereich liegt. Unter dieser Bedingung sind die an der Inkrementbildung beteiligten Funktionen in guter Näherung statistisch unabhängig und die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung hat annähernd gaußsche Form (Abbildung 6.16).

Verringert sich die Inkrementdistanz bis auf Skalen in der Größenordnung des Dissipationsbereichs, so weicht die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung zunehmend von der Gauß-Form ab. Die Wahrscheinlichkeit kleiner Inkrementbeträge nimmt ab, während sie für große  $|\delta z^+|$  ansteigt (Abbildung 6.17). D.h., daß  $P$  von großen, räumlich dünn verteilten Schwankungen dominiert wird, eine andere Formulierung für die

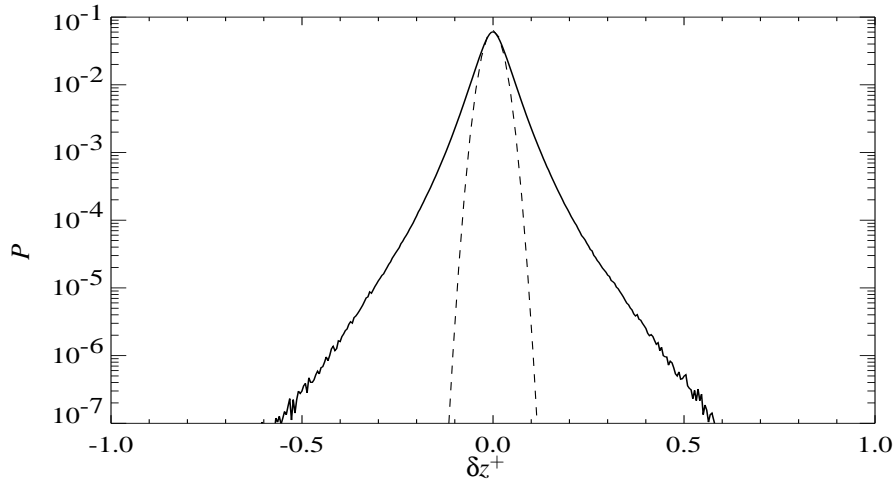


Abbildung 6.17: Die auf eins normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$  der  $\delta z^+$  für eine Inkrementdistanz im Dissipationsbereich (Normaldissipativer Lauf mit  $k_{\max} = 256$ ). Die gestrichelte Kurve entspricht einer Gaußverteilung gleicher Varianz.

bereits beschriebene Intermittenz der kleinsten, dissipativen Strukturen.<sup>4</sup>

Mit Hilfe der Strukturfunktionen zweiter bis vierter Ordnung können zwei Eigenschaften der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion bestimmt werden (Siehe z.B. [40], Kapitel 6). Die Schiefe („Skewness“)  $S := S_3^+ / (S_2^+)^{3/2}$  ist ein Maß für die Asymmetrie der Verteilung<sup>5</sup>. Für eine Gauß-Verteilung ist  $S = 0$ . Abbildung 6.18 zeigt  $S$  in Abhängigkeit der Inkrementdistanz  $\ell$  für verschiedene Zeiten des normaldissipativen ( $k_{\max} = 256$ )-Laufs. Für  $\ell = \pi$ , den größten Abstand, den zwei Punkte in dem  $2\pi$ -periodischen System einnehmen können, ist  $P$  in guter Näherung gaußsch, also symmetrisch mit verschwindendem  $S$ . Für kleinere  $\ell$  nimmt die Asymmetrie zu, liegt jedoch im Betrag weit unter dem in [42] für Navier-Stokes Turbulenz angegebenen Wert von  $S = -0.5$ .

Eine weitere wichtige statistische Eigenschaft ist die Flachheit („Flatness“) der Verteilung, definiert als  $F := S_4^+ / (S_2^+)^2$ . Sie ist ein Maß für die Breite der Verteilungsflügel relativ zur Ausdehnung des beispielsweise durch die Varianz definierten Kerns der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Für eine Gaußverteilung gilt  $F = 3$ . Wie Abbildung 6.19 zeigt, liegt  $F$  für  $\ell = \pi$  erwartungsgemäß bei diesem Wert und nimmt bei Annäherung der Inkrementdistanz  $\ell$  an die Dissipationsskala  $\ell_{\text{Hyb}}$  auf zeitabhängige Werte im Bereich  $S = 9 - 13$  zu. Die Zeitabhängigkeit ist auf die Reynoldszahlzunahme während des Turbulenzzerfalls zurückzuführen, während der Anstieg von  $F$  für  $\ell \rightarrow \ell_{\text{Hyb}}$  seine Ursache in der Intermittenz der Turbulenz bei kleinen räumlichen Skalen hat und in Abbildung 6.17 gut zu erkennen ist.

Der hyperdissipative Simulationslauf mit  $k_{\max} = 256$  zeigt keine qualitativen Unterschiede zur normaldissipativen Simulation.  $S$  weist für  $\ell \rightarrow \ell_{\text{Hyb}}$  eine größere Streuung

<sup>4</sup>Die Inkremente der turbulenten Felder und der Dissipation können über die von Kolmogoroff stammende verfeinerte Selbstähnlichkeits-Hypothese ([16], S.164 ff.) miteinander verknüpft werden.

<sup>5</sup>Die zur Bildung von  $S$  verwendete Strukturfunktion dritter Ordnung muß ohne die bisher übliche Betragsbildung der  $\delta z^+$  berechnet werden, d.h.  $S_3^+ = \langle (\delta z^+)^3 \rangle$ .

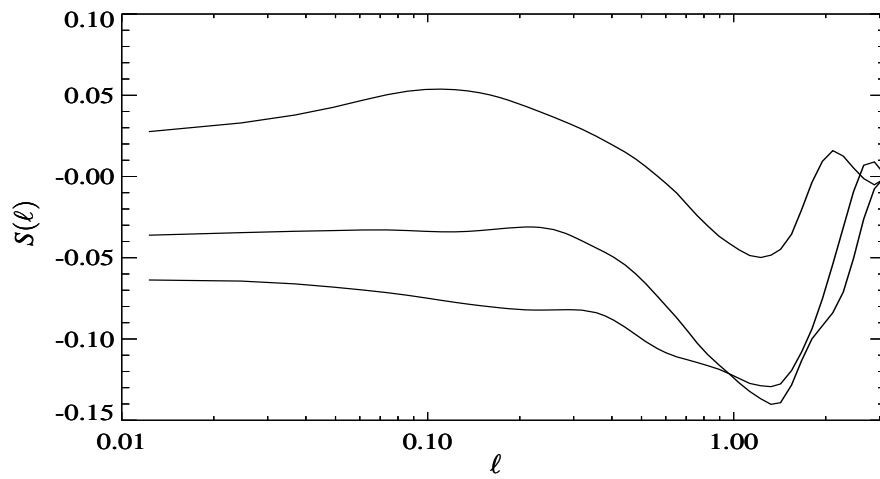


Abbildung 6.18: Die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion  $P$  für den gleichen Simulationslauf wie in Abbildung 6.17. Die verschiedenen Kurven entsprechen  $t = 3, 5, 7$  (von unten nach oben).

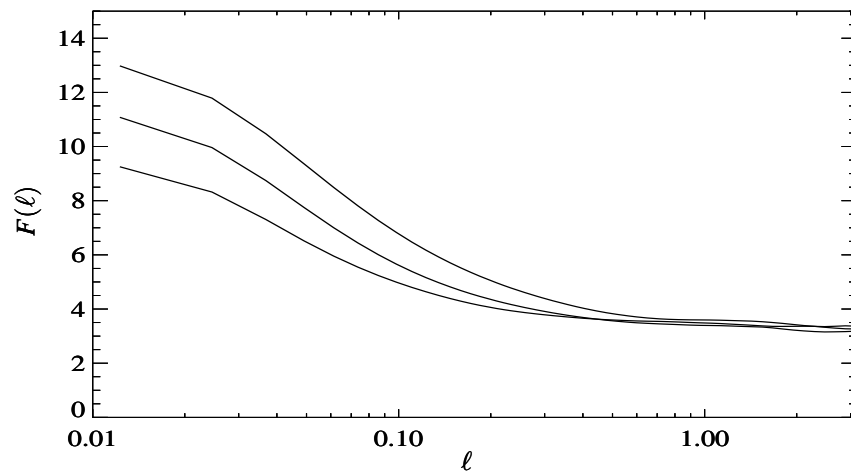


Abbildung 6.19: Die Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion  $P$  für den gleichen Simulationslauf wie in Abbildung 6.17. Die verschiedenen Kurven entsprechen  $t = 3, 5, 7$  (von unten nach oben).

$\approx 0.3$  auf, während die mit Abbildung 6.19 vergleichbaren  $F$ -Kurven im Dissipationsbereich in einem engeren Intervall  $\approx 7.5 - 9$  enden.

## 6.5 Vergleich mit getriebener MHD-Turbulenz

Um mögliche Einflüsse des Turbulenzzurfalls auf die gewonnenen Ergebnisse zu erkennen, wurden normal- und hyperdissipative Simulationsläufe mit  $k_{\max} = 128$  und den gleichen Anfangsbedingungen wie bei den bisher beschriebenen Läufen mit  $k_{\max} = 256$  durchgeführt, in denen das turbulente System über 50 Zeiteinheiten hinweg angeregt wurde, um einen möglichst stationären Turbulenzzustand zu erzeugen.

Das Treiben der Turbulenz imitiert einen physikalischen Prozeß wie z.B. eine durch hohe Gradienten hervorgerufene Strömungsinstabilität, der das System kontinuierlich im Makroskalenbereich mit Energie versorgt. In dem hier verwendeten  $2\pi$ -periodischen Würfel läßt sich diese Situation nur behelfsmäßig realisieren, da die Turbulenz weitgehend homogen und isotrop bleiben soll.

Darüberhinaus tritt in getriebener MHD-Turbulenz die Erzeugung großskaliger Magnetfeldstrukturen über den mit der inversen  $H$ -Kaskade verknüpften, turbulenten Dynamo-Effekt auf sowie ein die Turbulenz dämpfendes Zunehmen der Ausrichtung  $\rho$ .

Um solche, hier unerwünschten Nebeneffekte zu vermeiden, werden in einem bereits in den Zustand voll entwickelter Turbulenz relaxierten, zerfallenden System die Fourier-Moden im Rechengitter in einer Kugel mit Radius  $k_r = 2$  festgehalten. Die Turbulenz wird so durch einen zeitlich eingefrorenen Makroskalenbereich angetrieben. Dabei wird kinetische und magnetische Energie über die Nichtlinearitäten der diskretisierten MHD-Gleichungen (4.1) und (4.2) an die kleineren räumlichen Skalen weitergegeben.

Als Konsequenz nimmt die Energie im Gesamtsystem zu, bis ein stationärer Zustand ab ungefähr  $t = 21$  erreicht wird. Wegen der höheren Gesamtenergie der Turbulenz sind entsprechend größere Viskositäten bzw. magnetische Diffusivitäten ( $\nu = 1$  mit  $\mu = \eta = 2.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\nu = 2$  mit  $\mu = \eta = 8.5 \cdot 10^{-6}$ ) als im vergleichbaren zerfallenden System notwendig, um ein ausreichendes Abfallen des Energiespektrums vor dem Erreichen der räumlichen Auflösungsgrenze sicherzustellen (Vergleiche Abbildung 5.2).

Die Abbildungen 6.20 und 6.21 zeigen die Verläufe der kinetischen und magnetischen Anteile der Energie und der Dissipationsrate für den normaldissipativen Fall, der im folgenden beschrieben wird. Kinetischer und magnetischer Energieanteil verlaufen in guter Näherung konstant bei einem festen Verhältnis  $\Gamma = E^K/E^M \approx 0.66$ .

Bei  $t \approx 36$  ist eine zeitweilige Erhöhung von  $E^M$  zu beobachten, die mit der Ausbildung einer kohärenten magnetischen Struktur im Makroskalenbereich zu erklären ist und schnell wieder abklingt. Ihr Einfluß auf die Inertialgebietsstatistik ist als klein anzunehmen.

Die kinetische und magnetische Energiedissipationsrate zeigen ebenfalls eine gute zeitliche Konstanz bei einem festen Verhältnis  $\gamma = \epsilon^K/\epsilon^M$  (Abbildung 6.21), wobei die Dissipationsraten dem Verlauf der zugeordneten Energien folgen. Die magnetische Helizität schwankt um maximal 4% ihres Wertes von  $0.7H_{\max}$ , die Kreuzhelizität bewegt sich oszillierend in einem Streifen der Breite  $5 \cdot 10^{-2}$  um Null.

Abbildung 6.22 zeigt die gemittelten und normierten Gesamtenergiespektren (Abschnitt 6.1) während  $t = 40 - 50$ . Ein ausgeprägter Skalierungsbereich ist aufgrund der vergleichsweise geringen räumlichen Gitterauflösung nur im Ansatz zu erkennen. Der Spektralbereich, in dem die Fourier-Moden und somit die Energie konstant gehalten

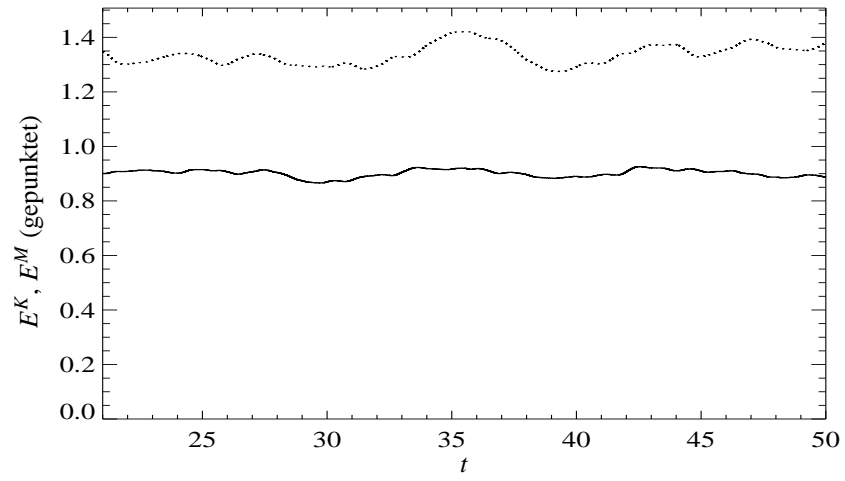


Abbildung 6.20: Zeitlicher Verlauf der kinetischen ( $E^K$ ) und magnetischen ( $E^M$ ) Energie im stationären Bereich  $t = 21 - 50$ .

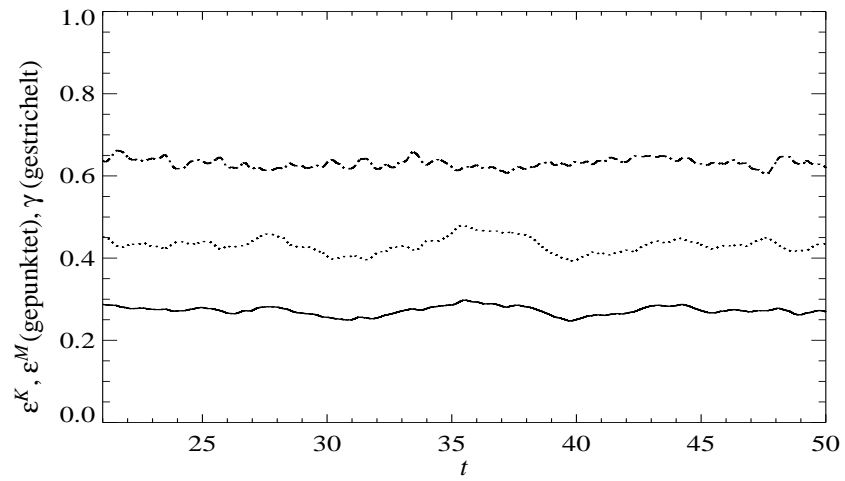


Abbildung 6.21: Kinetische ( $\epsilon^K$ ) und magnetische ( $\epsilon^M$ ) Dissipationsrate mit dem Verhältnis  $\gamma = \epsilon^K / \epsilon^M$  im zeitlichen Verlauf während der stationären Phase.

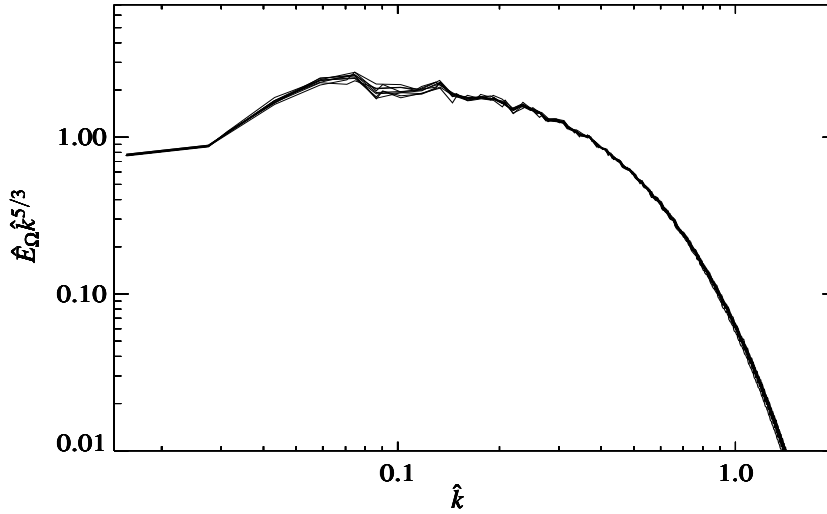


Abbildung 6.22: Die zeitgemittelten und normierten Gesamtenergiespektren für  $t = 40 - 50$ ,  $k_{\max} = 128$ ,  $H_0 = 0.7H_{\max}$ ,  $K_0 = 0$  und  $\nu = 1$  (Vergleiche Abbildung 6.1). Der eingefrorene Spektralbereich erstreckt sich über  $\hat{k} = 0 - 0.03$ .

werden, erstreckt sich von  $\hat{k} = 0$  bis  $\hat{k} \approx 0.03$  und ist in den Spektren deutlich auszumachen.

Die Skalierungsexponenten der Strukturfunktionen (Abschnitt 6.2) sind wegen des bereits bei den Energiespektren nur angedeuteten Inertialgebiets ausschließlich über die ESS-Technik zu erhalten (Abbildung 6.23). Im Rahmen des Meßfehlers ist eine Übereinstimmung zwischen den relativen Skalierungsexponenten  $\xi_p^{3,+}$  des normal- und hyperdissipativen Falls erkennbar (Abbildung 6.23).

Die Übereinstimmung mit den aus der zerfallenden Turbulenz gewonnenen Werten (Abbildung 6.10) ist für den normaldissipativen Fall bis zur Ordnung  $p = 7$  (für  $\nu = 2$  bis  $p = 5$ ) gegeben. An dieser Stelle wirkt sich der Verlust an räumlicher Auflösung gegenüber den Läufen mit  $k_{\max} = 256$  aus, wie an den für hohe Ordnungen stark zunehmenden absoluten Fehlern der Meßwerte zu erkennen ist.<sup>6</sup> Man kann jedoch erkennen, daß die anhand zerfallender Turbulenz gemachten Skalierungs-Beobachtungen nicht signifikant von den Exponenten in getriebener MHD-Turbulenz abweichen, wenn man die Auswirkungen des Auflösungsunterschieds in Betracht zieht.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion der Elsässer-Inkremente  $P$  (Abschnitt 6.4) unterscheidet sich von zerfallender zu getriebener MHD-Turbulenz ebenfalls nicht signifikant. Abbildung 6.24 zeigt die Flachheit  $F(\ell)$  in Abhängigkeit der Inkrementdistanz  $\ell$  (Abschnitt 6.4).  $F$  ist im Makroskalenbereich annähernd gleich 3, wie es für große Inkrementdistanzen erwartet wird. Bei Verringerung der Inkrementdistanz zeigt sich das bereits in zerfallender Turbulenz beobachtete Verhalten (Abbildung 6.19) mit einer aufgrund der Stationarität der Turbulenz kleineren Streuung im Dissipationsgebiet ( $F \approx 8.5 - 9.5$ ), für Hyperdissipation analog zu zerfallenden Turbulenz mit etwas niedrigeren Werten  $F \approx 6.5 - 7.5$ . Die Schiefe  $S \approx 0$  der Verteilung zeigt im normal- und hyperdissipativen Fall keine Unterschiede zu zerfallender Turbulenz.

<sup>6</sup>Die Gitterauflösung mußte für die getriebenen Simulationsläufe aus Rechenzeitgründen reduziert werden.

Ordnung $p$	$\xi_p^{3,+} (\nu = 2)$	$\Delta[10^{-2}]$	$\xi_p^{3,+} (\nu = 1)$	$\Delta[10^{-2}]$
1	0.38	0.89	0.39	0.33
2	0.71	0.85	0.72	0.28
3	1.00	-	1.00	-
4	1.25	1.5	1.24	0.61
5	1.47	3.6	1.45	1.6
6	1.68	6.0	1.65	3.1
7	1.88	8.5	1.84	4.9
8	2.08	11.0	2.04	7.0

Abbildung 6.23: Die ESS-Skalierungsexponenten  $\xi_p^{3,+}$  für normal- und hyperdissipative, getriebene Turbulenz mit dem jeweiligen absoluten Fehler  $\Delta$ .

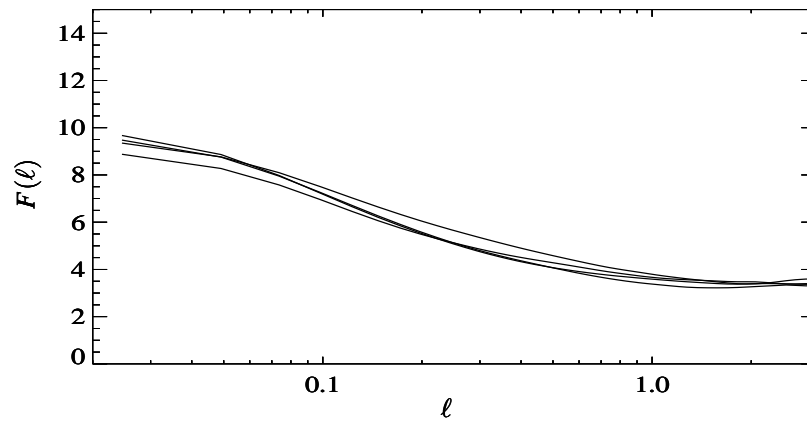


Abbildung 6.24: Die Flachheit der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion  $P$  für den gleichen getriebenen Lauf wie in Abbildung 6.22 für die Zeiten  $t = 30, 35, 45, 50$ .

Somit ist anhand eines Vergleichs zwischen niedrigerauflösenden Simulationsläufen getriebener MHD-Turbulenz und den Läufen mit  $k_{\max} = 256$  kein Indiz gefunden worden, daß auf einen signifikanten Unterschied zwischen den statistischen Eigenschaften zerfallender und getriebener MHD-Turbulenz hinweisen würde.





# Kapitel 7

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird versucht mittels direkter numerischer Simulationen ein Verständnis der grundlegenden makroskopischen und statistischen Eigenschaften dreidimensionaler magnetohydrodynamischer Turbulenz zu erlangen.

Dazu werden die Differentialgleichungen der dreidimensionalen Magnetohydrodynamik (MHD) in einem räumlich-periodischen System für physikalisch relevante Anfangsbedingungen numerisch gelöst. Dies ist aufgrund der am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (IPP) vorhandenen, hohen Kapazität massiv-paralleler Rechenleistung mit bisher unerreicht hoher Genauigkeit möglich, d.h. mit einer Rechengitterauflösung von  $512^3$  räumlichen Fourier-Moden entsprechend einer kinetischen und magnetischen Reynoldszahl  $Re = Rm \approx 3000$ .

Die direkte numerische Simulation dreidimensionaler MHD-Turbulenz ist ein wichtiges Instrument zur Beobachtung dieses Strömungsphänomens in einem Plasma unter kontrollierten Bedingungen und mit umfassenden Möglichkeiten der Diagnostik. Bei den wenigen vergleichbaren Experimenten auf der Erde im Rahmen der Fusionsforschung mit magnetischem Plasma-Einschluß ist eine ausreichend genaue Beobachtung auftretender MHD-Turbulenz bisher kaum zu realisieren, während bei Raumsondenmessungen in der Heliosphäre keine Kontrolle über das turbulente System möglich ist.

In dieser Arbeit wird erstmalig numerisch simulierte Plasmaturbulenz im Rahmen des MHD-Modells beobachtet, die ausreichend hohe Reynoldszahlen aufweist, um grundlegende Eigenschaften des dreidimensionalen turbulenten Systems beobachtbar zu machen.

Bezüglich der makroskopischen Charakteristika zerfallender MHD-Turbulenz wird die gegenseitige Wechselwirkung und das zeitliche Verhalten der drei idealen, quadratischen Invarianten der MHD — Energie, magnetischer Helizität und Kreuzhelizität — untersucht.

Der in der Zeit selbstähnliche Verlauf der Gesamtenergie wird in seinem Skalierungsverhalten entscheidend von den Beträgen der Helizitäten beeinflusst, wobei die Kreuzhelizität dämpfend auf die gesamte Dynamik wirkt, während der Austausch zwischen magnetischer und kinetischer Energie maßgeblich von der magnetischen Helizität abhängt.

In der vorliegenden Arbeit ist erstmalig der Einfluß der magnetischen Helizität bei der Entwicklung eines phänomenologischen Modells des Energiezerfalls berücksichtigt worden. Das vorgeschlagene Modell beschreibt den Energiezerfall dreidimensionaler MHD-Turbulenz endlicher magnetischer Helizität und kleiner Kreuzhelizität im Gegensatz zu alternativen Theorien in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Auch

aus dem Modell abgeleitete, asymptotische Aussagen werden mit den durchgeführten Simulationsläufen bestätigt.

Die Ergebnisse bezüglich der statistischen Eigenschaften dreidimensionaler MHD-Turbulenz, das Skalierungsverhalten der Energiespektren und der Strukturfunktionen (unter Ausnutzung ihrer erweiterten Selbstähnlichkeit bis zur achten Ordnung), widerlegen die bisher für MHD-Turbulenz favorisierte Iroschnikoff-Kraichnan-Theorie.

Obwohl anhand der Energiespektren der Alfvén-Effekt, die Grundlage der IK-Theorie, nachgewiesen wird, stützen alle beobachteten Skalierungen die bereits für Navier-Stokes-Turbulenz erfolgreiche Kolmogoroff-Theorie in Übereinstimmung mit experimentellen Messungen aus dem Sonnenwind und theoretischen Vorhersagen.

Untersuchungen der Auswirkungen der Intermittenz kleinster turbulenter Eddies auf die Skalierungseigenschaften der Strukturfunktionen führen zu einem neuen Intermittenzmodell, das auf einer den Beobachtungen entsprechend modifizierten She-Lévêque-Theorie beruht. Dieses neue Intermittenzmodell gibt das Skalierungsverhalten der Strukturfunktionen in hervorragender Übereinstimmung mit den Simulationsmessungen wieder.

Betrachtungen der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion, deren Momente die Strukturfunktionen sind, sowie der Strukturfunktionen selbst bestätigen im Vergleich mit durchgeführten Simulationsläufen getriebener MHD-Turbulenz die Gültigkeit der anhand zerfallender Turbulenz gewonnenen Ergebnisse auch für den getriebenen Fall.

Da es bis heute keine umfassende, auf First-principles basierende Theorie turbulenter Systeme gibt und experimentelle Daten über dreidimensionale MHD-Turbulenz rar sind, ist es notwendig, turbulente MHD-Systeme auch in Zukunft in hochauflösenden direkten numerischen Simulationen zu studieren, um einen tieferen Einblick in die Dynamik dieses fundamentalen Plasma-Strömungszustands zu gewinnen. Neben der reinen Notwendigkeit turbulente Plasmen besser zu verstehen, kann die vordergründige Verkomplizierung des Problems durch die Einführung der im Navier-Stokes-Fall nicht vorhandenen, elektrischen bzw. magnetischen Größen ein Vorteil für das Verständnis der grundlegenden Eigenschaften turbulenter Systeme sein, da zusätzliche Wege in die noch nicht vollständig verstandene, nichtlineare Dynamik eröffnet werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] G. K. Batchelor. *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1953.
- [2] R. Benzi, S. Ciliberto, R. Tripiccone, C. Baudet, F. Massaioli und S. Succi. Extended self-similarity in turbulent flows. *Physical Review E*, 48(1):R29–R32, 1993.
- [3] D. Biskamp. Persönliche Mitteilung.
- [4] D. Biskamp. *Nonlinear Magnetohydrodynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [5] D. Biskamp, E. Schwarz und A. Celani. Nonlocal bottleneck effect in two-dimensional turbulence. *Physical Review Letters*, 81(22):4855–4858, 1998.
- [6] D. Biskamp und U. Bremer. Dynamics and statistics of inverse cascade processes in 2D magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review Letters*, 72(24):3819–3822, 1993.
- [7] D. Biskamp und W.-C. Müller. Decay laws for three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review Letters*, 83(11):2195–2198, 1999.
- [8] D. Biskamp und H. Welter. Dynamics of decaying two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physics of Fluids B*, 1(10):1964–1979, 1989.
- [9] D. I. Braginskii. Transport processes in a plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1:205–311, 1965.
- [10] L. F. Burlaga. Intermittent turbulence in the solar wind. *Journal of Geophysical Research*, 96(A4):5847–5851, 1991.
- [11] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni und T. A. Zang. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [12] G. Comte-Bellot und S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(4):657–682, 1966.
- [13] B. Dubrulle. Intermittency in fully developed turbulence: Log-Poisson statistics and generalized scale covariance. *Physical Review Letters*, 73(7):959–962, 1994.
- [14] W. M. Elsässer. The hydromagnetic equations. *Physical Review*, 79:183, 1950.
- [15] G. Falkovich. Bottleneck phenomenon in developed turbulence. *Physics of Fluids*, 6(4):1411–1414, 1994.

- [16] U. Frisch. *Turbulence*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [17] S. Galtier, H. Politano und A. Pouquet. Self-similar energy decay in magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review Letters*, 79(15):2807–2810, 1997.
- [18] B. E. Goldstein, E. J. Smith, A. Balogh, T. S. Horbury, M. L. Goldstein und D. A. Roberts. Properties of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind as observed by Ulysses at high heliographic latitudes. *Geophysical Research Letters*, 22(23):3393–3396, 1995.
- [19] R. Grappin, U. Frisch, J. Léorat und A. Pouquet. Alfvénic fluctuations as asymptotic states of MHD turbulence. *Astronomy and Astrophysics*, 105:6–14, 1982.
- [20] R. Grauer, J. Krug und C. Marliani. Scaling of high-order structure functions in magnetohydrodynamic turbulence. *Physics Letters A*, 195:335–338, 1994.
- [21] P. S. Iroshnikov. Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field. *Soviet Astronomy*, 7:568, 1964. [Astron. Zh., 40:742, 1963].
- [22] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Proceedings of the Royal Society A*, 434:15–17, 1991. [Dokl. Akad. Nauk SSSR, 32(1), 1941].
- [23] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers. *Proceedings of the Royal Society A*, 434:9–13, 1991. [Dokl. Akad. Nauk SSSR, 30(4), 1941].
- [24] R. H. Kraichnan. Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence. *Physics of Fluids*, 8(7):1385–1387, 1965.
- [25] M. Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [26] D. Lohse und A. Müller-Groeling. Bottleneck effects in turbulence: Scaling phenomena in  $r$  versus  $p$  space. *Physical Review Letters*, 74(10):1747–1750, 1995.
- [27] M.-M. Mac Low, R. S. Klessen und A. Burkert. Kinetic energy decay rates of supersonic and super-alfvénic turbulence in star-forming clouds. *Physical Review Letters*, 80(13):2754–2757, 1998.
- [28] H. K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *Journal of Fluid Mechanics*, 35(1):117–129, 1969.
- [29] W.-C. Müller und D. Biskamp. Scaling properties of three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review Letters*, 84(3):475–478, 2000.
- [30] H. Politano, A. Pouquet und V. Carbone. Determination of anomalous exponents of structure functions in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Europhysics Letters*, 43(5):516–521, 1998.
- [31] H. Politano und A. Pouquet. Model of intermittency in magnetohydrodynamic turbulence. *Physical Review E*, 52(1):636–641, 1995.
- [32] H. Politano und A. Pouquet. Dynamical length scales for turbulent magnetized flows. *Geophysical Research Letters*, 25(3):273–276, 1998.

- [33] H. Politano und A. Pouquet. Von Kármán-Howarth equation for magnetohydrodynamics and its consequences on third-order longitudinal structure and correlation functions. *Physical Review E*, 57(1):R21–R24, 1998.
- [34] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery. *Numerical Recipes in FORTRAN*. Cambridge University Press, New York, 1994.
- [35] Z.-S. She und E. Lévéque. Universal scaling laws in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 72(3):336–339, 1994.
- [36] Z.-S. She und E. C. Waymire. Quantized energy cascade and log-Poisson statistics in fully developed turbulence. *Physical Review Letters*, 74(2):262–265, 1995.
- [37] M. R. Smith, R. J. Donnelly, N. Goldenfeld und W. F. Vinen. Decay of vorticity in homogeneous turbulence. *Physical Review Letters*, 71(16):2583–2586, 1993.
- [38] K. R. Sreenivasan und R. A. Antonia. The phenomenology of small-scale turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 29:435–472, 1997.
- [39] J. M. Stone, E. C. Ostriker und C. F. Gammie. Dissipation in compressible magnetohydrodynamic turbulence. *Astrophysical Journal*, 508:L99–L102, 1998.
- [40] H. Tennekes und J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1972.
- [41] D. J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [42] A. Vincent und M. Meneguzzi. The spatial structure and statistical properties of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 225:1–20, 1991.
- [43] F. Waleffe. The nature of triad interactions in homogeneous turbulence. *Physics of Fluids A*, 4(2):350–363, 1992.
- [44] L. Woltjer. On hydromagnetic equilibrium. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 44(9):833–841, 1958.