

Peter Böhme

Stadtstrukturbildung durch Selbstorganisation

IPP 16/21
Februar, 2010



ulm university universität
uulm



Stadtstrukturbildung durch Selbstorganisation

Peter Böhme

Diplomarbeit am
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik
Arbeitsgruppe Energie- und Systemstudien

in Zusammenarbeit mit dem
Lehrstuhl für Theoretische Physik der
Universität Ulm

Januar 2009

Stadtstrukturbildung durch Selbstorganisation

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines Diplom Wirtschaftsphysikers

der Fakultät Physik
der Universität Ulm

vorgelegt von

Peter Böhme

Betreuer: Dr. Thomas Hamacher
Erstkorrektor: Prof. Dr. Joachim Ankerhold
Zweitkorrektor: Dr. Thomas Hamacher

Abgabe: Januar 2009

Die vorliegende Arbeit wurde am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in der Zeit von Mai 2008 bis Januar 2009 unter der Leitung von Herrn Dr. Thomas Hamacher angefertigt.

Herrn Dr. Thomas Hamacher danke ich für die hervorragenden Arbeitsbedingungen während der mir zur Verfügung stehenden Zeit, für seine Ratschläge und die fachlichen Diskussionen, sowie für das große mir entgegengebrachte Vertrauen und das Interesse an meiner Arbeit.

Mein herzlicher Dank gilt weiterhin:

- Prof. Dr. Joachim Ankerhold für die Tipps, Anregungen und das Interesse an meiner Arbeit.
- Dr. Pascal Mühlich, Katrin Schaber und Florian Botzenhart für das Korrekturlesen des Manuskripts dieser Arbeit.
- Tobias Hartmann für seine stete Hilfsbereitschaft und die gute Zusammenarbeit über die räumliche Entfernung hinweg.
- Nina Heitmann für die gute Atmosphäre im „Partyzimmer“.
- Allen Mitgliedern der Projektgruppe Energie- und Systemstudien für das Beantworten meiner Fragen und die zahlreichen Tipps.
- Markus Bollinger für seine Freundschaft und die interessanten Unterhaltungen.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinen Eltern, die auch in schweren Zeiten stets für mich da sind und mir ein starker Rückhalt sind. Ich danke ihnen für ihre Unterstützung und ihr Verständnis, das sie mir während dieser Arbeit und meinem ganzen Studium entgegengebracht haben.

Peter Böhme

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Abbildungsverzeichnis | III |
| Tabellenverzeichnis | IV |
| Symbol- und Abkürzungsverzeichnis | V |
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Modellierungskonzept der Soziodynamik | 3 |
| 2.1. Ziel der Soziodynamik | 3 |
| 2.2. Konfigurationsraum der Makrovariablen | 5 |
| 2.2.1. Materielle Variablen | 5 |
| 2.2.2. Personelle Variablen | 6 |
| 2.2.3. Trend- und Kontrollparameter | 7 |
| 2.3. Elementare Dynamik der Makrovariablen | 7 |
| 2.4. Entwicklungsgleichungen der Makrovariablen | 11 |
| 2.4.1. Mastergleichung | 11 |
| 2.4.2. Quasimittelwertgleichungen | 13 |
| 3. Verwendete Begriffe und Modelle der Stadtforschung | 16 |
| 3.1. Begriffsdefinitionen | 16 |
| 3.2. Klassische Theorie der Zentralen Orte | 19 |
| 3.3. Bodenrentenmodell | 21 |
| 4. Das Stadtmodell | 23 |
| 4.1. Qualitative Beschreibung des Stadtmodells | 23 |
| 4.1.1. Modellannahmen | 24 |
| 4.1.2. Modellstruktur | 25 |
| 4.2. Die Grundstruktur der Stadt | 27 |
| 4.2.1. Ortsraum | 27 |
| 4.2.2. Metrik | 29 |
| 4.2.3. Transformationen | 29 |
| 4.3. Definition der Variablen | 30 |
| 4.3.1. Materielle Variablen - Dienstleistungen | 31 |
| 4.3.2. Personelle Variablen - Bevölkerung | 32 |
| 4.4. Quantitative Beschreibung der mikroskopischen Ebene | 33 |

| | |
|--|-----------|
| 4.4.1. Konzept der Bedeutung eines Squares | 33 |
| 4.4.2. Mobilitätskosten | 36 |
| 4.4.3. Wohnkosten | 37 |
| 4.4.4. Umsatzdichte eines Squares | 40 |
| 4.5. Quantitative Beschreibung der makroskopischen Ebene | 41 |
| 4.5.1. Evolutionsgleichungen der Dienstleistungskonfiguration | 41 |
| 4.5.2. Evolutionsgleichungen der Bevölkerungskonfiguration | 45 |
| 5. Numerische Lösung des Differentialgleichungssystems | 47 |
| 5.1. Funktionsweise des Runge-Kutta-Verfahrens | 47 |
| 5.2. Dynamische Bestimmung der Schrittweite | 49 |
| 5.3. Anwendung auf Differentialgleichungssysteme | 51 |
| 6. Analyse der Szenarien | 52 |
| 6.1. Skalare für die Beschreibung der Struktur | 52 |
| 6.1.1. Verhältnisfaktor | 53 |
| 6.1.2. Dichtefluktuatation | 53 |
| 6.2. Parameterwahl | 54 |
| 6.2.1. Fest gewählte Parameter | 55 |
| 6.2.2. Variierte Parameter | 57 |
| 6.2.3. Anfangsbedingungen | 59 |
| 6.2.4. Zeitskala | 60 |
| 6.3. Übersicht der Szenarien | 61 |
| 6.4. Durchschnittliche Kosten der Stadt | 62 |
| 6.5. Stadtstruktur in Abhängigkeit der Transportkostensensibilität | 63 |
| 6.5.1. Analytische Lösung der Bevölkerungsverteilung | 64 |
| 6.5.2. Szenarioanalyse | 69 |
| 6.6. Stadtstruktur in Abhängigkeit von Transportkosten und Mietpreinsniveau | 70 |
| 6.6.1. Allgemeine Strukturanalyse | 70 |
| 6.6.2. Auswertung vier verschiedener Strukturkategorien | 72 |
| 7. Zusammenfassung und Ausblick | 79 |
| Literaturverzeichnis | 82 |
| A. Anhang | 86 |
| A.1. Herleitung der Distanzsumme | 86 |
| A.2. Berechnung der Bevölkerungsverteilung | 88 |

Abbildungsverzeichnis

| | |
|--|----|
| 3.1. Regionen einer Stadt | 17 |
| 3.2. Agglomerationsphasen | 18 |
| 3.3. System der zentralen Orte nach Walter Christaller | 21 |
| 3.4. Bodenrentenmodell | 22 |
| 4.1. Schema des Stadtmodells | 26 |
| 4.2. Grundstruktur des Stadtgebiets | 28 |
| 4.3. Bedeutung als Funktion der Transportkostensensibilität | 35 |
| 4.4. Mietentwicklung als Funktion des Abstandes vom Zentrum | 39 |
| 5.1. Runge-Kutta-Modell | 49 |
| 6.1. Verhältnisfaktor dreier beispielhafter Stadtstrukturen | 54 |
| 6.2. Standardabweichung zweier beispielhafter Stadtstrukturen | 55 |
| 6.3. Übersicht der Szenarien | 61 |
| 6.4. Durchschnittliche Kosten als Funktion der spezifischen Transportkosten und der Transportkostensensibilität | 63 |
| 6.5. Vergleich der analytischen und numerischen Lösung für $b_T = 0$ | 67 |
| 6.6. Mobilitätskosten als Funktion der Transportkostensensibilität | 68 |
| 6.7. Verhältnisfaktor der Bevölkerung als Funktion der Transportkostensensi- bilität | 69 |
| 6.8. Verhältnisfaktor und Standardabweichung als Funktion der Transportkosten | 71 |
| 6.9. Struktur der Szenarien S4 und S14 | 74 |
| 6.10. Struktur der Szenarien S8 und S18 | 77 |
| 7.1. Übersicht und Beispiele identifizierter Strukturkategorien | 80 |
| A.1. Grafische Darstellung der Summationsgrenzen. | 88 |

Tabellenverzeichnis

| | |
|--|----|
| 3.1. Mindestinwohnerwerte für Städte | 17 |
| 6.1. Übersicht aller Parameter mit zugewiesenem Wert | 58 |
| 6.2. Strukturkategorien | 73 |

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

| | | |
|------------------|--------------------------|---|
| α | | Index der Subpopulation |
| b_1 | [km ²] | Linearer Gewichtungparameter |
| b_2 | [km ⁴] | Quadratischer Gewichtungparameter |
| Bev. | | Bevölkerung |
| b_T | [EUR ⁻¹] | Transportkostensensibilität |
| β | | Sensibilität der Bevölkerungsnutzenfunktion |
| C | | Anzahl der Zustände von personellen Variablen, individuelle Konsumausgaben |
| \bar{C} | | Mittlere Konsumausgaben im Stadtgebiet |
| CBD | | Central Business District |
| C_{ges} | | Aggregierter Konsum |
| const | | konstant |
| \tilde{C} | | Anzahl der Systeme in einem lokalen Bündel |
| ξ | [km ²] | Sensibilität der Dienstleistungsnutzenfunktion |
| D | | Anzahl der Dienstleistungen |
| \tilde{d} | | Abstand in Squarelängen l |
| \bar{D} | | Mittlere Dienstleistungsdichte im Stadtgebiet |
| d.h. | | das heißt |
| Dienstl. | | Dienstleistung |
| d_{ij} | [km] | Abstand zweier Squares i und j |
| δ_k | | Präferenzterm |
| Δu | | Nutzendifferenz |
| E_k | [EUR mth ⁻¹] | Gewinn einer Dienstleistung im Square k |
| E_{min} | [EUR mth ⁻¹] | Mindesteinkommen |
| η_k | [km ²] | Agglomerationskoeffizient |
| F | | Wohnfläche |
| $f(d_{ij})$ | | Preisabnahmefunktion |

| | | |
|-------------------------------------|--------------------------|---|
| F_{Stadt} | | Fläche des Stadtgebiets |
| G | [EUR mth ⁻¹] | Grundaussgaben |
| $g_i(j)$ | | Bedeutung des Squares i für Square j |
| \tilde{g}_i | | Normierte Gewichtung des Squares i |
| h_{ges} | [mth ⁻¹] | Absolute Häufigkeit der Mobilität |
| i, j | | Zustand, Square |
| k | | Zustand, Mietpreiskoeffizient |
| K | | Kelvin |
| K_j | [EUR mth ⁻¹] | Wohnkosten in Square j |
| κ^α | | Parameter für Subpopulation \mathcal{P}^α |
| $\boldsymbol{\kappa}$ | | Parameterkonfiguration |
| l | [km] | Seitenlänge eines Squares |
| L_j | | Wohnlage des Square j , Lipschitz-Konstante |
| \bar{K} | | Mittlere Wohnkosten im Stadtgebiet |
| m | [km ⁻²] | Dienstleistungsdichte als materielle Variable |
| m | | Meter |
| \bar{m} | [km ⁻²] | Mittlere Dienstleistungsdichte |
| \mathbf{m} | | Materielle Konfiguration |
| M | | Mobilitätskosten, Anzahl der Zustände materieller Variablen, Anzahl der Squares |
| \bar{M} | | Mittlere Mobilitätskosten im Stadtgebiet |
| m_i | [km ⁻²] | Dienstleistungsdichte in Square i |
| m_{opt} | [km ⁻²] | Optimale Dienstleistungsdichte |
| mth | | Monat |
| $M_{ij}^\alpha, M_{ji}^\alpha, M_k$ | | Motivationspotential |
| μ_0 | | Skalierungskoeffizient |
| μ_k | | Flexibilität materieller Übergangsraten |
| n | [km ⁻²] | Bevölkerungsdichte als personelle Variable |
| \mathbf{n} | | Soziokonfiguration |
| \bar{n} | [km ⁻²] | mittlere Bevölkerungsdichte |
| N | | Gesamtzahl aller Individuen |
| N_i^α | | Bevölkerungsanzahl der Subpopulation \mathcal{P}^α im Zustand i |

| | | |
|------------------------------------|--|--|
| n_j^α | [km ⁻²] | Bevölkerungsdichte der Subpopulation \mathcal{P}^α in Square j |
| ν_0 | | Skalierungskoeffizient |
| $\nu_{ji}^\alpha, \nu_{ij}^\alpha$ | | Flexibilität personeller Übergangsraten |
| Ω | | Verhältnissfaktor |
| p | | Gewinnmarge |
| P | | Anzahl der Subpopulationen, Wahrscheinlichkeitsverteilung |
| p_i | | Hilfsdefinition für die Transformation \mathcal{T} |
| p_j | [EUR m ⁻² mth ⁻¹] | Quadratmeter-Mietpreis im Square j |
| $\tilde{p}_j(i)$ | [EUR m ⁻² mth ⁻¹] | Quadratmeter-Mietpreis in Square j bei nur einem Zentrum in Square i |
| $p_{ij}^\alpha, p_{ji}^\alpha$ | | Individuelle Übergangsraten |
| \mathcal{P}^α | | Bezeichnung der Subpopulation |
| Q | | Relative Häufigkeit |
| q | | Mietsparparameter |
| R | | Anzahl der Ringe |
| \mathcal{R} | | Stadtgebiet |
| r_i | | Ring, in welchem Square i liegt |
| \mathcal{R}_i | | Gebiet des Squares i |
| s | | Parameter für Definition eines Zentrums |
| S | | Anzahl der Systeme im Ensemble |
| $S(i)$ | | Anzahl der Systeme im Zustand i |
| $S\#$ | | Szenario Nummer $\#$ |
| σ | | Standardabweichung, Sättigungskoeffizient |
| t | [mth] | Zeit |
| T_C | [K] | Kritische Temperatur |
| T_{ij} | [EUR] | Transportkosten für den Weg zwischen i und j |
| τ | [EUR km ⁻¹] | Spezifische Transportkosten |
| \mathcal{T} | | Transformation der Grundstruktur |
| u | | Nutzenfunktion |
| u_{Dienstl} | | Dienstleistungsnutzenfunktion |
| u_i^α, u_j^α | | Bevölkerungsnutzenfunktion der Subpopulation \mathcal{P}^α in Square i, j |

| | | |
|---------------------|--------------------------|------------------------------------|
| \tilde{u}_i | [EUR km ⁻²] | Umsatzdichte |
| \tilde{U} | | Umsatz pro Dienstleistung |
| w | | Übergangsrate |
| \mathbf{x} | | Punkt im Stadtgebiet \mathcal{R} |
| \mathbf{x}' | | Punkt im Stadtgebiet \mathcal{R} |
| x_i | | x-Koordinate des Squares i |
| Y | [EUR mth ⁻¹] | Individuelles Einkommen |
| y_i | | y-Koordinate des Squares i |
| \mathcal{Z} | | Menge der Zentren |
| $\hat{}$ | | Zeichen für Quasimittelwert |

1. Einleitung

Bis zur Mitte des 21. Jahrhunderts wird die Bevölkerung in städtischen Gebieten ca. 6,4 Milliarden Menschen betragen. Das bedeutet, dass das gesamte globale Bevölkerungswachstum bis 2050 in städtischen Gebieten stattfindet [1]. Der Zuwachs führt nicht nur zur Entstehung neuer Städte, sondern größtenteils zu einem starken Wachstum bereits existierender Metropolen. Bis 2025 werden 27 sogenannte *Megacities* mit über 10 Millionen Einwohnern existieren.

Gleichzeitig verbrauchen Städte bis zu 75% der natürlichen Ressourcen der Erde, wobei sie nur 2% der Erdoberfläche bedecken [2]. Unter dem immer dringlicher werdenden Problem begrenzter natürlicher Ressourcen bilden Städte den Schlüssel zu einem nachhaltigen Umgang mit der Natur.

Stadtwachstum führt außerdem zu einer Ausdehnung der urbanen Flächen. Dies ist beispielsweise aufgrund des Zusammenhangs zwischen Flächennutzung und Mobilität eng mit einer rapiden Zunahme der Mobilität verbunden und hat damit Auswirkungen auf Energieverbrauch und Umweltverschmutzung [3]. Die immer stärker werdende Diskussion über die Schaffung nachhaltiger Städte erfordert somit eine umfassende Untersuchung der Stadtstruktur und ihrer Dynamiken.

In der Geographie oft zitierte, frühe soziologische Forschungsansätze für Stadtstrukturmodelle sind das Ringmodell der Stadtentwicklung von E.W. Burgess [4; 5], das Sektorenmodell von H. Hoyt [6] und das Mehrkerne-Modell von C.D. Harris und E.L. Ullman [7]. In diesen wie in den sich daraus entwickelnden komplexeren Stadtmodellen sind die Ansätze qualitativ und können nur eingeschränkt die Dynamik der Strukturen beschreiben. Städte sind jedoch hoch komplexe Raum-Zeit-Modelle, die ein Zusammenwirken unterschiedlicher räumlicher Ebenen und zeitlicher Skalen beherbergen. Die Individuen wechselwirken intensiv mit ihrer Umgebung, was zu einem stark rückgekoppelten System

führt. Durch Stadtplanung kann zwar versucht werden, dieses von außen zu beeinflussen, jedoch lässt sich dem System eine Eigendynamik bzw. Selbstorganisation nicht absprechen. Daraus ergibt sich eine gewisse Analogie zu selbstorganisierten physikalischen Systemen. Die Soziodynamik leitet den dort gefunden Lösungsansatz für soziale Systeme von miteinander gekoppelten Subsystemen ab. Die Kopplung führt zur Ausbildung geordneter Strukturen.

Eine Anwendung der Theorie auf die Entstehung von Agglomerationen fand unter anderem bereits durch Weidlich und Haag [8], Munz und Weidlich [9],[10] und Popkov, Shvetsov und Weidlich [11] statt. Die Arbeiten bewegen sich räumlich auf einer überregionalen Ebene.

Im Mittelpunkt dieser Arbeit steht die Entwicklung eines soziodynamischen Stadtmodells auf regionaler Ebene, welches die Entstehung städtischer Strukturen unter Berücksichtigung des Konsumverhaltens von Individuen simuliert.

Die Arbeit gliedert sich in Kapitel 2 und 3 in die Darstellung der Theorie der Soziodynamik und die Erklärung grundlegender Begriffe und Modelle der Stadtgeographie. Darauf aufbauend wird das Stadtmodell als neues Konzept qualitativ und quantitativ entwickelt (Kapitel 4). Kapitel 5 erklärt die für die numerische Berechnung der Szenarien verwendete Lösungsmethode Runge-Kutta-4. Die Bestimmung der Parameter als auch die Auswertung der numerischen Lösungen und analytischen Rechnungen findet in Kapitel 6 statt. Es können hierbei vier Kategorien simulierter Stadtstrukturen identifiziert werden, welche jeweils ausführlich anhand eines Szenarios erläutert werden.

Dabei wird deutlich, dass trotz des im Vergleich zur Realität einfachen Modellansatzes bereits realistische Strukturen wiedergegeben werden können.

2. Modellierungskonzept der Soziodynamik

In vielen Systemen der belebten und unbelebten Natur kann beobachtet werden, wie sich aus ungeordneten Zuständen räumliche oder zeitliche Strukturen bilden. Die Strukturen bilden sich spontan und sie organisieren sich selbst. Typische Erscheinungen für Systeme unbelebter Materie sind der Ferromagnetismus unterhalb der kritischen Temperatur T_c oder die Entstehung einer kohärenten Lichtquelle, der Laser. Hierbei zeigt sich, dass durch die Variation weniger makroskopischer Parameter - beispielsweise der Temperatur beim Ferromagnetismus oder der Eingangs-Pump-Leistung des Lasers - grundlegende Systemänderungen auftreten. Diese Übergänge fern vom Gleichgewicht werden als Phasenübergänge bezeichnet. Die Funktionsweise solcher gänzlich verschiedener Systeme unterliegt jedoch den selben Prinzipien. Deshalb entwickelte H. Haken in den 1970er Jahren die *Synergetik* als grundlegendes Konzept dieser Phasenübergänge [12].

Die *Soziodynamik* wendet das grundlegende Konzept der Synergetik auf die Beschreibung sozialer Systeme an. Der bedeutende Unterschied zur Synergetik ist jedoch die Nichtexistenz von mikroskopischen Bewegungsgleichungen, welche das Verhalten der einzelnen beteiligten Individuen beschreiben.

2.1. Ziel der Soziodynamik

Die Nichtexistenz mikroskopischer Bewegungsgleichungen resultiert aus der Tatsache, dass die inneren Prozesse, welche bei einem einzelnen Individuum zu einer Entscheidung führen, zu komplex für den in der Soziodynamik verwendeten Formalismus eines kollektiven sozialen Prozesses sind. Es werden anstatt der Bewegungsgleichungen sozialwissenschaftliche Begriffe verwendet und die inneren Prozesse der individuellen

Entscheidungsfindung werden vernachlässigt. Die individuellen Entscheidungen werden allein den sozialen Makrovariablen unterworfen. In diesem Kontext spricht man ebenso von der „Versklavung“ des individuellen Prozesses. Die Vereinfachung führt zu einer probabilistischen Beschreibung individuellen Verhaltens.

Als Ziel der Soziodynamik definiert Weidlich „die Aufstellung und Anwendung eines allgemeinen Modellierungskonzeptes für die quantitative Beschreibung dynamischer Makro-Phänomene in der Gesellschaft“ [13, S. 227].

Auf der Makroebene kollektiver Phänomene lassen sich nun Bewegungs- oder Evolutionsgleichungen für relativ wenige Makrovariablen bestimmen. Nach Kalibrierung der Modellparameter entsteht durch die meist angewendete numerische Lösung der Bewegungsgleichungen die Simulation eines Szenarios, welches man in einem weiteren Schritt mit empirischen Verläufen vergleichen kann.

Die Modellierung geschieht in drei grundlegenden Schritten [14]:

1. Auswahl spezifischer Makrovariablen, um das soziale System zu beschreiben:
Es muss ein Satz von Variablen gefunden werden, der das System einerseits ausreichend beschreibt, andererseits steigen mit der Zahl der Makrovariablen die zu treffenden Annahmen und die Komplexität und Rechenintensität des Modells.
2. Bestimmung elementarer Entwicklungsschritte durch Motivationspotentiale, welche vom jeweiligen Zustand abhängig sind:
Die Motivationspotentiale bilden ähnlich dem elektrostatischen Potential eine Potentialdifferenz zwischen zwei Zuständen, welche eine „Entscheidungskraft“ erzeugt, die zum Übergang zwischen zwei Zuständen führt. Zustand bezeichnet hierbei eine bestimmte Systemkonfiguration.
3. Entwicklung der Evolutionsgleichungen für die ausgewählten Makrovariablen auf probabilistischer und quasi-deterministischer Beschreibungsebene.

2.2. Konfigurationsraum der Makrovariablen

Der Konfigurationsraum wird durch die möglichen Zustände aller Makrovariablen und die Parameter aufgespannt. Da die Parameter beliebig aber fest sind, kann man vom Konfigurationsraum der Makrovariablen sprechen. Die Wahl der Makrovariablen bestimmt, welcher Teil des gesamten sozialen Systems beschrieben wird. Soziale Systeme bestehen nahezu immer aus wiederum komplexen Untersystemen. Deshalb muss die Mikro- und Makroebene und daraus folgend die Makrovariablen so definiert werden, dass der relevante Systemsektor einerseits vollständig, andererseits abgegrenzt zu anderen Sektoren beschrieben wird. Beispielsweise müssen für die Beschreibung des Sektors Wirtschaft Variablen gefunden werden, die diesen abbilden können. Jedoch spielen auch die Sektoren Politik oder Wissenschaften in den Dynamiken der Wirtschaft eine Rolle. Diese externen Einflüsse müssen für die Simulation jedoch abgegrenzt werden, damit die für den beschriebenen Sektor relevanten makroskopischen Schlüsselvariablen einer quasi autonomen und *eigengesteuerten* Dynamik folgen. Eigengesteuert bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Auslöser und Effekt in einer zyklisch geschlossenen Relation zueinander stehen. Z.B. erzeugt das Verhalten vieler Individuen gesellschaftliche Rahmenbedingungen, welche wiederum eben dieses individuelle Verhalten bewirken.

Die relevanten Makro-Variablen können in Typen materieller und personeller Art unterteilt werden. Die Makrovariablen sind zeitabhängig, was jedoch nicht notiert wird.

2.2.1. Materielle Variablen

Eine materielle Variable beschreibt eine aggregierte Maßzahl für ein Gut oder eine Sache. Sie findet oftmals Anwendung in ökonomischen Betrachtungsweisen und kann in extensive und intensive Variablen unterteilt werden. Die Produktivität oder der Preis sind intensive materielle Variablen, welche in dieser Arbeit nicht verwendet werden. Extensive Variablen sind beispielsweise die Kapazität einer Produktion oder die Anzahl von Geschäften in einer Straße.

Die Darstellung als Set ergibt die *materielle Konfiguration*, bestehend aus M extensiven materiellen Variablen m_k :

$$\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_k, \dots, m_M\}. \quad (2.1)$$

Die Größe einer Makrovariable wird zwar durch Individuen oder Gruppen beeinflusst, die Aktivitäten dieser erscheinen jedoch nicht direkt in der Dynamik der materiellen Makrovariablen. Der Einfluss ist daher indirekt.

2.2.2. Personelle Variablen

Personelle Variablen erweitern die Modellierungsmöglichkeiten auf Individuen. Diese verhalten sich nicht immer als rationelle Produzenten oder Konsumenten, welche effizienzoptimiert handeln.

Auch bei den personellen Variablen ist eine Unterscheidung zwischen extensiven und intensiven Variablen sinnvoll. Intensive personelle Variablen beschreiben eine innere Einstellung intellektueller oder emotionaler Art. Beispiele sind innere politische Einstellungen oder Wünsche, welche durchaus äußeren Handlungen und Meinungsäußerungen widersprechen können. Da diese Art der Variablen in der Arbeit nicht verwendet wird, werden sie hier nicht weiter behandelt.

Extensive personelle Variable zeigen eine nach außen getragene Entscheidung, wie z.B. die Wahl des Wohnortes. In vielen gesellschaftlichen Rollen - seien sie politisch, kulturell, religiös oder wirtschaftlich - besitzt ein Individuum die Möglichkeit, gewisse Einstellungen einzunehmen. Jedes Individuum kann somit aus einer Menge an möglichen Einstellungen $i \in \{1, \dots, C\}$ wählen. Man spricht von einem *Zustand* i , in welchem sich das Individuum befindet.

Gewisse Eigenschaften eines Individuums - z.B. der genetische Hintergrund oder seine Bildung - definieren praktisch unveränderbare Eigenschaften. Individuen gleicher unveränderbarer Eigenschaften, d.h. gleichen Hintergrundes α können in so genannten *Subpopulationen* zusammengefasst werden. Man definiert die Existenz von P Subpopulationen \mathcal{P}^α , $\alpha \in \{1, 2, \dots, P\}$. Die Feinheit der Unterscheidungen und damit die Anzahl der Subpopulationen hängt von den Modellanforderungen ab.

Damit lässt sich die personelle Variable n_i^α für Personen einer Subpopulation \mathcal{P}^α im Zustand i einführen. Auf makroskopischer Ebene ist man an der Verteilung der Zustände in einer Gesellschaft vieler Individuen interessiert. Diese Information enthält die *Sozio-konfiguration* (2.2), womit ein Satz extensiver personeller Makrovariablen beschrieben wird.

$$\mathbf{n} = \{n_1^1, \dots, n_C^1; \dots; n_1^\alpha, \dots, n_i^\alpha, \dots, n_C^\alpha; \dots; n_1^P, \dots, n_C^P\} \quad (2.2)$$

2.2.3. Trend- und Kontrollparameter

Trendparameter sind inhärente Eigenschaften eines Individuums der Subpopulation \mathcal{P}^α . In den dynamischen Gleichungen sind sie intensive unveränderliche Parameter. Kontrollparameter dagegen entsprechen wirtschaftlichen, politischen oder geographischen Randbedingungen. Diese Art von Parametern ist im Prinzip veränderbar durch äußere Beeinflussung. Da beide Typen als Koeffizienten in den dynamischen Gleichungen auftreten, werden sie zusammen als ein Set von Parametern verstanden.

Benötigt beispielsweise jede Subpopulation \mathcal{P}^α genau einen Parameter κ^α , so ergibt folgende *Trend- und Kontrollparameterkonfiguration* dieses Set $\boldsymbol{\kappa}$:

$$\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa^1, \dots, \kappa^\alpha, \dots, \kappa^P\} \quad (2.3)$$

Aus den materiellen und extensiven personellen Variablen, als auch den Trend- und Kontrollparametern setzt sich die *totale Konfiguration von Variablen und Parametern* in dieser Arbeit zusammen.

$$\text{Totale Konfiguration} = \{\mathbf{m}, \mathbf{n}, \boldsymbol{\kappa}\} \quad (2.4)$$

Die totale Konfiguration beschreibt den Modellzustand im *Konfigurations- oder Zustandsraum*. Im folgenden wird die Trend- und Kontrollparameterkonfiguration bei der Angabe des Konfigurationsraums zur Vereinfachung der Notation weggelassen.

2.3. Elementare Dynamik der Makrovariablen

Die gefundenen Makrovariablen verändern sich durch elementare Entwicklungsschritte, welche die Dynamik des Systems erzeugen. Die Entwicklungsschritte sind der Sprung der Konfiguration $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ zu einem Nachbarzustand $\{\mathbf{m}_{k\pm}, \mathbf{n}\}$ bzw. $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}_{ji}^\alpha\}$, welcher sich um eine Einheit vom Ausgangspunkt unterscheidet. Für die materielle Konfiguration besteht der Sprung aus einer Erhöhung oder Verringerung der Komponente m_k um Eins:

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{k\pm} = \{m_1, \dots, (m_k \pm 1), \dots, m_M\} \quad (2.5)$$

Bei einem Elementarschritt der Soziokonfiguration wechselt ein Mitglied der Konfiguration von Zustand i in den Zustand j :

$$\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_{ji}^\alpha = \{n_1^1, \dots, (n_j^\alpha + 1), \dots, (n_i^\alpha - 1), \dots, n_C^P\} \quad (2.6)$$

Es stellt sich nun die Frage nach den entscheidenden dynamischen Größen, welche die elementaren Entwicklungsschritte erzeugen. Für die Beantwortung müssen die an die Soziodynamik gestellten Bedingungen berücksichtigt werden:

1. Es fehlen mikroskopische Bewegungsgleichungen.
2. Die Übergänge – ausgelöst durch Individuen – werden als probabilistischer Prozess beschrieben. Die elementaren Entwicklungsschritte sind nicht deterministisch, womit das Individuum im Modell eine gewisse Entscheidungsfreiheit erhält.
3. Der probabilistische Prozess wird durch soziale Antriebskräfte in Gang gesetzt, welche in der Soziodynamik durch sogenannte Motivationspotentiale modelliert werden.
4. Die elementaren Entwicklungsschritte müssen gleichzeitig die Kopplung zwischen der Mikroebene individueller Aktivität und der Makroebene der Gesellschaft erzeugen; zumindest soweit dies durch die gewählten Makrovariablen möglich ist.

Die Einhaltung der Bedingungen wird durch *probabilistische Übergangsraten* w gewährleistet. Die Übergangsraten sind *bedingte Wahrscheinlichkeiten* $P(\{\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{n}\} | \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\})$ pro Zeiteinheit. Die bedingte Wahrscheinlichkeit drückt die Wahrscheinlichkeit aus, dass sich ein System mit Sicherheit in Zustand $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ befindet und in den Zustand $\{\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{n}\}$ übergeht. Die Wahrscheinlichkeit und dadurch auch die Übergangsraten sind per Definition positiv.

Für die materielle Konfiguration ist Formel (2.7) die Übergangsrate der Übergänge (2.5). Formel (2.8) zeigt die Übergangsrate des entgegen gerichteten Prozesses. μ_0 ist ein Ska-

lierungskoeffizient.

$$w_k(\mathbf{m}_{k\pm}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) = \mu_0 \exp \{M_k(\mathbf{m}_{k\pm}, \mathbf{m}; \mathbf{n})\} \quad \text{für } \mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m}_{k\pm} \quad (2.7)$$

$$w_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n}) = \mu_0 \exp \{M_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n})\} \quad \text{für } \mathbf{m}_{k\pm} \Rightarrow \mathbf{m} \quad (2.8)$$

Das bereits erwähnte Motivationspotential M_k ist ein Maß für die Intensität des Übergangs vom Ausgangszustand zum Endzustand. Man beachte, dass die Notation die Reihenfolge „(Endzustand, Ausgangszustand;...)“ besitzt. Die Motivationspotentiale entstehen durch den Vergleich des Ausgangszustandes mit einem neuen Endzustand.

Ähnlich bilden sich die Übergangsraten (2.9) für die Übergänge (2.6) als auch Formel (2.10) für den entgegengerichteten Prozess der Soziokonfiguration. ν_0 ist ein Skalierungskoeffizient.

$$\begin{aligned} w_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_i^\alpha, \mathbf{n}) &= \nu_0 n_i^\alpha p_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_i^\alpha, \mathbf{n}) \\ &= \nu_0 n_i^\alpha \exp \{M_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_i^\alpha, \mathbf{n})\} \quad \text{für } \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n}_i^\alpha \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} w_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_j^\alpha) &= \nu_0 (n_j^\alpha + 1) p_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_j^\alpha) \\ &= \nu_0 (n_j^\alpha + 1) \exp \{M_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_j^\alpha)\} \quad \text{für } \mathbf{n}_j^\alpha \Rightarrow \mathbf{n} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Hierbei stellt p_{ji}^α in Gleichung (2.9) die individuellen Übergangsraten von i nach j dar. Dieser Übergang kann von n_i^α Personen ausgeführt werden. Andererseits bezieht sich der Übergang von j nach i mit der individuellen Rate p_{ij}^α in Gleichung (2.10) auf eine Menge von $(n_j + 1)$ Personen, da nun der Ausgangszustand die Konfiguration \mathbf{n}_j^α aus (2.6) ist. Wie bereits bei der materiellen Konfiguration hängen auch bei der Soziokonfiguration die Motivationspotentiale M_{ji}^α und M_{ij}^α vom Anfangs- und Endzustand des Individuums ab. Es besteht keine Abhängigkeit von vergangenen Zuständen. Die so entstehende Entwicklung nennt man *Markov-Prozess*.

Da die Übergangsraten nur von den Makrovariablen abhängen, wird Punkt vier der oben aufgestellten Bedingungen, die Kopplung von Mikro- und Makroebene, erfüllt. Individuelle Entscheidungen fließen in die Übergangsraten ein, welche Zustandsänderungen der Makrovariablen und damit die weiter unten beschriebenen Makrodynamik bewirken. Die individuellen Entscheidungen basieren jedoch auf Motivationspotentialen, welche Funk-

tionen der momentanen Makrokonfiguration sind. Diese wechselseitige Beziehung führt auf eine probabilistische und eigengesteuerte Dynamik der Makrovariablen.

Für eine leichtere Interpretation werden in [14] die Motivationspotentiale in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil getrennt. Der symmetrische Teil ist für den vorwärts gerichteten Prozess $\mathbf{m} \Rightarrow \mathbf{m}_{k\pm}$, $\mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n}_{ji}^\alpha$ und den rückwärts gerichteten Prozess $\mathbf{m}_{k\pm} \Rightarrow \mathbf{m}$, $\mathbf{n}_{ji}^\alpha \Rightarrow \mathbf{n}$ gleich. Er verschmilzt daher mit dem Parameter μ_0 bzw. ν_0 zu einer so genannten *Flexibilität* μ_k und ν_{ji}^α .

Der antisymmetrische Teil teilt sich in zwei Funktionen auf. Die Funktionen u drücken den *Nutzen* eines Konstituenten des Modells im Anfangs- oder Endzustand aus. Dabei beschreiben $u_k(\mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n})$ und $u_j^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha)$ den Nutzen des neuen Endzustands, $u_k(\mathbf{m}; \mathbf{n})$ und $u_i^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n})$ den Nutzen des Anfangszustands. Nach der Umformung haben die Übergangsraten der materiellen Konfiguration die Form (2.11) und (2.12).

$$w_k(\mathbf{m}_{k\pm}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) = \mu_k(\mathbf{m}_{k\pm}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) \exp \{u_k(\mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n}) - u_k(\mathbf{m}; \mathbf{n})\} \quad (2.11)$$

$$w_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n}) = \mu_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n}) \exp \{u_k(\mathbf{m}; \mathbf{n}) - u_k(\mathbf{m}_{k\pm}; \mathbf{n})\} \quad (2.12)$$

Die Übergangsraten der Soziokonfiguration lauten:

$$w_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n}) = n_i^\alpha \nu_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n}) \exp \{u_j^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha) - u_i^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n})\} \quad (2.13)$$

$$w_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_{ji}^\alpha) = (n_j^\alpha + 1) \nu_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_{ji}^\alpha) \exp \{u_i^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}) - u_j^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha)\} \quad (2.14)$$

Der hier verwendete „Nutzen“ kann analog zum Nutzen-Konzept der Entscheidungstheorie betrachtet werden. Er stellt hierbei ein Maß der Befriedigung dar. Durch den Exponentialansatz ist darüber hinaus die Bedingung stets positiver Übergangsraten erfüllt.

2.4. Entwicklungsgleichungen der Makrovariablen

Die erarbeiteten Übergangsraten sind ein wichtiger Bestandteil für die Bewegungsgleichungen der Makrovariablen. Für die Formulierung dieser gibt es zwei Arten der Herangehensweise. Die Erste formuliert eine Gleichung für die Dynamik der gesamten Wahrscheinlichkeitsverteilung des stochastischen Systems. Sie ist daher eine probabilistische Beschreibung und führt auf die *Mastergleichung*. Die zweite Art der Herangehensweise entspricht einer deterministischen Beschreibung, indem man nur den mittleren Weg des Systems im Zustandsraum berechnet. Dies geschieht durch Verwendung der sogenannten *Quasimittelwertgleichungen*.

2.4.1. Mastergleichung

Ein stochastisches System kann sich in einem von mehreren disjunkten Zuständen befinden. Die Wahrscheinlichkeit, welchen Zustand es besetzt, wird durch die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* $P(i; t)$ beschrieben, wobei i einen möglichen Zustand ausdrückt. Die Zeit t wird explizit notiert. Die statistische Entsprechung wäre ein idealerweise unendlich großes Ensemble von Systemen und die relative Anzahl der Systeme in einem Zustand entspricht der Wahrscheinlichkeit des Zustandes. Da die Wahrscheinlichkeit immer positiv ist und jedes System sich in einem der Zustände befinden muss, gilt für $P(i; t)$:

$$P(i, t) \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_i P(i, t) = 1 \quad \forall t \quad (2.15)$$

Mit Einführung der *bedingten Wahrscheinlichkeit*

$$P(j, t_2|i, t_1),$$

welche die Übergangswahrscheinlichkeit für ein System angibt, das sich zur Zeit t_1 mit Sicherheit in Zustand i befindet und zur Zeit t_2 in Zustand j übergegangen ist, wird in [14] die *Ausbreitungsfunktion* (2.16) hergeleitet.

$$P(j, t_2) = \sum_i P(j, t_2|i, t_1)P(i, t_1) \quad (2.16)$$

Der rechte Teil von (2.16) beschreibt den Wahrscheinlichkeitsfluss von Zustand i nach j . Die Mastergleichung erhält man durch die differentielle Darstellung der Ausbreitungsfunktion (2.16), d.h. $t_1 = t$ und $t_2 = t + \delta t$, wobei δt ein infinitesimal kurzes Zeitintervall ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit lautet nun $P(j, t + \delta t | i, t)$ und kann in einer Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung entwickelt werden. Mit Einführung der Übergangsrate

$$w_t(j, i) = \frac{\partial P(j, t_2 | i, t)}{\partial t_2} \Big|_{t_2=t} \quad (2.17)$$

leitet sich in [14] die Mastergleichung (2.18) her.

$$\frac{dP(j, t)}{dt} = \sum_i w_t(j, i)P(i; t) - \sum_i w_t(i, j)P(j; t) \quad (2.18)$$

Der zweite Term beschreibt den Fluss aus den Zustand j heraus und leitet sich durch Vertauschen der Zustände j und i in (2.16) her. Wenn man nun den Zustand $i = \{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ als Zustand im Konfigurationsraum (2.4) definiert und für die Übergangsraten $w_t(j, i)$ und $w_t(i, j)$ die im vorherigen Kapitel hergeleiteten Übergangsraten (2.11) - (2.14) einsetzt, erhält man aus (2.18) die Mastergleichung in der Form (2.19):

$$\begin{aligned} \frac{dP(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t)}{dt} = & + \sum_k \left\{ w_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k+}; \mathbf{n})P(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{n}; t) + w_k(\mathbf{m}, \mathbf{m}_{k-}; \mathbf{n})P(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{n}; t) \right\} \\ & - \sum_k \left\{ w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}; \mathbf{n})P(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t) + w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m}; \mathbf{n})P(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t) \right\} \\ & + \sum_{i,j,\alpha} \left\{ w_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}, \mathbf{n}_{ji}^\alpha)P(\mathbf{m}, \mathbf{n}_{ji}^\alpha; t) \right\} \\ & - \sum_{i,j,\alpha} \left\{ w_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n})P(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t) \right\}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Infolgedessen ist die Mastergleichung eine dynamische Balancegleichung für die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Sie ermittelt die zeitliche Änderung von $P(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t)$, indem sie die Differenz aus der Summe aller Wahrscheinlichkeitsflüsse $w \cdot P$ von allen Nachbarkonfigurationen in die Konfiguration $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ und der Summe aller Wahrscheinlichkeitsflüsse von der Konfiguration $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$ in alle Nachbarkonfigurationen bildet.

Unberücksichtigt bleiben alle Prozesse, die die Gesamtzahl der Individuen

$$N = \sum_i \sum_\alpha n_i^\alpha \quad (2.20)$$

verändern, d.h. $\frac{dN}{dt} \equiv 0$.

Die Lösung der Mastergleichung $P(\mathbf{m}, \mathbf{n}; t)$ stellt den gesamten Prozess der stochastischen Entwicklung eines ganzen Ensembles von Konfigurationen dar. Soziale Systeme sind in der Realität jedoch oft einzig oder es gibt nur wenige. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung kann somit nicht mit genug empirischen Daten verglichen werden.

2.4.2. Quasimittelwertgleichungen

Daher bietet sich ein zweiter Ansatz an, der sich auf ein einzelnes System konzentriert, welches stochastisch eine Reihe von Systemzuständen durchläuft. Das Durchlaufen der Zustände nennt man *stochastische Trajektorie*, die Betrachtung der mittleren Entwicklung mehrerer Trajektorien führt auf die sogenannten *Quasimittelwertgleichungen*.

Eine stochastische Trajektorie bezeichnet eine Folge von Zuständen i, j, k, \dots , die jedoch nicht wie in der klassischen Mechanik durch deterministische Bewegungsgleichungen bestimmt sind. Vielmehr ist der Übergang von beispielsweise i zu j nur mit einer Wahrscheinlichkeit behaftet.

Um einen Zusammenhang zwischen der stochastischen Trajektorie und der zuvor behandelten Wahrscheinlichkeitsverteilung herzustellen, wird ein System im Zustand i zum Zeitpunkt $t = 0$ betrachtet. Für dieses ergeben sich in einem kleinen Zeitintervall δt die Möglichkeiten, mit der Wahrscheinlichkeit $\delta t w_t(j, i)$ in einen Nachbarzustand j zu springen oder mit der Wahrscheinlichkeit $(1 - \sum_j \delta t w_t(j, i))$ im Zustand i zu verbleiben. $w_t(j, i)$ sind die in (2.17) definierten statistischen Übergangswahrscheinlichkeiten pro Zeiteinheit.

Die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs kann als relative Häufigkeit von einer großen Anzahl $S(i)$ von Systemen im Zustand i bei $t = 0$ verstanden werden. Damit betrachtet man wiederum ein Ensemble von $S \gg 1$ Systemen, welche verschiedene stochastische Trajektorien durchlaufen. Mit der Einführung der relativen Häufigkeit

$$Q(i, t) = \frac{S(i, t)}{S} \quad \text{mit} \quad \sum_i Q(i, t) = 1$$

kann nun gezeigt werden (siehe [14]), dass gilt:

$$Q(i, t) = P(i, t) \quad (2.21)$$

Die Relative Häufigkeit $Q(i, t)$ ist gleich der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(i, t)$ des vorherigen Kapitels. Damit ist der Ansatz der stochastischen Trajektorie gleichwertig zur vorherigen Herleitung der Mastergleichung. Für die Simulation sozialer Systeme benötigt man jedoch Größen, die das wahrscheinlichste Verhalten beschreiben.

Durch Mittelung über die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(i, t)$ erhält man die mittlere Konfiguration \bar{i} . Da jedoch beispielsweise bei einer multimodalen Verteilung – eine Verteilung, die mehrere Maxima im Konfigurationsraum besitzt – der Mittelwert zwischen den Maxima und somit in einem Zustand mit möglicherweise geringer Wahrscheinlichkeit liegen würde, ist die mittlere Konfiguration ein schlechtes Maß für die wahrscheinlichste Entwicklung des Systems.

Um eine bessere Größe $\hat{i} = \{\hat{\mathbf{m}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ für die Kennzeichnung derjenigen Zustände zu finden, entlang derer sich im Mittel die stochastischen Systeme entwickeln, nimmt man ein Bündel von C Systemen. Für die Herleitung wird der Zustand i aufgespalten in seine materielle Konfiguration $\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_k, \dots, m_M\}$ und die Soziokonfiguration \mathbf{n} , welche jedoch vorerst konstant bleibt.

Zur Zeit t seien die C Systeme im Konfigurationspunkt \mathbf{m} . Sie bilden ein lokales Bündel von Systemen. Im Zeitintervall δt erfolgt für einen Teil $\delta t w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m})$ des Bündels ein Übergang $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{k+} = \{m_1, \dots, (m_k + 1), \dots, m_M\}$ und für einen anderen Teil $\delta t w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m})$ ein Übergang $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{k-} = \{m_1, \dots, (m_k - 1), \dots, m_M\}$. Der Rest $(1 - \delta t[w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}) + w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m})])$ verbleibt im Zustand \mathbf{m} . Die Teilbündel können wiederum mit Wahrscheinlichkeiten identifiziert werden.

Der mittlere Zustand der Koordinate m_k nach der Änderung lautet:

$$\begin{aligned} (\hat{m}_k + d\hat{m}_k) &= (m_k + 1) \delta t w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}) + (m_k - 1) \delta t w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m}) \\ &\quad + m_k (1 - \delta t [w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}) + w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m})]) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Wenn nun die materielle Konfiguration \mathbf{m} konstant gehalten wird, kann analog zu oben der mittlere Zustand für die Koordinate \hat{n}_i der Soziokonfiguration in $(t + \delta t)$ hergeleitet werden. Ausgeführt wird dies im Detail in [14]. Diese Koordinaten \hat{m}_k und \hat{n}_i beschreiben die mittlere Position eines lokalen Bündels von Systemen und werden *Quasimittelwerte*

genannt. „Lokal“ deshalb, da für jedes der C Systeme die Anfangskonfiguration \mathbf{m} galt. Die Umformung von (2.22) ergibt die Bewegungsgleichungen, die sog. *Quasimittelwertgleichungen* (2.23) und in [14] analog (2.24).

$$\frac{d\hat{m}_k(t)}{dt} = w_k(\hat{\mathbf{m}}_{k+}, \hat{\mathbf{m}}; \hat{\mathbf{n}}) - w_k(\hat{\mathbf{m}}_{k-}, \hat{\mathbf{m}}; \hat{\mathbf{n}}) \quad (2.23)$$

$$\frac{d\hat{n}_i^\alpha(t)}{dt} = \sum_j w_{ij}^\alpha(\hat{\mathbf{m}}; \hat{\mathbf{n}}_{ij}^\alpha, \hat{\mathbf{n}}) - \sum_j w_{ji}^\alpha(\hat{\mathbf{m}}; \hat{\mathbf{n}}_{ji}^\alpha, \hat{\mathbf{n}}) \quad (2.24)$$

Bei einer unimodalen Wahrscheinlichkeitsverteilung - d.h. einer Verteilung mit genau einem Maximum - entsprechen die Quasimittelwerte den echten Mittelwerten, sind aber eher mit der Entwicklung eines einzigen Sozialsystems assoziiert. In den Quasimittelwerten tauchen nur momentane Zustände eines Systems auf, wogegen in den Mittelwerten über eine möglicherweise multimodale Verteilung gemittelt wird. Bei dieser Mittelung spielen auch weit entfernte Zustände mit hinein. Das probabilistische Verhalten eines stochastischen Systems wird jedoch nur von seinen momentanen lokalen Zuständen bestimmt [14].

Die Hütchen zur Kennzeichnung der Quasimittelwerte werden im Folgenden für eine vereinfachte Notation weggelassen.

3. Verwendete Begriffe und Modelle der Stadtforschung

Vor der Erarbeitung eines soziodynamischen Stadtmodells sollen relevante Stadtbegriffe und -theorien aus der Geographie bzw. den Sozialwissenschaften vorgestellt werden.

3.1. Begriffsdefinitionen

Die Definitionen des Begriffs *Stadt* an sich weichen in den verschiedenen Disziplinen und Ländern teils stark voneinander ab. Hinzu kommt beispielsweise gerade in Industriestaaten ein fließender Übergang zwischen der Stadt und den sie umgebenden ländlichen Siedlungen.

Im administrativen Kontext existieren national schwankende Mindesteinwohnerzahlen als Untergrenze für eine Stadt. Einige Beispiele sind in Tabelle 3.1 angegeben.

Auch aus soziologischer Sicht sind keine speziellen Stadtphänomene zu finden, welche eine Abgrenzung erlauben. Hamm [15] bezweifelt sogar eine wissenschaftlich brauchbare Definition der Begriffe Stadt und Land, da aufgrund der Verdichtung in Städten gesamtgesellschaftliche Phänomene hervortreten, die Phänomene jedoch nicht auf die Stadt beschränkt sind, sondern nur aufgrund der Verdichtung verstärkt werden.

Die umfassendste Definition einer Stadt existiert in der Geographie. Es werden hierbei u.a. die Struktur (z.B. die Geschlossenheit der Siedlung), soziale Gegebenheiten (z.B. hohe Wohn- und Arbeitsplatzdichten) und die Bedeutung der Siedlung auf die Infrastruktur berücksichtigt [16].

In welche *Stadtregionen* sich eine Stadt aufteilt, wird für Deutschland seitens der Raumforschung in einer modellartigen Gliederung (Abbildung 3.1) definiert [17]. Die *Kernstadt*

Tabelle 3.1.: Mindesteinwohnerwerte für Städte in den genannten Ländern [16].

| Land | Einwohnerzahl |
|----------------------------|---------------|
| Bundesrepublik Deutschland | 2000 |
| Österreich | 5000 |
| Dänemark / Island | 200 |
| Japan | 50000 |

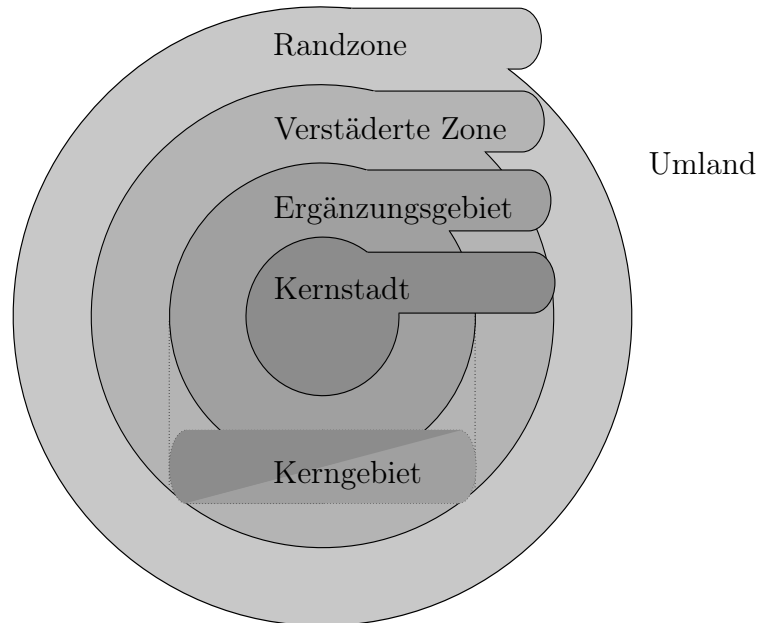


Abbildung 3.1.: Veranschaulichung der Stadtregionen [17].

als das zentrale Verwaltungsgebiet und das *Ergänzungsgebiet* werden als *Kerngebiet* zusammengefasst. Das Ergänzungsgebiet besteht aus Siedlungen, welche der Kernstadt strukturell und funktional ähneln. Die Dichte der Siedlungen in der *verstärkten Zone* ist deutlich geringer, die Bevölkerung besteht zum großen Teil aus Pendlern welche im Kerngebiet arbeiten. Nach außen hin schließt sich die *Randzone* an. Sie wird durch eine größere Anzahl an landwirtschaftlichen Erwerbspersonen charakterisiert. Das Ziel von Pendlern dieser Zone ist weiterhin zum überwiegenden Teil das Kerngebiet. Das *Umland* als äußerster Bereich füllt den Raum zwischen einzelnen urbanen Gebieten. Es wird auch als *Hinterland* oder *Peripherie* bezeichnet.

Die fortgeschrittene Verstädterung führt zur Bildung von sogenannten *Agglomerations-* oder *Verdichtungsräumen*. Man versteht darunter ein „verstädertes Gebiet mit einer gewissen Kernbildung, einer bestimmten Flächenausdehnung und einer größeren Min-

destbevölkerungszahl“ [16, S. 55]. Es wird zwischen vier Entwicklungsphasen der Agglomerationsräume unterschieden.

Wie Abbildung 3.2 zeigt, besteht die *Urbanisierungsphase* aus einem starken Bevölkerung- und Beschäftigungswachstum in der Kernstadt. Diese Entwicklung war beispielsweise charakteristisch für europäische Städte im 19. Jahrhundert. Die Städte wuchsen im Einklang mit wirtschaftlicher Entwicklung. Dabei war aufgrund der noch nicht entwickelten Massenfortbewegungsmittel ein enges Beieinanderliegen von Wohn- und Arbeitsplatz notwendig. Einen ähnlichen, sogar noch stärkeren Bevölkerungszuwachs zeigen Agglomerationen in Entwicklungsländern. Bei diesen ist das Größenwachstum allerdings zumeist nicht mit wirtschaftlichem Wachstum verbunden.

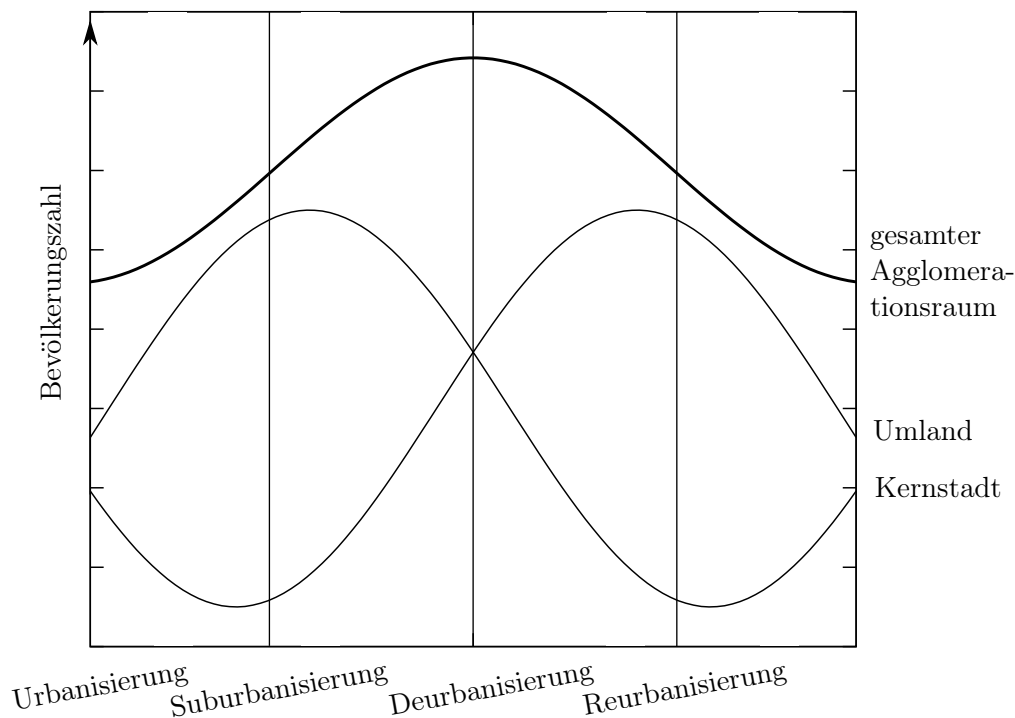


Abbildung 3.2.: Der Verlauf der Bevölkerungs- und Beschäftigungszahlen in der Kernstadt und im Umland während der vier Agglomerationsphasen [18].

In der häufig darauf folgenden *Suburbanisierungsphase* steigt die Konzentration von Bevölkerung und Arbeitsplätzen in der Kernstadt weiterhin an. Gleichzeitig dazu entwickelt sich die Infrastruktur. Der Preisdruck in der Kernstadt erhöht sich aufgrund des geringen Platzangebotes wohingegen das Umland bessere und günstigere Wohnbedingungen bietet. Daher nimmt die Bevölkerung im Umland stärker zu und auch die Industrie findet dort gut erreichbare Gewerbe- und Industrieflächen. In den Industrieländern begannen wohlhabende Schichten mit der Umsiedelung an den Stadtrand in der zweiten Hälfte des

19. Jahrhunderts, die Besiedelung dieser sogenannten suburbanen Gebiete durch Mittel- und Unterschicht folgte mit einer zeitlichen Verzögerung [16].

Der Zeitraum, in welchem die durch Industrie hoch belasteten Agglomerationsräume gegenüber jungen und weniger industrialisierten Städten an Attraktivität verlieren, wird *Desurbanisierungsphase* genannt. Sie zeichnet sich durch einen Bevölkerungs- und Arbeitsplatzverlust in der Kernstadt aus, welcher durch geringe Bevölkerungszuwächse im suburbanen Umfeld nicht ausgeglichen werden kann. Beispiele sind Industrieräume mit einer starken Monostruktur (z.B. Montanindustrie).

In der Phase der *Reurbanisierung* nimmt die Bevölkerung aufgrund von Investitionen für Erhalt oder Erneuerung der Stadtstrukturen, als auch durch Konzepte intensiver Flächennutzung in den Kernstädten wieder moderat zu [18]. Diese Strategie wird seit den 70er Jahren sowohl in Gebieten mit wachsender als auch schrumpfender Bevölkerungszahl verfolgt.

Bei größeren Agglomerationen spricht man auch von einer *Metropolregion*. Metropolregionen sind „funktional verflochtene Ballungsgebiete, die als Wachstumszentren von europaweiter Bedeutung eingestuft werden und in denen sich hochwertige tertiäre Funktionen konzentrieren“ [19, S. 5]. Die Mindesteinwohnerzahl für eine Metropolregion beträgt 1 bis 1,5 Millionen. Die Metropolregionen übernehmen wichtige Funktionen sowohl auf nationaler als auch auf internationaler Ebene. Auf einzelne Funktionen wird in Literatur [19] weiter eingegangen.

3.2. Klassische Theorie der Zentralen Orte

Auf die Bedeutung bzw. den Bedeutungsüberschuss eines Gebietes relativ zum Umland bezog sich Walter Christaller in seiner Abhandlung über „Die zentralen Orte in Süddeutschland“ als „ökonomisch-geographische Untersuchung über die Gesetzmäßigkeit der Anzahl, Verteilung und Größe der Siedlungen mit städtischen Funktionen“ [20].

Die Arbeit fußt auf der ökonomischen Überlegung, dass mit größer werdender Entfernung zwischen dem Wohn- und Konsumort die Fahrtkosten steigen. Daraus ergibt sich eine obere Grenze des Absatzgebietes für ein Gut. Außerhalb dieser Grenze sind Konsumenten nicht mehr bereit, den Weg auf sich zu nehmen. Andererseits benötigt ein wirtschaftlich rentables Angebot ein Mindestabsatzgebiet, da sonst nicht genug Nachfrager dafür existieren. Damit sich die Absatzgebiete nur minimal überschneiden, ergeben sich nach

Christaller gewisse Distanzen zwischen verschiedenen Orten des Güterangebots. Die Orte selbst, ausgezeichnet durch einen Bedeutungsüberschuss im Vergleich zur Umgebung, nennt er *zentrale Orte*.

Da jedoch verschiedene Güter mit verschiedener Frequenz konsumiert werden – beispielsweise tägliche bis wöchentliche Einkäufe von Lebensmitteln, und ein monatlicher Einkauf von Bekleidung oder Möbeln – entstehen verschiedene Ebenen von zentralen Orten. Die Ebene höchster Ordnung bietet die größte Angebotsbreite von Gütern. Darin sind eben auch jene Güter enthalten, die selten konsumiert werden. Daher benötigen zentrale Orte dieser Ebene das größte Absatzgebiet (siehe Abbildung 3.3, „A-Ebene“). Bei der mittleren und unteren Ebene verkleinert sich das Angebot auf häufiger frequentierte Güter. Somit können zentrale Orte dieser Ebenen näher beieinander liegen (Abbildung 3.3, „B und C-Ebene“).

Christaller erarbeitete sein System der zentralen Orte auf einer regionalen Skala. Ein zentraler Ort verfügt damit über Einrichtungen, deren Aufgabe nicht nur die Versorgung der eigenen Bewohner ist, sondern auch die der Bewohner in den umgebenden Gebieten. Dieses Muster ist auch auf innerstädtische Zentrensysteme anwendbar. In der Stadt lassen sich die Zentren als Orte innerstädtischer Konzentration von Dienstleistungen für ein räumlich begrenztes Marktgebiet identifizieren. Dabei ist es möglich, den Zentren eine Bedeutungsebene zuzuweisen. Die einfachste Einteilung ist die Identifikation eines Hauptzentrums und verschiedener Subzentren. In Agglomerationen oder Metropolregionen können jedoch auch zwei oder mehrere Hauptzentren entstehen. Dies spiegelt zum Beispiel die Struktur des Ruhrgebiets wieder.

Christaller verwendete in seiner Theorie folgende Annahmen, die auch im soziodynamischen Stadtmodell und als Anfangsbedingung der Simulationen Verwendung finden:

- Die Verteilung der Einkommen, der Bevölkerungszahlen und die Infrastruktur sind räumlich homogen. Daraus folgt, dass die Einzugsgebiete eine kreisförmige Form haben und sich überschneiden (siehe Abbildung 3.3).
- Jeder Mensch verhält sich als *homo oeconomicus*. Dieser handelt wirtschaftlich völlig rational und hat vollständige Information des Erfolgs seiner Handlungen und der Handlungsalternativen [21]. Unter rationalem Handeln wird die Gewinnmaximierung der Anbieter von Dienstleistungen verstanden, dagegen versuchen Konsumenten den Bedarf mit minimalen Geldmitteln zu decken bzw. mit vorhandenem Budget den eigenen Konsum zu maximieren.

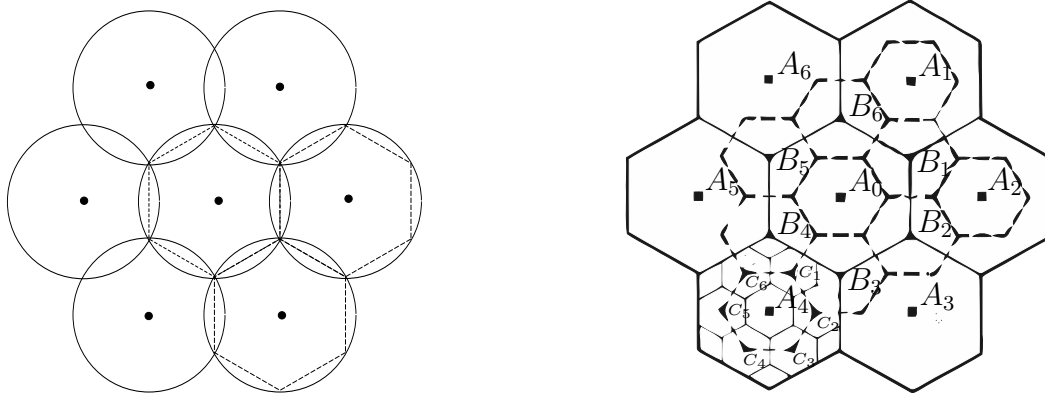


Abbildung 3.3.: Das System der zentralen Orte nach Walter Christaller: A: Zentrale Standorte höchster Ordnung; B: zentrale Standorte mittlerer Ordnung; C: zentrale Standorte unterer Ordnung. Hierbei ist ein A-Ort zugleich auch ein B- und C-Ort [16].

- Die Fahrt-/Transportkosten sind direkt proportional zur Entfernung zwischen zwei Punkten.

3.3. Bodenrentenmodell

Bodenrentenmodelle sind ein Ansatz für die Erklärung verschiedener Nutzungsringe einer Stadt und gehören zum Bereich der Stadtstrukturtheorien. Sie basieren auf der Grundlage, dass Boden frei und zu Marktpreisen veräußert werden kann. Mit steigender Nachfrage steigt somit der Preis aufgrund des begrenzten Angebots. Die Nachfrage entsteht jedoch durch verschiedene Nutzungsformen, welche um den Boden konkurrieren. Diese können beispielsweise der Einzelhandel, die Büronutzung oder die Nutzung durch Wohnungen sein. Die unterschiedlichen Nutzungsformen weisen allein aufgrund ihrer Lage eine Rente auf. Als Rente wird hierbei die Ertragsdifferenz bezeichnet, die bei gleichem Einsatz von Arbeit und Kapital nur aufgrund der Lage entsteht. Der Einzelhandel beispielsweise besitzt die größte Lagerrente, da er auf eine hohe Kundenfrequenz angewiesen ist. Nutzungsarten, welche eine geringere Lagerrente aufweisen, werden somit von anderen Flächennachfragern überboten und aus dem Zentrum an den Stadtrand gedrängt [16].

In der Theorie wird vereinfachend von einer linearen Abnahme der Rente jeweiliger Nutzungsarten ausgegangen. Die lineare Abnahme kann jedoch auch durch Subzentren unterbrochen werden. Die Reihenfolge der Nutzungsarten verhält sich für die Subzen-

tren ähnlich wie bei den Hauptzentren. Eine beispielhafte Veranschaulichung zeigt Abbildung 3.4. Die Entfernung ist radial vom Stadtzentrum aus angetragen. Damit bilden sich konzentrische Kreisringe. Im innersten Ring ① überwiegt die Einzelhandelsnutzung. Allein die zentrale Lage eines Geschäftes, verbunden mit Laufkundschaft und dem Wissen der Konsumenten, dass in „dieser Gegend“ höchstwahrscheinlich ein Angebot für den Wunsch zu finden ist, erhöht die Rente, d.h. den Geschäftsgewinn. Damit bietet sich für den Einzelhandel die größte Rente und es folgt die Bereitschaft, die teuersten Lagepreise zu zahlen. Daran anschließend, in Bereich ②, ist die Büronutzung vorherrschend. Durch die gute Erreichbarkeit ist ein Arbeitsplatzstandort beispielsweise für Arbeitnehmer interessant. Außerdem können Büros platzeffektiv gestaltet werden und benötigen keine so große Fläche pro Person wie Wohnungen. Die Wohnnutzung bietet somit auch die geringste Rente und wird ganz an den Rand in Bereich ③ gedrängt.

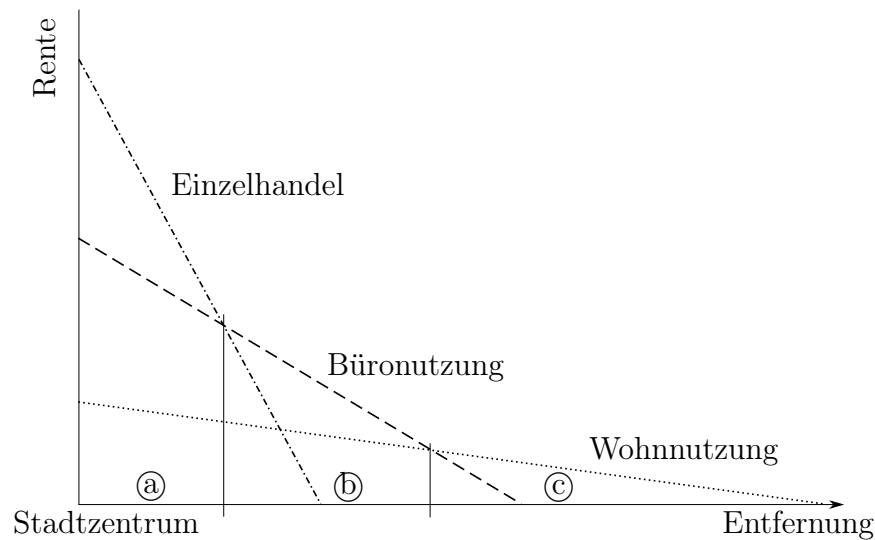


Abbildung 3.4.: Bodenrentenmodell: Durch verschieden hohe Renten entstehen vorherrschende Nutzungsarten ringförmig um das Zentrum [22].

4. Das Stadtmodell

Die in der Geographie entwickelten klassischen Stadtmodelle wie beispielsweise das Bodenrentenmodell haben einen qualitativen, beschreibenden Ansatz. Des Weiteren können sie nur unzureichend und grob zeitliche Entwicklungen beschreiben [16]. Andererseits ist die Beschreibung soziologischer Phänomene mit Hilfe der Synergetik bzw. Soziodynamik auf qualitativer Ebene bereits erfolgreich eingesetzt worden [12; 14]. Städte als verdichtete menschliche Siedlungen sind hoch komplexe Raum-Zeit-Modelle mit einer Verflechtung vieler unterschiedlicher Strukturen. Die Verflechtung besteht sowohl in räumlichen Ebenen als auch zeitlichen Strukturen. Durch die Interaktion vieler Individuen entstehen Rückkopplungseffekte und damit Eigendynamiken, womit sich eine gewisse Selbstorganisation des Systems nicht absprechen lässt. Diese Argumente sprechen für die Verwendung einer Theorie im Rahmen der Soziodynamik.

Das in diesem Kapitel neu entwickelte Stadtmodell stellt einen Ansatz dar, Stadtstrukturen unter dem Aspekt eines konsumorientierten Verhaltens von Individuen zu simulieren.

4.1. Qualitative Beschreibung des Stadtmodells

Vor der Ausarbeitung quantitativer Details soll das grundlegende Konzept qualitativ umrissen werden.

Das Modell wird unter der Annahme einer konsumorientierten Gesellschaft entworfen. Das bedeutet, dass grundsätzlich jedes Individuum unter Berücksichtigung der makroskopischen Situation bestrebt ist, sich in einen Zustand zu bringen, um den eigenen Konsum zu maximieren. Dies verspricht die höchste Befriedigung und damit den größten Nut-

zen. Für die Simulierung und um die notwendigen Parameter zu begrenzen, wird das vielfältige und komplexe System „Stadt“ auf zwei Arten von Variablen beschränkt:

- **Bewohner:**
Die Bewohner werden als Bevölkerung mit der Bevölkerungsdichte n bezeichnet.
- **Dienstleistungen:**
Der konsumorientierten Bevölkerung wird eine Angebotsseite gegenübergestellt. Für die Konsumbefriedigung dienen im Modell immobile Dienstleistungen mit der Dienstleistungsdichte m .

Ausgehend von der Mikroebene, auf welcher individuelles Verhalten durch Nutzenfunktionen beschrieben wird, soll die makroskopische Struktur einer Stadt, bestehend aus der Bevölkerungs- und der Dienstleistungsverteilung, ermittelt werden.

Daraus ergibt sich die Möglichkeit, die Auswirkung externer Parameter auf die makroskopische Verteilung der Bevölkerung und Dienstleistungen einzuschätzen.

4.1.1. Modellannahmen

Für die Modellierung werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Bevölkerung wird in eine endliche Anzahl von Subpopulationen \mathcal{P}^α eingeteilt. Die Subpopulationen unterscheiden sich in folgenden Parametern, auf deren Bedeutung in der späteren Herleitung noch ausführlicher eingegangen wird:
 - Das individuelle Einkommen Y^α
 - Die spezifischen Transportkosten τ^α
 - Die Wohnfläche F^α
 - Die Häufigkeit von Mobilität h_{ges}^α .
- Es existiert nur eine Art von Dienstleistungen, durch die alle Konsumbedürfnisse der Bevölkerung erfüllt werden.
- Es wird von den Individuen bei jeder Konsumtätigkeit der gleiche Geldbetrag ausgegeben. Die Höhe des Betrags bestimmt sich aus dem für den Konsum verfügbaren

Geld, dividiert durch die Konsumhäufigkeit.

- Der Grund und Boden, auf welchem die Stadt aufgebaut ist, ist homogen und ohne räumliche Präferenzen. Diese Aussage bezieht sich auch auf die Infrastruktur. Durch die Infrastruktur werden keine räumliche Richtung oder Bereiche bevorzugt.
- Die gesamte Bevölkerung wohnt in Wohnungen zur Miete mit einer jeweiligen Wohnfläche F^α , abhängig von der Subpopulation \mathcal{P}^α . Die Mieten passen sich kontinuierlich an. Ein langjähriger Bewohner wird ebenso von Mietänderungen betroffen wie jemand, der eine Wohnung neu bezieht.
- Die Gesamtbevölkerung des Stadtgebiets ist konstant. Es gibt keine Migration über die Grenzen der Stadt. Es wäre mathematisch nicht weiter schwierig, Migration mit einzubeziehen, jedoch kann durch diese Annahme besser gezeigt werden, wann das System einen makroskopisch stationären Zustand erreicht hat.
- Der simulierte Prozess ist ein Markov-Prozess. Die Individuen sparen und investieren nicht.

4.1.2. Modellstruktur

Die Bevölkerung setzt sich aus vielen Individuen zusammen. Ein Individuum erhält ein monatliches Einkommen Y^α , von welchem die Wohn- und Mobilitätskosten abgezogen werden. Die Wohnkosten erhöhen sich, je zentraler ein Individuum wohnt. Zentralität wird hierbei als Nähe zu Ansammlungen von Dienstleistungen verstanden. Die Mobilitätskosten entstehen durch Fahrten zu den Dienstleistungen. Je weiter entfernte Dienstleistungen genutzt werden, desto größer sind die Mobilitätskosten. Das Ziel des Individuums ist nun, die Menge des nach Abzug der Kosten verfügbaren Geldes, im folgenden Konsum C^α genannt, zu maximieren, d.h. seine Kosten zu minimieren. Um dies zu erreichen, steht dem Individuum der Umzug zu einem anderen Wohnort zur Wahl. Die Soziodynamik ist eine probabilistische Theorie. Dadurch können vielfältige, im Modell nicht beachtete Faktoren in den Entscheidungsprozess implizit mit einfließen und somit zu einer freien oder *zufälligen* Entscheidung führen. Trotzdem ist die Entscheidung vieler Individuen im Mittel jedoch der beschriebenen Nutzenmaximierung unterworfen.

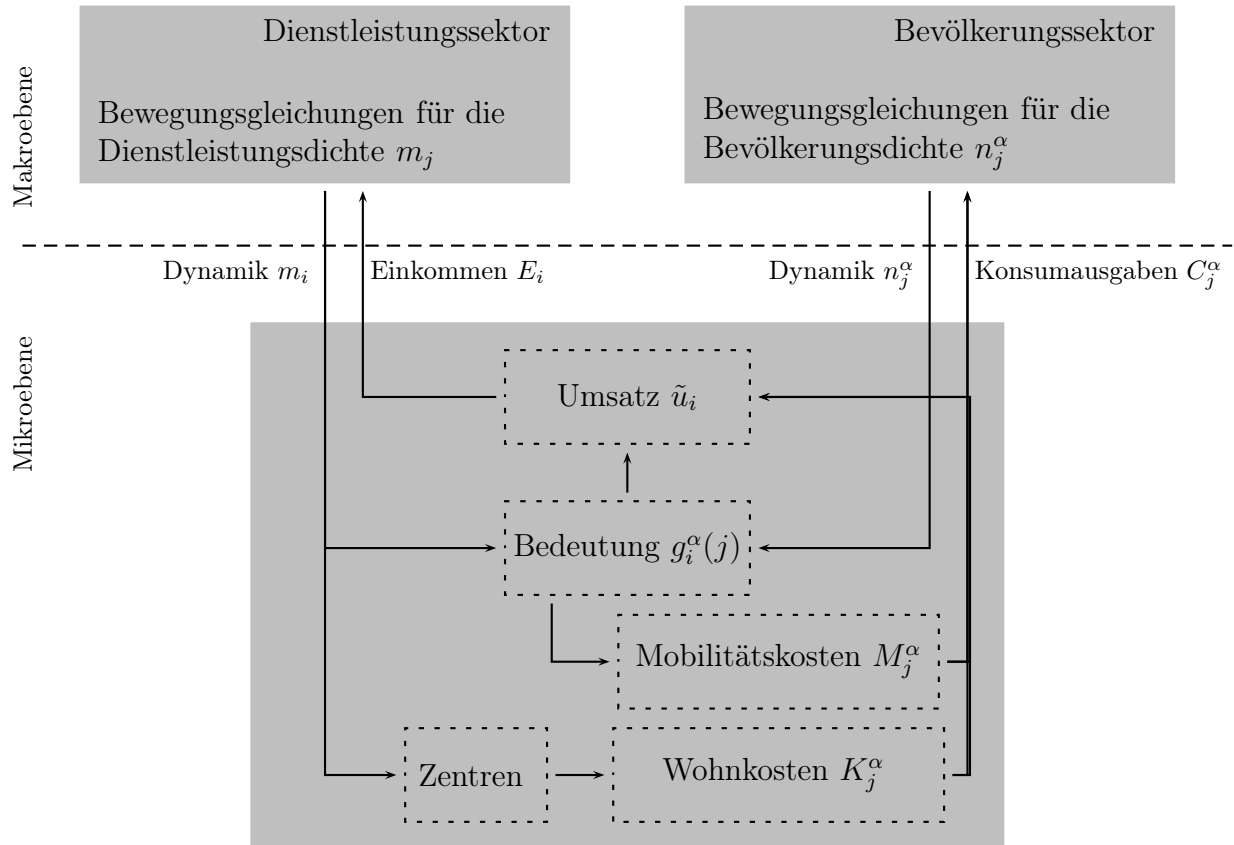


Abbildung 4.1.: Schematischer Aufbau des Stadtmodells: Im oberen Bereich die Makroebene, im unteren die Mikroebene; die Pfeile zeigen den Einfluss einer Größe auf andere Größen an.

Durch den Konsum wird Umsatz erzeugt. Die räumliche Verteilung des Umsatzes findet durch den Faktor $g_j^\alpha(i)$ statt. Der Umsatz und somit auch der durch eine feste Marge erzeugte Gewinn wird lokal zu gleichen Teilen auf die Dienstleistungen verteilt. Damit verringert die Zunahme von Dienstleistungen den individuellen Gewinn, die Abnahme erhöht ihn. Die Zahl der Dienstleistungen passt sich an, bis der Umsatz pro Dienstleistung einen definierten Sättigungswert erreicht hat.

Die bereits erwähnte Bedeutung $g_i^\alpha(j)$ erzeugt die Rückkopplung zwischen der Bevölkerung und den Dienstleistungen (vgl. Abbildung 4.1). Sie bestimmt, wie relevant für den Konsum ein beliebiger Ort \mathbf{x} der Stadt für ein Individuum in \mathbf{x}' ist und steuert, wo die Bewohner die Konsumausgaben tätigen und somit auch, wie groß die Mobilitätskosten der Bewohner sind. Abbildung 4.1 zeigt weiterhin, dass sich aus den Wohn- und Mobilitätskosten die Konsumausgaben eines Individuums berechnen, welche Grundlage für die

Migrationsdynamik zwischen den Teilen der Stadt sind. Die entstehende Verteilung der Bevölkerung beeinflusst als Rückkopplung wiederum den Faktor Bedeutung.

Der lokale Umsatz wird durch die räumliche Verteilung der Konsumausgaben und in Abhängigkeit der Kosten berechnet. Aufgrund der Gewinnmarge wird ein Einkommen für jede Dienstleistung ermittelt, welches die Grundlage für die Dynamik des Dienstleistungssektors ist. Dabei entsteht eine Verteilung von Dienstleistungen, die das Verhalten der Individuen beeinflusst.

4.2. Die Grundstruktur der Stadt

Zur quantitativen Beschreibung einer Stadt gehört die Auswahl eines Gebiets \mathcal{R} , auf welchem die Stadt aufgebaut wird. Dieses befindet sich auf einer Ebene, d.h. im zweidimensionalen Raum. Die zweidimensionale Darstellung erlaubt die intuitive Erkennung von Nachbarschaftsverhältnissen und Entfernungen [23].

4.2.1. Ortsraum

Zweidimensionale Darstellung Mit der Beschränkung auf den zweidimensionalen Raum vernachlässigt man das Relief eines möglichen Untergrundes. Durch einen Hang würde mehr bebaubare Fläche entstehen. Andererseits würde diese durch Flüsse, Felskanten oder andere Naturformen unter Umständen erheblich eingeschränkt.

Die Unterteilung der Ebene kann in allen Formen stattfinden, die eine lückenlose und sich nicht überlappende Abdeckung der Ebene ermöglichen; beispielsweise Sechsecke oder Quadrate. Da die Straßen einer Stadt oftmals ein zumindest näherungsweise rechteckiges Muster erzeugen, erscheint die quadratische Blockform angemessen. Ein quadratischer Block wird im folgenden *Square* genannt. In der zweidimensionalen Darstellung erhält jeder Square die Koordinaten (x_i, y_i) .

Als Grundform einer Stadt ohne Bodenpräferenzen ist eine ringförmige Struktur naheliegend [23]. Es gibt somit keine Auszeichnung einer besonderen Richtung. Damit entstehen unterschiedliche Nutzungsformen allein durch den radialen Abstand vom Stadtzentrum. Einen analogen Aufbau leitet das Bodenrentenmodell aus Kapitel 3.3 her. Durch die Hinzunahme neuer, größerer Ringe kann darauf aufbauend ein Wachstum der Stadt be-

geschrieben werden. Dieses Konzept der geschlossenen Ringe führt bei einer quadratischen Unterteilung der Ebene zu einer rautenförmigen Struktur, wie Abbildung 4.2 zeigt.

Eindimensionale Darstellung Im Gegensatz zur zweidimensionalen Darstellung ist die eindimensionale Bezeichnung der Squares für die numerische Lösung von Vorteil. Hierbei wird jedem Square eine eindeutige Nummer i zugewiesen. Diese Zuweisung ist in Abbildung 4.2 zu sehen und erfolgt vom Zentrumsblock ausgehend ringförmig nach außen beginnend mit 1. Darüber hinaus sind in Abbildung 4.2 die geschlossenen Ringe sichtbar. Das Zentrumssquare 1 liegt in Ring 0, die Squares 2, 3, 4 und 5 in Ring 1, usw. Die Forderung der lückenlosen und sich nicht überlappenden Abdeckung des betrachteten Gebietes \mathcal{R} drückt sich mathematisch in den Bedingungen (4.1) aus.

$$\sum_i \mathcal{R}_i = \mathcal{R} \quad \text{und} \quad \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j = 0 \quad (4.1)$$

Hierbei ist \mathcal{R}_i und \mathcal{R}_j das Gebiet des Squares i bzw. j .

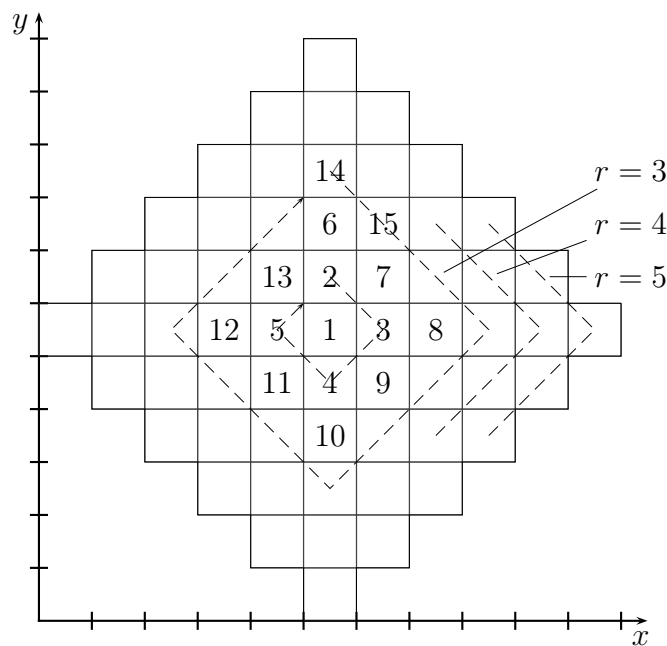


Abbildung 4.2.: Zweidimensionale Grundstruktur mit eindimensionaler Nummerierung der Squares. Als Beispiel ist hier das Gebiet \mathcal{R} mit sechs Ringen $r = 0, \dots, 5$ abgebildet.

4.2.2. Metrik

Um Nachbarschaftsverhältnisse quantitativ zu erfassen und Abstände zu definieren, ist eine Metrik auf den erzeugten Ortsraum anzuwenden. Entfernungen werden im Modell über Wege zurückgelegt, die entlang rechtwinklig angeordneter Straßen verlaufen. Nur diese Straßen bilden erlaubte *Pfade*, diagonale Pfade sind nicht möglich. Dies wird durch die nach der Stadtstruktur von Manhattan benannte *Manhattan-Metrik* ausgedrückt, wobei $x_i, y_i \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\tilde{d}(x_i, y_i, x_j, y_j) := |x_j - x_i| + |y_j - y_i| \in \mathbb{N}_0 \quad (4.2)$$

Als letzter Schritt folgt die Einführung einer räumlichen Skala. Die Skala wird durch die Seitenlänge $l \in \mathbb{R}$ ($[l] = [\text{km}]$) eines Squares i bestimmt. Die Distanz zweier Squares i und j mit den jeweiligen Koordinaten (x_i, y_i) und (x_j, y_j) ist in Gleichung (4.3) gegeben ($[d_{ij}] = [\text{km}]$).

$$d_{ij} = l (|x_j - x_i| + |y_j - y_i|) \quad (4.3)$$

4.2.3. Transformationen

Für die Berechnung selbst als auch für die Veranschaulichung der Ergebnisse sind Transformationen zwischen den beiden Darstellungen nötig. Die Transformation aus der eindimensionalen Darstellung in die zweidimensionale Darstellung $\mathcal{T} : i \rightarrow (x_i, y_i)$ geben die Gleichungen (4.4) und (4.5) an. Die Transformationen sind aus [23] entnommen, wurden jedoch korrigiert, da die ursprünglichen Gleichungen keine korrekten Ergebnisse ergaben.

$$y_i = \text{sgn}(2r_i - p_i + \frac{1}{2})(-2r_i + p_i) + r_i \quad (4.4)$$

$$x_i = \begin{cases} \text{sgn}(2r_i - p_i + \frac{1}{2})(2r_i - |p_i - r_i|) - r_i + 2y_i & \text{für } (2r_i - p_i + 0.5) < 0 \text{ und } y > 0 \\ \text{sgn}(2r_i - p_i + \frac{1}{2})(2r_i - |p_i - r_i|) - r_i & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

Hierbei steht das in Gleichung (4.6) definierte r_i für die Nummer des Ringes, in welchem Square i liegt. p_i in (4.7) ist eine Hilfsgröße.

$$r_i = \left\{ \frac{1}{2} (\{\sqrt{2i-3}\} + 1) \right\} \quad (4.6)$$

$$p_i := i - (2r_i^2 - 2r_i + 2) \quad (4.7)$$

Die Gaußklammer $\{\dots\}$ projiziert auf die nächst niedrigere ganze Zahl (z.B. $\{1.7\} = 1$, $\{-1.3\} = -2$).

Für die Rücktransformation aus der zweidimensionalen Darstellung in die eindimensionale Darstellung $\mathcal{T}^{-1} : (x_i, y_i) \rightarrow i$ definiert sich die Ringnummer $r_{(x_i, y_i)}$ in Gleichung (4.8) direkt aus der Manhattan-Metrik (4.2).

$$r_{(x_i, y_i)} := |x_i| + |y_i| \quad (4.8)$$

Gleichung (4.9) liefert die eindimensionale Darstellung.

$$i = 2r_{(x_i, y_i)}^2 + 2 + \operatorname{sgn}(x_i + \frac{1}{2})(y_i - r_{(x_i, y_i)}) \quad (4.9)$$

Die Transformationen (4.4) und (4.5) gelten für alle $i \neq 1$, (4.9) für alle $(x_i, y_i) \neq (0, 0)$. Besteht die Stadt aus R Ringen, so beinhaltet sie

$$2R^2 + 2R + 1 \quad (4.10)$$

Squares.

4.3. Definition der Variablen

Der erste Schritt der quantitativen Formulierung eines soziodynamischen Modells ist die Festlegung der verwendeten Makrovariablen.

4.3.1. Materielle Variablen - Dienstleistungen

Für die Beschreibung des wirtschaftlichen Aspekts des Stadtmodells dienen die Dienstleistungen D , bzw. die Dienstleistungsdichten m . Da Dienstleistungen in Form von Geschäften, Freizeiteinrichtungen, Straßenständen, etc. von ihren Betreibern eröffnet als auch wieder geschlossen werden können, empfiehlt sich die Behandlung dieser durch materielle Variablen. Es gilt kein Erhaltungssatz.

Es wird nicht unterschieden, welche Art von Dienstleistung verrichtet wird, bzw. ob mit der Dienstleistung ein Erwerb von Gütern zusammenhängt. Damit findet auch keine Unterscheidung verschiedener Arten (z.B. Textilgeschäft, Bäckerei, Theater) statt. Jedoch sind die berücksichtigten Dienstleistungen immobil, d.h. der Kunde muss den Weg zur Dienstleistung zurücklegen. Die kontinuierliche Variable $m(\mathbf{x}, t)$ ist definiert als:

$$m(\mathbf{x}, t) := \text{Anzahl der Dienstleistungen } D \text{ pro } km^2 \text{ an der Position } \mathbf{x} \text{ zur Zeit } t, \\ [m] = [km^{-2}]$$

Die gesamte Zahl der Dienstleistungen $D_{ges}(t)$ im Gebiet \mathcal{R} erfolgt aus der Integration über \mathcal{R} in Gleichung (4.11).

$$D_{ges}(t) = \int_{\mathcal{R}} m(\mathbf{x}, t) d^2x \quad (4.11)$$

Für eine endliche Anzahl an Variablen unterteilt man das Gebiet \mathcal{R} in die in Kapitel 4.2 eingeführten Squares \mathcal{R}_i mit $i \in \{1, 2, \dots, M\}$. M ist die Gesamtzahl der Squares des Stadtgebiets \mathcal{R} . Im folgenden wird ein Square \mathcal{R}_i nur noch durch die eindimensionale Darstellung i bezeichnet. Die Mittelung aller Dienstleistungsdichten $m(\mathbf{x}, t)$ in einem Square i erzeugt den repräsentativen Wert des Squares für die Variable.

$$m_i(t) = \frac{\int_{x \in \mathcal{R}_i} m(\mathbf{x}, t) d^2x}{\int_{x \in \mathcal{R}_i} d^2x} \quad (4.12)$$

Durch Umformung von (4.12) und Einsetzen in (4.11) folgt (4.13).

$$D_{ges}(t) = \sum_{i=1}^M \int_{x \in \mathcal{R}_i} m(\mathbf{x}, t) d^2x = \sum_{i=1}^M m_i(t) l^2 \quad (4.13)$$

Hierbei drückt l die Seitenlänge eines Squares aus. Die Summe der Dienstleistungen gibt Auskunft über die gesamte Konsumkraft der Stadtbevölkerung.

Die materielle Konfiguration des Stadtmodells (Gleichung (4.14)) besteht nun aus den räumlich diskreten Dienstleistungsdichten m_i , wobei der Index i den Square bezeichnet und die Zeit t nicht mehr notiert wird.

$$\mathbf{m} = \{m_1, \dots, m_i, \dots, m_M\} \quad (4.14)$$

4.3.2. Personelle Variablen - Bevölkerung

Dem geographischen Stadtbegriff nach hat eine Stadt eine „differenzierte innere sozial-räumliche Gliederung“ ([16] S. 27). Diese Heterogenität einer Stadtbevölkerung ist somit nicht in einfache und klar abgegrenzte Kategorien zu unterteilen. Daher wird eine Einteilung der Stadtbevölkerung in feste Subpopulationen immer eine Auslegungssache sein. Andererseits ist diese Untergliederung für die Modellierung unabdingbar, um eine endliche Anzahl an Kategorien zu erreichen. Im hier entwickelten Modell besteht die Bevölkerung aus P Subpopulationen. Genauere Spezifikationen finden in den einzelnen Szenarien statt. Die Bevölkerung wird analog zu den Dienstleistungen als Dichte beschrieben, welche folgendermaßen definiert ist:

$$n^\alpha(\mathbf{x}, t) = \text{Anzahl der Individuen } I^\alpha \text{ der Subpopulation } \mathcal{P}^\alpha \text{ pro km}^2 \text{ mit } \alpha = 1, 2, \dots, A \text{ bei Position } \mathbf{x} \text{ zur Zeit } t, [n^\alpha] = [km^{-2}]$$

Analog dem Vorgehen bei den materiellen Variablen erhält man durch die Einführung der Squares im Gebiet \mathcal{R} und der Mittelung (4.15) eine endliche Zahl von personellen Variablen.

$$n_i^\alpha(t) = \frac{\int_{x \in \mathcal{R}_i} n^\alpha(\mathbf{x}, t) d^2x}{\int_{x \in \mathcal{R}_i} d^2x} \quad (4.15)$$

$n_i^\alpha(t)$ ist somit die Dichte der Individuen der Subpopulation \mathcal{P}^α in Square i zum Zeitpunkt t . Für die Aggregation zur Gesamtbevölkerung $N(t)$ ist mit Hilfe von (4.15) der Übergang von der Integration zur Summe möglich.

$$N(t) = \int_{\mathcal{R}} \sum_{\alpha=1}^A n^\alpha(\mathbf{x}, t) d^2x = \sum_{i=1}^M \int_{x \in \mathcal{R}_i} \sum_{\alpha=1}^A n^\alpha(\mathbf{x}, t) d^2x = \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha=1}^A n_i^\alpha(t) l^2 \quad (4.16)$$

Bei der Vernachlässigung von Geburts- und Todesprozessen ist die Gesamtzahl der Bevölkerung $N(t)$ zeitlich konstant. Außerdem sind keine Übergänge zwischen den einzelnen Subpopulationen vorgesehen. d.h. es gilt die Erhaltung der Populationsbevölkerung N^α für jede Subpopulation.

$$N^\alpha = \sum_{i=1}^M n_i^\alpha(t) l^2 = \text{const.} \quad \forall \alpha \in \{1, \dots, P\} \quad (4.17)$$

Die Soziokonfiguration des Stadtmodells (Gleichung (4.18)) besteht nun aus den räumlich diskreten Bevölkerungsdichten n_i^α .

$$\mathbf{n} = \{n_1^1, \dots, n_M^1; \dots; n_1^\alpha, \dots, n_i^\alpha, \dots, n_M^\alpha; \dots; n_1^P, \dots, n_M^P\} \quad (4.18)$$

M ist die Anzahl der Squares in \mathcal{R} . Im Folgenden wird die Abhängigkeit von der Zeit t nicht mehr notiert.

4.4. Quantitative Beschreibung der mikroskopischen Ebene

Das Modell wird in zwei Ebenen behandelt, der mikroskopischen und der makroskopischen Ebene. Die mikroskopische Ebene umfasst alle Terme im unteren Teil der Abbildung 4.1.

4.4.1. Konzept der Bedeutung eines Squares

Die Verteilung der Konsumausgaben ist ein zentraler Prozess des Modells und bildet die Schnittstelle zwischen der Bevölkerungs- und Dienstleistungsentwicklung. Dafür wird die

$$\text{Bedeutung } g_i^\alpha(j)$$

entwickelt. Sie sagt aus, wie wichtig der Square i aus der subjektiven Sicht eines Individuums der Subpopulation \mathcal{P}^α , wohnhaft im Square j ist. Aus der Bedeutung folgt

anschließend die Verteilung der Konsumausgaben. Für die Herleitung der Bedeutung $g_i^\alpha(j)$ wird im ersten Schritt eine objektive Gewichtung \tilde{g}_i aller Squares i der Stadt nach ihrer Dienstleistungsdichte durchgeführt.

$$\tilde{g}_i = \frac{b_1 m_i + b_2 m_i^2}{\sum_{k=1}^M (b_1 m_k + b_2 m_k^2)} \quad (4.19)$$

Die Koeffizienten b_1 ($[b_1] = [km^2]$) und b_2 ($[b_2] = [km^4]$) beeinflussen die Art der Gewichtung. Durch b_2 ist eine über- bzw. unterproportionale Gewichtung von Squares großer Dienstleistungsdichte möglich. Beispielsweise durch die Kombination von Besorgungen (z.b. Einkauf mit Arztbesuch) gewinnen große Dienstleistungsdichten an Wichtigkeit gegenüber den Kleineren [16]. Die daraus entstehende überproportionale wirtschaftliche Gewichtung von Squares größerer Dienstleistungsdichte nennt man „Economies of Scales“. Die Parameter b_1 und b_2 sind normiert, so dass die Summe beider Eins gibt ($b_1 + b_2 = 1$) [9].

In einem zweiten Schritt schließt das Konzept die Subjektivität eines Individuums mit ein. Die Subjektivität ist an die Transportkosten T_{ij}^α gekoppelt, die ein Individuum aus Square j für das Erreichen des Squares i (Ort der möglichen Dienstleistung) ausgibt. Bei dieser subjektiven Bewertung sollen drei Regeln beachtet werden:

1. $g_i^\alpha(i) = \tilde{g}_i$ Für ein Individuum aus Square i der Dienstleistung selbst ist die *Bedeutung* $g_i^\alpha(j)$ maximal und gleich der vollen Gewichtung \tilde{g}_i .
2. $T_{ij}^\alpha \rightarrow \infty \Rightarrow g_i^\alpha(j) \rightarrow 0$ In unendlich weiter Entfernung von Dienstleistungs- und Wohnort nähert sich die *Bedeutung* $g_i^\alpha(j)$ gegen Null.
3. $g_i^\alpha(j) \geq 0$ Die *Bedeutung* eines Squares ist nie negativ.

Der in Gleichung (4.20) gewählte Ansatz geht von einem $\frac{1}{1+x}$ -Verhalten aus und erfüllt die drei Regeln.

$$g_i^\alpha(j) = \frac{\tilde{g}_i}{1 + b_T T_{ij}^\alpha} \quad (4.20)$$

Der Parameter b_T ($[b_T] = [\text{EUR}^{-1}]$) steuert, wie sensibel die *Bedeutung* $g_i^\alpha(j)$ auf die Transportkosten reagiert. Bei großen Werten der Transportkostensensibilität b_T werden Dienstleistungen in Square i mit größer werdenden Transportkosten sehr schnell unat-

traktiv und erhalten eine geringere Bedeutung. Bei kleinen Werten ist die Sensibilität gegenüber den Kosten nicht besonders ausgeprägt (siehe Abbildung 4.3).

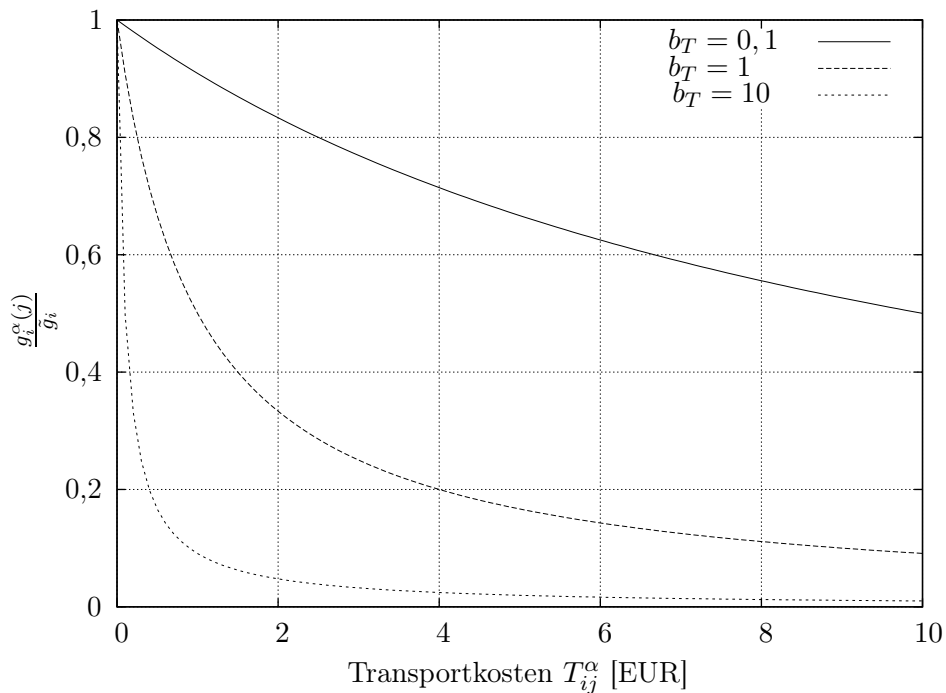


Abbildung 4.3.: Beispiele für die Abhängigkeit der *Bedeutung* $g_i^\alpha(j)$ von der Transportkostensensibilität b_T unter der Annahme gleich verteilter Dienstleistungen

Die Transportkosten T_{ij}^α ergeben sich in Gleichung (4.21) als Produkt der Entfernung d_{ij} zweier Squares i und j und den spezifischen Transportkosten τ^α ($[\tau^\alpha] = [\text{EUR km}^{-1}]$).

$$T_{ij}^\alpha = \tau^\alpha d_{ij} \quad (4.21)$$

Dabei können sich die spezifischen Transportkosten τ^α für verschiedene Subpopulationen \mathcal{P}^α beispielsweise durch die Nutzung verschiedener Transportmittel unterscheiden.

Die Bedeutung bestimmt einerseits die Wichtigkeit bzw. Lage eines Dienstleistungssquares i bezogen auf die Bevölkerung im Square j . Andersherum sagt die Bedeutung jedoch ebenso aus, wie gut die Lage von j bezogen auf das Dienstleistungssquare i ist, da in dem Faktor Bedeutung die kombinierte Information aus der Größe des Dienstleistungssquares i und der Distanz zu ihm steckt. Wenn man nun $g_i^\alpha(j)$ über alle Squares i summiert, in welchen sich Dienstleistungen befinden, erhält man eine quantitative Aussage über die Lage des Wohnsquares j . Der durch Gleichung (4.22) festgelegte Wert L_j

wird *Wohnlage* genannt.

$$L_j^\alpha = \sum_{i=1}^M g_i^\alpha(j) \quad (4.22)$$

Die Wohnlage ist schwer vergleichbar, z.B. mit den Wohnkosten, da sie nicht in EUR gemessen wird. Sie dient im Folgenden als Normierungsfaktor.

4.4.2. Mobilitätskosten

Eine bessere Vergleichbarkeit wird mit den *Mobilitätskosten* M_j^α erreicht. Sie berechnen sich aus den Transportkosten T_{ij}^α und der Häufigkeit, wie oft Wege für die Nutzung von Dienstleistungen zurückgelegt werden.

Dabei wird eine konstante Frequenz der Nutzung von Dienstleistungen für eine Subpopulation \mathcal{P}^α pro Monat unterstellt. Aus der Frequenz ergibt sich die Häufigkeit h_{ges}^α ($[h_{\text{ges}}] = [\text{mth}^{-1}]$) der zurückgelegten Wege. Wie oft nun ein bestimmter Weg im Mittel zwischen dem eigenen Square j der Wohnung und einem beliebigen Square i mit Dienstleistungen zurückgelegt wird, bestimmt sich aus der Bedeutung dieses Squares i für ein Individuum im Square j . Diesen Sachverhalt drückt Gleichung (4.23) aus.

$$h_{ij}^\alpha = \frac{g_i^\alpha(j)}{L_j^\alpha} h_{\text{ges}}^\alpha \quad (4.23)$$

Die Wohnlage L_j^α dient als Normierungsfaktor.

Für die Berechnung der Mobilitätskosten werden die Transportkosten T_{ij}^α mit der Häufigkeit des jeweiligen Weges multipliziert und über alle Squares der Stadt summiert. Der Faktor 2 in Gleichung (4.24) begründet sich aus der Berücksichtigung von Hin- und Rückweg.

$$\begin{aligned} M_j^\alpha &= 2 \sum_i h_{ij}^\alpha T_{ij}^\alpha \\ &= 2 \sum_i \frac{g_i^\alpha(j)}{L_j^\alpha} h_{\text{ges}}^\alpha T_{ij}^\alpha \\ &= 2 \tau^\alpha h_{\text{ges}}^\alpha \sum_i \frac{g_i^\alpha(j)}{L_j^\alpha} d_{ij} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Die Einheit ist $[M_j] = [\text{EUR mth}^{-1}]$.

4.4.3. Wohnkosten

Der Wert des Bodens wird durch die Attraktivität der Gegend bestimmt. Eine höhere Attraktivität bedeutet größere Nachfrage bei begrenztem Angebot und damit steigt der Preis. Die Attraktivität wiederum wird durch verschiedenste Faktoren beeinflusst. Neben der Theorie der Bodenrente (Kapitel 3.3) spezifiziert H. Fassmann zwei weitere Rentenmodelle [24]. Er spricht zum einen von der *Umweltrente*, welche die ökologische Lage beispielsweise an einem See ausdrückt. Zum anderen von der *Imagerente*, welche das soziale Umfeld beschreibt. Nur durch den „guten Ruf“ eines Stadtteiles sind bereits die Mietpreise höher anzusetzen. Durch die Annahme einer homogenen Grundfläche ohne Präferenzen entfällt die Umweltrente. Die Imagerente als auch Faktoren wie Alter des Hauses, Straßenlage, Ausstattung der Wohnung, Nebenkosten, etc. werden im Modell vernachlässigt.

Die Wohnkosten berechnen sich aus der Größe der Wohnung und dem Quadratmeterpreis. Um eine Funktion des Quadratmeterpreises zu erhalten, werden die einzelnen Squares der Stadt in zwei Kategorien, in Zentren und normale Squares, eingeteilt.

Zentrum Im Modell gilt ein Square i mit einer überdurchschnittlichen Dienstleistungsdichte m_i als Zentrum. „Überdurchschnittlich“ wird mit Hilfe des Parameters s definiert. Gleichung (4.25) berechnet hierfür die mittlere Dienstleistungsdichte \bar{m} in \mathcal{R} . M ist die Anzahl der Squares in \mathcal{R} .

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^M m_i}{M} \quad (4.25)$$

Square i ist dann ein Element der Menge der Zentren \mathcal{Z} ($i \in \mathcal{Z}$), wenn gilt:

$$m_i \geq s \bar{m} \quad \text{mit } s > 1 \quad (4.26)$$

Für $s = 1,1$ gilt beispielsweise ein Square mit einer Dienstleistungsdichte größer als 110% der mittleren Dienstleistungsdichte als Zentrum.

Quadratmetermietpreis Der Quadratmetermietpreis p_j ($[p_j] = [EUR\ m^{-2}mth^{-1}]$) errechnet sich aus der Größe der Zentren, als auch aus der Entfernung der Wohnung zu den Zentren. Im einfachsten Fall stimmt Square j der Wohnung mit dem Zentrums-square i überein ($i = j$). Des weiteren wird vorerst die Existenz von nur einem Zentrum angenommen. Daraus folgt Gleichung (4.27):

$$p_j = p_i = k \cdot m_{i|i=j}. \quad (4.27)$$

Hierbei steht der *Mietpreiskoeffizient* k ($[10^6\ EUR\ mth^{-1}]$) als Proportionalitätskonstante. Um den Quadratmetermietpreis für ein beliebiges Square zu ermitteln, muss eine Funktion gefunden werden, welche den Mietpreis bei wachsender Entfernung zu einem Zentrum beschreibt. An die Funktion werden drei Bedingungen gestellt:

1. $p_{d=0} = p_i$ Die Erweiterung muss sich mit dem oben behandelten einfachsten Fall bei einer Distanz $d = 0$ decken.
2. $p_{10} = q p_i$ Der Mietpreis p_i fällt in einem Abstand von 10km auf einen Anteil $q \in [0; 1]$ des Quadratmeterpreises im Zentrum. Dieser Ansatz ähnelt dem geographischen Bodenrentenmodell (siehe Kapitel 3.3).
3. $p_j \geq 0$ Der Mietpreis muss immer positiv sein. Der Boden stellt einen Wert dar und hat somit einen positiven Preis.

Um diese Bedingungen für jeden beliebigen Abstand zwischen Square j und dem Zentrum i zu gewährleisten, wurde die Preisabnahmefunktion $f(d_{ij})$ in (4.28) gewählt:

$$f(d_{ij}) = f(0) \exp \{-w d_{ij}^2\}. \quad (4.28)$$

Sie beschreibt die Abnahme des Mietpreises mit steigender Entfernung zwischen dem Zentrum und dem Wohnort unter Berücksichtigung der drei genannten Bedingungen. Durch die Form erhält man nahe des Wendepunkts einen näherungsweise linearen Abfall, der sich für größere Distanzen asymptotisch gegen Null nähert. Dies ist für zwei verschiedene Parameter in Abbildung 4.4 zu sehen. Die Theorie der Bodenrentenmodelle geht von einer linearen Wertabnahme des Bodens vom Zentrum weg aus. Die Faktoren werden durch die Wahl der eben beschriebenen Randbedingungen

$$f(0) = p_i \quad \text{und} \quad f(10\text{km}) = q p_i$$

bestimmt. Das Einsetzen der Randbedingungen in (4.27) ersetzt die Parameter $f(0)$ und w :

$$\tilde{p}_j(i) = k m_i \exp \left\{ - \left(\frac{-\ln q}{100} \right) d_{ij}^2 \right\} \quad (4.29)$$

Falls mehrere Zentren vorhanden sind, wird die Wohnlage eines Squares in deren Nä-

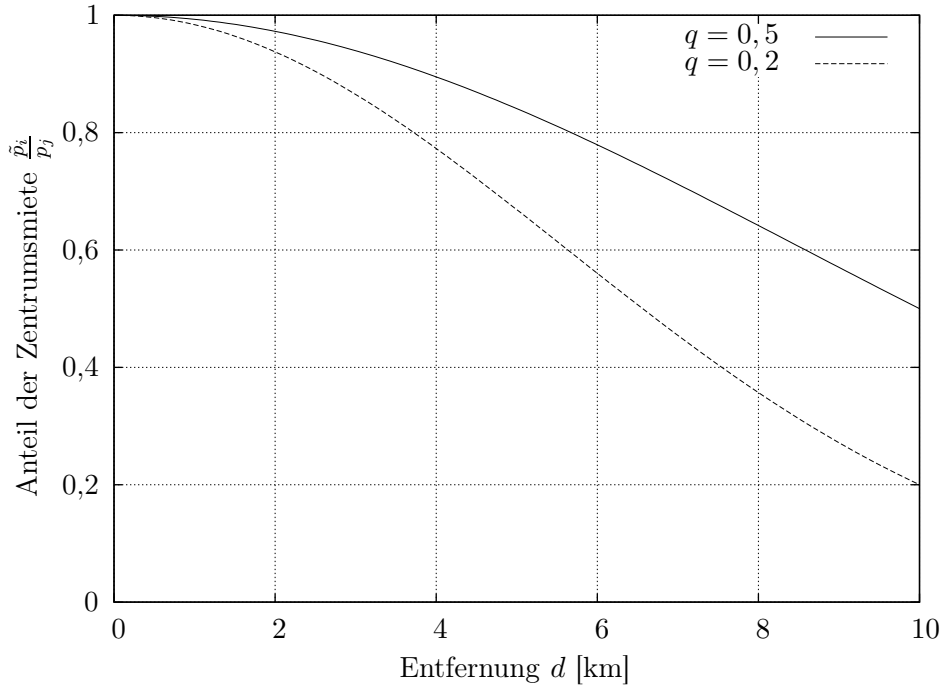


Abbildung 4.4.: Zwei Beispiele für die Exponentialterm aus Gleichung (4.29) mit verschiedenen Anteilen $q = 0,5$ und $q = 0,2$ der Mieten im Abstand 10km von der Zentrumsrente.

he natürlich aufgewertet. Daher aggregiert sich der Quadratmeterpreis p_j in Gleichung (4.30) aus den entfernungsabhängigen einzelnen Preisen $\tilde{p}_j(i)$.

$$p_j = \sum_{i \in \mathcal{Z}} \tilde{p}_j(i) \quad (4.30)$$

Für den Fall, dass nach (4.26) kein Zentrum ermittelt werden kann, da die Verteilung der Dienstleistungen über die gesamte Stadt zu homogen ist, geht man für jedes Square wie in Gleichung (4.27) vor. Man berechnet den Quadratmetermietpreis des beliebigen Squares i direkt proportional zur lokalen Dienstleistungsdichte m_i . Der Proportionalitätsfaktor ist k .

Wohnkosten Die Wohnkosten K_j^α ([EUR]) sind das Produkt aus der Wohnfläche F^α ($[m^2]$) und dem Quadratmeterpreis p_j ($[EUR m^{-2}]$):

$$K_j^\alpha = F^\alpha p_j \quad (4.31)$$

Die Wohnfläche F^α kann für verschiedene Subpopulationen \mathcal{P}^α variieren.

4.4.4. Umsatzdichte eines Squares

Die vorherigen Kapitel zu Mobilitäts- und Wohnkosten bilden die Grundlage für die Bevölkerungsdynamik. Die Dynamik der Dienstleistungen dagegen wird hauptsächlich durch den in einem Square i anfallenden Umsatz, bzw. die anfallende Umsatzdichte \tilde{u}_i getrieben.

Hierfür wird die Annahme verwendet, dass der Bewohner eines beliebigen Squares j das Einkommen Y^α erzielt. Die Konsumausgaben C_j ($[C_j] = [EUR mth^{-1}]$) in Gleichung (4.32) sind die Geldmittel pro Person, welche davon nach Abzug der Wohnkosten K_j^α und der Mobilitätskosten M_j^α noch zu Verfügung stehen.

$$C_j^\alpha = Y^\alpha - K_j^\alpha - M_j^\alpha \quad (4.32)$$

Der Square j besitzt N_j^α Bewohner, deren Zahl sich aus der Fläche l^2 ($[km^2]$) des Squares und der Bevölkerungsdichte n_j^α errechnet. Gleichung (4.33) berechnet die aggregierten Konsumausgaben A_j ($[A_j] = [EUR mth^{-1}]$) des Squares j :

$$A_j^\alpha = C_j^\alpha N_j^\alpha = C_j^\alpha n_j^\alpha l^2. \quad (4.33)$$

Um die Berechnungen unabhängig von der Größe eines Squares zu gestalten, wird im folgenden die aggregierte Konsumausgabendichte a_j^α in $[a_j^\alpha] = [EUR mth^{-1} km^{-2}]$ benutzt:

$$a_j^\alpha = \frac{A_j^\alpha}{l^2} = C_j^\alpha n_j^\alpha. \quad (4.34)$$

Damit verfügt man für alle Squares der Stadt über die Information, wieviel Geld für den Konsum vorhanden ist.

Um den Umsatz, bzw. dessen Dichte \tilde{u} zu berechnen, ist die Verteilung des Geldes wichtig. Für die Verteilung sorgt die bereits hergeleitete Bedeutung $g_i^\alpha(j)$, welche die Wichtigkeit der Dienstleistungen im Square i für ein Individuum im Square j ausdrückt.

Mit der Bedeutung wird die Häufigkeit der Nutzung von Dienstleistungen in i bestimmt. Unter der Annahme, dass bei jeder Nutzung von Dienstleistungen ein konstanter Betrag ausgegeben wird, hängt der Konsum in einem Square j mit der Häufigkeit der Nutzung zusammen. Die Häufigkeit h_{ij}^α wurde bereits in Kapitel 4.4.2 eingeführt. Damit jedes Individuum als Summe genau den ihm zur Verfügung stehenden Betrag C_j^α konsumiert, ist die Normierung mit h_{ges}^α notwendig. Unter Verwendung von Gleichung (4.23), (4.34) und der Summation über alle Subpopulationen \mathcal{P}^α ergibt sich Gleichung (4.35).

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_i &= \sum_{j=1}^M \sum_{\alpha=1}^A \frac{h_{ij}^\alpha}{h_{\text{ges}}^\alpha} a_j^\alpha \\
&= \sum_{j=1}^M \sum_{\alpha=1}^A \frac{g_i^\alpha(j)}{L_j^\alpha} a_j^\alpha \\
&= \sum_{j=1}^M \left\{ \sum_{\alpha=1}^A \frac{g_i^\alpha(j)}{L_j^\alpha} (Y^\alpha - K_j^\alpha - M_j^\alpha) n_j^\alpha \right\} \tag{4.35}
\end{aligned}$$

4.5. Quantitative Beschreibung der makroskopischen Ebene

Aufgrund der bereits beschriebenen Problematik, dass für die Lösung der Mastergleichung bereits die Wahrscheinlichkeitsverteilungen aller Konfigurationen bekannt sein müssen, als auch aus dem Grund, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines sozialen Systems aufgrund fehlender empirischer Versuchsläufe nicht bestimmbar ist, wird eine Lösung auf probabilistischer Ebene nicht betrachtet. Statt dessen findet die makroskopische Beschreibung des Modells auf der deterministischen Ebene statt. Hiefür werden die Quasimittelwertgleichungen aufgestellt; als erstes für die Variablen der Dienstleistungskonfiguration, darauf folgend für die Variablen der Bevölkerungskonfiguration.

4.5.1. Evolutionsgleichungen der Dienstleistungskonfiguration

Die Dienstleistungen werden durch materielle Variablen abgebildet. Die möglichen elementaren Entwicklungsschritte für den Zustand k , ausgehend von der Konfiguration \mathbf{m}

zeigt (4.36).

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{m}_{k\pm} = \{m_1, \dots, (m_k \pm 1), \dots, m_M\} \quad (4.36)$$

Der Ansatz einer mittleren Trajektorie der Konfiguration im Konfigurationsraum führt zu der materiellen Quasimittelwertgleichung $\frac{dm_k(t)}{dt}$ (2.23) mit den Übergangsraten (4.37) und (4.38) für die elementaren Entwicklungsschritte.

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = w_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) - w_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m}; \mathbf{n})$$

$$\begin{aligned} w_{k+}(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) &= \mu_k(\mathbf{m}_{k+}, \mathbf{m}, \boldsymbol{\kappa}) \exp \{u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}_{k+}, \boldsymbol{\kappa}) - u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\kappa})\} \\ &= \mu_k(m_{k+}, m_k, \boldsymbol{\kappa}) \exp \{\Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k+}, m_k, \boldsymbol{\kappa})\} \\ &= w_{k+}(m_{k+}, m_k) \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} w_{k-}(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m}; \mathbf{n}) &= \mu_k(\mathbf{m}_{k-}, \mathbf{m}, \boldsymbol{\kappa}) \exp \{u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}_{k-}, \boldsymbol{\kappa}) - u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\kappa})\} \\ &= \mu_k(m_{k-}, m_k, \boldsymbol{\kappa}) \exp \{\Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k-}, m_k, \boldsymbol{\kappa})\} \\ &= w_{k-}(m_{k-}, m_k) \end{aligned} \quad (4.38)$$

In den Gleichungen (4.37) und (4.38) wurden einige Vereinfachungen angenommen. Dabei gilt $m_{k\pm} = (m_k \pm 1)$. Die Flexibilität oder Geschwindigkeit $\mu_k(m_{k\pm}, m, \boldsymbol{\kappa})$ hängt nur vom betrachteten Zustand k selbst ab. Die Nutzenfunktionen $u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}_{k\pm}, \boldsymbol{\kappa})$ und $u_{\text{Dienstl}}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\kappa})$ sind globaler Art, d.h. sie geben den Nutzen als skalare Größe für die gesamte Konfiguration $\mathbf{m}_{k\pm}$ bzw. \mathbf{m} an. Jedoch unterscheiden sich diese beiden Konfigurationen nur im sich verändernden Zustand k . Dadurch fallen in der Differenz $\Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k\pm}, m_k, \boldsymbol{\kappa})$ alle konstanten Zustände heraus und es bleibt einzig die Abhängigkeit vom Zustand k übrig.

Nutzenfunktion Für die Dienstleistungen wird nun die Form der Nutzenfunktion u spezifiziert. Der Zustand k bezeichnet den Square $k \in \mathcal{R}$.

Weidlich und Haag führten in ihrer Beschreibung räumlicher Bevölkerungsagglomerationen [8] ein Polynom zweiten Grades als Nutzenfunktion ein. Belegt wurde dieser Ansatz durch umfassende empirische Untersuchungen [25]. Dabei findet der Gedanke Verwendung, dass eine bereits existierende Agglomeration in einem Zustand umso attraktiver auf andere Individuen wirkt, je größer sie ist. Genau dieser Gedanke wird im hier entwi-

ckelten Modell auch für die Dienstleistungen unterstellt. Der Nutzen für Dienstleistungen steigt, je mehr andere Dienstleistungen in diesem Gebiet existieren, da durch das Angebot eine Nachfrage erzeugt wird. Der Kunde weiss, dass er mit großer Wahrscheinlichkeit an diesem Ort – auf das Modell bezogen: in diesem Square – das gesuchte Produkt findet. Dies gilt sogar, wenn die Dienstleistungen in Konkurrenz zueinander stehen. Ein Beispiel ist die zu beobachtende Ansammlung von Kaufhäusern in oftmals nur einem Straßenzug.

Um unendliches Wachstum zu vermeiden, gibt es einen gegenläufigen Sättigungsterm. Bei der Agglomeration von Dienstleistungen tritt die Sättigung ein, falls der einzelne Gewinn aus dem Betreiben der Dienstleistung nicht mehr ausreichend ist. Damit lohnt es sich nicht mehr, neue Dienstleistungen zu eröffnen und es tritt ein temporales Gleichgewicht ein, bis sich die äußeren Umstände ändern.

Nach diesen Regeln formuliert sich die Nutzenfunktion (4.39).

$$u_{\text{Dienstl}}(m_k) = \xi (\eta_k m_k + \sigma_k m_k^2 + \delta_k) \quad (4.39)$$

Der Koeffizient ξ bringt eine einstellbare Sensibilität zum Ausdruck. Der erste Summand ist der Agglomerationsterm mit dem Koeffizienten $\eta > 0$, der zweite der Sättigungsterm mit dem Koeffizienten $\sigma < 0$. Der dritte Summand drückt eine Präferenz aus [8].

Unter Vernachlässigung des Präferenzterms folgen direkt die Nutzendifferenzen in Gleichung (4.40) und (4.41).

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k+}, m, \boldsymbol{\kappa}) &= u_{\text{Dienstl}}(m_k + 1, \boldsymbol{\kappa}) - u_{\text{Dienstl}}(m, \boldsymbol{\kappa}) \\ &= \xi (\eta_k + \sigma_k(2m_k + 1)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k-}, m, \boldsymbol{\kappa}) &= u_{\text{Dienstl}}(m_k - 1, \boldsymbol{\kappa}) - u_{\text{Dienstl}}(m, \boldsymbol{\kappa}) \\ &= \xi (-\eta_k - \sigma_k(2m_k - 1)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

Koeffizientenanpassung Die Wahl der Koeffizienten η_k und σ_k wird durch den Sättigungspunkt festgelegt. Die Dynamik von materiellen Variablen bezieht sich zwar nicht explizit auf Entscheidungen eines Individuums [14], es wird in diesem Zusammenhang jedoch unterstellt, dass eine Dienstleistung durch eine Person angeboten wird. Die Dienstleistung lohnt sich somit nur, falls der Gewinn der Dienstleistung E_k , d.h. das Einkommen E_k daraus über einem Mindesteinkommen E_{\min} liegt.

Der Gewinn einer Dienstleistung wird mittels Gleichung (4.42) berechnet.

$$E_k = \frac{U_k}{l^2} \frac{p}{m_k} = \tilde{u}_k \frac{p}{m_k} \quad (4.42)$$

Dabei wird unterstellt, dass alle Dienstleistungen eines Squares den gleichen Umsatz machen. Der Parameter $p \in [0, 1]$ drückt die Gewinnmarge aus. Der Quotient aus Umsatzdichte \tilde{u}_k und Dienstleistungsdichte m_k berechnet den Umsatz pro Dienstleistung. Die optimale Dienstleistungsdichte m_{opt} folgt durch Umstellen der Gleichung (4.42) mit dem Mindesteinkommen E_{min} .

$$m_{\text{opt}} = \frac{\tilde{u}_k p}{E_{\text{min}}} \quad (4.43)$$

Bei m_{opt} existiert ein Gleichgewicht:

$$\left. \frac{dm_k(t)}{dt} \right|_{m_{\text{opt}}} = w_{k+}(m_{k+}, m) - w_{k-}(m_{k-}, m) = 0 \quad (4.44)$$

Durch Einsetzen der Übergangsraten (4.37) und (4.38), als auch der Nutzendifferenzen (4.40) und (4.41) folgt die Parametergleichung (4.45).

$$\eta_k + \sigma_k(2m_{\text{opt}} + 1) = -\eta_k - \sigma_k(2m_{\text{opt}} - 1) \quad (4.45)$$

Aufgelöst bleibt ein Koeffizient unbestimmt. Es wird $\sigma_k = -1$ gesetzt. Einsetzen von Gleichung (4.43) ergibt den *Agglomerationsparameter* (4.46).

$$\eta_k = 2 m_{\text{opt}} = 2 \frac{\tilde{u}_k p}{E_{\text{min}}} \quad (4.46)$$

Somit ist die Nutzenfunktion der Dienstleistungsdichte im Zustand, bzw. Square k

$$u_{\text{Dienstl}}(m_k) = \xi \left(2 \frac{\tilde{u}_k p}{E_{\text{min}}} m_k(t) - m_k^2(t) \right) \quad (4.47)$$

Die für die Quasimittelwertgleichung wichtigen Nutzendifferenzen lauten:

$$\Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k+}, m, \kappa) = \xi \left[2 \frac{\tilde{u}_k p}{E_{\text{min}}} - (2m_k + 1) \right] \quad (4.48)$$

$$\Delta u_{\text{Dienstl}}(m_{k-}, m, \kappa) = \xi \left[-2 \frac{\tilde{u}_k p}{E_{\text{min}}} + (2m_k - 1) \right]. \quad (4.49)$$

4.5.2. Evolutionsgleichungen der Bevölkerungskonfiguration

Die Beschreibung der Bevölkerung geschieht durch personelle Variablen. Mögliche elementare Entwicklungsschritte für den Zustand i , ausgehend von der Konfiguration \mathbf{n} sind (4.50) und (4.51).

$$\mathbf{n}^\alpha \rightarrow \mathbf{n}_{ji}^\alpha = \{n_1^\alpha, \dots, (n_j^\alpha + 1), \dots, (n_i^\alpha - 1), \dots, n_C^\alpha\} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{n}^\alpha \rightarrow \mathbf{n}_{ij}^\alpha = \{n_1^\alpha, \dots, (n_j^\alpha - 1), \dots, (n_i^\alpha + 1), \dots, n_C^\alpha\} \quad (4.51)$$

Dabei kann j jeden Zustand $\in \{1, \dots, M\}$ einnehmen. Analog zu den materiellen Variablen bildet sich die Quasimittelwertgleichung $\frac{dn_i^\alpha(t)}{dt}$ (2.24) mit den Übergangsraten (4.52) und (4.53) der elementaren Entwicklungsschritte.

$$\frac{dn_i^\alpha(t)}{dt} = \sum_j w_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ij}^\alpha, \mathbf{n}) - \sum_j w_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n})$$

Die Übergänge sind zwischen Zustand i und allen weiteren Zuständen $j = 1, \dots, M$ möglich. „Zustand“ i ist wie bei den materiellen Variablen als Synonym für „Wohnen in Square“ i zu verstehen.

$$\begin{aligned} w_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n}) &= n_i^\alpha \nu_{ji}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha, \mathbf{n}) \exp \{u_j^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}^\alpha) - u_i^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n})\} \\ &= n_i^\alpha \nu_{ji}^\alpha(n_{ji}^\alpha, n) \exp \{\Delta_{ji}^\alpha u(n_{ji}^\alpha, n)\} \\ &= w_{ji}^\alpha(n_{ji}^\alpha, n) \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} w_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ij}^\alpha, \mathbf{n}) &= n_j^\alpha \nu_{ij}^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ij}^\alpha, \mathbf{n}) \exp \{u_i^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ij}^\alpha) - u_j^\alpha(\mathbf{m}; \mathbf{n})\} \\ &= n_j^\alpha \nu_{ij}^\alpha(n_{ij}^\alpha, n) \exp \{\Delta_{ij}^\alpha u(n_{ij}^\alpha, n)\} \\ &= w_{ij}^\alpha(n_{ij}^\alpha, n) \end{aligned} \quad (4.53)$$

Die Differenzen der Nutzenfunktionen $\Delta_{ji}^\alpha u(n_{ji}^\alpha, n)$ und $\Delta_{ij}^\alpha u(n_{ij}^\alpha, n)$ sind nur von den beteiligten Zuständen i und j abhängig. ν_{ji}^α und ν_{ij}^α ist die symmetrische Flexibilität. Es gilt $\nu_{ji}^\alpha = \nu_{ij}^\alpha$.

Nutzenfunktion Für die Bevölkerung wird nun die Form der personellen Nutzenfunktion spezifiziert. Hierfür wird angenommen, dass der Nutzen eines Individuums bei stei-

gendem Konsum C_i^α wächst. Nutzenmaximierung bedeutet somit, für so viel Geld wie möglich zu konsumieren. Eine obere Grenze wird jedoch durch das Einkommen Y^α , die Wohnkosten K_i^α , Mobilitätskosten M_i^α und den Grundaussgaben G gesetzt. Das führt zu der Nebenbedingung (4.54), welche auch *budget constraint* genannt wird.

$$Y^\alpha = C_i^\alpha + G + K_i^\alpha + M_i^\alpha \quad (4.54)$$

Der Grundaussgaben G ist für alle Subpopulationen gleich und bestimmt den Mindestbetrag, welcher pro Monat für Konsumzwecke vorhanden sein muss. Damit wird vermieden, dass das gesamte Einkommen für Wohn- und Mobilitätskosten ausgegeben wird.

Die Nutzenfunktion wächst jedoch nicht linear bei steigendem Konsum. Der Grenznutzen $\frac{du(C)}{dC}$ nimmt mit steigendem Konsum ab. Dieses Verhalten zeigt unter anderem die Logarithmusfunktion, welche in Gleichung (4.55) als Nutzenfunktion gewählt wird.

$$u_i^\alpha(n_i^\alpha) = \beta \ln \left(\frac{C_i^\alpha + 1}{Y^\alpha} \right) \quad (4.55)$$

Der Koeffizient β steuert die Sensibilität. Die Addition der Eins im Zähler vermeidet eine Singularität für $C_i^\alpha = 0$. Für ein einheitenunabhängiges Argument der Logarithmusfunktion wird durch das Einkommen Y^α geteilt. Einsetzen der budget constraint (4.54) gibt die Nutzenfunktion in Abhängigkeit der Wohn- und Mobilitätskosten.

$$u_{\text{Bev}}(n_i^\alpha) = \beta \ln \left(\frac{Y^\alpha - G - K_i^\alpha - M_i^\alpha + 1}{Y^\alpha} \right) \quad (4.56)$$

Die für die Quasimittelwertgleichungen wichtigen Differenzen der Nutzenfunktion sind durch die Gleichungen (4.57) und (4.58) gegeben:

$$\Delta_{ji}^\alpha u(n_{ji}^\alpha, n) = \beta \ln \left(\frac{Y^\alpha - G - K_j^\alpha - M_j^\alpha + 1}{Y^\alpha - G - K_i^\alpha - M_i^\alpha + 1} \right) \quad (4.57)$$

$$\Delta_{ij}^\alpha u(n_{ij}^\alpha, n) = \beta \ln \left(\frac{Y^\alpha - G - K_i^\alpha - M_i^\alpha + 1}{Y^\alpha - G - K_j^\alpha - M_j^\alpha + 1} \right). \quad (4.58)$$

5. Numerische Lösung des Differentialgleichungssystems

Die makroskopischen Quasimittelwertgleichungen bilden ein nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem. Eine analytische Lösung der Differentialgleichungen ist eher die Ausnahme als die Regel, eine numerische Lösungsmethode ist daher notwendig. Es wurde für die Simulation der Szenarien der Runge-Kutta-Algorithmus der Ordnung Vier gewählt, welcher ein Standardverfahren für die Lösung von Differentialgleichungen ist [26].

5.1. Funktionsweise des Runge-Kutta-Verfahrens

Das Runge-Kutta-Verfahren zeichnet sich durch die hohe Genauigkeit und den Verzicht auf Iteration aus. Für jeden Schritt mit Schrittweite h sind im Standardverfahren Runge-Kutta-4 jedoch vier Rechnungen notwendig [26].

Die Voraussetzung für das Verfahren ist, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$y' = f(x, y) \tag{5.1}$$

stetig und beschränkt ist und folgender Lipschitz-Bedingung genügt.

$$\|f(x, y) - f(x, \bar{y})\| \leq L\|y - \bar{y}\| \tag{5.2}$$

In einem Integrationsschritt der Länge h werden vier verschiedene Steigungen an drei verschiedenen x -Werten x_0 , $x_0 + \frac{h}{2}$ und $x_0 + h$ berechnet, um damit den Wert $y(x_1 = x_0 + h)$ zu ermitteln. Zu Beginn eines Integrationsschrittes befindet man sich am Punkt (x_0, y_0) .

Das Vorgehen ist grafisch in Abb. 5.1 anhand der Markierungen ① bis ④ veranschaulicht. Der Zielwert jedes Integrationsschritts dient in einem weiterführenden Schritt als Beginn des erneuten Verfahrens.

Im Startpunkt (x_0, y_0) wird die erste Steigung

$$k_1 = f(x_0, y_0) \quad (5.3)$$

berechnet (Abb. 5.1 ①). Entlang der dadurch entstehenden Geraden geht man zur Mitte des Schrittintervalls bei $x_0 + \frac{h}{2}$ (Abb. 5.1- ②) und berechnet dort die zweite Steigung

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right). \quad (5.4)$$

Mit dieser zweiten Steigung folgt man wiederum vom Punkt (x_0, y_0) zur Mitte des Intervalls (Abb. 5.1- ③) und berechnet im neuen Punkt die dritte Steigung

$$k_3 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2\right). \quad (5.5)$$

In der Mitte des Schrittintervalls werden somit zwei verschiedene Steigungen berechnet. Für die vierte und letzte Steigung geht man nun den vollständigen Integrationsschritt h (Abb. 5.1 - ④) zum Punkt $x_0 + h$.

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + hk_3) \quad (5.6)$$

Man verfügt nun über vier verschiedene Steigungen k_1, \dots, k_4 im Intervall $[x_0, x_0 + h]$. Diese werden gewichtet und gemittelt. Die Gewichtungsfaktoren bestimmen sich aus dem Vergleich mit der Taylor-Reihe der wahren Lösung. Das Ziel ist eine Übereinstimmung in möglichst vielen Ordnungen. Die folgende Wahl der Gewichtungsfaktoren berechnet die mittlere Steigung k so, dass eine Übereinstimmung bis zur Ordnung \mathcal{O}^4 mit der Taylor-Reihe besteht:

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.7)$$

Damit folgt für den gesuchten Wert y_1 :

$$y_1 = y_0 + kh = y_0 + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5.8)$$

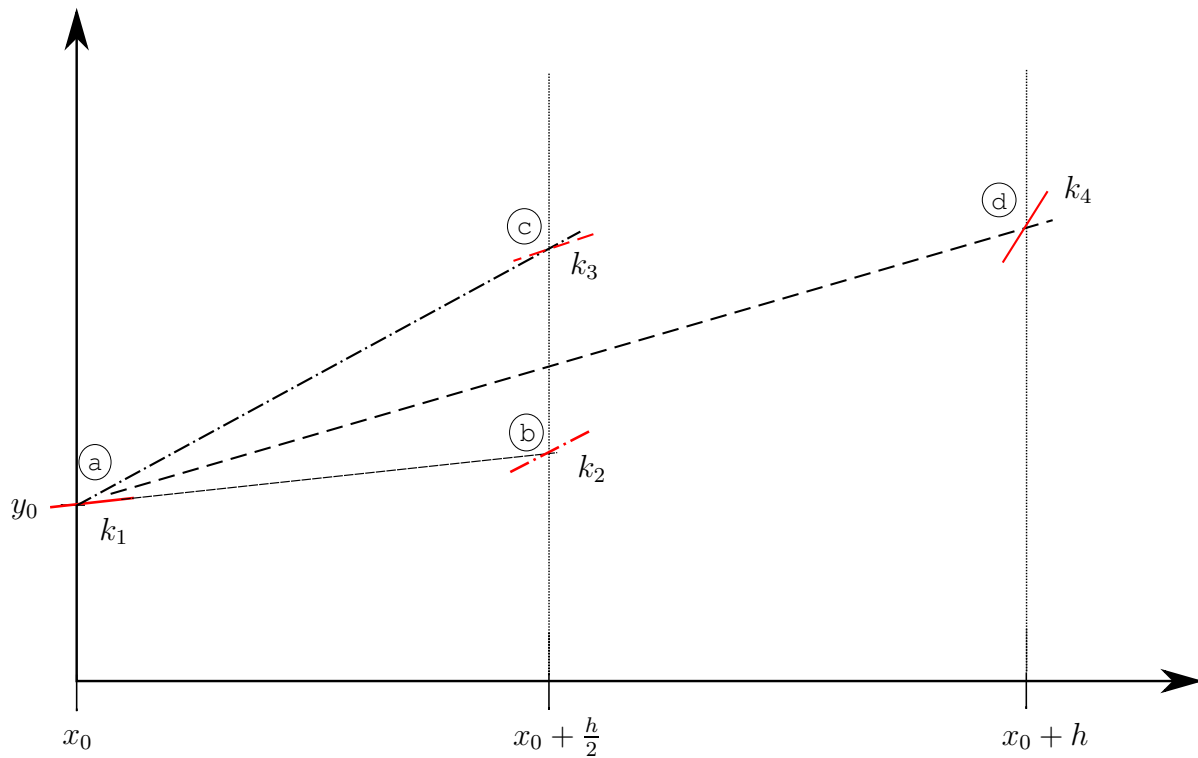


Abbildung 5.1.: Steigungen im Runge-Kutta-Modell.

5.2. Dynamische Bestimmung der Schrittweite

Die Übereinstimmung des Runge-Kutta-4-Verfahrens mit der Taylor-Reihe bis zur vierten Ordnung wird in [26] gezeigt. Der Verfahrensfehler steigt mit der Ordnung h^5 . Das bedeutet gleichzeitig, dass die Genauigkeit der Ergebnisse sehr stark von der Schrittweite abhängt. Kleine Schritte liefern sehr kleine Fehler, bei einer Erhöhung der Schrittweite steigt dieser aber schnell an.

Aus der oben genannten Lipschitz-Bedingung (5.2) für die Differentialgleichung ist eine Abschätzung des Fehlers $\delta y'_n$ der Steigung möglich. Dieser entsteht dadurch, dass aufgrund von Abweichungen in vorhergehenden Schritten im n . Schritt nicht mehr Wert $y_n = y_{\text{real}}$ gilt. y_{real} ist der wahre Wert. Die dann im n . Schritt berechnete Steigung ist allein aus dieser Tatsache bereits mit einem Fehler versehen.

$$|\delta y'_n| = |\delta f_n| \leq K |\delta y_n|. \quad (5.9)$$

Für einen ganzen Schritt der Länge h wird der Fehler mit $|\delta y'_n| h \leq Kh$ abgeschätzt. Kh ist der ungünstigste Fall. Für diesen definiert man die so genannte *Schrittkennzahl*

$$\chi = Kh. \tag{5.10}$$

Als Zahlenwert wird in [26] für das Runge-Kutta-Verfahren $\chi = 0, 1 \dots 0, 2$ angegeben. χ gibt eine Größe an, unterhalb derer alle Terme der Taylor-Reihe einer größeren Ordnung als \mathcal{O}^5 vernachlässigt werden können. Daraus folgt, dass der Fehler wirklich nur mit h^5 wächst. Mit der Bedingung (5.10) ist die automatische Regelung einer sogenannten *natürlichen Schrittweite* h möglich. Je größer K , desto kleiner muss die Schrittweite h sein.

Durch den Vergleich zweier Rechnungen ist eine genäherte Aussage über den Fehler möglich. Die erste Rechnung besitzt eine „feine“ Schrittweite h , die zweite eine „grobe“ Schrittweite $2h$. Dabei ist zu beachten, dass die Schrittkennzahl χ der groben Rechnung bei $0, 3 \dots 0, 4$ liegt, da man bei einem zu großen Fehler die Fehlerglieder höherer Ordnung als h^5 eben nicht mehr vernachlässigen kann. Das Verfahren zweier Berechnungen jedes Runge-Kutta-Schrittes ist zwar aufwendig, lässt sich jedoch gut auf den Fall gekoppelter Differentialgleichungssysteme anwenden.

Die Funktionsweise ist folgende. Der Fehler der groben Rechnung für einen Schritt ist $(2h)^5 = 32h^5$. Dieser Schritt entspricht zwei Schritten der feinen Rechnung und bei dieser einem Fehler von ungefähr $2h^5$.

$$\text{Fehler}(2h) \simeq 16 \cdot \text{Fehler}(h) \tag{5.11}$$

Daraus folgt, dass die Differenz der beiden Verfahren circa das 15 fache der Abweichung δy ist.

$$\delta y \simeq \frac{1}{15}(y_h - y_{2h}) \tag{5.12}$$

Für die automatische Schrittsteuerung definiert man eine Fehlertoleranz ϵ . Zum Beispiel kann dies eine Einheit der letzten beachteten Stelle sein. Die Schrittweite passt sich nach folgendem Muster automatisch an.

- falls $0, 15\epsilon < |\delta y| < 10\epsilon$: Beibehalten von h
- falls $|\delta y| \geq 10\epsilon$: Halbieren von h
- falls $|\delta y| \leq 0, 15\epsilon$: Verdoppeln von h

In den Simulationen wurde eine Toleranz $\epsilon = 0,1$ gewählt.

5.3. Anwendung auf Differentialgleichungssysteme

Obiger Runge-Kutta-Formalismus kann auch mit einem System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung durchgeführt werden. Anschaulich wird dies am System von zwei gekoppelten Gleichungen gezeigt.

$$y' = f(x, y, z) \qquad z' = g(x, y, z)$$

Dabei werden für beide wie in diesem Beispiel oder verallgemeinert für n Variablen die jeweiligen Steigungen $k_i^{(n)}$ mit $i \in \{1..4\}$ berechnet und der gewichtete Mittelwert $k^{(n)}$ gebildet.

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= f(x_0, y_0, z_0) & k_1^{(2)} &= g(x_0, y_0, z_0) \\ k_2^{(1)} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_1^{(2)}\right) & k_2^{(2)} &= g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_1^{(2)}\right) \\ k_3^{(1)} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_2^{(2)}\right) & k_3^{(2)} &= g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_2^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_2^{(2)}\right) \\ k_4^{(1)} &= f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_3^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_3^{(2)}\right) & k_4^{(2)} &= g\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_3^{(1)}, z_0 + \frac{h}{2}k_3^{(2)}\right) \end{aligned}$$

$$k^{(1)} = \frac{1}{6}h(k_1^{(1)} + 2k_2^{(1)} + 2k_3^{(1)} + k_4^{(1)}) \qquad k^{(2)} = \frac{1}{6}h(k_1^{(2)} + 2k_2^{(2)} + 2k_3^{(2)} + k_4^{(2)})$$

Die somit berechneten Werte sind:

$$y_1 = y_0 + k^{(1)} \qquad z_1 = z_0 + k^{(2)}$$

Die Abschätzung des erzeugten Fehler folgt analog zum vorherigen Kapitel:

$$\delta y = \frac{1}{15}(y_h - y_{2h}) \qquad \delta z = \frac{1}{15}(z_h - z_{2h})$$

Für die Schrittsteuerung verwendet man den maximalen Betrag, d.h. $\delta = \text{Max}(|\delta y|, |\delta z|)$. Die Übertragung auf n geschieht nach dem gleichen Prinzip und ist problemlos möglich.

6. Analyse der Szenarien

Bei der Modellierung legt man sich durch die Wahl der Variablen auf einen Teilbereich des Systems fest. Im Stadtmodell der vorliegenden Arbeit wird die Gesellschaft als reine Konsumgesellschaft verstanden, deren Mobilität nur der Befriedigung von Konsumbedürfnissen dient und welche bestrebt ist, den Konsum zu maximieren. Die Beschränkung auf den Konsumsektor schränkt den Vergleich mit realen Städten stark ein.

Die Betrachtung des Teilaspekts Konsumgesellschaft kann jedoch insofern gerechtfertigt werden, da der Konsum einen wesentlichen Einfluss auf gesellschaftliche Strukturen hat. Ein Indiz hierfür ist der Modalsplit des Verkehrsaufkommens. 36% der pro Tag anfallenden Wege entfallen auf den Konsum [27].

Vereinfachende Annahmen wie die radialsymmetrische Abnahme der Mietpreise allein aufgrund einer erhöhten Entfernung zu einem Zentrum schränken die Realitätsnähe ein, sind aber unerlässlich, um die Zahl der Freiheitsgrade überschaubar zu halten. Die Ergebnisse des Modells beschreiben die Wirklichkeit nur unvollkommen. Grundsätzliche Stadtphänomene wie beispielsweise Suburbanisierung, hoher Flächenverbrauch oder eine kompakte Stadt mit hoher Wohndichte können aber bereits mit diesem einfachen Modell reproduziert werden.

6.1. Skalare für die Beschreibung der Struktur

In den Szenarien werden die Bevölkerungsdichte n_i^α für jedes Square i und Subpopulation \mathcal{P}^α als auch die Dienstleistungsdichte m_i für jedes Square berechnet. Die Verteilung der Dichten wird als *Struktur* bezeichnet. Um die Dichteverteilung bzw. Struktur besser analysieren und quantifizieren zu können, werden Skalare definiert. M ist die Anzahl der Squares. Die verallgemeinerte *Dichte* x dient als Platzhalter für die Variablen n^α und m .

6.1.1. Verhältnissfaktor

Die Anordnung der Squares in geschlossenen rautenförmigen Ringen und der Verzicht auf räumliche Präferenzen lassen erwarten, dass die Dichten innerhalb eines Ringes ähnlich sind. Damit entsteht eine Analogie zum Bodenrentenmodell (siehe Kapitel 3.3), welches sogenannte Nutzungsringe bildet. Je weiter außen ein Ring r liegt, desto mehr Squares beinhaltet er. Deshalb wird für jeden Ring r eine mittlere Dichte \bar{x}_r gemäß (6.1) berechnet:

$$\bar{x}_r = \frac{\sum_{i \in \mathcal{R}_r} x_i}{\sum_{i \in \mathcal{R}_r} 1} \quad (6.1)$$

\mathcal{R}_r bezeichnet die Menge der Squares i , welche im Ring r liegen.

Der *Verhältnissfaktor* $\Omega_x \in [-1; 1]$ sagt aus, wie die Dichten zwischen inneren Ringen (Innenbereich) und äußeren Ringen (Außenbereich) verteilt sind. Ein Wert nahe 1 drückt eine Konzentration der jeweiligen Variable im Innenbereich des Stadtgebiets aus. Bei einer überwiegenden Konzentration im Außenbereich wird Ω_x negativ. Gleichung (6.2) definiert Ω_x mit den Hilfsfunktionen (6.3) und (6.4).

$$\Omega_x = \frac{Innen(x) - Aussen(x)}{Innen(x) + Aussen(x)} \quad (6.2)$$

$$Innen(x) = \sum_{r=0}^{\frac{R}{2}} \bar{x}_r \quad (6.3)$$

$$Aussen(x) = \sum_{r=\frac{R}{2}}^R \bar{x}_r \quad (6.4)$$

Hierbei steht R für die Anzahl der Ringe, aus denen die Stadt besteht. Abbildung 6.1 gibt drei Dichteverteilungen mit dem zugehörigen Verhältnissfaktoren an.

6.1.2. Dichtefluktuation

Für die Erfassung der Fluktuation wird die auf den Mittelwert normierte Standardabweichung σ_x benutzt. Gleichung (6.5) berechnet die mittlere Dichte \bar{x} . Unter Verwendung

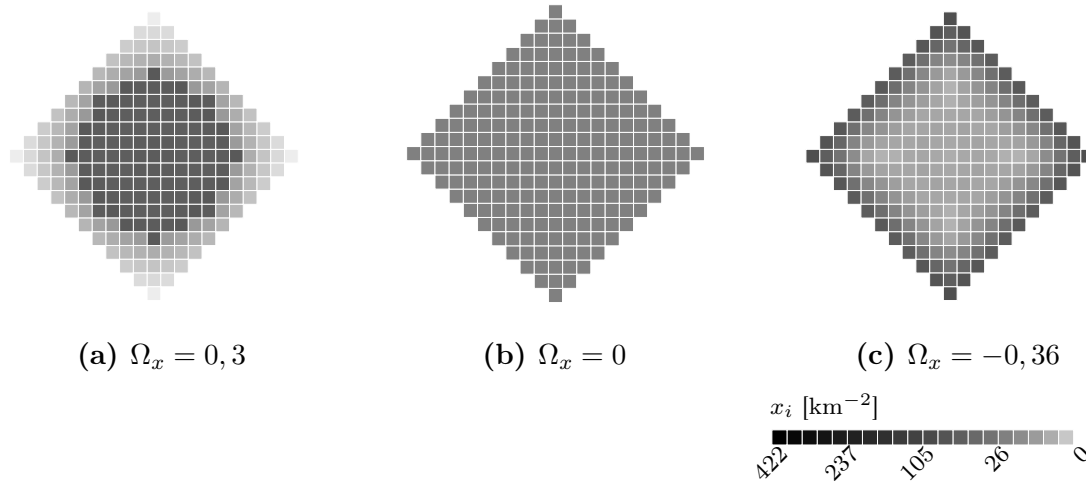


Abbildung 6.1.: Drei exemplarische Strukturen mit dem zugehörigen Verhältnisfaktor Ω_x : (a) Höhere Konzentration im Innenbereich, (b) Gleichverteilung, (c) höhere Konzentration im Außenbereich.

dieser ergibt sich die Standardabweichung (6.6).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M} \quad (6.5)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\bar{x}} \left(\frac{\sum_{i=1}^M (x_i - \bar{x})^2}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.6)$$

Da für die personellen Variablen der Erhaltungssatz gilt, folgt für die mittlere Dichte \bar{n}^α einer beliebiger Subpopulation zu jedem Zeitpunkt: $\bar{n}^\alpha(t) = \text{const} \forall t$. Abbildung 6.2 zeigt zwei Beispiele.

6.2. Parameterwahl

Das modellierte Stadtgebiet besteht aus 10 Ringen, d.h. 221 Squares (siehe Kapitel 4.2). Die *Seitenlänge* l eines Squares beträgt 3 km. Damit ergibt sich eine Diagonale von 63 km und eine Gesamtfläche von 1.989 km^2 für das Stadtgebiet. Die räumliche Auflösung wird hierbei durch zwei Faktoren begrenzt; zum einen durch die Rechenzeit für eine

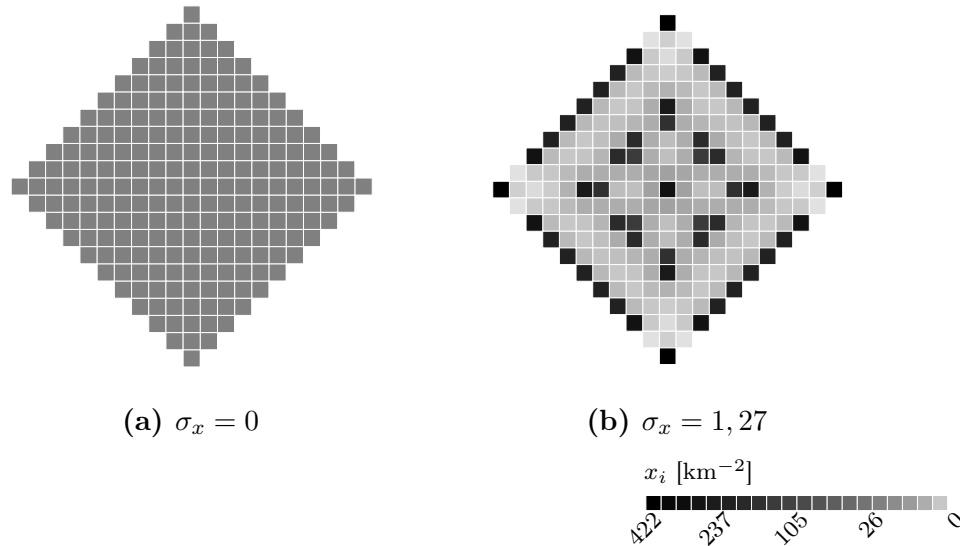


Abbildung 6.2.: Zwei exemplarische Strukturen mit zugehöriger Standardabweichung σ_x .

Simulation und zum anderen dadurch, dass aufgrund des statistischen Ansatzes für das Verhalten von Individuen eine ausreichende Grundgesamtheit pro Square nötig ist. Die Größe ist so gewählt, dass das Modell flächenmäßig einer Metropolregion entspricht. Für einen Größenvergleich mit existierenden Metropolregionen bzw. Städten bietet sich das Ruhrgebiet oder Berlin an. Das Ruhrgebiet hat eine Fläche von 4.334 km² [28], Berlin eine Fläche von 892 km² [29], wobei in Berlin die größte Ausdehnung der Stadt 45 km misst.

Die Szenarien werden mit einer einzigen *Subpopulation* $\mathcal{P}^\alpha = \mathcal{P}$ berechnet und die Bezeichnung α der Subpopulation wird im Folgenden nicht mehr notiert. Eine Subpopulation kann in keinem Fall repräsentativ für die in der Realität äußerst heterogene Gesellschaft sein, macht es jedoch möglich, die Auswirkung von Parametervariationen direkt sichtbar zu machen.

Eine Übersicht über alle Parameter und deren Werte bietet Tabelle 6.1 auf Seite 58.

6.2.1. Fest gewählte Parameter

Gewichtungskoeffizienten: Für die objektive Gewichtung der Squares in Gleichung (4.19) werden die zwei Gewichtungskoeffizienten $b_1 = 1$ für den linearen Term und $b_2 = 0$ für den quadratischen Term gewählt. $b_2 = 0$ bedeutet, dass die Zentren linear zu ihrer

Größe gewichtet werden.

Absolute Weghäufigkeit: Diese Größe ist ein Parameter der Mobilitätskosten in Gleichung (4.24) und drückt aus, wie oft pro Monat konsumiert und somit ein Weg zurückgelegt wird. Auf Konsumwege entfallen laut statistischen Untersuchungen ca. 21% der Personenkilometer und 36% der anfallenden Wege pro Tag [27]. Der gleiche Anteil der Wege pro Tag entfällt auf die Kategorie „Freizeitverhalten“, wobei in der Realität viele dieser Wege über die Stadtgrenzen hinausführen. Falls man von diesem Aspekt absieht und das Freizeitverhalten als eine Art Konsum deutet, fällt auf den Bereich des Konsums ein deutlicher Anteil der zurückgelegten Wege. Dies rechtfertigt die Konzentration des Modells auf diesen Aspekt der Mobilität. Im Modell wird $h_{\text{ges}} = 30\text{mth}^{-1}$ angenommen. Ein Individuum ist somit circa einmal pro Tag mobil, um konsumbezogene Wege zurückzulegen.

Zentrumsparameter: Im Modell wird zwischen Zentren und Nichtzentren unterschieden. Zentren besitzen eine überproportionale Dienstleistungsdichte, und sind damit auch für Individuen aus der Umgebung wichtig. Der Zentrumsparameter s definiert in Gleichung (4.26), ab welcher relativen Dienstleistungsdichte ein Square als Zentrum gilt. In den Szenarien wird ab einer überproportionalen Dichte von 110% des Mittelwertes, d.h. $s = 1,1$ ein Square als Zentrum behandelt.

Mietsparparameter: Der Mietsparparameter q bestimmt in Gleichung (4.29), wie stark der Mietpreis in 10 km Entfernung von einem Zentrum abgefallen ist. In den folgenden Szenarien fällt der Preis in 10 km Entfernung auf 20% ab.

Wohnfläche: Die Wohnfläche, notwendig für die Berechnung der Wohnkosten in Gleichung (4.31), wird für ein Individuum mit $F = 40 \text{ m}^2$ festgelegt. Für 2006 wurde vom Statistischen Bundesamt eine mittlere Wohnfläche von $42,9 \text{ m}^2$ pro Person in Deutschland ermittelt [30]. An dieser Zahl orientiert sich das Modell.

Einkommen: Das durchschnittliche monatliche Haushaltsnettoeinkommen pro Kopf lag 2004 bei 1.363 EUR [31]. Das Einkommen der Bevölkerung wurde in der gleichen Größenordnung gewählt: $Y = 1015 \text{ EUR}$. Das Einkommen abzüglich der Kosten ergibt in Gleichung (4.32) die Konsumausgaben.

Gewinnmarge: Die Gewinnmarge $p = 0,1$ bestimmt in Gleichung (4.42), wie groß der

Gewinn am Umsatz einer Dienstleistung ist. Bei $p = 0,1$ wird 10% des Umsatzes als Gewinn erzielt.

Minimaler Gewinn einer Dienstleistung: Hinter der Dienstleistungsnutzenfunktion steckt die Vorstellung, dass eine Dienstleistung jeweils einem Individuum gehört und dieses sein Einkommen aus dem Gewinn bestreitet. Deshalb muss das aus dem Gewinn erzielte Mindesteinkommen größer oder gleich dem durchschnittlichen Einkommen sein. In den Szenarien sind beide gleich hoch, d.h. $E_{\min} = Y = 1015$ EUR. Mit dieser Angabe berechnet sich in (4.43) die optimale Dienstleistungsdichte.

Sensibilitäten: In der Nutzenfunktion (4.55) der Bevölkerungsdynamik und der Nutzenfunktion (4.39) der Dienstleistungsdynamik kann man mit den Sensibilitäten ξ und β steuern, wie stark sich die Nutzendifferenz zweier Zustände auf die Dynamik auswirkt. Dies ist im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen, womit $\xi = \beta = 1$ gewählt wird.

Flexibilität: Die Flexibilitäten ν und μ bestimmen die Geschwindigkeit der Bevölkerung- und Dienstleistungsdynamiken sowohl relativ zueinander als auch zeitlich absolut. Da die Szenarioanalyse die Form der erzeugten Struktur und nicht so sehr deren zeitlichen Entwicklung beachtet, werden die Flexibilitäten $\mu_{ji}^\alpha = \mu_{ij}^\alpha$ in den Übergangsraten (4.37) und (4.38) der Bevölkerungsdynamik sowie die Flexibilitäten $\nu_{ji}^\alpha = \nu_{ij}^\alpha$ in den Übergangsraten (4.52) und (4.53) der Dienstleistungsdynamik gleich 1 gesetzt.

Grundaussgaben: Um zu verhindern, dass im ungünstigsten Fall das gesamte Einkommen für Miete und Mobilitätskosten ausgegeben wird, muss ein Teil des Einkommens zwangskonsumiert werden. Dieser Teil sind die Grundaussgaben $G = 132$ EUR in Gleichung (4.54). Diese Wahl wurde in Anlehnung an die Studie „Die Höhe der sozialen Mindestsicherung“ [32] bestimmt, in welcher berechnet wurde, wie viel Geld ein Bundesbürger mindestens zum Überleben braucht. 132 EUR sind dabei die untere Grenze.

6.2.2. Variierte Parameter

Es werden in den verschiedenen Szenarien drei Parameter variiert, welche sich auf die Mobilitäts- oder Wohnkosten eines Individuums auswirken. Werte kleiner 0 sind nicht sinnvoll, da sie zu negativen Miet- oder Mobilitätskosten führen würden. Die obere Grenze ist dadurch bestimmt, dass die Gesamtkosten kleiner als das Einkommen sein müssen.

Tabelle 6.1.: Übersicht aller Parameter mit ihrem zugewiesenen Wert oder Wertebereich, geordnet nach Kategorie.

| Name | Symbol | Wertebereich | Einheit |
|--|------------------|--------------|--------------------------|
| Größe und Auflösung des Modells | | | |
| Anzahl der Subpopulationen | | 1 | |
| Square-Seitenlänge | l | 3 | [km] |
| Anzahl der Ringe | R | 10 | |
| Fest gewählte Parameter | | | |
| Sensibilität Dienstleistungen | β | 1 | |
| Lineare Dienstleistungsgewichtung | b_1 | 1 | [km ²] |
| Quadratische Dienstleistungsgewichtung | b_2 | 0 | [km ⁴] |
| Mietsparparameter | q | 0,2 | |
| Minimaler Gewinn einer Dienstleistung | E_{\min} | 1015 | [EUR mth ⁻¹] |
| Wohnfläche | F | 40 | [m ²] |
| Grundaussgaben | G | 132 | [EUR mth ⁻¹] |
| Absolute Weghäufigkeit | h_{ges} | 30 | [mth ⁻¹] |
| Flexibilität Bevölkerung | μ_{ji} | 1 | |
| Flexibilität Dienstleistungen | ν_{ji} | 1 | |
| Gewinnmarge | p | 0,1 | |
| Zentrumsparameter | s | 1,1 | |
| Sensibilität Bevölkerung | ξ | 1 | [km ²] |
| Einkommen | Y | 1015 | [EUR mth ⁻¹] |
| Variierte Parameter | | | |
| Transportkostensensibilität | b_T | 10 - 100 | [EUR ⁻¹] |
| Mietpreiskoeffizient | k | 0,01 - 0,08 | [EUR mth ⁻¹] |
| Spezifische Transportkosten | τ | 0,01 - 0,4 | [EUR km ⁻¹] |

Transportkostensensibilität: Die Transportkostensensibilität b_T wird für die Simulationen in einem Parameterbereich von 10 – 100 gewählt. Der Parameter b_T hat großen Einfluss auf den Faktor Bedeutung $g_i(j)$ in Gleichung (4.20) und bestimmt damit, ob sich die Individuen für den Konsum eher auf einen engen Bereich nahe ihres Wohnor-

tes konzentrieren oder auch weiter entfernte Dienstleistungen beanspruchen. Durch die Variation von b_T besteht die Möglichkeit, verschiedene Verhaltensweisen von Individuen zu berücksichtigen.

Spezifischen Transportkosten: Der Parameter τ repräsentiert die spezifischen Transportkosten und variiert in einem Bereich von $0,01 - 0,4 \text{ EUR km}^{-1}$. Er wird in Gleichung (4.21) das erste Mal verwendet. Mit dem Hintergrund der öffentlichen Diskussion über steigende Energiekosten ist durch die Variation von τ im Rahmen des Modells eine Abschätzung möglich, welche Auswirkungen steigende Energiekosten auf Stadtstrukturen haben können.

Mietpreiskoeffizient: Es sollen verschiedene Szenarien mit unterschiedlichen Wohnkosten berechnet werden. Dies kann erreicht werden durch die Variation des Mietpreiskoeffizienten k als Proportionalitätsfaktor zwischen der Dienstleistungsdichte und dem Mietpreis (siehe Kapitel 4.4.3). Er wird zwischen $k = 0,01 - 0,08$ variiert. Dies entspricht einem Quadratmeterpreis von $1 - 8 \text{ EUR}$ bei Existenz eines Zentrums und einer Dienstleistungsdichte von 100 km^{-2} .

6.2.3. Anfangsbedingungen

Als Anfangsbedingung wurde eine homogene Bevölkerungsverteilung $n_i = n = \text{const} \forall i$ und Dienstleistungsverteilung $m_i = m = \text{const} \forall i$ gewählt. Christaller verwendet diese Annahme bei seiner Theorie der zentralen Orte. Dies wird jedoch in der Literatur kritisiert [33], da es nicht der Realität entspricht. Individuen reagieren durch Migration auf äußere Umstände und daraus bilden sich Inhomogenitäten der Verteilung. Gerade diese erzeugen die Dynamik von Städten und können durch ein dynamisches Modell wie das hier erarbeitete nachgebildet werden.

In Deutschland liegt die durchschnittliche Bevölkerungsdichte bei $230 \text{ Einwohnern pro km}^2$ [34]. Die Mittelung schließt städtische und ländliche Gebiete ein und bildet deshalb einen Bezugspunkt für eine gleichmäßige, anfängliche Verteilung. Deshalb wurde als Anfangsbedingung $n_i(0) = 100$ in dieser Größenordnung gewählt.

Da das Einkommen der Individuen bei ca. 1.000 EUR liegt und für den Erhalt einer Dienstleistung ein Umsatz von ca. 10.000 EUR nötig ist, wird als Anfangsbedingung eine Dienstleistungsdichte $m_i(0) = 10$ gewählt.

6.2.4. Zeitskala

Die zeitliche Einheit, die der Wahl aller Parameter zugrunde liegt, ist ein Monat [mth]. Die Quasimittelwertgleichungen, d.h. die Bewegungsgleichungen für die Makrovariablen sind jedoch unabhängig von den Einheiten der Parameter. Das Modell selbst macht somit keine Aussage über die Zeitskala der Entwicklungen. Daher wäre es notwendig, den zeitlichen Verlauf der Szenarien durch einen empirischen Vergleich zu skalieren. Die Skalierung fände durch Wahl der Flexibilitäten statt. Der Fokus der Auswertung liegt jedoch in der Analyse der aufgrund der Parameterkombination entstandenen Struktur im stationären Zustand. Deshalb wird eine Kontrolle der Migrationsgeschwindigkeit nicht durchgeführt.

In realen Systemen ändern sich die Randbedingungen ständig. Dagegen sind die Parameter der Simulation beliebig, aber fest. Abhängig von den Anfangsbedingungen beobachtet man sehr große Änderungsraten am Anfang, welche mit wachsender Zeit gegen 0 gehen. Sobald die mittlere Änderung $\Delta x(t, t + 10)$ der Variablen innerhalb von 10 Zeitschritten unter 0,1 liegt, wird die Simulation beendet und von dem Erreichen des stationären Zustandes ausgegangen. Der Wert 0,1 liegt zwei bis drei Größenordnungen unter der mittleren Änderung zu Beginn der Simulationen.

6.3. Übersicht der Szenarien

In den berechneten Szenarien S wurden die drei Parameter k , τ und b_T variiert. Die Parameterkonfiguration κ spannt einen dreidimensionalen Parameterraum auf, der in Abbildung 6.3 dargestellt ist. Die dritte Dimension für den Parameter k wird durch die relative Anordnung des Szenarionamens bezüglich dem Kreuz in der $\tau - b_T$ -Ebene ausgedrückt.

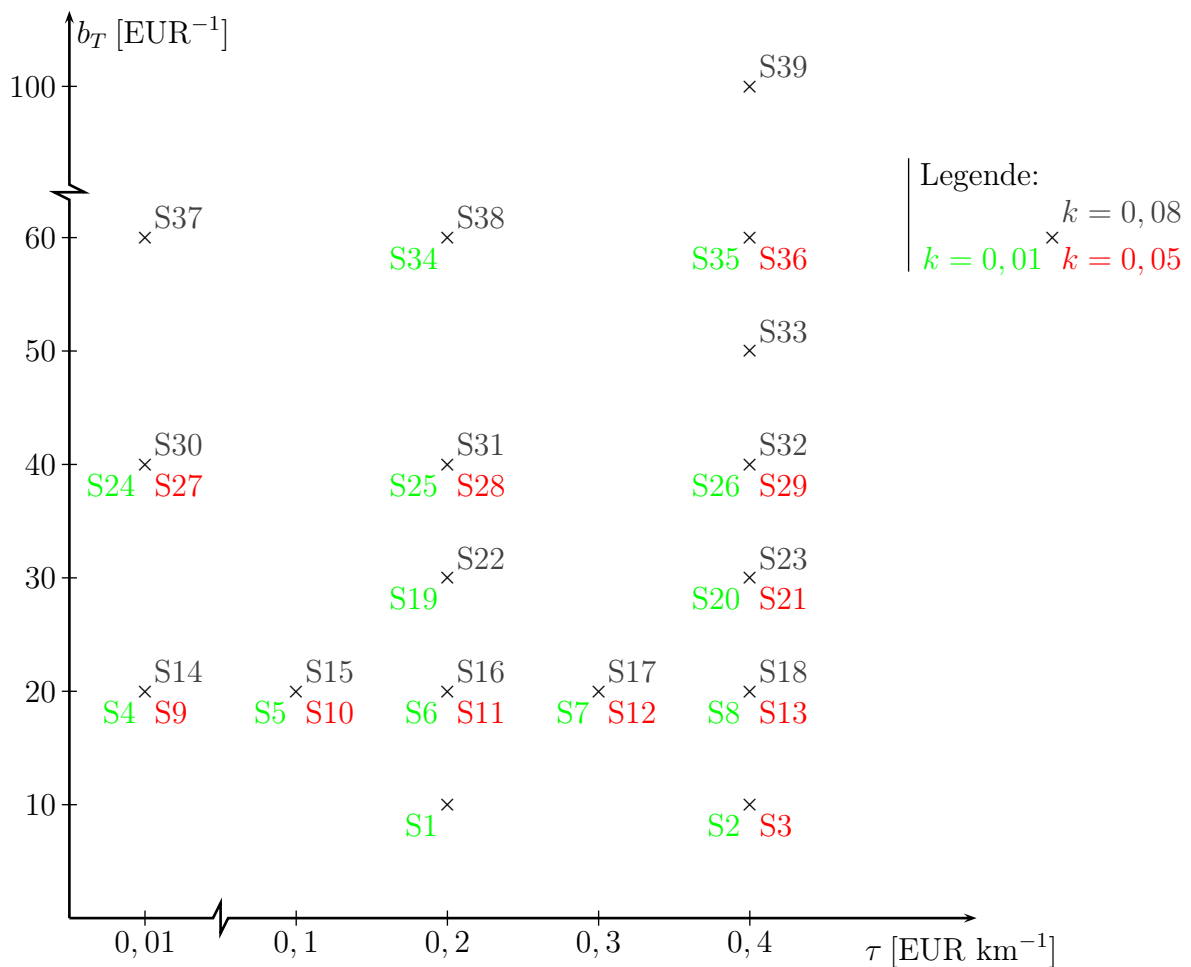


Abbildung 6.3.: Szenarioübersicht im Parameterraum der spezifischen Mobilitätskosten τ , der Transportkostensensibilität b_T und des Mietpreiskoeffizienten k .

6.4. Durchschnittliche Kosten der Stadt

Um einen grundsätzlichen Überblick der Abhängigkeit der Ergebnisse von den jeweiligen Parametern zu erhalten, wird bestimmt, welcher Teil des Einkommens für Wohn- und Mobilitätskosten gemittelt über das Stadtgebiet ausgegeben wird. Dies lässt sich mit Hilfe der mittleren Dienstleistungsdichte \bar{m} bestimmen.

Da die Bewohner ihr gesamtes Einkommen nach Abzug der Kosten für Konsum ausgeben und für die Entstehung der Dienstleistungen im Gleichgewicht ein fester Umsatz notwendig ist, lässt sich aus der Anzahl der Dienstleistungen auf die Konsumausgaben schließen. Bei festem Einkommen folgen daraus direkt die Kosten. Der mittlere Konsum \bar{C} pro Person berechnet sich aus dem aggregierten Konsum C_{ges} geteilt durch die Anzahl der Stadtbewohner N . Der aggregierte Konsum ist gleich der mittleren Zahl von Dienstleistungen \bar{D} multipliziert mit dem Umsatz \tilde{U} pro Dienstleistung. Da das System im Gleichgewicht angenommen wird, ist der Gewinn einer Dienstleistung gleich dem minimalen Gewinn E_{min} . Damit kann Gleichung (4.42) angewendet werden und ergibt Gleichung (6.7):

$$\begin{aligned}\bar{C} &= \frac{C_{\text{ges}}}{N} = \frac{\bar{D} \tilde{U}}{N} \\ &= \frac{\bar{m} F_{\text{Stadt}} \frac{E_{\text{min}}}{p}}{\bar{n} F_{\text{Stadt}}} \\ &= \frac{\bar{m} \frac{E_{\text{min}}}{p}}{\bar{n}}\end{aligned}\quad (6.7)$$

Hierbei bezeichnet F_{Stadt} die gesamte Fläche des Stadtgebiets \mathcal{R} . Das Einkommen Y wird für die Kosten und den Konsum verwendet: $Y = \bar{K} + \bar{M} + \bar{C}$. Gleichung (6.8) berechnet somit den Anteil der Kosten vom verfügbaren Einkommen.

$$\frac{\bar{K} + \bar{M}}{Y} = \frac{Y - \bar{C}}{Y} = \frac{Y - \bar{m} \frac{E_{\text{min}}}{\bar{n} p}}{Y}\quad (6.8)$$

Abbildung 6.4 zeigt die Entwicklung des Verhältnisses der Kosten zum Einkommen für einige ausgewählte Parameterkombinationen. Hierbei wird ersichtlich, dass beispielsweise in 6.4a trotz steigendem τ eine Sättigung des Kostenanteils eintritt. Dies zeigt, dass sich die Stadtstruktur den erhöhten Transportkosten anpasst und sich die Mobilitätskosten abgeschwächt erhöhen. Die Erhöhung der Sensibilität (siehe 6.4b) bedeutet, dass sich

der Konsum der Individuen auf einen enger werdenden Bereich um ihre Wohnungen beschränkt und somit die Mobilitätskosten abnehmen.

Für einzelne Squares kann das Verhältnis der Kosten zum Einkommen stark vom Mittelwert abweichen. Der Maximalwert ist 0,87. Er entsteht durch die Berücksichtigung der Grundaussgaben G . Für grundlegende Bedürfnisse muss der Mindestbetrag G des Einkommens für den Konsum von beispielsweise Lebensmitteln abgezogen werden.

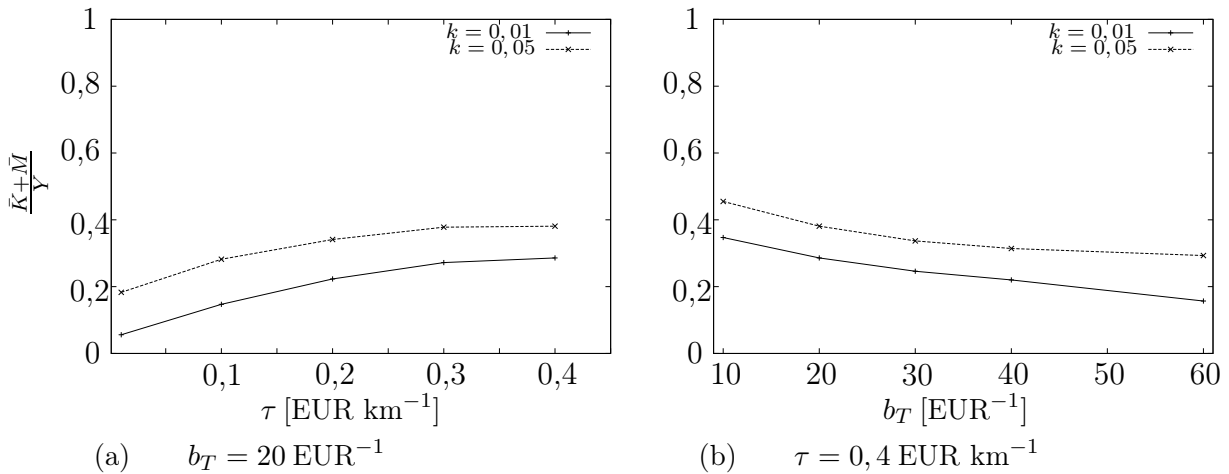


Abbildung 6.4.: Entwicklung des Anteils der mittleren Kosten am verfügbaren Einkommen für (a) steigende spezifische Transportkosten τ und (b) steigende Transportkostensensibilität b_T . In beiden Fällen werden die Verläufe für zwei verschiedene Mietpreiskoeffizienten k angegeben.

6.5. Stadtstruktur in Abhängigkeit der Transportkostensensibilität

Die Transportkostensensibilität b_T hat großen Einfluss auf den Faktor Bedeutung $g_i(j)$ in Gleichung (4.20), welche der Übersichtlichkeit wegen nochmals notiert wird:

$$\text{Bedeutung} \quad g_i(j) = \frac{\tilde{g}_i}{1 + b_T T_{ij}}$$

Durch b_T kann eingestellt werden, ob sich die Individuen für den Konsum eher auf einen engen Bereich nahe ihres Wohnsquares j konzentrieren oder Dienstleistungen in weiter entfernten Squares i beanspruchen.

Damit besitzt b_T eine dominante Position, d.h. eine Erhöhung des Parameters führt unabhängig der Werte der zwei anderen variierten Parameter τ und k zu einer homogenen Verteilung der Bevölkerung und der Dienstleistungen.

Die in Abhängigkeit von b_T entstehende Stadtstruktur wird zuerst mit einigen vereinfachenden Annahmen analytisch untersucht, bevor eine Auswertung der numerisch gelösten Szenarien erfolgt.

6.5.1. Analytische Lösung der Bevölkerungsverteilung

Voraussetzung für die analytische Berechnung einer Bevölkerungsverteilungen ist eine zeitlich konstante und räumlich homogene Dienstleistungsverteilung. Daraus folgen konstante Wohnkosten und die alleinige Abhängigkeit der Bevölkerungsverteilung von den Mobilitätskosten. Es werden für die folgenden drei Fälle die Verteilungen berechnet:

1. $b_T = 0$: Die Bevölkerung verteilt sich glockenförmig, wobei sich das Maximum der Dichte im mittleren Square 1 befindet.
2. $b_T > 0$: Die Abhängigkeit der Mobilitätskosten von der Lage des jeweiligen Squares nimmt ab und geht gegen Null.
3. $b_T \rightarrow \infty$: Die Lage des Squares ist indifferent und damit erreicht die Bevölkerungsdichte eine Gleichverteilung.

Fall 1: Für $b_T = 0$ folgt $g_i(j) = \tilde{g}_i$. Die Gewichtung \tilde{g}_i ist normiert und drückt aus, wie viel Prozent aller Dienstleistungen der Stadt in Square i sind (siehe Gleichung (4.19)). In diesem Fall hängt die Bedeutung $g_i(j)$ nicht von den Transportkosten für die Entfernung zwischen i und j ab, d.h. Konsumausgaben verteilen sich in der gesamten Stadt allein in Abhängigkeit der vorhandenen Dienstleistungsdichte. Damit vereinfachen sich die Mobilitätskosten zu Gleichung (6.9), da für die Wohnlage $L_j = \sum_i \tilde{g}_i = 1$ für alle j gilt.

$$M_j = 2\tau h_{\text{ges}} \sum_i \tilde{g}_i d_{ij} \quad (6.9)$$

Die Annahme einer konstanten Dienstleistungsdichte m_i führt aufgrund der folgenden zwei Punkte zu einer Entkopplung des Differentialgleichungssystems der makroskopi-

schen Bewegungsgleichungen für die Bevölkerungsdichte:

- Für die Bedeutung gilt: $g_i(j) = \tilde{g}_i = \frac{1}{M}$. M ist die Anzahl der Squares in \mathcal{R} . Daraus folgt für die Mobilitätskosten:

$$M_j = 2 \frac{\tau h_{\text{ges}}}{M} \sum_i d_{ij} \quad (6.10)$$

Die Summe $\sum_i d_{ij}$ kann vereinfacht werden. Hierbei muss jedoch das korrekte Auflösen der Beträge beachtet werden, welche durch die Form des Stadtgebietes in Verbindung mit der Manhattan-Metrik entstehen. Die Rechnung ist im Anhang A.1 durchgeführt. Sie führt zu Gleichung (A.3) in Abhängigkeit der Anzahl der Ringe R und des Squares j .

- Aufgrund der Gleichverteilung der Dienstleistungen existieren keine höherwertigen Gebiete bzw. Zentren mehr und die Wohnkosten berechnen sich nur aus der Dienstleistungsdichte im eigenen Square.

$$K_j = Fkm_j = \text{const} \quad \forall j \quad (6.11)$$

Im Gleichgewichtsfall lautet die Quasimittelwertgleichung der Bevölkerungsdichte für einen beliebigen Square j :

$$\frac{dn_j(t)}{dt} = \sum_i w_{ji}(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ji}, \mathbf{n}) - \sum_i w_{ij}(\mathbf{m}; \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{n}) = 0 \quad (6.12)$$

Unter Verwendung der Gleichungen (4.50) und (4.52) bzw. (4.51) und (4.53) folgen für die Übergangsraten w_{ji} und w_{ij} Gleichungen (6.13) und (6.14).

$$w_{ji} = \nu_{ji} n_i \left(\frac{Y - G - K_j - M_j + 1}{Y - G - K_i - M_i + 1} \right)^\beta = \nu_{ji}^\alpha n_i \frac{C_j}{C_i} \quad (6.13)$$

$$w_{ij} = \nu_{ij} n_j \left(\frac{Y - G - K_i - M_i + 1}{Y - G - K_j - M_j + 1} \right)^\beta = \nu_{ij}^\alpha n_j \frac{C_i}{C_j} \quad (6.14)$$

Hierbei gilt $C_{i,j} = (Y - G - K_{i,j} - M_{i,j} + 1)^\beta$. Einsetzen von (6.13) und (6.14) in (6.12) gibt (6.15) für $j \in \{1, \dots, M\}$. Die Flexibilität $\nu_{ji}^\alpha = \nu_{ij}^\alpha = 1$ kürzt sich heraus.

$$\sum_{i=1}^M n_j \frac{C_i}{C_j} = \sum_{i=1}^M n_i \frac{C_j}{C_i} \quad (6.15)$$

Die mittlere Bevölkerungsdichten \bar{n} in $\bar{n} M = \sum_j n_j$ ist konstant und aus den Anfangsbedingungen bekannt. Gleichung (6.15) für $j \in \{1, \dots, M-1\}$ und die Nebenbedingung ergeben das lineare Gleichungssystem (6.16) der Form $\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{b}$.

$$\begin{pmatrix} -\sum_{j \neq 1} \frac{C_j}{C_1} & \frac{C_1}{C_2} & \frac{C_1}{C_3} & \cdots & \frac{C_1}{C_M} \\ \frac{C_2}{C_1} & -\sum_{j \neq 2} \frac{C_j}{C_2} & \frac{C_2}{C_3} & \cdots & \frac{C_2}{C_M} \\ \frac{C_3}{C_1} & \frac{C_3}{C_2} & -\sum_{j \neq 3} \frac{C_j}{C_3} & \cdots & \frac{C_3}{C_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{C_{M-1}}{C_1} & \frac{C_{M-1}}{C_2} & \frac{C_{M-1}}{C_3} & \cdots & \sum_{j \neq (M-1)} \frac{C_j}{C_{M-1}} \frac{C_{M-1}}{C_M} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ \vdots \\ n_{M-1} \\ n_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n_{\text{ges}} \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

Die Matrix \mathbf{A} kann für alle M invertiert werden. Multipliziert mit \mathbf{b} folgt unabhängig von der Anzahl M der Squares die Verteilung (6.17) der Bevölkerungsdichten für $ji = 1, \dots, M$.

$$n_j = n_{\text{ges}} \frac{C_j^2}{\sum_k C_k^2} = n_{\text{ges}} \frac{(Y - G - K_j - M_j + 1)^{2\beta}}{\sum_{k=1}^M (Y - G - K_k - M_k + 1)^{2\beta}} \quad (6.17)$$

Für Abbildung 6.5 wurde die Formel beispielhaft mit einer Sensibilität $\beta = 1$ und einer Squareseitenlänge $l = 1$ ausgerechnet und ein entsprechendes Szenario simuliert. Die analytische und numerische Lösung stimmen überein. Im Anhang A.2 wird die Herleitung der Gleichung (6.17) für $M = 3$ beispielhaft durchgeführt.

Fall 2: Bei nicht verschwindender Transportkostensensibilität $b_T > 0$ ist die in Gleichung (6.10) benutzte Vereinfachung der Mobilitätskosten nicht mehr möglich. Die For-

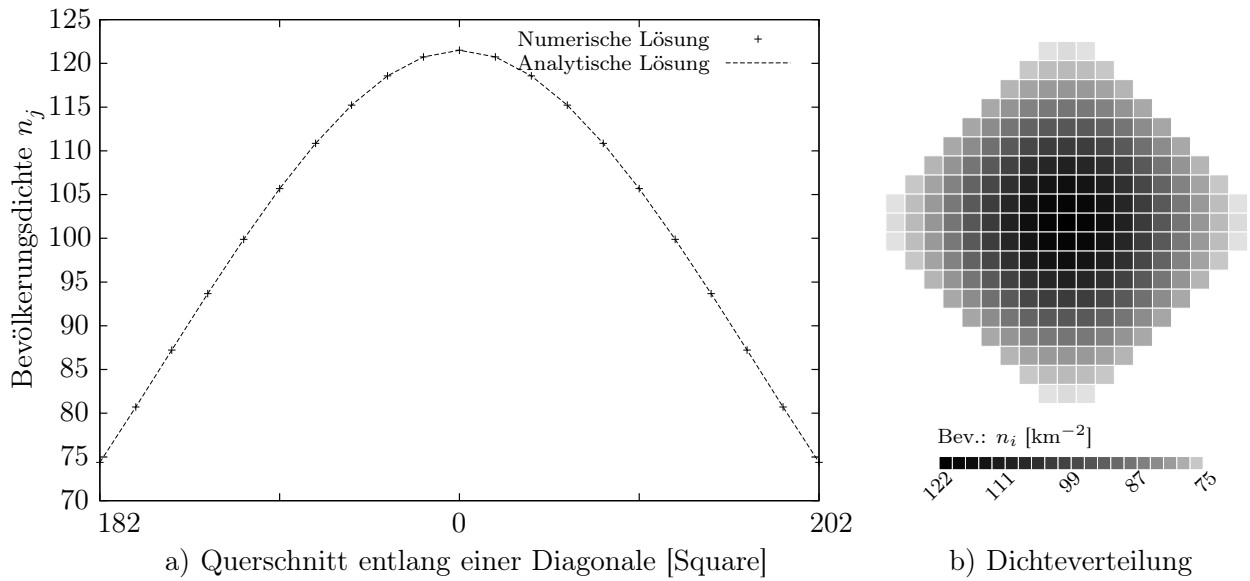


Abbildung 6.5.: Für $b_T = 0$ und $m_i = \text{const}$ stimmen die analytische und die numerische Lösung überein (siehe a). Die Linie der analytischen Lösung dient der Verdeutlichung, die Lösung ist jedoch diskret. Abbildung b zeigt die Dichteverteilung im gesamten Stadtgebiet.

mel der Mobilitätskosten lautet bei weiterhin homogener Dienstleistungsverteilung:

$$M_j = 2 \frac{\tau h_{\text{ges}}}{M} \sum_i \frac{1}{1 + b_T \tau d_{ij}} d_{ij} \quad (6.18)$$

Durch Einsetzen der angenommenen Werte der Parameter kann man die Mobilitätskosten für beliebige Squares j ausrechnen. Abbildung 6.6 zeigt die Abnahme der Mobilitätskosten M_j bei steigender Transportkostensensibilität b_T exemplarisch für zwei Squares. Square 1 ist das mittlere und damit am zentralsten gelegene Square, Square 182 liegt auf der Diagonale der Grundstruktur ganz am Rand und ist somit das am ungünstigsten gelegene. Für beide Squares nähert sich M_j asymptotisch gegen 0.

Fall 3: Im Grenzfall $b_T \rightarrow \infty$ geht die Bedeutung $g_i(j)$ in das Kronecker-Delta δ_{ij} über.

$$g_i(j) = \frac{\tilde{g}_i}{1 + b_T T_{ij}} \xrightarrow{b_T \rightarrow \infty} \delta_{ij} \tilde{g}_i \quad (6.19)$$

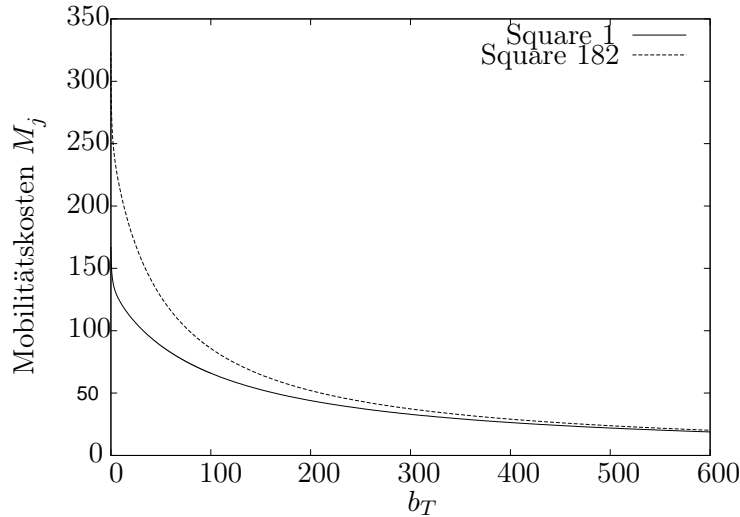


Abbildung 6.6.: Verlauf der Mobilitätskosten als Funktion wachsender Transportkostensensibilität b_T für $\tau = 1$ und $h_{\text{ges}} = 30$. Square 1 liegt in Ring 0, d.h. der Mitte des Stadtgebietes. Square 181 befindet sich in Ring 10 ganz am Rand.

Es gilt $\delta_{ij} = 0 \forall i \neq j$ und $d_{ij} = 0$ für $i = j$, woraus unmittelbar folgt, dass die Mobilitätskosten für alle Squares i gleich Null sind.

$$M_j = 2\tau h_{\text{ges}} \sum_i \frac{\delta_{ij} \tilde{g}_i}{L_i} d_{ij} = 0 \quad (6.20)$$

Wie in **Fall 1** lässt sich das System der Differentialgleichungen für die Bevölkerungsdynamik entkoppeln. Die Nutzenfunktion (4.55) der Bevölkerungsdynamik u_{Bev} ist für alle Squares j konstant.

$$u_{\text{Bev}} = \beta \frac{Y - G - K_j + 1}{Y} = \text{const} \quad \forall j$$

Daraus folgt $\Delta_{ji}^\alpha u(n_{ji}^\alpha, n) = \Delta_{ij}^\alpha u(n_{ij}^\alpha, n) = 0$. Mit den Gleichungen (2.24) und (4.52) bzw. (4.53) und der mittleren Bevölkerungsdichte $\bar{n} = \sum_{i=1}^M \frac{n_i}{M}$ kann das Bestreben zur Gleichverteilung gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{dn_j}{dt} &= \sum_{i=1}^M \nu_{ji} n_i e^0 - \sum_{i=1}^M \nu_{ij} n_j e^0 = \nu_{ij} \left(\sum_{i=1}^M n_i - M n_j \right) \\ &= \nu_{ij} M (\bar{n} - n_j) \begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad \text{für } n_j \begin{cases} \leq \\ \geq \end{cases} \bar{n} \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.5.2. Szenarioanalyse

In den numerisch berechneten Szenarien ist nicht mehr die Einschränkung einer homogenen Dienstleistungsdichte gefordert. Auch ohne diese Einschränkung bestätigen sie die analytische Aussage, dass für $b_T \rightarrow \infty$ die Bevölkerungsverteilung in eine homogene Verteilung konvergiert, d.h. der Bevölkerungsverhältnissfaktor Ω_n gegen Null geht. Abbildung 6.7 zeigt die Bevölkerungsverteilung Ω_n gegen die Transportkostensensibilität b_T für verschiedene $\tau - k$ -Kombinationen aufgetragen. Jeder Punkt der Abbildung entspricht einem Szenario. Die Linien verbinden Szenarien gleicher $\tau - k$ -Kombinationen und dienen der Übersichtlichkeit. Sie stellen keine Interpolation dar. Auch in der Tendenz der Grafik abweichende Entwicklungen wie beispielsweise die Parameterkombination $\tau = 0,4, k = 0,08$ folgen diesem Trend für $b_T > 60$. Hierfür wurde z.B. das Szenario S39 mit $b_T = 100$ gerechnet und ergab einen Verhältnissfaktor $\Omega_n = 0,01 \cong 0$.

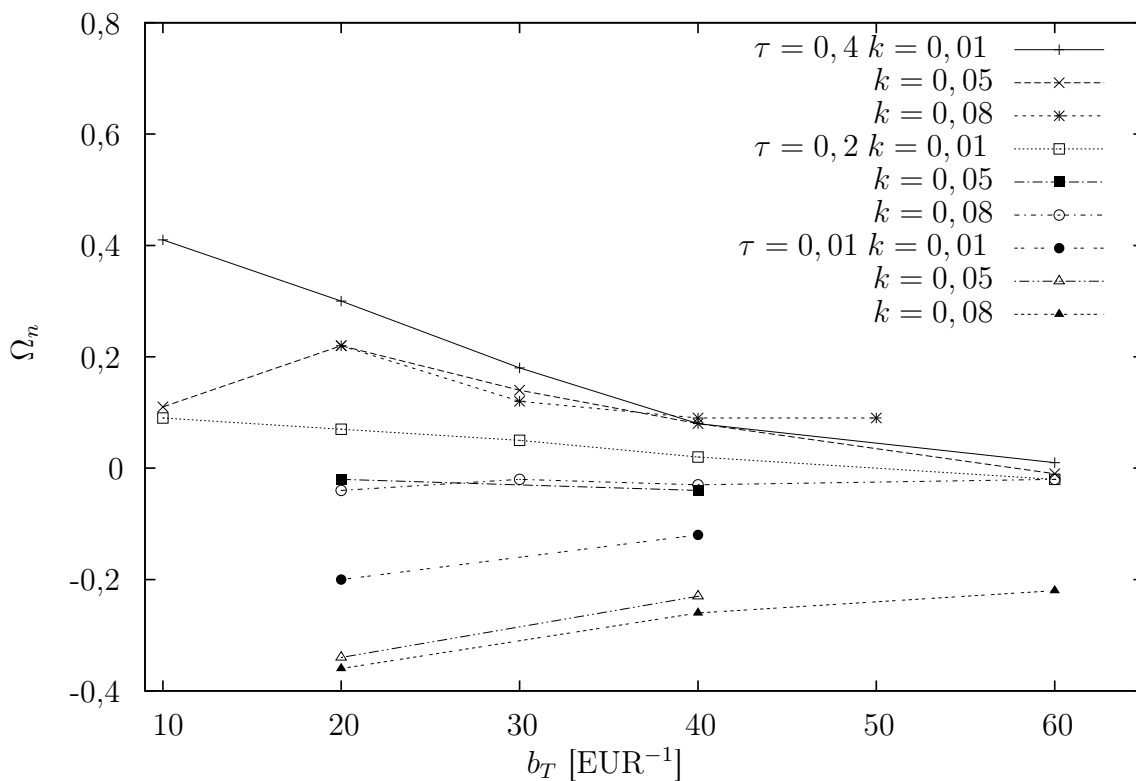


Abbildung 6.7.: Bevölkerungsverhältnissfaktor Ω_n in Abhängigkeit der Transportkostensensibilität b_T : Die Linien dienen der Übersichtlichkeit und stellen keinen Interpolation dar.

Der Verhältnisfaktor Ω_m der Dienstleistungen (ohne Abbildung) entwickelt sich bei steigendem b_T ebenfalls gegen Null. Da für $b_T \rightarrow \infty$ die Bewohner nur wohnungsnah in ihrem Square konsumieren und sich eine homogene Bevölkerungsverteilung einstellt, folgt daraus, dass in jedem Square der gleiche Umsatz getätigt wird und somit eine homogene Dienstleistungsdichte über das gesamte Stadtgebiet entsteht.

Je geringer die Transportkostensensibilität b_T ist, desto deutlicher ist die Ausprägung der Stadtstrukturen. Die folgenden Untersuchungen verwenden die Szenarien mit dem Parameterwert $b_T = 20$, bei welchem die Strukturen deutlich hervortreten.

6.6. Stadtstruktur in Abhängigkeit von Transportkosten und Mietpreisniveau

Der Mietpreiskoeffizient k ist der Proportionalitätsfaktor zur Berechnung des Mietpreises als Funktion der Dienstleistungsdichte in (4.29) und (4.30). Zur Vereinfachung der Beschreibung wird in diesem Kapitel im Zusammenhang mit einem niedrigen $k = 0,01$ von einem „niedrigen Mietpreisniveau“, für $k = 0,08$ von einem „hohen Mietpreisniveau“ gesprochen. Des Weiteren besteht eine direkte Proportionalität zwischen den Transportkosten T und den spezifischen Transportkosten τ in (4.21), weshalb beide Begriffe synonym verwendet werden. Der „Innenbereich“ des Stadtgebiets schließt die Ringe 0 bis 5 ein, der „Außenbereich“ die Ringe 5 bis 10. Ring 5 zählt jeweils zur Hälfte zu beiden Bereichen.

6.6.1. Allgemeine Strukturanalyse

Für den quantitativen Vergleich verschiedener Szenarien mit unterschiedlichen Parameterkombinationen wurden in Kapitel 6.1 die skalaren Größen Verhältnisfaktor Ω und Fluktuation σ definiert. Die Abbildungen 6.8 zeigen diese Größen als Funktion der Transportkosten.

Vergleicht man die Entwicklung des Bevölkerungsverhältnisfaktors Ω_n und des Dienstleistungsverhältnisfaktors Ω_m (siehe Abbildung 6.8a,b), so zeigt sich ein starker Unterschied zwischen Ω_n und Ω_m bei niedrigen Transportkosten. Die negativen Werte für

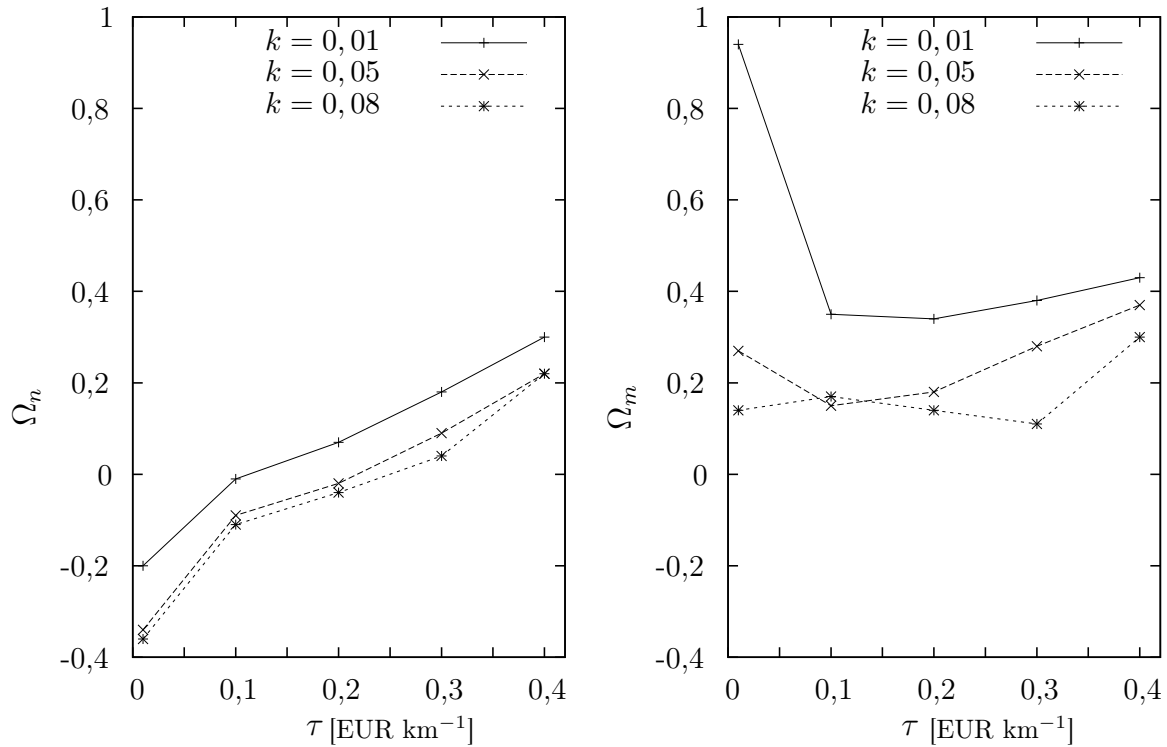
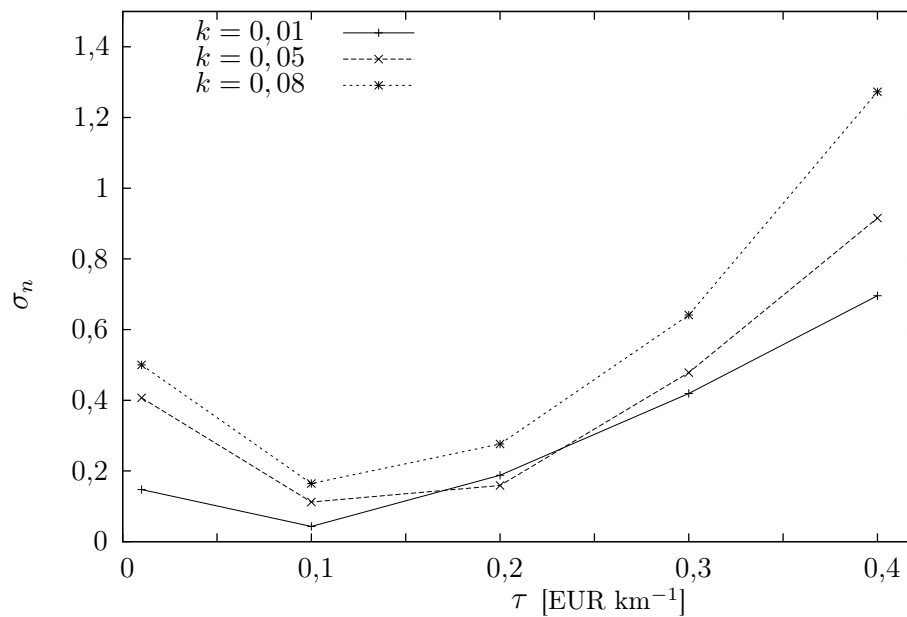
(a) Bevölkerungsverhältnissfaktor Ω_n (b) Dienstleistungsverhältnissfaktor Ω_m (c) Bevölkerungsfluktuation σ_n

Abbildung 6.8.: Entwicklung der Verhältnissfaktoren Ω_n und Ω_m und der Standardabweichung σ_n der Szenarien S4 bis S18 gegen die Transportkosten τ für $b_T = 20$ aufgetragen.

Ω_n zeigen eine überwiegend im Außenbereich wohnende Bevölkerung, wohingegen die Dienstleistungen eine deutliche, in einem Fall sogar eine sehr stark ausgeprägte Konzentration im Innenbereich aufweisen ($\Omega_m > 0$, $\Omega_m(S4) = 0.94$). Beim Vergleich des zentralsten Square mit einem Square am Rand des Stadtgebiets wie in Abbildung 6.6 (Seite 68) wird deutlich, dass die Squares des Innenbereichs bezüglich der Mobilitätskosten günstiger liegen. Die Dienstleistungen siedeln sich somit zentral an, wohingegen die Bevölkerung zum großen Teil in außen gelegenen Vororten ansässig ist. Die dabei entstehenden Strukturen werden detaillierter in den **Fällen 1** und **2** des folgenden Kapitels 6.6.2 behandelt.

Bei steigenden Transportkosten verschwindet die Differenz zwischen Ω_n und Ω_m . Das bedeutet, dass sich Bevölkerung und Dienstleistungen vermischen, wobei der Innenbereich von beiden bevorzugt wird (siehe Abbildung 6.8a,b für $\tau = 0, 4$). Dies ist erklärbar, da aufgrund der hohen Transportkosten bei großer Mobilität sehr hohe Mobilitätskosten erzeugt werden, welche die Bewegungsmöglichkeiten der Individuen einschränken.

Für verschiedene Mietpreisniveaus sind keine großen Unterschiede des Bevölkerungsverhältnissfaktor Ω_n sichtbar. Daraus kann jedoch nicht allgemein auf ähnliche Stadtstrukturen geschlossen werden. Unterschiede zeigen sich für die Bevölkerungsfluktuation σ_n in Abbildung 6.8c, welche im Intervall $\tau = 0, 1 \dots 0, 4$ verschieden stark steigt. Für $k = 0, 08$ beträgt sie das 1,27-fache der durchschnittlichen Bevölkerungsdichte. Die Strukturen, welche die Fluktuationen erzeugen, sind jedoch sehr unterschiedlich und werden in den **Fällen 3** und **4** des folgenden Kapitels 6.6.2 behandelt.

Die steigende Fluktuation σ_n für geringe Transportkosten $\tau = 0, 01$ erklärt sich aus den unterschiedlichen Bevölkerungsdichten von Squares des Innen- und des Außenbereichs. Die Dienstleistungsfluktuation σ_m verhält sich ähnlich der Bevölkerungsfluktuation σ_n .

6.6.2. Auswertung vier verschiedener Strukturkategorien

Die in den Szenarien entstandenen Stadtstrukturen lassen sich in vier Kategorien einteilen, welche sich durch die verschiedenen Kombinationen von hohen bzw. geringen Transportkosten und hohen bzw. niedrigen Mietpreisniveaus unterscheiden. Tabelle 6.2 zeigt eine Übersicht der vier behandelten Fälle.

Tabelle 6.2.: Strukturkategorien mit jeweils einem Beispielszenario

| | Fall 1 | Fall 2 | Fall 3 | Fall 4 |
|-----------------|---------|--------|---------|--------|
| Transportkosten | gering | gering | hoch | hoch |
| Mietpreis | niedrig | hoch | niedrig | hoch |
| Szenario | S4 | S14 | S8 | S18 |
| τ | 0,01 | 0,01 | 0,4 | 0,4 |
| k | 0,01 | 0,08 | 0,01 | 0,08 |
| b_T | 20 | 20 | 20 | 20 |
| Ω_n | -0,2 | -0,36 | 0,3 | 0,22 |
| Ω_m | 0,94 | 0,14 | 0,43 | 0,3 |
| σ_n | 0,14 | 0,50 | 0,70 | 1,27 |

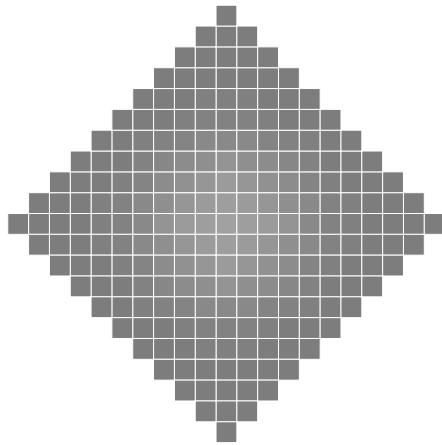
Fall 1: Geringe Transportkosten, niedriges Mietpreinsniveau (Szenario S4)

Für die Kombination von geringen Transportkosten mit einem niedrigen Mietpreinsniveau ergeben sich sehr geringe mittlere Gesamtkosten. Der größte Teil des Einkommens der Individuen steht für den Konsum zur Verfügung. Gezeigt wurde dies bereits in Abbildung 6.4a auf Seite 63. Es gilt $\Omega_m \cong 1$, d.h. fast alle Dienstleistungen befinden sich im Innenbereich der Stadt. Sie konzentrieren sich sogar zum größten Teil im mittleren Square 1. In der Stadtforschung spricht man hierbei vom sogenannten *Central Business District (CBD)* als kommerziellem Zentrum einer Stadt [16]. Ein Merkmal des CBD ist die oft anzutreffende Hochhausbebauung, beispielsweise im amerikanischen Stadtbild [16]. Die Position des CBD im mittleren Square 0, dem geometrischen Zentrum, begründet sich dadurch, dass der Square aufgrund der Geometrie die beste Lage besitzt.

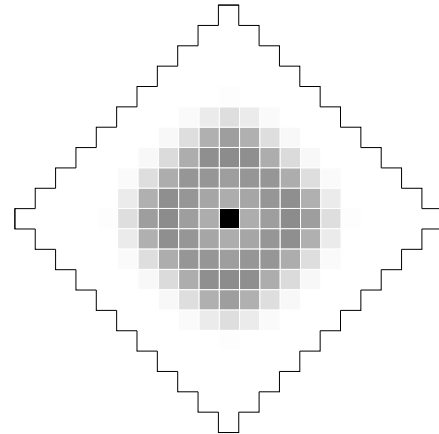
Um den CBD entwickelt sich im Szenario S4 ein ringförmiges Subzentrum (siehe Abbildung 6.9b), dessen Dienstleistungsdichte jedoch deutlich geringer ist. Im Außenbereich des Stadtgebiets existieren keine Dienstleistungen.

Die Bevölkerungsverteilung unterliegt keinen großen Schwankungen. Zum geometrischen Zentrum hin nimmt sie jedoch ab. Der Grund hierfür ist die äußerst hohe Dienstleistungsdichte im CBD. Sie verteuert die Wohnkosten nahe diesem Bereich trotz des geringen Mietpreinsniveaus. Abbildung 6.9a zeigt die höhere Bevölkerungsdichte im Außenbereich durch dunkler gefärbte Squares. Da die Bevölkerung das gesamte Stadtgebiet besie-

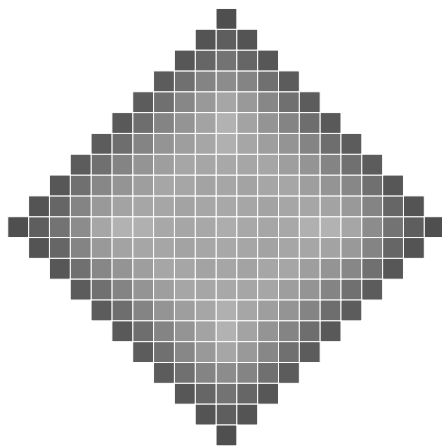
delt, entsteht ein hoher Flächenverbrauch. Im Vergleich dazu ist in den USA seit den 20er und 30er Jahren des 20. Jahrhunderts ein „flächenextensiver Suburbanisierungsprozess [...] festzustellen“ [16, S. 263]. Durch die räumliche Trennung der Bevölkerung und Dienstleistungen resultieren bei dieser Stadtstruktur große Wege für den Konsum, da die Dienstleistungen für die Mehrheit der Bevölkerung weit entfernt sind.



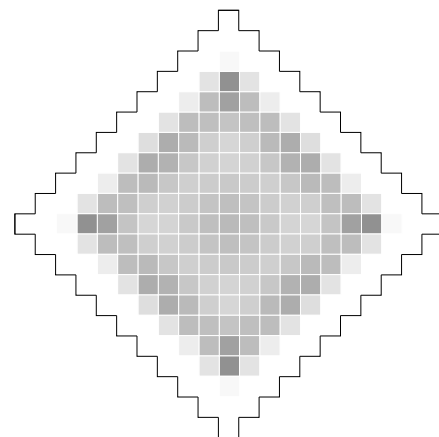
(a) Bevölkerungsverteilung (Bev.) S4



(b) Dienstleistungsverteilung (Dienstl.) S4



(c) Bevölkerungsverteilung (Bev.) S14



(d) Dienstleistungsverteilung (Dienstl.) S14



Rand des Stadtgebiets
(zur Verdeutlichung)



Abbildung 6.9.: Struktur der Szenarien S4 und S14: In beiden Szenarien sind die Transportkosten gering ($\tau = 0,01$). (a) und (b) besitzen ein niedriges Mietpreinsniveau ($k = 0,01$), (c) und (d) ein hohes ($k = 0,08$). Die Graustufen sind nichtlinear mit $\sqrt{n_i}$ bzw. $\sqrt{m_i}$ skaliert.

Fall 2: Geringe Transportkosten, hohes Mietpreisniveau (Szenario S14)

Die hohe Konzentration von nahezu allen Dienstleistungen in einem Square entsteht nicht unter der Annahme eines hohen Mietpreisniveaus. Die daraus resultierenden Wohnkosten würden in dessen Nähe das Einkommen der Individuen übersteigen und einen starken Wegzug motivieren. Allgemein wird der Rand des Stadtgebiets als Wohnort der Bevölkerung attraktiver. Abbildung 6.9c zeigt die hohe Bevölkerungsdichte am Rand, wohingegen zwischen den Squares hoher Dienstleistungsdichte (siehe Abbildung 6.9d) und dem geometrischen Zentrum des Stadtgebiets die Bevölkerungsdichte ein Minimum aufweist. Es besteht auch in diesem Fall eine Trennung von Bevölkerungskonzentrationen und Dienstleistungskonzentrationen. Aufgrund der geringen Transportkosten ist diese Aufteilung allerdings die für die Bevölkerung günstigste. Dies kann durch den Vergleich der Gesamtkosten pro Square bestätigt werden (nicht dargestellt).

Es existiert also in **Fall 2** kein zentral gelegener CBD, da der größte Teil der Bevölkerung sehr weit von diesem entfernt leben würde. Die Distanz ist trotz der geringen Transportkosten zu groß. Es bilden sich mehrere dezentral gelegene Dienstleistungszentren. Empirische Beispiele für diese Zentrenbildung außerhalb des Kerngebiets sind so genannte Außenstadtzentren oder *Edge Cities*, zu deren Erklärung in der Geographie sehr komplexe Strukturmodelle entwickelt wurden. Beispiele hierfür finden sich in Literatur [16].

Die über das gesamte Stadtgebiet gemittelte Dienstleistungsdichte \bar{m} (Berechnung nach Kapitel 6.4) ist für das Szenario S14 ($7,49 \text{ km}^{-2}$) geringer als für das Szenario S4 ($9,44 \text{ km}^{-2}$), da aufgrund der erhöhten Wohnkosten in S14 ein geringerer Anteil des Einkommens für den Konsum übrig bleibt.

Fall 3: Hohe Transportkosten, niedriges Mietpreisniveau (Szenario S8)

Hohe Transportkosten führen zur Aufhebung der räumlichen Trennung von Bevölkerungs- und Dienstleistungsverteilung, was im vorherigen Abschnitt 6.6.1 gezeigt wurde. Szenario S8 kombiniert hohe Transportkosten mit einem geringen Mietpreisniveau.

Das Stadtgebiet teilt sich in zwei Bereiche. Der erste Bereich hoher Bevölkerungsdichte (Abbildung 6.10a) und nicht verschwindender Dienstleistungsdichte (Abbildung

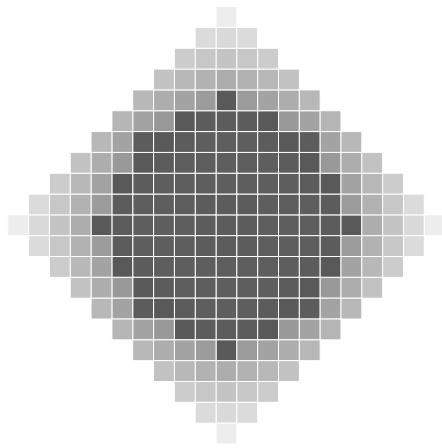
6.10b) füllt nur einen Teil des simulierten Stadtgebiets aus. Gleichzeitig beinhaltet er den größten Teil der Bevölkerung und alle Dienstleistungen. Er kann als eigentliche „Stadt“ bezeichnet werden und verbraucht weniger Fläche als die bisher beschriebenen Stadtstrukturen. Innerhalb dieses ersten Stadt-Bereichs ist sowohl die Bevölkerungs- als auch Dienstleistungsdichte näherungsweise homogen. Im zweiten Bereich zum Rand hin nimmt die Bevölkerungsdichte ab und geht gegen Null. Die Dienstleistungsdichte fällt in diesem zweiten Bereich sehr stark auf Null ab. Die Stadtstruktur belegt damit effektiv nur Bereich Eins und verbraucht nicht mehr die Fläche des gesamten Stadtgebiets.

Der geringere Flächenverbrauch resultiert aus der höheren Nutzungsintensität, d.h. den höheren Dichten. Der Grund für die homogene Verteilung der Bevölkerung in Bereich Eins ist die unter der Voraussetzung hoher Transportkosten entstehende große Wirkung der Transportkostensensibilität b_T auf den Faktor Bedeutung $g_i(j)$ in Gleichung (4.20). Dies schränkt die Bereitschaft der Individuen stark ein, große Distanzen für den Konsum zurückzulegen und fördert eine Konzentration der Individuen auf Dienstleistungen in der nahen Umgebung ihrer Wohnungen.

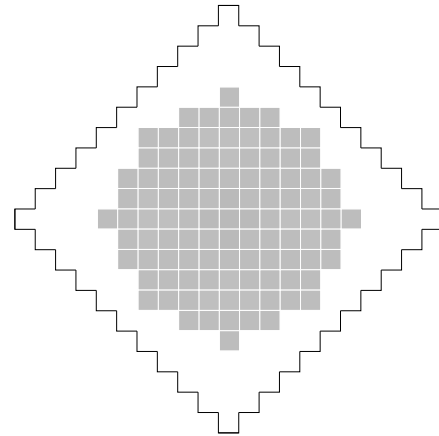
Die Dienstleistungen passen sich der Bevölkerung an. Aufgrund der hohen Transportkosten ist eine gewisse Kundennähe vorteilhaft und es entsteht die ebenfalls homogene Verteilung der Dienstleistungen (Abbildung 6.10b). Darüber hinaus stimmt die Mitte der Stadtstruktur mit der Mitte des Stadtgebiets überein.

Die Siedlungsdichte bzw. Flächennutzung hängt von dem Verhältnis Wohnkosten zu Mobilitätskosten ab. Einerseits erzeugt eine Struktur auf kleinerer Fläche mit einer daraus resultierenden hohen Bevölkerungsdichte aufgrund der lokal höheren Nachfrage ebenfalls hohe Dienstleistungsdichten. Diese bewirken als Rückkopplung höhere Wohnkosten. Andererseits steigen die Mobilitätskosten durch die Ausbreitung der Stadtgrenzen, was mit einer geringeren Dienstleistungsdichte pro Square einhergeht. Durch kostenbeeinflussende Parameter, beispielsweise die Transportkostensensibilität b_T kann die Ausdehnung der Stadt gesteuert werden.

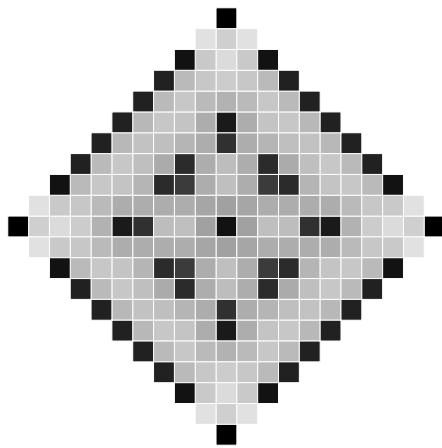
Im Gegensatz zu einem Optimierungsmodell, in welchem jeder Konstituent nutzenoptimiert simuliert wird, überlässt die Soziodynamik den Konstituenten eine gewisse Entscheidungsfreiheit. Der Ansatz der Soziodynamik ist realitätsnäher, da es immer Individuen gibt, welche aufgrund von individuellen, im Modell nicht zu berücksichtigenden Gründen einen rational nicht optimalen Zustand wählen. In Szenario S8 wird die Entscheidungsfreiheit für Individuen an der zum Rand hin abfallenden Bevölkerungsvertei-



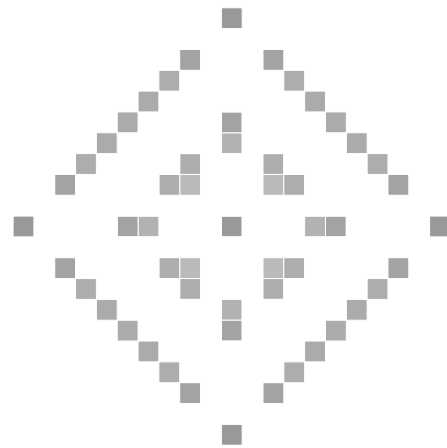
(a) Bevölkerungsverteilung (Bev.) S8



(b) Dienstleistungsverteilung (Dienstl.) S8



(c) Bevölkerungsverteilung (Bev.) S18



(d) Dienstleistungsverteilung (Dienstl.) S18

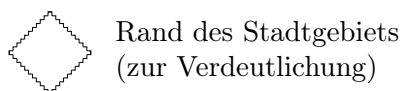


Abbildung 6.10.: Struktur der Szenarien S8 und S18: In beiden Szenarien sind die Transportkosten sehr hoch ($\tau = 0,4$). (a) und (b) besitzen ein niedriges Mietpreisniveau ($k = 0,01$), (c) und (d) ein hohes ($k = 0,08$). Die Graustufen sind nichtlinear mit $\sqrt{n_i}$ bzw. $\sqrt{m_i}$ skaliert.

lung erkennbar. Die Individuen in den Außenbereichen wohnen nicht nutzenoptimiert im Sinne der bestrebten Konsummaximierung (4.55) wie die Mehrheit der Individuen im inneren Bereich des Stadtgebiets, da bei ihnen weitaus höhere Mobilitätskosten für das Erreichen der Dienstleistungen entstehen.

Bei der Simulation der Dienstleistungen werden die Koeffizienten der Nutzenfunktion

angepasst, um den Sättigungswert m_{opt} für die Dichte der Dienstleistungen zu erhalten (siehe Abschnitt Koeffizientenanpassung auf Seite 43). Die Dienstleistungen verhalten sich damit rein rational und nutzenoptimiert. Erkennbar ist dies an dem starken Abfall auf Null am Rand der homogenen Verteilung.

Fall 4: Hohe Transportkosten, hohes Mietpreisniveau (Szenario S18)

Ein hohes Mietpreisniveau hat zur Folge, dass bereits bei geringen Dienstleistungsdichten hohe Wohnkosten bezahlt werden müssen. Eine Konzentration von vielen Zentren in nahe beieinander liegenden Squares würde die Wohnkosten in diesem Bereich über das individuelle Einkommen hinaus erhöhen.

Zum einen besteht für die Bevölkerung die Notwendigkeit, aufgrund hoher Transportkosten nahe an Dienstleistungszentren zu wohnen. Zum anderen übersteigt die Bildung großer Zentren schnell die finanziellen Fähigkeiten der Bevölkerung. Daraus resultiert die Stadtstruktur der Abbildungen 6.10c und 6.10d. Die Stadt zerfällt in stark lokalisierte kleinere Zentren bzw. Einzelstädte, welche ringförmig um den mittleren Square angeordnet sind. Die Squares maximaler Dichte verteilen sich im gleichen Abstand voneinander auf die Ringe 0, 5 und 10. Aufgrund der Symmetrie entsteht die Struktur bevorzugt in radialer Richtung, jedoch ist auch innerhalb eines Ringes die Aufteilung in separate Zentren zu beobachten. Ein Indikator für diese Struktur stark schwankender Dichteverteilungen ist die hohe Bevölkerungsfluktuation $\sigma_n = 1,27$ (siehe Tabelle 6.2).

Die äußerst scharfe Struktur erklärt sich aus den unterschiedlichen Kosten für Bewohner in Zentren (Squares hoher Dienstleistungsdichte) und Bewohner außerhalb der Zentren (hier Squares der Dienstleistungsdichte Null). Erstere verfügen über ein großes Angebot an wohnungsnahen Dienstleistungen in ihrem eigenen Square. Für einen Großteil des Konsums ist kein kostenverursachender Weg erforderlich, da hierzu nur Mobilität in andere Squares zählt. Damit bleiben die Mobilitätskosten trotz hoher Transportkosten gering. Bewohner außerhalb der Zentren wohnen aufgrund der gleichmäßigen Verteilung von Zentren im Stadtgebiet immer in der Nähe solcher. Daher sind die Wohnkosten nicht bedeutend geringer als in den Zentren selbst. Zusätzlich entstehen aufgrund der Entfernung zu den Dienstleistungen und den hohen Transportkosten ebenfalls hohe Mobilitätskosten. Diese erhöhte Belastung führt zu einer Attraktivitätssteigerung der Zentren als Wohnort und erzeugt dadurch hohe Bevölkerungsdichten in diesen.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Modell für die Entstehung städtischer Strukturen entwickelt und deren Form analysiert. Diese Strukturen bilden sich aus den Wechselwirkungen der Stadtbevölkerung mit immobilien Dienstleistungen, wobei externe Einflüsse in Form direkter äußerer Kräfte vernachlässigt werden. Die Strukturbildung begründet sich daher allein aus der parametergesteuerten Selbstorganisation des Systems.

Die der Modellierung zugrunde liegende Theorie ist die Soziodynamik, in welcher zwischen einer mikroskopischen und makroskopischen Beschreibungsebene differenziert wird. Ausgehend von der Mikroebene individueller Entscheidungen und Handlungen, die wahr-scheinlichkeitstheoretisch beschrieben werden, leiten sich auf der Makroebene für relativ wenige systembeschreibende Makrovariablen Bewegungsgleichungen ab. Es wird hierbei nicht die aus dem wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansatz entstehende Wahrscheinlichkeitsverteilung, sondern ein mittlerer Systemverlauf durch sogenannte Quasimittelwertgleichungen berechnet [13; 14].

Für die Beschreibung der Stadt in dieser Arbeit wurden die Makrovariablen „Bevölkerungsdichte“ und „Dienstleistungsdichte“ gewählt, deren Entwicklung eng miteinander gekoppelt ist.

Motivation für die Handlungen der Bevölkerung ist die Maximierung des individuellen Konsums. Das gesamte Einkommen abzüglich der Wohn- und Mobilitätskosten wird für die Nutzung der Dienstleistungen verkonsumiert. Die räumliche Verteilung der Konsumausgaben erzeugt eine lokal unterschiedliche Nachfrage, aufgrund derer Dienstleistungen entstehen oder verschwinden. Lokal wird die Nachfrage gleichmäßig auf alle Dienstleistungen verteilt. Die Zahl der Dienstleistungen passt sich an, bis der Umsatz pro Dienstleistung einen definierten Sättigungswert erreicht hat. Für die Bevölkerung wiederum entstehen bei räumlicher Nähe zu Zentren hoher Dienstleistungsdichte hohe Wohnkosten. Die Abhängigkeit wird durch einen Wohnkostenkoeffizienten gesteuert. Andererseits

steigen die Mobilitätskosten aufgrund der entfernungsabhängigen Transportkosten mit größer werdendem Abstand zwischen Wohnort und Dienstleistungen. Daraus resultieren lokal unterschiedliche Gesamtkosten, welche die Wahl des Wohnortes beeinflussen.

Größe und räumliche Auflösung des Modells sind frei wählbar. Unter Verwendung des numerischen Lösungsalgorithmus Runge-Kutta-4 wird das Differentialgleichungssystem für verschiedene Szenarien gelöst.

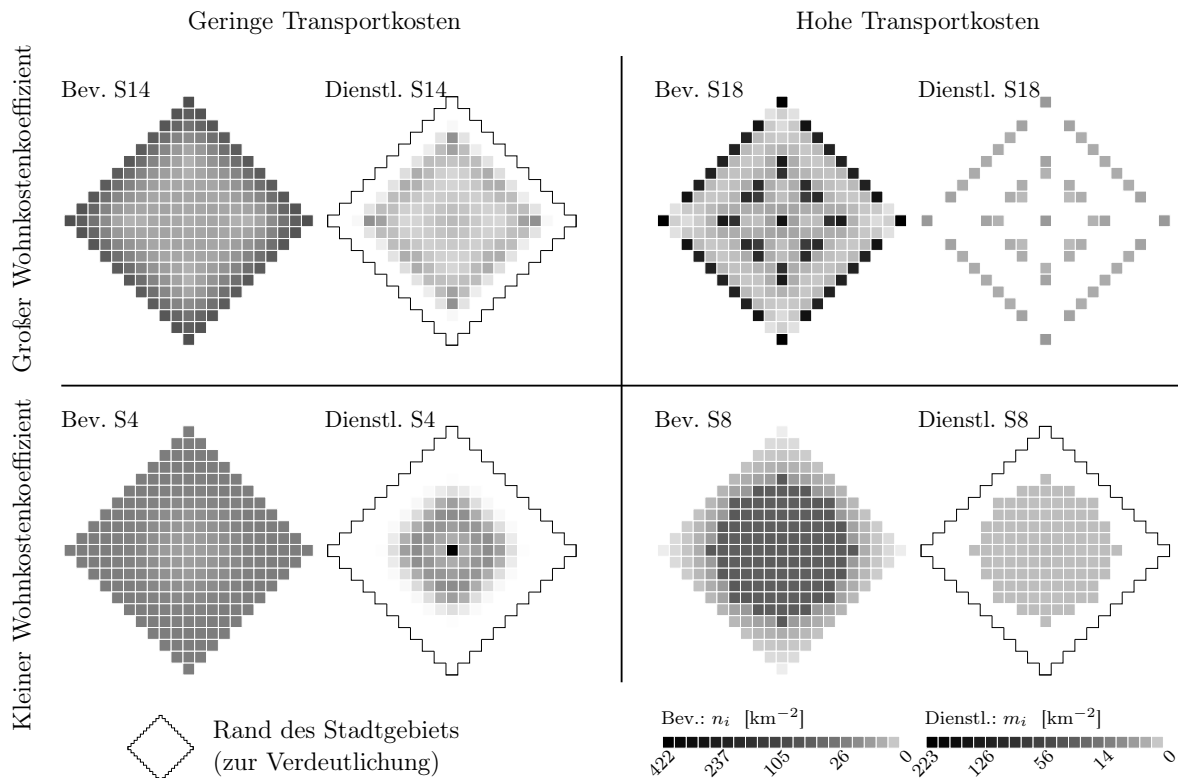


Abbildung 7.1.: Die vier Stadtstrukturen der Szenarien S4, S8, S14 und S18 sind Beispiele für die Strukturkategorien und werden jeweils durch die Bevölkerungs- (Bev.) und Dienstleistungsverteilung (Dienstl.) dargestellt. Die Graustufen sind mit $\sqrt{n_i}$ bzw. $\sqrt{m_i}$ skaliert.

Die Ergebnisse können in Abhängigkeit der Transportkosten und des Wohnkostenkoeffizienten in vier Strukturkategorien eingeordnet werden (siehe Abbildung 7.1):

- Geringe Transportkosten, kleiner Wohnkostenkoeffizient (Szenario S4):
Es entsteht die typische Form eines Central Business Districts durch eine überwiegende Dienstleistungskonzentration in der Mitte der Stadt [16]. Die Bewohner

zeigen die Tendenz zur Suburbanisierung, da zum Stadtrand hin die Bevölkerungsdichte zunimmt.

- Hohe Transportkosten, kleiner Wohnkostenkoeffizient (Szenario S8):
Aufgrund der durch hohe Kosten eingeschränkten Mobilität entsteht eine kompakte Anordnung der Bevölkerung und Dienstleistungen in der Mitte des modellierten Gebiets. Die Trennung von Wohn- und Konsumort hebt sich auf.
- Geringe Transportkosten, großer Wohnkostenkoeffizient (Szenario S14):
Die hohen Wohnkosten zwingen die Bevölkerung, an den Stadtrand zu ziehen und verstärken die Suburbanisierung. Damit gewinnen äußere Dienstleistungszentren an Attraktivität und wachsen. Man spricht von der Ausbildung sogenannter *Edge Cities* [16].
- Hohe Transportkosten, großer Wohnkostenkoeffizient (Szenario S18):
Die Bevölkerungs- und Dienstleistungsverteilung liegen nah beieinander und sind sehr stark ausgeprägt. Die Stadt zerfällt in viele kleine Städte, die näherungsweise radialsymmetrisch um das geometrische Zentrum angeordnet sind. Diese positionieren sich radial im gleichen Abstand zueinander.

Die in der Arbeit berechneten Szenarien beinhalten eine homogene Bevölkerung. Eine differenziertere Unterteilung der Bevölkerung in verschiedene Subpopulationen ist im Modell möglich und wäre für eine realistischere Beschreibung existierender Stadtstrukturen nötig und wünschenswert. Eine Möglichkeit ist ebenfalls, das Modell um verschiedene Arten von Dienstleistungen zu erweitern. Für die Unterscheidung dieser könnte die Frequenz, mit der Dienstleistungen in Anspruch genommen werden, ein Kriterium sein. Unter Einbeziehung weiterer Makrovariablen und deren Dynamik in das Modell könnte darüber hinaus die Industrie einer Stadt und die Kopplungen zwischen dieser und der Bevölkerung simuliert werden. Einen Ansatzpunkt diesbezüglich bietet Weidlich [14].

Im nächsten Schritt sollte ein Vergleich des Modells mit realen Großstädten oder Metropolregionen durchgeführt werden. Als zentrale Aufgabe hierfür stellt sich das Sammeln und die Aufbereitung empirischer Daten.

Ein alternativer Ansatz ist, fehlende oder schwer bestimmbare empirische Parameter zu ermitteln, indem man durch die Variation dieser Parameter Stadtstrukturen modelliert und aus dem Vergleich mit real existierenden Strukturen auf die Parameter schließt. Weiterhin ist durch Optimierungen im Programmablauf eine höhere Auflösung des Modellbereichs denkbar.

Literaturverzeichnis

- [1] UNITED NATIONS (UN): World Urbanization Prospects: The 2007 Revision. 2007. – Report
- [2] UNITED NATIONS - HABITAT, UNITED NATIONS ENVIRONMENT PROGRAMME: Ecosystems and Biodiversity - The Role of Cities. 2005. – Broschüre
- [3] WEGENER, M.: The End of the Industrial City. In: *Berichte aus dem Institut für Raumplanung*. Institut für Raumplanung Dortmund, 1997
- [4] BURGESS, E. W.: The growth of the city: an introduction to a research project. In: *The City Chicago*. R. E. Park, E. W. Burgess und R. D. McKenzie (Univ. of Chicago Press), 1925
- [5] BURGESS, E. W.: Urban areas. In: *Chicago: an experiment in social science research*. Chicago : T. V. Smith u. L. D. White (Univ. of Chicago Press), 1929
- [6] HOYT, H.: *The structure and growth of residential neighborhoods in American cities*. Washington : Federal Housing Association, 1939
- [7] HARRIS, C. D. ; ULLMAN, E. L.: The nature of cities. In: *Annals of the American Academy for Political Science* 242 (1945), S. 7–17
- [8] WEIDLICH, W. ; HAAG, G.: A dynamic phase transition model for spatial agglomeration processes. In: *Journal of Regional Science* 27 (1987), Nr. 4, S. 529–569
- [9] WEIDLICH, W. ; MUNZ, M.: Settlement Formation: Part I: A Dynamic Theory. In: *The Annals of Regional Science* 24 (1990), Nr. 2, S. 83–106

- [10] WEIDLICH, W. ; MUNZ, M.: Settlement Formation: Part II: Numerical Simulation. In: *The Annals of Regional Science* 24 (1990), Nr. 3, S. 177–96
- [11] POPKOV, Y. S. ; SHVETSOV, V. I. ; WEIDLICH, W.: Settlement formation models with entropy operator. In: *The Annals of Regional Science* 32 (1998), S. 267–294
- [12] HAKEN, H.: *Synergetik - Eine Einführung*. 2. Berlin, Heidelberg, NewYork, Tokyo : Springer-Verlag Berlin, 1983
- [13] *Kapitel* Das Modellierungskonzept der Soziodynamik. In: WEIDLICH, W.: *Curriculum Evolutorische Ökonomik - Lehrkonzepte zur Evolutorischen Ökonomik*. Marburg : Metropolis-Verlag, 2002
- [14] WEIDLICH, W.: *Sociodynamics : A Systematic Approach to Mathematical Modelling in the Social Sciences*. Dover Publications, Inc., 2006
- [15] HAMM, B.: *Einführung in die Siedlungssoziologie*. München : Beck, 1982
- [16] HEINEBERG, H.: *Stadtgeographie*. 3. aktualisierte und erweiterte Auflage. Paderborn : Schöningh, 2006
- [17] BOUSTEDT, O.: Stadtregionen. In: *Handwörterbuch der Raumforschung und Raumordnung*. Hannover (Gebr. Jänecke) : Akademie für Raumforschung und Landesplanung, 1970, S. 3207–3237
- [18] *Kapitel* Agglomerationsräume in West- und Osteuropa. In: GAEBE, W.: *Wirtschafts- und sozialwissenschaftliche Ostmitteleuropa-Studien*. Bd. 16: *Agglomerationen in West und Ost*. Marburg : Herder-Inst., 1991, S. 3–21
- [19] Metropolregionen - Chancen der Raumentwicklung durch Polyzentralität und regionale Kooperation. In: *Werkstatt: Praxis* Bd. 54. Bonn : Bundesministerium für Verkehr, Bau und Stadtentwicklung (BMVBS), 2007
- [20] CHRISTALLER, W.: *Die zentralen Orte in Süddeutschland: eine ökonomisch-geographische Untersuchung über die Gesetzmässigkeit der Verbreitung und Entwicklung der Siedlungen mit städtischen Funktionen*. Darmstadt : Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1980. – 331 S. – Repr. d. Ausg. 1933

- [21] DEITERS, J.: Christallers Theorie der zentralen Orte. In: ENGEL, J. (Hrsg.): *Von der Erdkunde zur raumwissenschaftlichen Bildung. Theorie und Praxis des Geographieunterrichts*. Bad Heilbrunn : J. Klinkhardt, 1976, S. 104–115
- [22] SHORT, J. R.: *An introduction to urban geography*. London : Routledge & Kegan Paul, 1984
- [23] SIGG, T.: *Ein mathematisches Modell der Stadtentwicklung unter Populationsdruck*, Universität Stuttgart, Diss., Fakultät Physik 1996
- [24] FASSMANN, H.: *Stadtgeographie I*. Braunschweig : Westermann, 2004 (Das Geografische Seminar)
- [25] WEIDLICH, W. ; HAAG, G.: *Interregional migration: dynamic theory and comparative analysis*. Berlin : Springer-Verlag, 1988
- [26] ZURMÜHL, R.: *Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker*. 5. Springer-Verlag, 1984
- [27] INSTITUT FÜR ANGEWANDTE SOZIALWISSENSCHAFT GMBH (INFRAS), DEUTSCHES INSTITUT FÜR WIRTSCHAFTSFORSCHUNG (DIW): *Mobilität in Deutschland 2002*. Version: 2003. <http://www.mobilitaet-in-deutschland.de>. 2003. – Forschungsbericht
- [28] REGIONALVERBAND RUHR: *Städte- und Kreisstatistik Ruhrgebiet 2005*. Version: April 2005. www.rvr-online.de/publikationen/statistik/kreisstatistik.php. Essen, April 2005. – Forschungsbericht
- [29] AMT FÜR STATISTIK BERLIN-BRANDENBURG: *Berlin in Zahlen 08*. Version: 2008. www.statistik-berlin-brandenburg.de/produkte/Faltblatt_Brochure/berlin_in_Zahlen08_de.pdf. 2008. – Forschungsbericht
- [30] STATISTISCHES BUNDESAMT DEUTSCHLAND: *Pressemitteilung Nr. 089*. 2008. – Report
- [31] BUNDESZENTRALE FÜR POLITISCHE BILDUNG (BPB): *Monatliches Haushaltsein-*

- kommen pro Kopf nach Haushaltstyp. 2005. – Online-Report (Stand vom 3.1.2009: www.bpb.de/files/CGP98E.pdf)
- [32] THIESSEN, F. ; FISCHER, C.: Die Höhe der sozialen Mindestsicherung - Eine Neuberechnung "bottom up". In: *Zeitschrift für Wirtschaftspolitik* 57 (2008), Nr. 2, S. 145 – 173
- [33] *Kapitel* Zentrale Orte. In: BLOTEVOGEL, H. H.: *Handwörterbuch der Raumordnung*. ARL, 1995, S. 117–1124
- [34] STATISTISCHE ÄMTER DES BUNDES UND DER LÄNDER: Gebiet und Bevölkerung - Fläche und Bevölkerung. Version: 2008. www.statistik-portal.de/Statistik-Portal/de_jb01_jahrtab1.asp. 2008. – Forschungsbericht

A. Anhang

A.1. Herleitung der Distanzsumme

$\sum_i d_{ij}$ ist die Summe der Distanzen d_{ij} zwischen einem Bezugssquare j und allen anderen Squares i des Stadtgebiets. d_{ij} ergibt sich aus der Manhattan-Metrik. (x_i, y_i) bzw. (x_j, y_j) geben die zweidimensionalen Koordinaten der Squares i bzw. j an. Für die Umrechnung existieren die Transformationen (4.5) und (4.4). Einsetzen der Manhattan-Metrik und das Auflösen der Summe für die Korrdinaten x_i und y_i ergibt (A.1).

$$\sum_i d_{ij} = l \sum_{x_i=-R}^R \sum_{y_i=-(R-|x_i|)}^{R-|x_i|} (|x_i - x_j| + |y_i - y_j|) \quad (\text{A.1})$$

l ist die Seitenlänge eines Squares. Durch die Vierer-Symmetrie lässt sich jeder Punkt des Gebiets \mathcal{R} durch Drehung in den 1. Quadranten überführen. Es kann daher ohne Beschränkung der Annahme gefordert werden, dass gilt: $x_j, y_j \geq 0$, d.h. j liegt im ersten Quadranten. Alle Squares mit der x-Koordinate x_i werden zur *Spalte* x_i gezählt. Zur Verdeutlichung siehe Abbildung A.1.

Der wichtigste Schritt ist das korrekte Auflösen der Beträge. Hierbei geht man gedanklich über alle Spalten $x_i = -R$ bis $x_i = R$ und summiert dann jeweils über alle Squares der jeweiligen Spalte.

Entlang der x-Achse spaltet sich die Summation insgesamt in die Bereiche ① bis ⑤ auf. Zuerst sollen die inneren Bereiche ②, ③ und ④ behandelt werden (siehe Abbildung A.1). Durch die Beträge $|x_i|$ und $|x_i - x_j|$ entstehen als Grenzen der Summation $x_i = 0$ und $x_i = x_j$. Bei $x_i = 0$ entsteht durch die freie Wahl des Punktes (x_j, y_j) ein nicht zu vermeidender Überlapp, welcher in einem extra Term wieder abgezogen werden muss. In der jeweiligen Spalte x_i wird nun die Summe über y_i aufgrund des Betrages $|y_i - y_j|$ ebenfalls in zwei

Terme aufgeteilt: die Summation über die Bereiche $[-R; y_j]$ und $[y_j + 1; R]$.

In den Randbereichen ① und ⑤ liegt die Koordinate y_j außerhalb des Stadtgebiets. Es entfällt die Fallunterscheidung, da immer gilt: $y_i \leq y_j$. Die Anwendung dieser Schritte führt auf die Formel (A.2).

$$\begin{aligned}
 \sum_i d_{ij} &= l \sum_{x_i=-R}^R \left(\sum_{y_i=-(R-|x_i|)}^{R-|x_i|} (|x_i - x_j| + |y_i - y_j|) \right) \\
 &= l \sum_{x_i=-R}^{-(R-y_j)} \left(\sum_{y_i=-R-x}^{R+x} (-(x_i - x_j) - (y_i - y_j)) \right) \\
 &\quad + l \sum_{x_i=-(R-y_j)+1}^0 \left(\sum_{y_i=-R-x}^{y_j} (-(x_i - x_j) - (y_i - y_j)) + \sum_{y_i=y_j+1}^{R+x} (-(x_i - x_j) + (y_i - y_j)) \right) \\
 &\quad + l \sum_{x_i=0}^{x_j} \left(\sum_{y_i=-R+x}^{y_j} (-(x_i - x_j) - (y_i - y_j)) + \sum_{y_i=y_j+1}^{R-x} (-(x_i - x_j) + (y_i - y_j)) \right) \\
 &\quad - l \sum_{y_i=-R}^{y_j} \left(\sum_{y_i=-R}^{y_j} (-(0 - x_j) - (y_i - y_j)) + \sum_{y_i=y_j+1}^R (-(0 - x_j) + (y_i - y_j)) \right) \\
 &\quad + l \sum_{x_i=x_j+1}^{R-y_j} \left(\sum_{y_i=-R+x}^{y_j} ((x_i - x_j) - (y_i - y_j)) + \sum_{y_i=y_j+1}^{R-x} ((x_i - x_j) + (y_i - y_j)) \right) \\
 &\quad + l \sum_{x_i=R-y_j+1}^R \left(\sum_{y_i=-R+x}^{R-x} ((x_i - x_j) - (y_i - y_j)) \right)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Die einzelnen Terme können nun mit der Gauß'schen Summenformel $\sum_i^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ und mit der Partialsummenformel $\sum_i^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ zu (A.3) vereinfacht werden.

$$\begin{aligned}
 \sum_i d_{ij} &= l \frac{1}{3} (2R + 6R^2 + 4R^3 + 2x_j + 3x_j^2 - 2x_j^3 \\
 &\quad + 2y_j + 3y_j^2 - 2y_j^3 + 6Rx_j^2 + 6Ry_j^2)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Hierbei ist R die Anzahl der Ringe und (x_j, y_j) die Koordinaten des Bezugssquares j . Formel (A.3) dient in Kapitel 6.5.1 auf Seite 64 der analytischen Berechnung der Bevölkerungsverteilung.

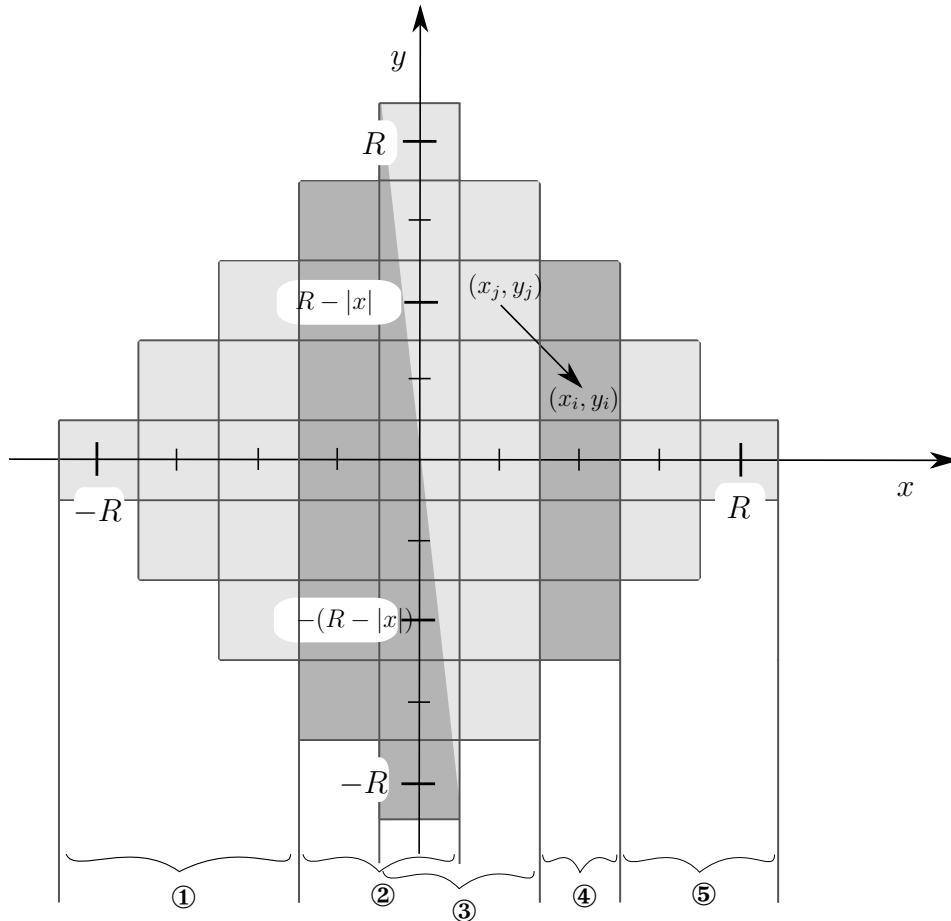


Abbildung A.1.: Grafische Darstellung der Summationsgrenzen.

A.2. Berechnung der Bevölkerungsverteilung

Es wird die Gleichung (6.17) auf Seite 66 für den speziellen Fall $M = 3$ und einer Subpopulation hergeleitet. M ist die Anzahl der Squares, α wird nicht notiert. Unter Verwendung der Gleichungen (6.12), (6.13) und (6.14) für $i, j \in 1, 2, 3$ ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung (6.15) zu:

$$\begin{aligned}
 n_1 \frac{C_1}{C_1} + n_2 \frac{C_1}{C_2} + n_3 \frac{C_1}{C_3} &= n_1 \left(\frac{C_1}{C_1} + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1} \right) && \text{für Square 1} \\
 n_1 \frac{C_2}{C_1} + n_2 \frac{C_2}{C_2} + n_3 \frac{C_2}{C_3} &= n_2 \left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_2}{C_2} + \frac{C_3}{C_2} \right) && \text{für Square 2}
 \end{aligned}$$

Die Bedingung für Square 3 wird nicht gebraucht, die Nebenbedingung lautet:

$$\bar{n} M = n_1 + n_2 + n_3.$$

\bar{n} ist die mittlere Bevölkerungsdichte, M die Zahl der Squares. Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich noch etwas vereinfachen und bilden mit der Nebenbedingung ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{n} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1}\right) & \frac{C_1}{C_2} & \frac{C_1}{C_3} \\ \frac{C_2}{C_1} & -\left(\frac{C_1}{C_2} + \frac{C_3}{C_2}\right) & \frac{C_2}{C_3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{n} M \end{pmatrix}$$

Die Matrix \mathbf{A} kann mit Hilfe des Gauß-Verfahrens invertiert werden:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{(C_1 C_3 + C_3^2 + C_2^2) C_1}{\%1} & \frac{C_1^2 (-C_3 + C_2)}{\%1} & \frac{C_1^2}{C_1^2 + C_3^2 + C_2^2} \\ \frac{C_2^2 (C_1 - C_3)}{\%1} & -\frac{(C_1^2 + C_2 C_3 + C_3^2) C_2}{\%1} & \frac{C_2^2}{C_1^2 + C_3^2 + C_2^2} \\ \frac{(C_1^2 + C_1 C_3 + C_2^2) C_3}{\%1} & \frac{(C_1^2 + C_2^2 + C_2 C_3) C_3}{\%1} & \frac{C_3^2}{C_1^2 + C_3^2 + C_2^2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\%1 := C_2 C_1^2 + C_2^3 + C_3 C_2^2 + C_1^3 + C_1 C_3^2 + C_3 C_1^2 + C_2 C_3^2 + C_3^3 + C_1 C_2^2$$

Somit folgt mit der Form $\mathbf{n} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1^2 \bar{n} M}{C_2^2 + C_3^2 + C_1^2} \\ \frac{C_2^2 \bar{n} M}{C_2^2 + C_3^2 + C_1^2} \\ \frac{C_3^2 \bar{n} M}{C_2^2 + C_3^2 + C_1^2} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$n_i = \bar{n} M \frac{C_i}{C_1 + C_2 + C_3} \tag{A.4}$$

Eine Verallgemeinerung auf M Squares führt dann zu Gleichung (6.17).

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ort, Datum

Peter Böhme