

**Statistische Datenanalyse im Hinblick
auf Früherkennung von Disruptionen
am Tokamak ASDEX Upgrade**

M. Maraschek

IPP 1/279
Diplomarbeit

Juni 1994
Betreuer: Dr. H. Zohm



MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

85748 GARCHING BEI MÜNCHEN

MAX-PLANCK-INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK
GARCHING BEI MÜNCHEN

**Statistische Datenanalyse im Hinblick
auf Früherkennung von Disruptionen
am Tokamak ASDEX Upgrade**

M. Maraschek

IPP 1/279
Diplomarbeit

Juni 1994
Betreuer: Dr. H. Zohm

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem
Max-Planck-Institut für Plasmaphysik und der Europäischen Atomgemeinschaft über
die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

Abstract

Disruptions are one of the major problems for future tokamak devices like ITER. During disruptions, the thermal and magnetic energy within the plasma are lost in a very short period and can damage the experiment. As the underlying physical processes are not fully understood, disruptions can not be reliably predicted. It is the aim of this work, to identify significant correlations in various plasma parameters before and during disruptions beyond the known appearance of a $m = 2$ tearing mode. In addition, one wants to get artificial quantities, the so called indicators, which describe the risk of a disruption, in order to run discharges without disruptions.

Statistical methods, by name **p**rin**c**ipal **c**omponent **a**nalysis (PCA) and singular value decomposition (SVD) were used to analyse correlations in the data sets. SVD creates a new lower dimensional system, in which the variance of data of the first leading axes is maximized and correlations within the data set are eliminated. In this system physical events are separately presented according to their degree of information within the data set. This allows a reduction of the necessary storage capacity by using only the important or physically interesting part of the data set. To get a deeper understanding for the interpretation of the results, simulated data sets as well as simple examples of real data sets of Mirnov-Coils and Soft-X-Ray cameras were analysed.

In a second step a function-parametrization was used to describe the functional relation between real measurements (Diode Arrays measuring Bremsstrahlung) in the system of SVD and artificial indicators, which describe the risk of a disruption and have to be calculated by hand individually for each discharge. This representation was done with a regression analysis of existing discharges. In the next step the attempt was made, to predict the risk of a disruption for discharges, which had not been included in the first step, with the help of function-parametrization of the indicators.

During this work a program was built for analysing high dimensional input data of various different diagnostics. With the indicators and their representation a possible way was shown, how disruptions can be predicted online during a discharge.

Statistische Datenanalyse im Hinblick
auf Früherkennung von Disruptionen
am Tokamak ASDEX Upgrade

Diplomarbeit

von

Marc Maraschek

angefertigt am

MAX - PLANCK - INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

Garching bei München

Juni 1994

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Magnetischer Einschluß	3
1.3	Zielsetzung der Arbeit	4
2	Physikalische Grundlagen	6
2.1	Tokamak-Prinzip	6
2.2	Limiter- und Divertorkonfiguration	9
2.3	Inselbildung und Moden	10
2.4	Instabilitäten und Disruptionen	12
2.5	Standard-Dichtelimit-Entladung	13
2.6	H-Mode und ELMs	15
3	Beschreibung der statistischen Auswertung	16
3.1	Struktur der Daten	16
3.2	Principal Component Analysis, Singular Value Decomposition	17
3.2.1	Geometrische Interpretation	17
3.2.2	Statistische Interpretation	20
3.2.3	Normierung der Daten	21
3.2.4	Datenreduktion und Filterung	22
3.3	Funktions-Parametrisierung	23
3.3.1	Regressionsanalyse	23
3.3.2	Grundlegendes Konzept	25
3.3.3	Erzeugung einer Datenbasis	27
4	Meßgrößen für die Analyse	29
4.1	Mirnov-Spulen	29
4.2	Soft-X-Ray Kameras	31
4.3	Bremsstrahlungs-Diagnostik	32
4.4	Magnetische Messungen	33

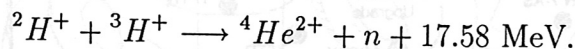
4.5	Liniengemittelte Elektronendichte	33
4.6	Gleichgewichtsrechnungen	34
5	Test des Verfahrens	35
5.1	Periodische Signale, MHD-Moden	35
5.2	Komplexe periodische Signale	43
5.3	Zusammenfassung	44
6	Ergebnisse aus ASDEX Upgrade - Meßdaten	45
6.1	Modenschwingung	45
6.2	ELMs in H-Mode	47
6.3	Kombination mit weiteren Meßgrößen	50
6.4	Zusammenfassung	51
7	Ergebnisse im Hinblick auf Disruptionen	52
7.1	Eigenvektoren in den verschiedenen Phasen der Entladung	53
7.2	Projektion auf neue Meßdaten	58
7.3	Erkennung der Phasen durch Funktions-Parametrisierung	59
7.3.1	Kenngrößen für die Disruptionserkennung	60
7.3.2	Vergleich zwischen den Regressionsmodellen	61
7.3.3	Erkennung der Entladungsphase und der Disruptionsgefahr	64
7.4	Zusammenfassung und Ausblick	67
8	Zusammenfassung	68
A	Tokamak ASDEX Upgrade	70
B	Mathematische Grundlagen	73
B.1	Principal Component Analysis - PCA	73
B.1.1	PCA im Raum der Meßobjekte	74
B.1.2	PCA im Raum der Meßgrößen	76
B.2	Singular Value Decomposition - SVD	77
C	Programmtechnische Realisation	79
C.1	Aufbau des Programms	79
C.2	Bedienung des Programms	81

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Als mögliche alternative Energiequelle zur Verbrennung fossiler Brennstoffe wird unter anderem die Kernfusion untersucht. Ziel ist es, wie in der Sonne, durch Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium Energie zu gewinnen. Die dabei freiwerdende Energie ist durch die Massendifferenz zwischen den Endprodukten der Reaktion und der Summe der Einzelmassen der verwendeten Wasserstoffisotope gegeben. Sie wird in den bei der Fusion entstehenden Teilchen als kinetische Energie deponiert. Man muß hierzu die Wasserstoffkerne so nahe zusammenbringen, daß die abstoßende Coulomb-Barriere überwunden bzw. durch Tunneleffekt umgangen werden kann und durch Kernkräfte eine Fusionsreaktion zwischen den Wasserstoffkernen in Gang kommen kann, wie zum Beispiel:



Diese Reaktion wurde von den möglichen Fusionsreaktionen zwischen Wasserstoffkernen ausgewählt, da sie bei den angestrebten Energien einen um zwei Größenordnungen höheren Wirkungsquerschnitt gegenüber anderen Reaktionen hat.

Man versucht, ein Wasserstoffplasma über einen hinreichend großen Zeitraum bei hoher Dichte n und hoher Temperatur T mit guter Wärmeisolation einzuschließen. Ein Plasma ist notwendig, da der Wirkungsquerschnitt für Coulombstöße um wenigstens eine Größenordnung höher als der für die Fusionsreaktion ist. Bei sich kreuzenden Teilchenstrahlen, etwa aus einem Beschleuniger, gehen zu viele Teilchen durch Coulombstöße verloren, die dann nicht mehr für Fusionsprozesse zur Verfügung stehen, aber trotzdem beschleunigt werden mußten. In einem eingeschlossenen, thermischen Plasma hingegen stehen Teilchen nach einem Coulombstoß weiter für Fusionsreaktionen zur Verfügung.

Ein Maß dafür, ob ein stationär brennendes Plasma gezündet werden kann, ist das

Fusionsprodukt $n \cdot \tau_E \cdot T$. Die Temperatur T wird bei einem gezündeten Plasma durch die in den bei der Fusion freiwerdenden α -Teilchen steckende Energie aufrechterhalten. Es ist keine weitere externe Heizung mehr erforderlich. Durch die Energieeinschlußzeit τ_E wird die Wärmeisolation des Plasmas beschrieben. Sie ist im stationären Gleichgewicht als der Quotient aus Energieinhalt E_{Plasma} des Plasmas und der Heizleistung $P_{Heizung}$ definiert:

$$\tau_E = \frac{E_{Plasma}}{P_{Heizung}}$$

Die Energieeinschlußzeit τ_E ist damit die charakteristische Zeit, in der nach Abschaltung der Heizung der Energieinhalt des Plasmas auf $1/e$ abfällt. Voraussetzung für die Gültigkeit des exponentiellen Abfalls ist, daß die Energieeinschlußzeit τ_E konstant ist, da sonst der Energieverlust durch $\tau_E(T, n, \dots)$ gesteuert würde.

Dichte \times Energieeinschlußzeit
(Teilchen/ $m^3 \times sec$)

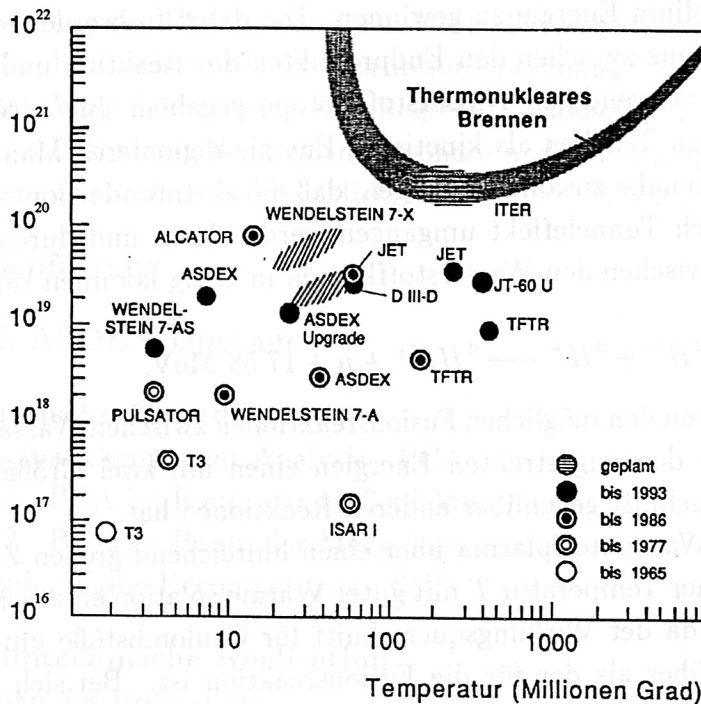


Abbildung 1.1: Zünd-Bedingung für die Zündung eines Fusionsplasmas

Nach der Zünd-Bedingung $n \cdot \tau_E \cdot T = f(T)$ muß das Fusionsprodukt zur Zündung des Plasmas einen temperaturabhängigen Wert überschreiten. Der Verlauf der Funktion $f(T)$ folgt aus der Forderung nach einer insgesamt positiven Energiebilanz

ohne zusätzliche, externe Heizung. Sie hat bei einer Temperatur von ca. 13 keV ($1 \text{ eV} \triangleq e \cdot V/k_B = 11605 \text{ K}$) ein breites Minimum, das somit die angestrebte Temperatur festlegt. In Bild 1.1 sind diese Zündkurve und die von den verschiedenen Experimenten bisher erreichten Werte zu sehen. Das Produkt $n \cdot \tau_E$ muß bei ca. 13 keV nach [1] einen Wert von ca. $1.6 \cdot 10^{20} \text{sm}^{-3}$ überschreiten, um ein Zünden des Plasmas zu ermöglichen.

1.2 Magnetischer Einschluß

Der bisher technisch am weitesten entwickelte Weg, das Fusionsprodukt auf Werte zu erhöhen, die ein gezündetes Fusionsplasma ermöglichen, ist bei dem magnetischen Einschluß realisiert. Hierbei werden Magnetfelder dazu benutzt, die Teilchen in einem Plasma einzuschließen. Bei vernachlässigbarer Stoßwahrscheinlichkeit bleiben geladene Teilchen durch die Lorentzkraft auf Kreisbahnen mit ihrem charakteristischen Gytrationsradius an die Feldlinien gebunden und können sich nur parallel zu ihnen frei bewegen.

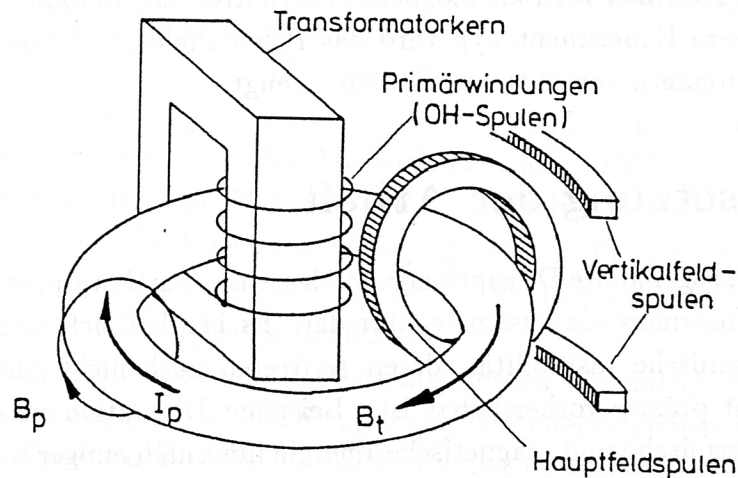


Abbildung 1.2: Grundsätzlicher Aufbau eines Tokamaks [1]

Die einfachste Magnetfeldkonfiguration, die Teilchen einschließen kann, ist eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte zylindersymmetrische Plasmasäule, in der in z-Richtung ein Strom im Plasma fließt. Durch den Strom wird ein um das Plasma laufendes zylindersymmetrisches Magnetfeld erzeugt. Dieser als z-Pinch bezeichnete Einschluß bildet jedoch ein instabiles Gleichgewicht und benötigt zusätzlich ein extern erzeugtes Magnetfeld in z-Richtung, um stabilisiert zu werden. Da ein unendlich ausgedehntes Plasma nicht realisierbar ist, muß diese Plasmasäule abgeschlossen werden. Dies geschieht durch einen Feldgradienten an den Enden der Säule, an dem die Teilchen

reflektiert werden [2]. Bei diesen als Spiegelmaschinen bezeichneten Experimenten hat man trotzdem Teilchen- und Energieverluste an den magnetischen Spiegeln. Schließt man die Enden der Säule zu einem Torus in sich selbst, kann man diese Verluste vermeiden.

Man gelangt zu einem toroidal fließenden Plasmastrom I_p , der ein poloidales Magnetfeld B_p erzeugt. Von externen Spulen wird ein dem Strom paralleles toroidales Feld B_t erzeugt. Das Plasma selbst stellt die Sekundärwicklung eines Transformators dar, in dem der Plasmastrom von einer entsprechenden Spule induziert wird. Gleichzeitig bewirkt dieser Strom die ohmsche Heizung des Plasmas, weshalb die Spule als OH-Spule (Ohmsche Heizung) bezeichnet wird. Das hier beschriebene Konzept führt zu Experimenten vom Typ eines Tokamaks. Bild 1.2 zeigt den grundsätzlichen Aufbau sowie die Feld- und Stromverteilung dieses Experiment-Typs [1]. In den sechziger Jahren wurde an dem Tokamak T-3 bei Moskau von ersten Erfolgen dieses Experiment-Typs berichtet. Das Wort Tokamak ist daher aus den russischen Worten „*TOroidalnaja KAmera s MAgnetnitnymi Katuschkami*“ zusammengesetzt, die man als „Toroidale Kammer mit magnetischen Spulen“ übersetzen könnte.

Neben dem Tokamak wird als mögliche Alternative das Stellarator-Konzept untersucht. Bei diesem Experiment-Typ wird das Poloidalfeld nicht von einem Strom im Plasma selbst, sondern von externen Spulen erzeugt.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Stromabbrüche, sogenannte Disruptionen, stellen eines der Hauptprobleme für die Realisation eines Tokamaks als Fusionsreaktor dar. Es handelt sich hierbei um eine magnetohydrodynamische Instabilität, deren Auftreten noch nicht gänzlich verstanden und daher nicht präzise vorhersagbar ist. Bei einer Disruption wird die im Plasma gespeicherte thermische und magnetische Energie innerhalb einiger ms freigesetzt. Die dabei gemäß der Lenzschen Regel auftretenden Induktionsspannungen erzeugen in der metallischen Stützkonstruktion starke Induktionsströme. Diese üben nun ihrerseits im externen Magnetfeld große Lorentzkräfte auf die Konstruktion aus. Diese Kräfte erreichen teilweise eine Stärke, die das Experiment nachhaltig beschädigen können. Es treten zusätzliche Belastungen durch die freiwerdende thermische Energie des Plasmas auf.

Es ist demzufolge wünschenswert, Disruptionen gänzlich zu vermeiden oder zumindest den Strom kontrolliert auf einer langsameren Zeitskala zu reduzieren, um die Belastung der Maschine gering zu halten. Dazu will man eine Möglichkeit haben, eine bevorstehende Disruption frühzeitig zu erkennen, um geeignete Maßnahmen einleiten zu können, diese zu verhindern oder ihren Verlauf zu mildern.

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, mit statistischen Methoden am Tokamak ASDEX Upgrade Vorboten (Precursor) für Disruptionen herauszufinden. Hierzu wurde die „*principal component analysis*“ (PCA) bzw. die „*singular value decomposition*“ (SVD) angewendet, um charakteristische Vorgänge vor und während einer Disruption aufzuspüren. Insbesondere sollte versucht werden, eventuell vorhandene Korrelationen zu finden, die charakteristisch für Disruptionen sind.

In [3] bzw. [4] wird das Auftreten von charakteristischen magnetohydrodynamischen Instabilitäten (Moden) bei einer Dichtelimit-Disruption beschrieben. Hierzu wurde an ASDEX mittels PCA-Analyse von magnetischen Messungen das Modenverhalten untersucht. Die Moden, die zusätzlich den Einschluß verschlechtern, treten teilweise erst sehr kurz (≤ 10 ms) vor der Disruption auf und sind somit nicht immer als Precursor geeignet. Man hat daher den Wunsch, einen davon unabhängigen Indikator zu finden, um eine Entladung bei hoher Dichte zu gewährleisten.

Mittels der Transformation der SVD ist es möglich, Meßdaten von vielen verschiedenen Meßgrößen in einem neuen niedrigdimensionaleren Koordinatensystem darzustellen. Dieses System ist der Struktur der Daten, d.h. den darin vorliegenden Korrelationen, optimal angepaßt. In ihm werden die Daten nun nach spezifischen Vorgängen getrennt und ihrem Informationsgehalt gemäß sortiert repräsentiert. Es zeigt sich, daß man bei korrekter Normierung der Eingangsdaten bestimmte Ereignisse separieren, bzw. störende Anteile (Rauschen) eliminieren kann. Darüber hinaus ergibt sich die Möglichkeit der Datenreduktion bei der Abspeicherung ausgewählter Signalanteile. Es steht somit eine standardmäßige Methode zur Datenanalyse von hochdimensionalen Eingangsgrößen von vielen Meßdaten zur Verfügung. Das im Rahmen dieser Arbeit erstellte Programm für die SVD-Analyse wurde neben den hier vorgestellten Resultaten erfolgreich zur Analyse weiterer Daten benutzt [5].

Für die eigentliche Disruptionsfrüherkennung werden die mittels SVD transformierten Meßdaten auf abgeleitete, die Disruptionsgefahr charakterisierende, Indikatorgrößen abgebildet. Diese Abbildungsvorschrift wird hierbei durch eine Funktions-Parametrisierung mittels Regressionsanalyse anhand bereits abgelaufener Entladungen bestimmt. Dieser Zusammenhang wird dann während neuer Entladungen dazu benutzt, die Indikatorgrößen noch während des Schusses selbst zu bestimmen, um die Disruptionsgefahr vorherzusagen. Die in dieser Arbeit bereitgestellten Indikatoren sollen an ASDEX Upgrade zu einem späteren Zeitpunkt online zur Disruptionsfrüherkennung verwendet werden.

Kapitel 2

Physikalische Grundlagen

In diesem Kapitel soll ein Bild von den physikalischen Grundlagen eines Fusionsexperiments vom Typ Tokamak gegeben werden. Es sollen die im weiteren Verlauf betrachteten Vorgänge von verschiedenen Typen von Plasmaentladungen beschrieben werden. Insbesondere werden Instabilitäten unter dem Gesichtspunkt von Disruptionen erläutert.

2.1 Tokamak-Prinzip

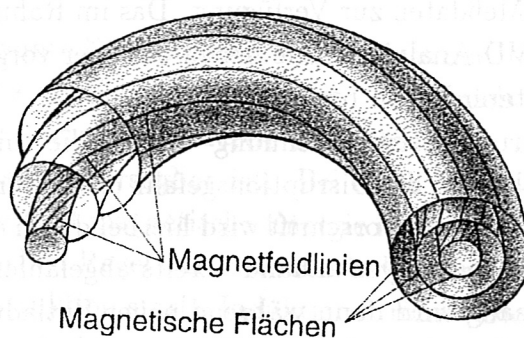


Abbildung 2.1: *Flußflächen und Feldlinien eines Tokamaks*

In der Einleitung wurde das grundsätzliche Prinzip eines Tokamaks dargestellt. Nun soll diese Konfiguration näher beschrieben werden. Durch die Überlagerung des äußeren toroidalen Hauptfeldes B_t und des von dem toroidalen Plasmastrom I_p erzeugte poloidale Magnetfeld B_p ergibt sich eine helikal um das Plasmazentrum gewundene Magnetfeldstruktur. Diese Feldlinien bilden ein ineinander geschachteltes System von Flächen mit konstantem poloidalen magnetischen Fluß Ψ , deren Struktur in Bild 2.1

zu sehen ist. Durch die Krümmung zu einem Torus ergibt sich eine Asymmetrie des toroidalen Hauptfeldes zwischen der Torusinnenseite mit hoher Feldstärke und der Torusaußenseite mit niedriger Feldstärke.

In einem Torus-Koordinatensystem ist das Plasma durch den großen Plasmaradius R , den kleinen Plasmaradius r , bzw. bei elliptisch elongiertem Plasma allgemein durch den kleinen Plasmaradius a und die halbe Plasmahöhe b charakterisiert. Daraus läßt sich die Elongation $\kappa = a/b$ und das Aspektverhältnis $A = R/r$, bzw. $A = R/a$ ableiten.

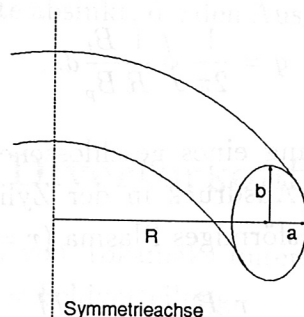


Abbildung 2.2: Prinzipielle Form eines elliptisch elongiertem Plasmas

Eine näherungsweise Beschreibung des Plasmas ist durch die Magnetohydrodynamik (MHD) gegeben. Die MHD faßt das Plasma als eine leitende Flüssigkeit in Magnetfeldern auf. Das Plasma wird durch die hydrodynamischen Variablen einer Flüssigkeit, d.h. durch Dichte n , Geschwindigkeit \vec{v} und Druck p beschrieben. Für annähernd stationäre Vorgänge werden zusätzlich die zeitlichen Ableitungen in den Maxwell-Gleichungen vernachlässigt. In der idealen MHD wird im Ohmschen Gesetz darüber hinaus ein verschwindender Widerstand, bzw. eine unendliche Leitfähigkeit angenommen.

Die in dem heißen Plasma befindlichen geladenen Teilchen erzeugen durch ihre thermische Bewegung einen Druck p . Dieser wird durch die effektiv wirksamen Kräfte derart kompensiert, daß die Teilchen in dem Plasma eingeschlossen bleiben. Der Druck wird durch die in dem Plasma auftretenden Stromdichten \vec{j} und Magnetfelder \vec{B} bilanziert. Durch die folgenden Gleichungen wird die ideale stationäre MHD beschrieben.

$$\vec{\nabla} p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.3)$$

Gleichung (2.1) beschreibt das Kräftegleichgewicht, Gleichung (2.2) ist das Ampèresche Gesetz und beschreibt den Zusammenhang zwischen Stromdichte und erzeugtem Ma-

gnetfeld und Gleichung (2.3) beschreibt, daß die Magnetfeldlinien in sich geschlossen sind.

Aus der idealen MHD folgt, daß sich eine einmal eingestellte Feldkonfiguration nicht ändern kann, d.h. die Felder sind in dem als Flüssigkeit betrachteten Plasma eingefroren. Die Topologie der Flußflächen kann sich somit nicht mehr ändern.

Jede Flußfläche mit einem bestimmten Fluß Ψ wird durch den Sicherheitsfaktor $q(\Psi)$ charakterisiert, der als das Verhältnis zwischen toroidalem und poloidalem Umläufen der Feldlinien definiert werden kann

$$q = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{1}{R} \frac{B_t}{B_p} ds. \quad (2.4)$$

Die Integration ist hierbei entlang eines geschlossenen, poloidalen Weges durchzuführen. Betrachtet man diesen Ausdruck in der Zylindernäherung, d.h. für großes Aspektverhältnis $A \gg 1$ und kreisförmiges Plasma ($r = a = b$), so erhält man

$$q = \frac{r}{R} \frac{B_t}{B_p} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}. \quad (2.5)$$

Eine anschauliche Interpretation für q ist somit das Verhältnis der Anzahl der toroidalen Feldumläufe M zu der Anzahl der poloidalen Feldumläufe N einer Magnetfeldlinie. Geht man von einem sich zum Plasmazentrum hin zuspitzenden Stromprofil aus, so ergibt sich eine Abnahme des Sicherheitsfaktors q zum Zentrum hin. Die Feldlinien sind also, wie in Bild 2.1 dargestellt, zum Zentrum hin zunehmend verschraubt. Bei gleichem Plasmastrom und somit gleichem Poloidalfeld ist man bestrebt, ein möglichst kleines q zu verwenden, durch welches der Einschluß gerade noch gewährleistet ist. Der Grund liegt in dem technischen Aufwand, hohe Toroidalfelder zu erzeugen, da die Anzahl der toroidalen Umläufe und somit auch q mit diesem Feld anwächst.

Neben den ergodischen Flußflächen, auf welchen sich eine Feldlinie niemals in sich selbst schließt, sondern nur beliebig nahe an ihren Ausgangsort zurückkehrt, gibt es rationale oder resonante Flächen. Auf diesen Flächen schließen sich die Feldlinien nach einer endlichen Zahl von Umläufen. Der Sicherheitsfaktor q nimmt rationale Werte an, da M und N in diesen Fällen ganzzahlig sind.

Multipliziert man Gleichung (2.1) mit \vec{B} , bzw. \vec{j} gelangt man zu $\vec{B} \vec{\nabla} p = 0$, bzw. $\vec{j} \vec{\nabla} p = 0$. Dies besagt, daß sich die Feldlinien von \vec{B} und \vec{j} auf Flächen mit konstanten Druck p , den Flußflächen befinden. Der Druck p ist somit eine Konstante auf Flußflächen. Man kann sofort eine weitere Konstante angeben, wenn man die Teilchendichte n und die Temperatur T mit dem Druck in Verbindung bringt

$$p \sim nT, \quad \text{bzw.} \quad p \sim n_e T_e + \sum_i n_i T_i, \quad (2.6)$$

wobei n_e und T_e Dichte und Temperatur der Elektronen, und n_i und T_i Dichte und Temperatur der beteiligten Verunreinigungen beschreiben. Das Produkt aus Dichte und Temperatur ist somit auf Flußflächen konstant. Da die Wärmeleitfähigkeit entlang Feldlinien $\kappa_{\parallel} \sim T^{5/2}$ für hohe Temperaturen hohe Werte annimmt, ist die Temperatur in diesem Fall ebenfalls konstant. Hohe Werte der Wärmeleitfähigkeit κ_{\parallel} bedeutet hierbei, daß Temperaturgradienten entlang Feldlinien nahezu instantan ausgeglichen werden. Es folgt, daß auch die Dichte bei hohen Temperaturen konstant ist. In kalten Bereichen des Plasmas ist wiederum nur das Produkt aus n und T eine Konstante, da die Wärmeleitfähigkeit auf Werte absinkt, die den Ausgleich von Temperaturgradienten verlangsamt.

2.2 Limiter- und Divertorkonfiguration

Bei der praktischen Realisation von Tokamaks unterscheidet man grundsätzlich zwei verschiedene Konfigurationen der Feldverteilung.

Bei Limiter-Tokamaks berührt das heiße Plasma direkt eine dafür vorgesehene Stelle an der Gefäßinnenwand, die Limiter genannt wird. Der Limiter, der die letzte geschlossene Fläche definiert, ist durch Zerstäubung von Wandmaterial eine Quelle für Verunreinigungen, die von da aus schnell und direkt in das heiße Kernplasma gelangen können, wo sie durch Linienstrahlung der nicht voll ionisierten Atome das Plasma stark abkühlen.

An ASDEX, dem Vorgängerexperiment von ASDEX Upgrade, wurde zum ersten Mal das Divertorkonzept eingesetzt. Das heiße Plasma wird berührungslos durch eine magnetische Flußfläche begrenzt. Diese als Separatrix bezeichnete Flußfläche trennt das innere heiße Kernplasma von dem äußeren offenen Bereich des Plasmas, in dem die Flußflächen auf den Divertorplatten oder an einer anderen Stelle des Gefäßes enden. Diese letzte Flußfläche hat einen X-Punkt, in dem das poloidale Feld B_p durch zusätzliche Poloidalfeldspulen zum Verschwinden gebracht wird. Das eigentliche Kernplasma hat somit keinen direkten Kontakt mehr zu dem Gefäß und kann nicht direkt durch Zerstäubung von Wandmaterial verunreinigt werden. Durch den großen räumlichen Abstand des Divertors vom Kernplasma können weniger Fremdatome direkt zurück in das Plasma gelangen. Im Divertorbereich werden neutrale Teilchen, die sonst von Magnetfeldern ungehindert in das Plasma gelangen können, zusätzlich durch starke Pumpen abgesaugt, bevor sie wieder teilweise ionisiert werden und zur Verunreinigung des Plasmas beitragen.

Der Bereich außerhalb der Separatrix wird als „scrape-off layer“ (SOL) bezeichnet. Entlang der Feldlinien in der kälteren SOL kann sich aufgrund der reduzierten Wärmeleitfähigkeit ($\kappa_{\parallel} \sim T^{5/2}$) und der langen Strecken der Feldlinien zum Divertor ein

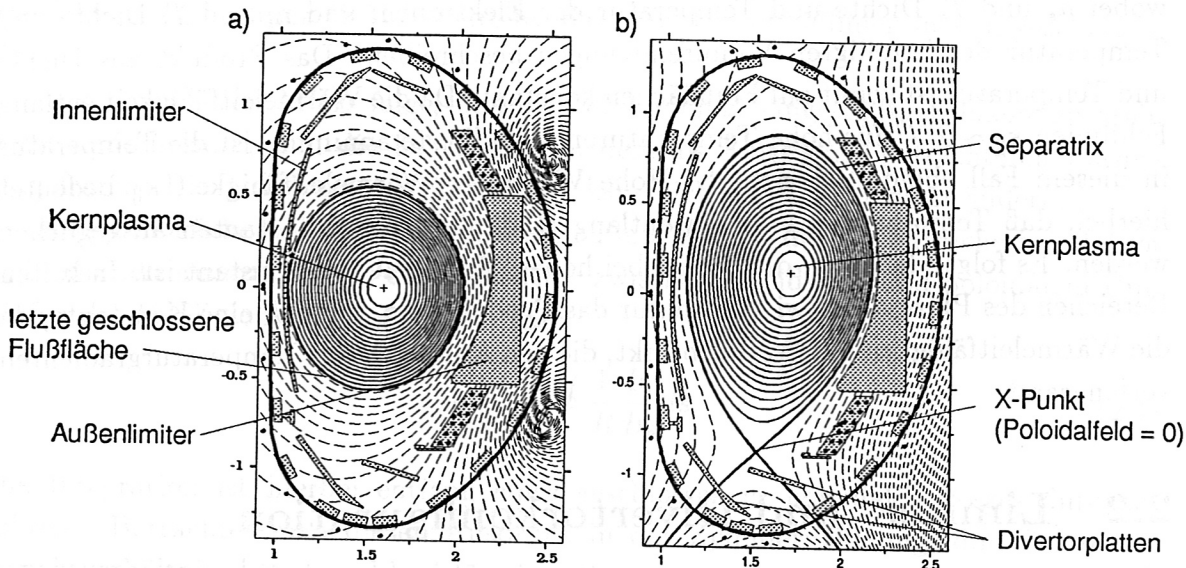


Abbildung 2.3: Poloidaler Querschnitt von ASDEX Upgrade : a) kreisförmiges Limiter-Plasma b) elliptisch elongiertes Divertor-Plasma

Temperaturgradient aufrechterhalten. Der Bereich um die Divertorplatten ist kälter als der Bereich, der das Kernplasma umgibt. Da in kalten Plasmaregionen das Produkt aus Dichte n und Temperatur T weiterhin eine Flußflächenkonstante bleibt, nimmt die Dichte im Divertorbereich hohe Werte, im Bereich des Kernplasmas niedrige Werte an. Das heiße Kernplasma wird somit von einer Art heißem Mantel niedriger Dichte umgeben, während das Plasma vor den Divertorplatten kühler und dichter gehalten wird. Zusätzlich wird dadurch die Erosion der Prallplatten erniedrigt.

2.3 Inselbildung und Moden

In der nicht-idealen oder resistiven MHD wird im Gegensatz zur idealen MHD ein endlicher elektrischer Widerstand für das Plasma zugelassen. Sie sagt für rationale Flächen Instabilitäten, sogenannte Moden voraus. Die elektrische Leitfähigkeit eines Plasmas läßt sich näherungsweise durch die Leitfähigkeit nach Spitzer beschreiben

$$\sigma = \frac{6\sqrt{3}\pi\epsilon_0^2(kT_e)^{3/2}}{Z_{eff}e^2\sqrt{m_e}\ln\Lambda} \sim \frac{T_e^{3/2}}{Z_{eff}\ln\Lambda}. \quad (2.7)$$

Die starre Verknüpfung zwischen Plasmaflüssigkeit und Flußflächen-Topologie wird durch den nun endlichen Widerstand aufgehoben. Feldlinien können aufgebrochen werden und sich in einer neuen Form reorganisieren, d.h. sie schließen sich neu zusammen (Rekonnektion). Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Tearing Moden. Die

Flußflächentopologie kann sich somit ändern [6]. Auf den resonanten Flächen bilden sich magnetische Inseln, von denen in Bild 2.4 ein poloidaler Querschnitt zu sehen ist. In toroidaler Richtung winden sich die Inseln wie die ursprünglichen Feldlinien um das Plasmazentrum. Treibende Kraft für das Aufbrechen und die Neuformation der Flußflächen ist der radiale Gradient des Stromprofils $\vec{j}(r)$. Die Inselbildung geht mit dem Aufbau eines Störstroms einher, der, wie die Inseln, die gleiche helikale Struktur wie die Feldlinien der resonanten Fläche aufweist. Der Störstrom und die Inselstruktur selbst sind in Resonanz mit der ursprünglichen Feldstruktur.

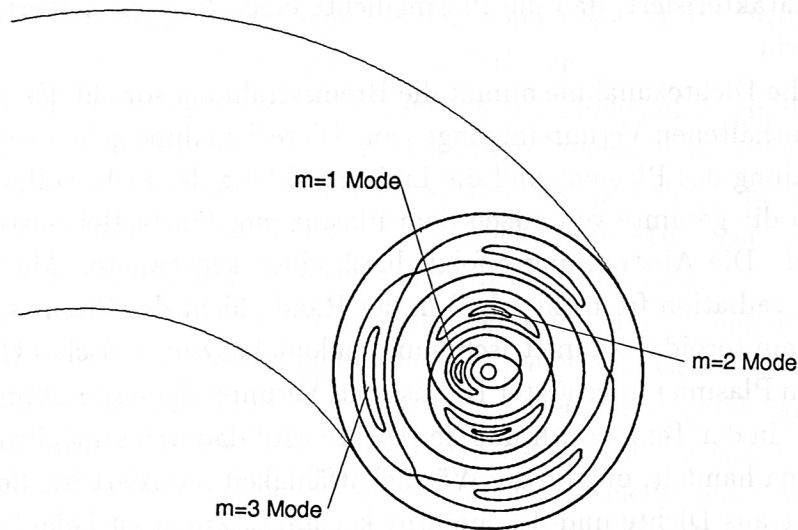


Abbildung 2.4: Die drei ersten möglichen Inselstrukturen ($m = 1, 2, 3$)

Da der Störstrom und somit die Störung an das im Plasma befindliche Elektronengas gekoppelt ist, wird diese Inselstruktur durch die diamagnetische Elektronendrift als Ganzes in Rotation versetzt [4]. Die rotierende Inselstruktur mit ihrem Störstrom und dem daraus resultierenden Störfeld kann man anhand der Induktionsspannungen in magnetischen Meßspulen beobachten.

Durch die Reorganisation der Flußflächenstruktur wird auch das Strahlungsmuster der Verunreinigungen auf und in der Umgebung der resonanten Fläche mit der Mode verändert. Diese Veränderung der Emission der Inselstruktur mit ihrer Rotationsbewegung kann in Kameras, die im Bereich der weichen Röntgenstrahlung empfindlich sind, beobachtet werden. Die Soft-X-Ray Kameras stehen somit als weiteres Beobachtungsmittel von MHD-Moden zur Verfügung [7].

Die Inselstruktur, d.h. die Mode, ist ein Bereich erhöhten radialen Transportes. Durch die Reorganisation der Feldlinien können sich Teilchen an Feldlinien gebunden in radialer Richtung senkrecht zur ursprünglichen Flußfläche bewegen und damit Energie von inneren heißen zu äußeren kalten Bereichen transportieren. Es liegt insgesamt

ein erhöhter radialer Teilchen- und Energietransport vor, wodurch der Einschluß entsprechend verschlechtert wird.

2.4 Instabilitäten und Disruptionen

Die folgende Darstellung der Vorgänge vor und während einer Dichtelimit-Disruption (DL-Disruption) hält sich im wesentlichen an [3] und [4]. Eine DL-Disruption wird dadurch charakterisiert, daß die Plasmadichte einen kritischen Wert, das Dichtelimit (DL), erreicht.

Durch die Dichtezunahme nimmt die Bremsstrahlung sowohl des Plasmas, als auch der darin enthaltenen Verunreinigungen zu. Diese Zunahme geht so weit, bis durch die Bremsstrahlung des Plasmas und die Linienstrahlung der nicht voll ionisierten Verunreinigungen die gesamte von außen dem Plasma zugeführte Heizleistung wieder abgestrahlt wird. Die Abstrahlung erfolgt durch einen sogenannten Marfe (multifaceted asymmetric radiation from the edge) in der Randschicht des Plasmas. Es handelt sich hierbei um ein toroidal symmetrisches und poloidal asymmetrisches Gebiet von kaltem und dichtem Plasma mit erhöhter Brems- und Verunreinigungsstrahlung. Die poloidale Asymmetrie in der Temperatur und der Dichte wird dadurch ermöglicht, daß es sich um kaltes Plasma handelt, in dem die Wärmeleitfähigkeit reduziert ist. Somit ist nur noch das Produkt aus Dichte und Temperatur konstant. Zunächst befindet sich der Marfe in der Scrape-Off Layer im Bereich des Divertors. Beim Marfe liegt die Instabilität vor, daß mit abnehmender Temperatur die emittierte Strahlungsleistung zunimmt, d.h. es gilt $\frac{dE_{\text{abgestrahlt}}}{dT} < 0$.

Das Plasma kann den erhöhten Energieverlust durch Strahlung nicht mehr aus der Heizung decken und verzehrt innere Energie, um den Verlust zu kompensieren. Hierbei spitzt sich das Temperaturprofil zu, da im wesentlichen aus dem Randbereich Energie abgestrahlt wird. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Spitzerleitfähigkeit (Gleichung (2.7)) spitzt sich gleichzeitig auch das Stromprofil zu. Insgesamt wird die Temperatur am Rand gegenüber dem Zentrum erniedrigt.

Das kalte und dichte Gebiet am Plasmarand, d.h. der Marfe, dehnt sich nun über den X-Punkt in das Kernplasma aus. Von da aus bewegt er sich auf der inneren Hochfeldseite weiter in das Kernplasma. Durch die damit verbundene Abkühlung des Randbereichs spitzt sich das Stromprofil noch stärker zu, da durch den nun erhöhten elektrischen Widerstand (Gleichung (2.7)) im Randbereich weniger Strom fließen kann. Zu diesem Zeitpunkt bildet sich auf der entsprechenden resonanten Flußfläche mit dem hohen Stromgradienten eine rotierende $m = 2, n = 1$ Inselstruktur aus. Die Amplitude der Mode wächst weiter an, bis ihre Amplitude so hohe Werte annimmt, daß die Wechselwirkung der Mode mit dem Gefäß wichtig wird. Die Mode wird im-

mer stärker abgebremst und schließlich durch externe Störfelder abrupt zum Stillstand gebracht („mode-locking“, siehe [4]).

Zu diesem Zeitpunkt findet eine erste „minor disruption“ statt, bei der durch den erhöhten Wärmetransport über die Inselstruktur hinweg das zugespitzte Temperaturprofil innerhalb der $q = 2$ Fläche wieder ausgeglichen werden kann. Bei einer Minor Disruption stellt sich schnell die ursprüngliche Energieverteilung und das ursprüngliche Temperatur- und Stromprofil wieder ein, indem Energie über die $q = 2$ Fläche ausgeworfen wird. Der Plasmastrom sinkt kurzzeitig ab, kann sich jedoch wieder auf seinen ursprünglichen Wert erholen. Es folgt eine Sequenz von einigen Minor Disruptions, bei welchen sich die bisher beschriebenen Schritte wiederholen.

Tritt bei einer Minor Disruption zusätzlich eine $m = 1$ Mode auf, beginnt die eigentliche Disruption, die „major disruption“. Es kommt zu einem schlagartigen Energieverlust auf einer Zeitskala von weniger als 1 ms. Der Verlust erfolgt durch Emission aus dem Plasmazentrum in Form einer $m = 1$ ähnlichen Struktur. Die Temperatur- und Stromprofile können sich von diesem Ereignis nicht mehr erholen.

Nach der Phase der schnellen Energieabstrahlung besitzt das Plasma aufgrund der Temperaturerniedrigung einen hohen elektrischen Widerstand (vgl. Gleichung (2.7)) und ferner eine hohe Verunreinigungskonzentration. Der Widerstand kann das 10^2 bis 10^3 -fache des normalen Wertes betragen. Der Strom selbst hat sich bis jetzt nur wenig geändert und fließt nun in einem Plasma mit hohem elektrischen Widerstand. Da er induktiv durch das vom Plasmastrom erzeugte Poloidalfeld weiter getrieben wird (Lenzsche Regel), fällt er nicht schlagartig ab und es treten entsprechend hohe ohmsche Heizleistungen auf. Die hierbei in den leitenden Gefäßstrukturen auftretenden Induktionsströme üben ihrerseits in dem weiterhin anliegenden Toroidalfeld der Hauptspulen starke mechanische Kräfte auf die Konstruktion des Experiments aus. Die weiterhin vorhandene externe Heizleistung wird durch entsprechende Verunreinigungsstrahlung kompensiert.

Neben den beschriebenen Dichtelimit-Disruptionen gibt es zum Beispiel niedrig- q Disruptionen, die durch einen schnelleren Verlauf charakterisiert sind. Die Phase mit den Minor Disruptions tritt nicht auf, sondern es kommt sofort zu einer Disruption mit einer gelockten $m = 2$ Mode, durch welche die zugespitzten Profile nicht mehr ausgeglichen werden und die eigentliche Major Disruption eingeleitet wird.

2.5 Standard-Dichtelimit-Entladung

Bild 2.5 zeigt eine typische Dichtelimit-Entladung (#3062) an ASDEX Upgrade, bei der die liniengemittelte Elektronendichte \bar{n}_e durch Gasblasen kontinuierlich erhöht wird, bis es zur Disruption kommt. Diese standardisierten Entladungen werden zur Bestim-

mung des Dichtelimits, d.h. des Wertes der maximal erreichbaren Dichte benutzt. Sie geben Aufschluß über den Zustand der Maschine (Konditionierung). Man benutzt einen Plasmastrom von $I_p = 600$ kA und ein toroidales Hauptfeld $B_t = -2.0$ T, woraus sich ein q -Wert bei 95 % des poloidalen magnetischen Flusses von $q_{95} = 5$ ergibt. Diese Standard-Entladungen werden nur durch ohmsche Heizung, d.h. durch den Plasmastrom geheizt.

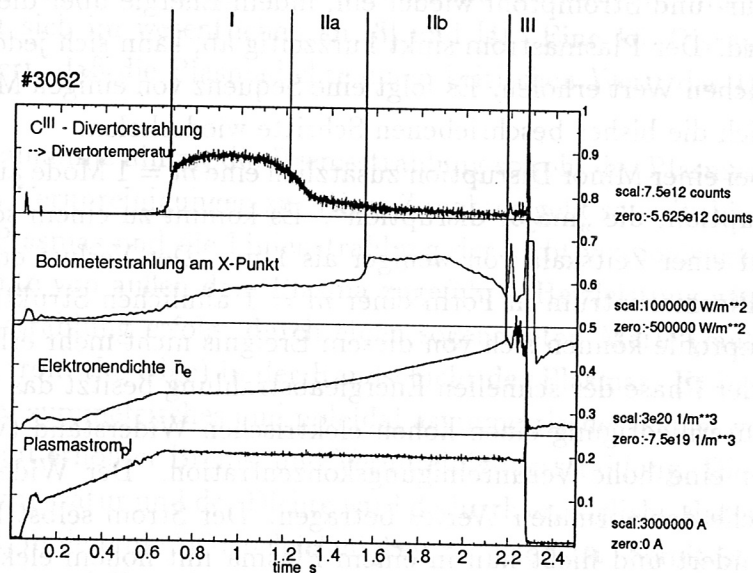


Abbildung 2.5: Typische Disruption mit Kennzeichnung der einzelnen Phasen

Anhand der Standard-Dichtelimit-Entladung lassen sich nach [8] vier charakteristische Phasen der Entladung erkennen.

- Phase I: niedrige Elektronendichte, heißer Divertor ($T_e^{Div.} \geq 10eV$)
- Phase IIa: mittlere bis hohe Elektronendichte, kalter Divertor, Marfe unterhalb X-Punkt (Divertormarfe)
- Phase IIb: mittlere bis hohe Elektronendichte, kalter Divertor, Marfe oberhalb X-Punkt im Kernplasma
- Phase III: hohe Elektronendichte, Marfe wandert schnell auf der Torusinnenseite auf und ab

Der Beginn der Phase I ist durch die Ausbildung der Divertorkonfiguration des Plasmas bestimmt. Erst ab diesem Zeitpunkt werden die Entladungen im weiteren betrachtet. Als Maß für die Divertortemperatur wird die liniengemittelte Lichtemission direkt oberhalb der Divertorplatten im Licht der C^{III} -Linie, d.h. des zweifach ionisierten Kohlenstoffs, herangezogen. Der Wendepunkt dient hierbei als Trennung zwischen

den ersten beiden Phasen. Die Unterscheidung zwischen den Phasen IIa und IIb erfolgt anhand einer Stufe in einem Sichtstrahl, der durch den X-Punkt läuft. Hierbei wird die Gesamtstrahlungsleistung mit einem Bolometer gemessen. Der Übergang in die Phase III ist durch eine starke Oszillation in der liniengemittelten Elektronendichte \bar{n}_e charakterisiert. Diese Oszillation wird durch den zur Torusinnenseite wandernden Marfe verursacht. Der Wert von \bar{n}_e vor dem Einsetzen der Oszillation durch den Marfe definiert die maximal erreichte Dichte der Entladung.

2.6 H-Mode und ELMS

In Abschnitt 2.2 wurde die Divertorkonfiguration mit ihrer Möglichkeit zur Reduktion der Verunreinigungskonzentration des Plasmas vorgestellt.

Durch die reduzierte Verunreinigungskonzentration und die hohen Temperaturen in der SOL in der Nähe Separatrix wurde ein neues Plasmaregime, die *high-confinement-mode* entdeckt [9]. Dieses als H-Mode bezeichnete Einschlußregime zeichnet sich durch eine um den Faktor 2 bessere Energieeinschlußzeit aus. Das Fusionsprodukt wird allerdings um den Faktor im Quadrat, also um den Faktor 4 erhöht, da der Einschluß in Form von τ_E direkt und über das Produkt aus n und T durch den ebenfalls erhöhten Energieinhalt indirekt eingeht.

Der Grund für den erhöhten Einschluß besteht in einer Transportbarriere in der Randschicht innerhalb des Kernplasmas [10]. In der Randschicht bilden sich dadurch hohe Temperatur- und Dichtegradienten aus, die nun ihrerseits eine neue Instabilität, nämlich die „edge localized mode“ (ELM) treiben. Es handelt sich hierbei um eine Instabilität, bei der Materie und Energie aus der Randschicht des Kernplasmas über die Separatrix hinweg aus dem Plasma ausgeworfen und von dort in der SOL zum Divertor transportiert wird. Diese Instabilität bietet jedoch die Möglichkeit, im Plasma durch den erhöhten Einschluß angehäufte Verunreinigungen zu entfernen und das Plasma so zu reinigen. Erst durch diesen Vorgang der Plasmareinigung werden stationäre H-Mode Entladungen möglich [11, 12].

Kapitel 3

Beschreibung der statistischen Auswertung

Die statistische Auswertung von Meßsignalen stellt das eigentliche Werkzeug dieser Arbeit dar. In diesem Kapitel wird eine Einführung in die benutzten Methoden und deren Anwendung gegeben. Im wesentlichen wurde auf die Principal Component Analysis (PCA), bzw. deren Verallgemeinerung, die Singular Value Decomposition (SVD) zurückgegriffen. Zum Ziel der Disruptionsfrüherkennung wurde eine Funktions-Parametrisierung mittels linearer Regression durchgeführt. Im Anhang B wird detailliert auf die mathematischen Grundlagen eingegangen.

3.1 Struktur der Daten

Während einer Plasmaentladung wird eine Vielzahl von verschiedenen Meßdaten aufgenommen. Man kann die Daten zu einem p -dimensionalen Meßvektor $\vec{x}_i = \vec{x}(t_i)$ zusammenfassen, wenn man zu jedem Zeitpunkt t_i p Größen mißt. Betrachtet man die Messungen von N Zeitpunkten, so gelangt man zu N p -dimensionalen Meßvektoren \vec{x}_i , die man in einer entsprechenden $N \times p$ - Meßmatrix \mathbf{X} zusammenfassen kann

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Np} \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Der Spaltenindex gibt das betrachtete Meßsignal, der Zeilenindex den Zeitpunkt der Messung an: $x_{ij} = x_j(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, p$. Der Rang dieser Matrix ist durch das Minimum der beiden Indizes bestimmt, d.h. $\text{Rang}(\mathbf{X}) \leq \min(N, p)$. Im Ver-

lauf dieser Arbeit werden häufig mehr Zeitpunkte als Meßgrößen ($N \geq p$) betrachtet, weshalb der Rang meist durch p gegeben ist.

3.2 Principal Component Analysis, Singular Value Decomposition

Die Principal Component Analysis bzw. die Singular Value Decomposition hat zwei grundsätzliche Aufgaben. Zum einen werden nicht offensichtliche Korrelationen in einem Datensatz aufgespürt, die dann herauspräpariert werden können, um anschließend die physikalische Bedeutung zu analysieren. Dies geschieht dadurch, daß ein neues Koordinatensystem gesucht wird, in dem die Daten in ihre maximal korrelierten Anteile aufgespalten werden. Die einzelnen Anteile haben in diesem System darüber hinaus keine Korrelationen untereinander mehr. Zum anderen bietet dieses Verfahren die Möglichkeit der Datenreduktion und Filterung, indem nur einzelne Anteile betrachtet werden.

3.2.1 Geometrische Interpretation

Zunächst soll der geometrische Aspekt der PCA betrachtet werden. Man versucht, ein neues Koordinatensystem zu finden, in dem die Daten durch die Projektion auf möglichst wenige Achsen darstellbar sind. Es wird gefordert, daß die Abstände der Datenpunkte von den Achsen minimal, bzw. die Projektionen auf die Achsen maximal werden. Beide Forderungen sind zueinander äquivalent. Zusätzlich wird Orthogonalität für das neue System verlangt.

Anhand eines einfachen Zahlenbeispiels soll die Aufgabenstellung veranschaulicht werden. Man betrachte folgende 3×2 Matrix \mathbf{X} , die für zwei Meßgrößen ($p = 2$) drei Messungen an drei Objekten ($N = 3$) enthält

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

In Bild 3.1 sind die $N = 3$ Meßpunkte in einem $p = 2$ dimensionalen Koordinatensystem aufgetragen. Durch die Punkte läßt sich leicht eine Achse x'_1 legen, auf der die Projektion aller (drei) Punkte auf die Achse maximal wird. Diese Richtung legt die erste neue Koordinatenachse fest. Aus der Forderung nach Orthogonalität der Achsen folgt die Richtung der zweiten Achse x'_2 direkt. Bereits im Dreidimensionalen wird die zweite Achse im wesentlichen wieder durch die Forderung der maximal werdenden

Projektion festgelegt. Erst die dritte und letzte Achse wird wieder ausschließlich durch die Orthogonalität bestimmt.

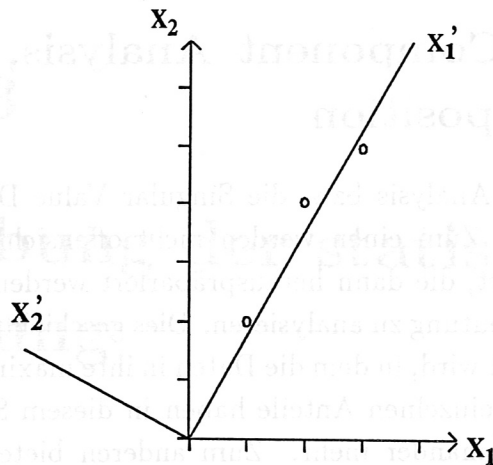


Abbildung 3.1: Veranschaulichung der Koordinatentransformation der PCA

Baut man das gesuchte System sukzessive auf diese Weise auf, gelangt man zu einem System in dem die Achsen jeweils die Gerade der besten Näherung, die Ebene der besten Näherung, den Raum der besten Näherung, bzw. allgemein den k -dimensionalen Hyperraum der besten Näherung bilden. Ein Maß für die Näherung ist hierbei die mittlere quadratische Projektion aller $N = 3$ Punkte auf die Koordinatenachsen.

Betrachtet man allgemein N Meßvektoren in einem p -dimensionalen Raum, dem Raum der Meßobjekte, in dem für jedes Meßobjekt (Zeilenvektor, Messung von p Größen zu einem Zeitpunkt) ein Punkt aufgetragen wird, so wird in Anhang B gezeigt, daß die gesuchten Basisvektoren die normierten Eigenvektoren \vec{a}_i der $p \times p$ -Matrix

$$S = X^T X \quad (3.2)$$

sind. Diese p Eigenvektoren werden im weiteren als die räumlichen Eigenvektoren bezeichnet. Die Achsen des neuen Systems werden noch in absteigender Größe der zugehörigen Eigenwerte λ_i umsortiert, da die Eigenwerte gerade die mittlere quadratische Projektion der Daten auf die neuen Achsen angeben (siehe Anhang B, Gleichung B.11). Die Projektion eines Meßvektors \vec{x}_i auf den j -ten Eigenvektor \vec{a}_j liefert eine Zahl, die als die j -te Hauptkomponente bezüglich des i -ten Meßpunktes bezeichnet wird

$$x'_{ij} = \vec{a}_j^T \vec{x}_i.$$

Sie ist nichts anderes als die Darstellung der Daten in dem neuen Koordinatensystem. Will man die gesamte Matrix in das neue System überführen und auch wieder zurück-

transformieren, benutzt man insgesamt folgende Transformationen

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{A}^T, \quad (3.3)$$

wobei die $p \times p$ Matrix \mathbf{A} spaltenweise die Eigenvektoren mit absteigender Reihenfolge der Eigenwertgröße enthält. Die Rücktransformation wird entsprechend ausgeführt. Insgesamt führt man eine Hauptachsentransformation der Matrix \mathbf{S} durch

$$\mathbf{S}' = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}.$$

Man kann die Daten ebenso in einem N -dimensionalen Raum, dem Raum der Meßgrößen, in dem für jede Meßgröße (Spaltenvektor, Messung einer Größe zu N Zeitpunkten) ein Punkt angetragen wird, betrachten. Die Basisvektoren sind hier die normierten Eigenvektoren \vec{b}_i der $N \times N$ Matrix

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T, \quad (3.4)$$

die in der Matrix \mathbf{B} zusammengefaßt werden. Für den Rang von \mathbf{T} gilt $\text{Rang}(\mathbf{T}) = p$, d.h. man benötigt auch in diesem Raum nur p Eigenvektoren, um die Daten vollständig darstellen zu können. Diese p Eigenvektoren werden im weiteren als die zeitlichen Eigenvektoren bezeichnet. Es läßt sich zeigen, daß die zugehörigen p Eigenwerte in beiden Räumen identisch sind und sich die Eigenvektoren ineinander überführen lassen

$$\vec{b}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{X} \vec{a}_k,$$

$$\vec{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \mathbf{X}^T \vec{b}_k.$$

Die Hauptkomponenten $\mathbf{X}\vec{a}_k$ (Projektion der Daten auf die räumlichen Eigenvektoren) im Raum der Meßobjekte sind somit proportional zu den zeitlichen Eigenvektoren. Bezüglich der Hauptkomponenten im Raum der Meßgrößen gilt die entsprechende Aussage. Betrachtet man mehr Meßgrößen als Zeitpunkte ($N < p$), erhält man entsprechend N Eigenwerte und Eigenvektoren in beiden Räumen.

Die Beziehungen zwischen den Eigenvektoren der beiden Räume werden benutzt, um zur Singular Value Decomposition zu gelangen. Bei der SVD wird durch eine Entwicklung der Meßmatrix \mathbf{X} nach den normierten Eigenvektoren folgende Zerlegung benutzt

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \vec{b}_k \otimes \vec{a}_k^T, \quad (3.5)$$

um die Meßmatrix darzustellen. In kompakter Matrixschreibweise ergibt sich analog

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{A}^T. \quad (3.6)$$

Die $N \times p$ Matrix \mathbf{D} enthält hierbei in der Diagonale die Wurzeln der Eigenwerte. Die Wurzeln der Eigenwerte werden als die Singulärwerte der Matrix \mathbf{X} bezeichnet.

3.2.2 Statistische Interpretation

Zur Berechnung des neuen Koordinatensystems wurden die Matrizen $\mathbf{S} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{T} = \mathbf{X} \mathbf{X}^T$ herangezogen, um durch eine Eigenwertzerlegung die neuen Basisvektoren zu bestimmen. Neben diesem geometrischen Zugang, der in einer Hauptachsentransformation von \mathbf{S} , bzw. \mathbf{T} besteht, gibt es einen statistischen Zugang zu dem Verfahren der PCA/SVD.

Betrachtet man die Meßmatrix \mathbf{X} spaltenweise, so kann man jede Spalte als eine statistisch verteilte Größe auffassen. Durch die Interpretation der Meßdaten als statistische Größen, ist es möglich, entsprechende Methoden für die Datenanalyse zu benutzen. Man kann für jede Spalte, d.h. Meßgröße einen Mittelwert

$$\langle x_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ki}.$$

definieren. Ebenso ist die Definition der Varianz s_{ii} bzw. Autokorrelation ρ_{ii} gerechtfertigt

$$s_{ii} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_{ki} - \langle x_i \rangle)^2, \quad \text{bzw.}$$

$$\rho_{ii} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \frac{(x_{ki} - \langle x_i \rangle)^2}{s_{ii}}.$$

Bei der statistischen Betrachtung fordert man, daß in dem neuen Koordinatensystem die Varianz der Daten maximiert wird und die Korrelationen der Hauptkomponenten untereinander verschwinden. Beide Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn die Kovarianzmatrix bzw. die Korrelationsmatrix Diagonalgestalt annimmt. Man betrachtet demzufolge die Kovarianz- oder die Korrelationsmatrix, deren Diagonalelemente die Varianz und die Autokorrelation repräsentieren

$$s_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x_{ki} - \langle x_i \rangle)(x_{kj} - \langle x_j \rangle), \quad \text{bzw.} \quad (3.7)$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \frac{(x_{ki} - \langle x_i \rangle)(x_{kj} - \langle x_j \rangle)}{\sqrt{s_{ii}} \sqrt{s_{jj}}}. \quad (3.8)$$

Bei der Basisberechnung dreht man hierbei das System so, daß diese Matrizen Diagonalgestalt annehmen. Die Diagonalelemente der transformierten Korrelationsmatrix sind die Varianz der Daten bezüglich des neuen Systems. Die Außerdiagonalelemente sind die verschwindenden Korrelationskoeffizienten zwischen den Daten in dem neuen System. Die SVD wird somit auf die Matrizen

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} (x_{ij} - \langle x_j \rangle) \quad \text{bzw.} \quad (3.9)$$

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \frac{(x_{ij} - \langle x_j \rangle)}{\sqrt{s_{jj}}} \quad (3.10)$$

angewandt. Bei Transformationen zwischen dem alten und dem neuen System ist jeweils die korrekt zentrierte bzw. normierte Datenmatrix zu benutzen (siehe Abschnitt 3.2.3).

Man muß ebenso wie bei dem geometrischen Zugang zur PCA und SVD auch bei der statistischen Betrachtung Eigenwerte und Eigenvektoren mit absteigender Größe der Eigenwerte umsortieren, um zu einem System zu gelangen, dessen Achsen die Gerade der besten Näherung, die Ebene der besten Näherung, den Raum der besten Näherung, bzw. allgemein den k -dimensionalen Hyperraum der besten Näherung bilden. Hierbei müssen jeweils die ersten k Achsen in der festgelegten Reihenfolge mit absteigender Eigenwertgröße benutzt werden.

Ein Maß für die Qualität der Näherung liefert wiederum die Größe der Eigenwerte, welche jetzt die Varianz einer Meßgröße bezüglich der neuen Achsen angeben. Die Qualität der Näherung ist somit durch den Anteil der Eigenwerte der benutzten k Eigenvektoren an der Gesamtvariation der Meßdaten charakterisiert

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j} \quad (3.11)$$

Man bricht die Reihenentwicklung (3.5) nach den Eigenvektoren bei dem k -ten Term ab. Der Wert von k ergibt sich aus der gewünschten Genauigkeit, die durch den Wert von α bestimmt wird.

Die Summe $\sum_{j=1}^p \lambda_j$ im Nenner von α gibt die Gesamtvarianz des Datensatzes an. Der Quotient $\lambda_i / \sum_{j=1}^p \lambda_j$ beschreibt die relative Varianz des zugehörigen Eigenvektors \vec{a}_i , bzw. \vec{b}_i .

3.2.3 Normierung der Daten

Bei den drei betrachteten Methoden der Basisbestimmung werden jeweils verschiedene Normierungen der Meßdaten benutzt. Im ersten Fall, der Matrix $\mathbf{S} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$, werden die Rohdaten ohne weitere Signalverarbeitung direkt verwendet. Im Falle der Kovarianzmatrix und der Korrelationsmatrix wird bis auf eine Normierung im wesentlichen der arithmetische Mittelwert $\langle x_i \rangle$ von jedem Meßwert subtrahiert, d.h. die Daten werden um den Nullpunkt zentriert und ihr Mittelwert verschwindet somit. Bei der Korrelationsmatrix wird jeder Wert zusätzlich durch die Wurzel der Varianz dividiert, d.h. die Daten werden auf Einheitsvarianz normiert. Die Diagonalelemente der Korrelationsmatrix werden damit vor der eigentlichen Transformation auf Eins normiert.

Man erhält somit eine direkte Interpretation der Eigenwerte und Singulärwerte, die bei dem Verfahren auftreten. Bei der Kovarianz- und der Korrelationsmatrix gibt

der Eigenwert λ_i ; die Varianz der Meßdaten entlang der i -ten Achse an, wie folgende Rechnung zeigt

$$\mathbf{X}'^T \mathbf{X}' = (\mathbf{X}\mathbf{A})^T (\mathbf{X}\mathbf{A}) = \mathbf{A}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} = \mathbf{S}'.$$

Der Singulärwert $\sqrt{\lambda_i}$ entspricht der Standardabweichung der entsprechenden Hauptkomponente.

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, nicht mit dem arithmetischen Mittel, sondern mit dem Median der Meßdaten zu zentrieren. Bei der Berechnung des Medians werden die Funktionswerte ihrer Größe nach geordnet. Der Median ist dann der Wert, der genau in der Mitte der so umsortierten Daten liegt. Ein weiterer Weg ist die Zentrierung mit dem Mittelwert aus maximalen und minimalen Meßwert, deren betragsmäßiges Maximum bei der anschließenden Normierung auf ± 1 abgebildet wird. Diese Zentrierung und Normierung hat sich jedoch im allgemeinen als nicht zweckmäßig erwiesen, da ein einziger stark abweichender Meßwert die Normierung verfälschen kann. Eine mögliche Verfeinerung besteht darin, nicht mit dem Maximalwert, sondern mit einem bestimmten Prozentsatz an maximalen bzw. minimalen Werten zu arbeiten [13].

Rechentechisch werden der arithmetische Mittelwert und die Varianz mit folgenden Rekursionsformeln nach [14] berechnet

$$\langle x_i \rangle(n) = \langle x_i \rangle(n-1) + \frac{1}{n}(x_{ni} - \langle x_i \rangle(n-1)), \quad (3.12)$$

$$s_{ii}(n) = \frac{n-1}{n} s_{ii}(n-1) + \frac{n-1}{n^2} (x_{ni} - \langle x_i \rangle(n-1))^2. \quad (3.13)$$

Diese Berechnungsmethode bietet den Vorteil, daß bei einer großen Zahl von Meßpunkten nicht über große Zahlen summiert bzw. durch große Zahlen dividiert werden muß. Die rekursive Berechnung vermeidet derartige numerische Probleme.

Auf den Einfluß der Normierung auf die Ergebnisse und Interpretation der PCA/SVD wird in Kapitel 5.1 bei dem Test des Verfahrens eingehend eingegangen.

3.2.4 Datenreduktion und Filterung

Summiert man bei der Rekonstruktion der Daten mit Gleichung (3.5) nur über die ersten Terme mit hohen Eigenwerten, d.h. man bricht die Reihe ab, und speichert nur die entsprechenden Eigenvektoren, hat man eine Datenreduktion erreicht. Der Grad der Reduktion ist durch die Anzahl der Eigenvektoren gegeben.

Eine Filterung bestimmter Anteile kann gezielt erreicht werden, indem man nur über die entsprechend gewünschten Anteile, d.h. die zugehörigen Eigenvektoren summiert. Dies setzt voraus, daß man den physikalischen Inhalt mit den Eigenvektoren in Verbindung gebracht hat, um gezielt diesen Vorgang genauer zu untersuchen. Ist

ein dominantes Störsignal aufgespürt, d.h. mit dem zugehörigen Eigenvektor identifiziert worden, kann es herausgefiltert werden. Ebenso kann ein interessantes Signal als einziges weiter betrachtet werden.

Bei der Filterung wird in Gleichung (3.5) nur über die gewünschten Terme summiert. Wie gut diese Teilsumme nun noch die Daten beschreibt wird wiederum durch die nun verallgemeinerte Größe α ausgedrückt

$$\alpha = \frac{\sum_i \lambda_i}{\sum_{j=1}^p \lambda_j}. \quad (3.14)$$

Die Summe $\sum_i \lambda_i$ wird hierbei über die λ_i durchgeführt, deren zugehörige Eigenvektoren bei der Rekonstruktion benutzt werden.

Rechentechisch werden zunächst die Meßdaten mit den Eigenvektoren in den neuen Raum transformiert, d.h. ihre Hauptkomponenten berechnet. Bei der Rücktransformation werden nun in \mathbf{X}' alle Spalten zu Null gesetzt, deren entsprechende Eigenvektoren ausgefiltert werden sollen und es verbleiben nur die gewünschten Spalten in der Matrix (vgl. Gleichung (3.3)).

3.3 Funktions-Parametrisierung

Um eine Disruption erkennen und mit Gegenmaßnahmen begegnen zu können, muß man einen Indikator für Disruptionen haben. Dieser Indikator gibt an, wie groß die Gefahr für eine Disruption gerade ist. Er soll während einer Entladung sofort zur Verfügung stehen und kann deshalb nur aus Daten berechnet werden, die ebenfalls sofort vorhanden sind. Bei dieser sogenannten online Berechnung wird eine Abbildungsvorschrift benutzt, die zuvor anhand von alten Schußdaten gewonnen wird. Diese Auswertung geschieht offline, d.h. anhand von Daten bereits abgelaufener Entladungen. Die abbildende Funktion wird hierbei nicht explizit, sondern mit Hilfe einer Funktions-Parametrisierung, die durch eine Regressionsanalyse bestimmt wird, beschrieben.

3.3.1 Regressionsanalyse

Im weiteren Verlauf werden die lineare und die quadratische Regressionsanalyse benutzt, die beide hier vorgestellt werden sollen. Bei der mehrfachen linearen Regressionsanalyse betrachtet man p unabhängige oder erklärende Variablen $\vec{x}(i)$ oder $x_j(i)$, mit $j = 1, \dots, p$. Zu jedem Satz i von solchen statistisch verteilten Variablen existieren q abhängige Variablen $\vec{y}(i)$ oder $y_k(i)$, mit $k = 1, \dots, q$. Von den p unabhängigen und den q abhängigen Variablen liegen jeweils N korrespondierende Sätze von Daten vor.

Man ist bestrebt, eine möglichst einfache Abbildung zu finden, welche die unabhängigen Variablen mit den abhängigen Variablen verknüpft. Für jede abhängige Größe

y_k wird für folgende Abbildung eine Approximation $\hat{f}_k(\vec{x})$ gesucht

$$y_k = f_k(\vec{x}), \quad \text{oder insgesamt} \quad \vec{y} = \vec{f}(\vec{x}). \quad (3.15)$$

Anhand der N bestehenden Wertepaare $\vec{x}(i)$ und $\vec{y}(i)$ soll folgende Gleichung erfüllt werden

$$y_k(i) = \hat{f}_k(\vec{x}(i)) + \epsilon_k(i), \quad \text{oder insgesamt} \quad \vec{y}(i) = \vec{f}(\vec{x}(i)) + \vec{\epsilon}(i), \quad (3.16)$$

wobei $\epsilon_k(i) = y_k(i) - \hat{f}_k(\vec{x}(i))$ der Fehler für die k -te abhängige Variable bezüglich des Vektors $\vec{x}(i)$ ist. Das einfachste nicht-triviale Modell für $f_k(\vec{x})$ liefert die lineare Regressionsanalyse, wobei die Regressionskoeffizienten β_{jk} mittels folgendem Ansatz gesucht werden

$$y_k(i) = \hat{f}_k(\vec{x}(i)) + \epsilon_k(i) = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^p \beta_{jk} x_j(i) + \epsilon_k(i). \quad (3.17)$$

Zusätzlich enthält das Modell einen konstanten Term für die Koeffizienten β_{0k} , durch welche die Mittelwerte von y_k beschrieben werden. Um die Parameter β_{jk} zu bestimmen, wird für jede abhängige Variable y_k folgender Ausdruck für alle Paare i minimiert

$$\sum_{i=0}^N (\epsilon_k(i))^2 \stackrel{!}{=} \min, \quad k = 1, \dots, q,$$

d.h. man minimiert den quadratischen Fehler. In kompakter Matrixschreibweise erhält man folgenden Ausdruck

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{B} + \mathbf{E}, \quad (3.18)$$

in dem die $N \times q$ Matrix \mathbf{Y} die q abhängigen Variablen, die $N \times (p+1)$ Matrix $\tilde{\mathbf{X}}$ die mit dem Regressionsmodell umgewandelten p unabhängigen Variablen, die $(p+1) \times q$ Matrix \mathbf{B} die Regressionskoeffizienten und die $N \times q$ Matrix \mathbf{E} die Fehler beinhaltet. Die formale mathematische Lösung hiervon lautet nach [15]

$$\mathbf{B} = (\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{X}})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^T \mathbf{Y}. \quad (3.19)$$

Man hat nun eine einfache Parametrisierung der Funktionen f_k gefunden, welche die unabhängigen Variablen mittels einer einfachen Vorschrift \hat{f}_k in die abhängigen Größen y_k überführt

$$y_k(\vec{x}) \approx \hat{f}_k(\vec{x}) = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^p \beta_{jk} x_j. \quad (3.20)$$

Neben dem hier dargestellten linearen Regressionsmodell, mit dem $\tilde{\mathbf{X}}$ bestimmt wird und somit die Abhängigkeit der unabhängigen Variablen, gibt es komplexere Modelle,

in welchen diese Variablen zum Beispiel quadratisch und bilinear in den einzelnen Variablen eingehen.

Für die darzustellende Funktion $f_k(\vec{x})$ werden in dem vollen quadratischen Regressionsmodell für die approximierende Funktion $\hat{f}_k(\vec{x})$ die Regressionskoeffizienten β_{jk} mittels folgendem Ansatz gesucht

$$y_k(i) = \hat{f}_k(\vec{x}(i)) + \epsilon_k(i), \quad \text{mit} \quad (3.21)$$

$$\hat{f}_k(\vec{x}(i)) = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^p \beta_{jk} x_{ij} + \sum_{j=1}^p \beta_{[jj]k} x_{ij}^2 + \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{l=j+1}^p \beta_{[jl]k} x_{ij} x_{il}. \quad (3.22)$$

Für jede abhängige Indikatorgröße ist die Gleichung für alle i Datensätze zu erfüllen, wobei die Summe über die Fehlerquadrate wiederum zu minimieren ist.

Bildet man formal das quadratische Regressionsmodell auf ein lineares Modell ab, indem man die quadratischen und bilinearen Terme in die Matrix $\tilde{\mathbf{X}}$ zieht, betrachtet man eine lineare Regression mit $1 + p + p + \frac{p(p-1)}{2} = 1 + \frac{p(p+3)}{2}$ unabhängigen Variablen und sucht $1 + \frac{p(p+3)}{2}$ Regressionskoeffizienten für jede abhängige Größe y_k . $\tilde{\mathbf{X}}$ ist somit eine $N \times (1 + \frac{p(p+3)}{2})$ und \mathbf{B} eine $(1 + \frac{p(p+3)}{2}) \times q$ Matrix. Diese Umrechnung ermöglicht es, das volle quadratische Regressionsmodell rechentechnisch auf eine lineare Regressionsanalyse zurückzuführen.

3.3.2 Grundlegendes Konzept

In der Sprache des letzten Abschnitts sind Indikatoren für eine Disruption die abhängigen Variablen, während die eigentlichen Meßgrößen die unabhängigen Variablen darstellen. Offline werden die Regressionskoeffizienten mittels Gleichung (3.19) an vorhandenen Entladungen bestimmt, die dann online mittels Gleichung (3.20) Meßdaten neuer Entladungen auf die Indikatorgrößen abbilden sollen. Diese anhand der neuen Messungen gewonnen Indikatorgrößen dienen als Precursor für Disruptionen, bzw. als Regelgrößen zur Vermeidung von Disruptionen.

Die in der Praxis benutzte Vorgehensweise ist jedoch differenzierter und wird im folgenden dargelegt.

1. In einem ersten Schritt werden n Entladungen ausgewählt, die zur Berechnung der Funktions-Parametrisierung benutzt werden und $N = \sum_{k=1}^n N_k$ p -dimensionale Meßvektoren \vec{x}_i liefern. Jeder einzelne Schuß liefert hierbei N_k Messungen. Die entsprechenden N_k Sätze von q abhängigen Variablen, die für die Disruptionsgefahr charakteristisch sind, müssen manuell berechnet werden (vgl. Abschnitt 7.3.1).

2. Im nächsten Schritt wird eine SVD-Analyse mittels der Korrelationsmatrix (vgl. Gleichung (3.10)) der Meßdaten ausgeführt. Zum einen besteht durch die Normierung auf Einheitsvarianz die Möglichkeit, verschiedenartige Meßsignale mit unterschiedlichen physikalischen Einheiten und Größenordnungen zu kombinieren. Zum anderen werden durch die Zentrierung Offsets in den Signalen beseitigt (vgl. Kapitel 5.1). Im weiteren werden die mittels Gleichung (3.3) bestimmten Hauptkomponenten betrachtet, wobei für \mathbf{X} die entsprechend normierte Matrix benutzt werden muß. Betrachtet man die zu den Hauptkomponenten gehörenden Eigenwerte, welche die Varianz der Hauptkomponente selbst angeben, so werden meist nur die ersten p' Eigenwerte hohe Werte annehmen. Nur diese als die signifikanten Hauptkomponenten bezeichneten Vektoren werden weiter benutzt, während man die übrigen Hauptkomponenten vernachlässigt. Die signifikanten Hauptkomponenten stellen die Daten näherungsweise in dem reduzierten Koordinatensystem der SVD dar. Gewünscht ist, daß hierbei nur wenige Hauptkomponenten benutzt werden müssen, d.h. daß $p' \ll p$ gilt. Die Datenreduktion vermindert zum einen den weiteren Rechenaufwand und zum anderen werden Korrelationen und Rauschen in den Daten durch die Transformation in die p' Hauptkomponenten unterdrückt. Das System ist für die Regressionsanalyse besser konditioniert, d.h. es werden Korrelationen und lineare Abhängigkeiten in den Eingangsdaten eliminiert, die zu Konvergenzproblemen bei der Matrixinversion zur Berechnung der Regressionskoeffizienten führen können.
3. Im dritten Schritt werden die Regressionskoeffizienten zwischen den im ersten Schritt bestimmten abhängigen Variablen, den Disruptions-Indikatoren, und den mittels SVD bestimmten p' signifikanten Hauptkomponenten als unabhängige Variablen berechnet. Die Hauptkomponenten selbst können zuvor noch auf Einheitsvarianz normiert werden, was in diesem Fall durch die Division durch den zugehörigen Singulärwert, die Wurzel des Eigenwertes geschieht. Die Korrelationsmatrix der p' signifikanten Hauptkomponenten wird dadurch zu einer $p' \times p'$ Einheitsmatrix. Bei diesem Schritt besteht die Wahlmöglichkeit des Regressionsmodells für die unabhängigen Variablen, d.h. ob man ein lineares oder quadratisches Modell verwendet.

In unserem Fall werden also nicht die p Rohdaten, sondern nur die ersten p' Hauptkomponenten (vgl. Gleichung (3.3)) bei der Regressionsanalyse betrachtet. Es ergibt sich damit folgender Ausdruck zur Bestimmung der Koeffizienten

$$\hat{f}_k(\vec{x}_i) = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^{p'} \beta_{jk} x'_{ij} + \sum_{j=1}^{p'} \beta_{[jj]k} (x'_{ij})^2 - \lambda_j + \sum_{j=1}^{p'-1} \sum_{l=j+1}^{p'} \beta_{[jl]k} x'_{ij} x'_{il}. \quad (3.23)$$

Normiert man die Hauptkomponenten zusätzlich auf Einheitsvarianz, ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten

$$\hat{f}_k(\vec{x}(i)) = \beta_{0k} + \sum_{j=1}^{p'} \beta_{jk} \frac{x'_{ij}}{\sqrt{\lambda_j}} + \sum_{j=1}^{p'} \beta_{[jj]k} \left(\frac{x'_{ij}}{\lambda_j} - 1 \right) + \sum_{j=1}^{p'-1} \sum_{l=j+1}^{p'} \beta_{[jl]k} \frac{x'_{ij}}{\sqrt{\lambda_j}} \frac{x'_{il}}{\sqrt{\lambda_l}}. \quad (3.24)$$

Die Normierung in dem neuen Koordinatensystem erfolgt durch die Division der Hauptkomponenten mit der Wurzel des entsprechenden Eigenwertes der PCA, da in diesem System die Eigenwerte gerade der Varianz selbst entsprechen.

Durch die Zentrierung und Normierung der Eingangsdaten vor Berechnung der Eigenvektoren mit der SVD haben auch die Hauptkomponenten und die bilinearen Terme einen verschwindenden Mittelwert, sind jedoch nicht normiert. Die quadratischen Terme haben durch das Quadrat einen endlichen positiven Mittelwert, der nach [16] durch die Subtraktion der Varianz, d.h. des Eigenwertes vermieden wird. Geht man von normalverteilten Größen aus, so wird in [17] gezeigt, daß die linearen, quadratischen und bilinearen Terme gemeinsam ein unkorreliertes System von Daten bilden.

Sind durch diese Schritte die Normierungsfaktoren, die korrekten Eigenvektoren aus der SVD, und die Regressionsfaktoren zu dem gewählten Regressionsmodell bestimmt, kann man dazu übergehen, anhand von noch nicht untersuchten Entladungen das Verfahren zu testen. Die neuen Entladungen werden hierzu zunächst mit den Normierungsfaktoren alter Entladungen zentriert und normiert. Mit den räumlichen Eigenvektoren werden die Daten als Hauptkomponenten bezüglich des neuen Systems dargestellt. Anschließend werden die ersten p' auf Einheitsvarianz normierten Hauptkomponenten mit dem Regressionsmodell und den Regressionskoeffizienten auf die Disruptions-Indikatoren abgebildet. Da man von diesen Entladungen die Indikatoren auch direkt bestimmen kann, hat man durch den Vergleich beider Indikatoren eine Testmöglichkeit für das Verfahren.

3.3.3 Erzeugung einer Datenbasis

Bei dem bisher beschriebenen Vorgehen wurde noch nicht auf die im ersten Schritt angedeutete Erzeugung der Datenbasis eingegangen. In der ursprünglichen Anwendung dieses Verfahrens nach [17] wurde die Datenbasis durch Modellrechnungen erzeugt. Es wurden statistisch verteilte Meßgrößen und die entsprechenden abhängigen Größen, welche die Plasmaentladung charakterisieren, berechnet. Auf diese Datensätze wurde dann obiges Verfahren angewandt, um während einer Entladung schnell die charakteristischen Größen zur Regelung der Entladung bestimmen zu können.

Im Gegensatz dazu werden in dieser Arbeit die Messungen bereits vorliegender Entladungen als Datenbasis herangezogen. Für diese Entladungen werden die Eigenvektoren und Hauptkomponenten mittels SVD berechnet, sowie unabhängig davon die

zugehörigen Indikatorgrößen. Die Auswahl dieser Entladungen ist hierbei entscheidend für welche Entladungstypen Aussagen gemacht werden können. Anschließend wird mittels einer Regressionsanalyse die Funktions-Parametrisierung der Indikatorgrößen als Funktion der Entladungen bestimmt.

Kapitel 4

Meßgrößen für die Analyse

Für die statistische Auswertung ist es nötig, eine möglichst bei allen Plasmaentladungen vorhandene Kombination von Meßgrößen zu betrachten. Damit können viele Entladungen gleichzeitig betrachtet werden und es wird eine immer verfügbare Früherkennung von Disruptionen ermöglicht. Es wurden Standarddiagnostiken gesucht, die zuverlässig bei jeder Entladung Meßwerte liefern. Die für die Analyse ausgewählten Signale werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

4.1 Mirnov-Spulen

Die Mirnov-Spulen messen die magnetische Flußänderung an einer toroidalen Stelle an verschiedenen poloidalen Positionen. Bild 4.1 zeigt einen poloidalen Querschnitt durch den Torus, in dem die Lage der 32 auf der Gefäßinnenwand installierten Mirnov-Spulen dargestellt ist. Die Numerierung der Spulen läuft entgegen dem Uhrzeigersinn von 1 bis 32 von der Mittelebene außen über den oberen Divertor, die Mittelebene innen, den unteren Divertor zurück zur Mittelebene außen. Da die Spulen einen endlichen Abstand vom Plasma haben, messen sie nicht die wirkliche Flußänderung am Ort der Störung im Plasma sondern am Ort der Spule.

Man muß den gemessenen Fluß auf die Magnetfeldstärke der Störung im Plasma zurückrechnen, um die Vergleichbarkeit der Daten für unterschiedliche Schüsse zu gewährleisten. Die Lage des Plasmas bezüglich der Spulen kann von Schuß zu Schuß variieren und führt somit zu Fehlinterpretationen in der Größe der Flußvariation.

Betrachtet man eine $q = m$ Störung, so kennt man die $r^{-(m+1)}$ -Abhängigkeit des Feldes. Sie folgt aus einer Multipolentwicklung des Störfeldes in Zylindernäherung, was einer Näherung für großes Aspektverhältnis entspricht. Für das Magnetfeld am Ort der Spule ergibt sich demnach als Funktion des Störfeldes an der resonanten $q = m$

Fläche

$$B_{\Theta}(r) = B_{\Theta}(r(q = m)) \left(\frac{r(q = m)}{r} \right)^{m+1}.$$

Wenn man den gesamten Strom als innerhalb der betrachteten Flußfläche fließend annimmt, ergibt sich folgender Näherungsausdruck für den Radius der $q = m$ Fläche

$$r(q = m) = a \sqrt{\frac{m}{q_{95}}}.$$

Oftmals werden $q = 2$ Moden betrachtet, für welche die obige Annahme gut gerechtfertigt ist. Für das Magnetfeld an der resonanten $q = 2$ Fläche als Funktion des gemessenen Feldes erhält man folgenden Ausdruck

$$B_{\Theta}(r(q = 2)) = B_{\Theta}(r) \left(\frac{r}{a \sqrt{\frac{2}{q_{95}}}} \right)^3. \quad (4.1)$$

Hierbei ist r der Abstand der Spule vom magnetischen Plasmamittelpunkt und a der

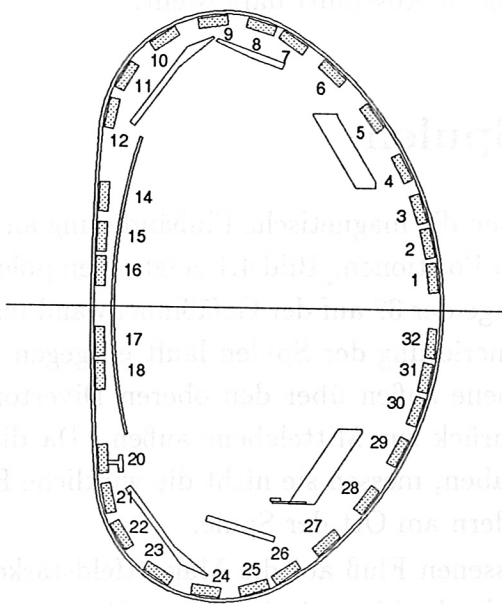


Abbildung 4.1: Poloidale Lage der Mirnov-Spulen

kleine Plasmaradius. Da diese Größen aus Gleichgewichtsrechnungen zu den jeweiligen Entladungen berechnet werden, steht die Korrektur nur zu Zeiten eines stabilen Gleichgewichts zur Verfügung (vgl. Abschnitt 4.6). Außerhalb dieser Zeiten mußte auf die Umrechnung verzichtet werden.

Darüber hinaus wird als weiteres Meßsignal die Amplitude der in den Spulen gemessenen Oszillation verwendet, die mittels folgender Gleichung bestimmt wird

$$A_j = \sqrt{2(\langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2)}.$$

Hierbei wird angenommen, daß in den Signalen keine weitere Rampe überlagert ist, bzw. daß die Integrationszeit für die Mittelwerte klein gegenüber der Rampe ist.

4.2 Soft-X-Ray Kameras

Die Soft-X-Ray-Diagnostik untersucht die Emissionen des Plasmas im Wellenlängenbereich der weichen Röntgenstrahlung (0.7-20 keV). Hierzu werden Lochkameras mit bis zu 32 Silizium-Detektoren pro Kamera eingesetzt, um eine räumliche Auflösung zu erreichen. Jede Si-Diode mißt entlang einer bestimmten Sichtlinie das Linienintegral der Emission. Die Sichtlinien der beiden benutzten Kameras B und D sind in Bild 4.2 dargestellt. Obwohl zur Zeit insgesamt vier Kameras zur Verfügung stehen, wurden nur diese beiden Kameras benutzt, da nur sie bei allen Schüssen Daten geliefert haben. Es ist daran zu denken, später die verbleibenden Kameras mit einzubeziehen.

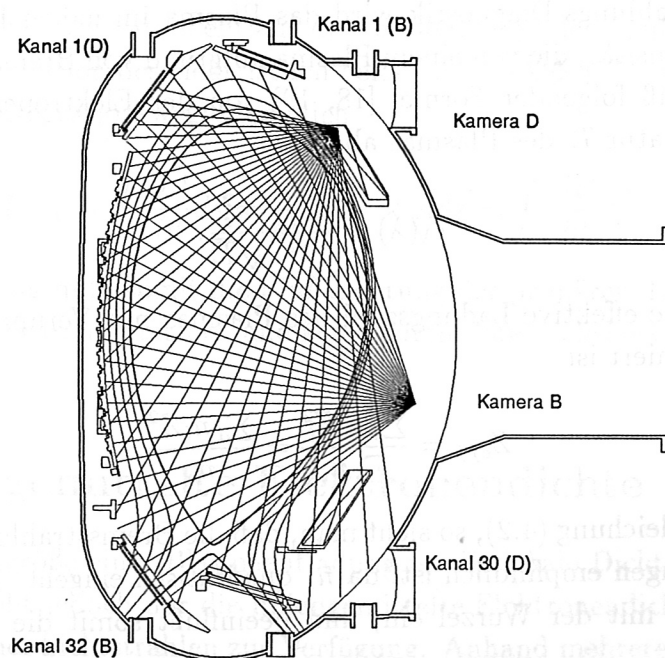


Abbildung 4.2: Sichtstrahlen der Soft-X-Ray-Diagnostik

4.3 Bremsstrahlungs-Diagnostik

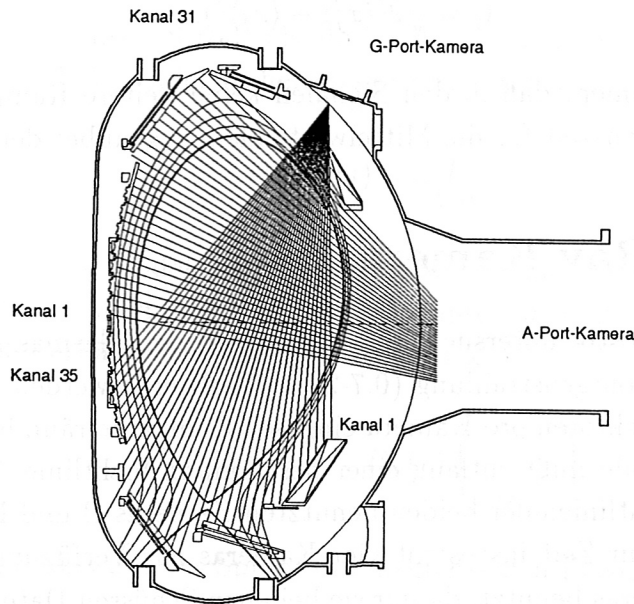


Abbildung 4.3: Sichtstrahlen der Bremsstrahlungs-Diagnostik

Bei der Bremsstrahlungs-Diagnostik wird das Plasma im nahen Infrarot beobachtet. Die spektrale Intensität, die von einem Plasma aufgrund von Bremsstrahlung emittiert wird, hängt gemäß folgender Formel [18, 19] von der Elektronendichte n_e und der Elektronentemperatur T_e des Plasmas ab

$$\epsilon_\lambda(\lambda) \sim \frac{Z_{eff} n_e^2}{\lambda^2 \sqrt{T_e}}. \quad (4.2)$$

Z_{eff} ist hierbei die effektive Ladungszahl des Plasmas mit Verunreinigungen, die folgendermaßen definiert ist

$$Z_{eff} = \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{\sum_i n_i} = \frac{\sum_i n_i Z_i^2}{n_e}. \quad (4.3)$$

Betrachtet man Gleichung (4.2), so sieht man, daß die Bremsstrahlung im wesentlichen auf Dichteänderungen empfindlich ist, da \bar{n}_e quadratisch eingeht. Die Temperatur T_e geht nur reziprok mit der Wurzel ein, und beeinflusst somit die Bremsstrahlung in geringerem Maße.

Bei dieser Diagnostik sind insgesamt drei Infrarotdetektorarrays installiert, die von verschiedenen Positionen in das Plasma blicken und die Linienintegrale der Emission messen. Die drei Gruppen von Sichtstrahlen blicken vom G-Port von oben auf die

Divertorplatten, vom unteren Teil des A-Ports von unten auf den oberen Teil des inneren Hitzeschildes und von einem anderen A-Port auf den unteren Teil des inneren Hitzeschildes. Da im wesentlichen nur die Daten von zwei Gruppen benutzt werden, sind nur diese mit ihren Sichtstrahlen in Bild 4.3 gezeigt.

4.4 Magnetische Messungen

Neben den bisher beschriebenen magnetischen Messungen der Mirnov-Spulen gibt es noch eine Reihe weiterer Meßspulen und Flußschleifen.

Die erste betrachtete Größe ist der im Plasma fließende Strom I_p . Man mißt ihn mit sogenannten Rogowski-Spulen [20]. Es handelt sich um eine Solenoid-Spule mit konstanter Windungsdichte, die an einer toroidalen Stelle poloidal um das Plasmagefäß gewunden ist. Sie mißt über die Poloidalfeldänderung nicht den Strom direkt, sondern zunächst die zeitliche Ableitung davon, die noch integriert werden muß.

Eine weitere Größe ist die Umfangsspannung U_{loop} , die in einer Spule gemessen wird, die sich nahe des Plasmarandes toroidal anschmiegt. Die gemessene Spannung U_{loop} ergibt sich hierbei gemäß folgender Formel

$$U_{loop} = \oint_S \vec{E} d\vec{s},$$

wobei die geschlossene Integration entlang der toroidal liegenden Spule ausgeführt wird. Benutzt man die Definition des elektrischen Feldes $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, verbleibt aufgrund des geschlossenen Integrationsweges lediglich

$$U_{loop} = \oint_S \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \int_F \frac{\partial B}{\partial t} d\vec{f}.$$

Die Umfangsspannung mißt somit die Flußänderung der primären Transformatorwicklung, die den Plasmastrom induziert, und keine durch Potentiale hervorgerufenen Spannungen.

4.5 Liniengemittelte Elektronendichte

Eine wichtige Kenngröße einer Plasmaentladung ist die lokale Dichte $n_e(r)$. Während einer Entladung steht jedoch nur die liniengemittelte Elektronendichte \bar{n}_e entlang bestimmter vermessener Sichtstrahlen zur Verfügung. Anhand mehrerer Sichtstrahlen ist es zwar möglich, die lokale Dichte, d.h. das Dichteprofil durch Inversion (Tomographie) zu berechnen, jedoch stehen diese Daten nicht online im Verlauf der Entladung zur Verfügung.

Die liniengemittelte Elektronendichte wird interferometrisch mit einem Mach-Zehnder-Interferometer gemessen [20]. Das benutzte Laser-Licht der Frequenz ω_0 wird durch das Plasma um einen bestimmten Betrag $\delta\phi$ phasenverschoben

$$\delta\phi = \frac{e^2}{2c\epsilon_0 m_e \omega_0} \int_L n_e dl = \frac{e^2}{2c\epsilon_0 m_e \omega_0} \bar{n}_e.$$

Die Idee der Messung besteht darin, zwei Laserstrahlen, nachdem ein Strahl das Plasma, der andere Strahl eine Referenzstrecke durchlaufen hat, interferieren zu lassen. Beide Strahlen werden hierbei durch einen Strahlteiler aus einer Quelle gewonnen. Um die Phasendifferenz einfach messen zu können, wird jedem Strahl vor der Interferenzmessung ein dritter, mit der Frequenz ω frequenzmodulierter Strahl überlagert. Hat man so die Phasenverschiebung gemessen, läßt sich die liniengemittelte Dichte \bar{n}_e leicht ausrechnen.

Neben dem eigentlichen Wert der liniengemittelten Elektronendichte wird die Amplitude einer überlagerten Oszillation als weitere Größe betrachtet.

4.6 Gleichgewichtsrechnungen

Grundlage der Gleichgewichtsrechnungen ist eine Funktions-Parametrisierung. Das hier benutzte Verfahren ist ähnlich der in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Vorgehensweise. Die unabhängigen Meßgrößen sind die Daten von 34 an der Gefäßinnenwand installierten Spulen und Flußschleifen. Als abhängige Variablen werden Gleichgewichtsgrößen, wie zum Beispiel der Sicherheitsfaktor q_{95} , die Lage der einzelnen Flußflächen oder die geometrische Lage des Plasmas gegenüber dem Gefäß benutzt. Die Eigenvektoren und Regressionskoeffizienten, die zur Bestimmung der Gleichgewichtsgrößen benötigt werden, erhält man anhand von numerischen Simulationen. Diese Simulationen liefern neben den Gleichgewichtsgrößen die Meßdaten, die sich in den Spulen ergeben. Die Resultate werden zur schnellen Steuerung der Entladung benötigt und stehen danach für weitere Analysen zu Verfügung. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens ist in [17] zu finden.

Der oben bereits erwähnte Sicherheitsfaktor q_{95} ist eine Größe, die im Verlauf dieser Arbeit betrachtet wurde. Für die Korrektur der Daten der Mirnov-Spulen auf das Magnetfeld am Ort der Störung im Plasma wird die geometrische Lage des Plasmas bezüglich dem Gefäß und somit der Spulen benutzt. Insbesondere wird der kleine horizontale Plasmaradius a und der große Plasmaradius R benutzt (vgl. Bild 2.2).

Kapitel 5

Test des Verfahrens

Um ein besseres Bild von den Resultaten der SVD bei realen Messungen zu haben, wurden Simulationen erstellt, die Daten mit definierten Eigenschaften liefern. Die Ergebnisse der SVD bei bekannten Daten werden als Unterstützung bei der Interpretation der SVD an realen Meßdaten dienen.

5.1 Periodische Signale, MHD-Moden

Als erster Test werden Daten, wie man sie bei einer rotierenden Mode in p Mirnov-Spulen erwartet, simuliert. Es wird angenommen, daß die Spulen in äquidistanten Winkeln mit gleichem Abstand von einem zylindrischen Plasma mit kreisförmigen Querschnitt angeordnet sind [4]. Es ergibt sich im wesentlichen eine zwischen den Kanälen linear phasenverschobene Sinusfunktion

$$x_{ij} = f_j(t_i) = A_j(t_i) + B_j \sin(\omega t_i + \delta_j), \quad \text{mit} \quad \delta_j = \frac{2\pi}{p} \cdot m \cdot j. \quad (5.1)$$

Bei dieser Simulation können ein zusätzlicher kanal- und zeitabhängiger Offset $A_j(t_i)$, eine kanalabhängige Schwingungsamplitude B_j , die Modenzahl m , die Modenfrequenz ω und die Anzahl der Spulen p gewählt werden.

Zur weiteren analytischen Rechnung wird der Zeilenindex, der den Meßzeitpunkt angibt, als kontinuierlich betrachtet. Man hat somit keine diskreten Zeitpunkte mehr, sondern eine dem Zeilenindex entsprechende kontinuierliche Zeit

$$x_{ij} = x_j(t_i) \rightarrow x_j(t) = f_j(t) = A_j(t) + B_j \sin(\omega t + \delta_j).$$

Dadurch lassen sich einfache analytische Ausdrücke für die Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, bzw. die Kovarianz- oder Korrelationsmatrix angeben, wenn man die Summen entsprechend in

Integrale überführt

$$s_{ij} = \sum_{k=1}^N x_{ki}x_{kj} \rightarrow \int_0^{\Delta t} f_i(t)f_j(t)dt.$$

Anstelle der Normierung der Kovarianzmatrix mit $N - 1$ wird nun mit dem Integrationsintervall Δt normiert.

Zunächst wird eine Mode mit einer überlagerten räumlichen Struktur ($A_j(t_i) = A_j$) untersucht, die durch folgende Matrix dargestellt wird

$$x_{ij} = f_j(t_i) = A_j + B \sin(\omega t_i + \delta_j). \quad (5.2)$$

Integriert man für die kontinuierliche Betrachtung über ein Vielfaches der Schwingungsperiode T der Mode ($\Delta t = N \cdot T$), bzw. über Zeiten $\Delta t \gg T$, erhält man für die Matrixelemente folgende Ausdrücke :

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{ij} = \Delta t \cdot \left(\frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i) + A_i A_j \right), \quad (5.3)$$

$$s_{ij} = \frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i), \text{ bzw.} \quad (5.4)$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}} \frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i) = \cos(\delta_j - \delta_i). \quad (5.5)$$

Für den Fall der Integration über Vielfache der Schwingungsperiode T sind obige

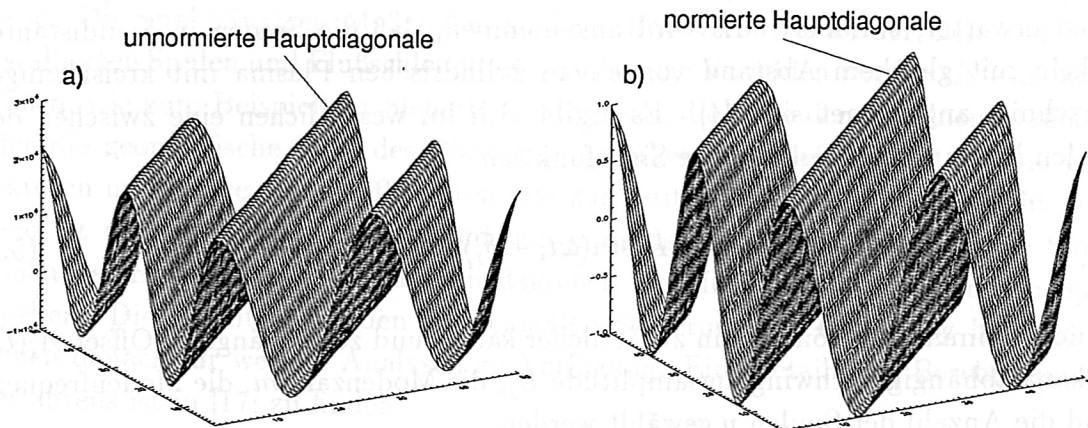


Abbildung 5.1: Dreidimensionale Darstellung der Matrizen für konstanten zeitlichen und räumlichen Offset ($A_j(t_i) = A_j = A$): a) $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, b) Korrelationsmatrix ρ_{ij}

Ausdrücke exakt. Da man bei Messungen die Modenfrequenz nicht kennt, sondern aus der Analyse erst bestimmen will, muß man über lange Zeiten integrieren. In diesem Fall sind die Ausdrücke eine Näherung, in der Terme vernachlässigt wurden, in welchen der Faktor $\frac{1}{\omega \Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{T}{\Delta t}$ auftritt.

Die räumliche Struktur $A_j(t_i) = A_j = A$ tritt nur bei den unzentrierten Rohdaten ($\mathbf{X}^T \mathbf{X}$) auf, während sie bei zentrierten Daten (Kovarianz- oder Korrelationsmatrix) zum Verschwinden gebracht wird. Es tritt eine Modulation mit der Phasendifferenz zwischen den Kanälen auf. Bei den Rohdaten erscheint ein zusätzlicher Term, der die mit sich selbst multiplizierte Struktur enthält. Man erwartet also einen Einfluß der rein räumlichen Struktur nur für die unzentrierten Rohdaten.

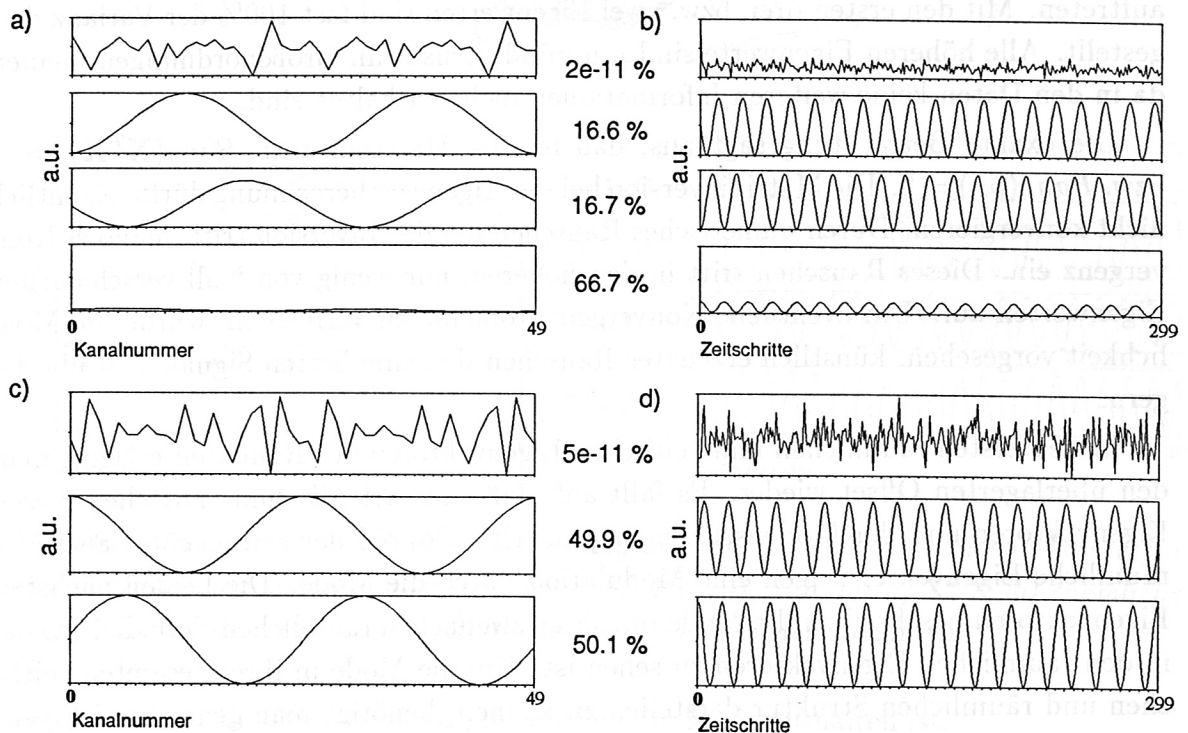


Abbildung 5.2: *Eigenvektoren für zeitlich und räumlich konstanten Offset ($A_j(t_i) = A_j = A$): a) räumliche Eigenvektoren der Rohdaten, b) zeitliche Eigenvektoren der Rohdaten, c) räumliche Eigenvektoren der zentrierten Daten, d) zeitliche Eigenvektoren der zentrierten Daten*

Für eine $m = 2$ Mode mit einem räumlich konstanten Offset ($A_j = A$) ist in Bild 5.1 eine dreidimensionale Darstellung der Matrizen zu sehen, in welcher der Wert gegen den Index des Matrixelements aufgetragen ist. Man sieht deutlich die Modulation mit der Phasendifferenz zwischen den betrachteten Kanälen. Bei den Rohdaten werden alle Werte um das Quadrat des Offsets A angehoben. Der Betrag der Modulation ist durch die Amplitude der Schwingung gegeben (vgl. Gleichung (5.3)). In der Darstellung der Korrelationsmatrix ist zu sehen, wie durch die Zentrierung und Normierung der Daten auf Einheitsvarianz die Matrixelemente um den Nullpunkt zentriert und normiert werden (vgl. Gleichung (5.5)). Die Hauptdiagonale wird bei der Korrelationsmatrix per

Definition immer auf Eins normiert.

In Bild 5.2 sind die sich ergebenden räumlichen und zeitlichen Eigenvektoren mit ihren relativen Varianzen dargestellt. In diesem und allen weiteren Bildern sind die Eigenvektoren von unten beginnend in absteigender Reihenfolge bezüglich der Varianzen angeordnet. Für die Rohdaten ergeben sich drei signifikante Eigenvektoren mit hohen Eigenwerten, während bei der Korrelationsmatrix nur zwei signifikante Eigenvektoren auftreten. Mit den ersten drei, bzw. zwei Eigenwerten sind fast 100% der Varianz dargestellt. Alle höheren Eigenwerte sind um mindestens zehn Größenordnungen kleiner, da in den Daten keine weiteren Informationen mehr enthalten sind.

Die exakte Betrachtung sagt aus, daß für die Matrizen gilt: $\text{Rang}(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 3$, bzw. $\text{Rang}(\rho_{ij}) = 2$. Die Matrixinversion bei der Eigenwertberechnung dürfte eigentlich nicht konvergieren. Durch numerisches Rauschen bei der Inversion tritt dennoch Konvergenz ein. Dieses Rauschen tritt in den höheren, nur wenig von Null verschiedenen Eigenwerten auf. Um eventuelle Konvergenzprobleme zu vermeiden, wurde die Möglichkeit vorgesehen, künstlich erzeugtes Rauschen den simulierten Signalen zu überlagern.

In den ersten räumlichen und zeitlichen Eigenvektoren der Rohdaten erkennt man den überlagerten Offset wieder. Es fällt auf, daß eine Art Mischung zwischen diesen Eigenvektoren und der Modenschwingung auftritt. Sowohl der zeitliche, als auch der räumliche Eigenvektor zeigen eine Modulation durch die Mode. Die beiden nächsten Eigenvektoren beschreiben die Mode mit ihrer zweifachen räumlichen Periodizität, die in den räumlichen Eigenvektoren zu sehen ist. Um die Mode in ihrer gesamten zeitlichen und räumlichen Struktur darstellen zu können, benötigt man genau zwei Eigenvektoren, da zwischen den Kanälen eine Phasenverschiebung vorliegt. Diese beiden Eigenvektoren entsprechen im wesentlichen der Sinus- und Cosinus-Komponente im Sinne einer Fourierzerlegung.

Die Reihenfolge der Eigenvektoren bezüglich ihrer relativen Varianzen an der Gesamtvariation des Datensatzes läßt sich durch Veränderung der Größe A , d.h. des Offsets selbst, einstellen. Eine Erhöhung oder Erniedrigung von A erhöht oder erniedrigt die relative Varianz α des Offset-Eigenvektors derart, daß er vor oder nach den beiden die Mode beschreibenden Eigenvektoren auftreten kann. Bezüglich der relativen Varianzen kann der Offset-Eigenvektor die Moden-Eigenvektoren vollständig verdecken, d.h. er repräsentiert nahezu 100 % der Gesamtvarianz der Daten. Das Auftreten eines derartigen Offsets kann somit die Interpretation der Eigenvektoren erschweren und muß entsprechend berücksichtigt werden.

Bei Verwendung von zentrierten Daten erscheint der zeitlich konstante Offset nicht mehr in den Eigenvektoren, da er durch die Zentrierung zum Verschwinden gebracht wird. In Gleichung (5.4) und (5.5) erscheint der Wert des Offsets nicht mehr. Es treten

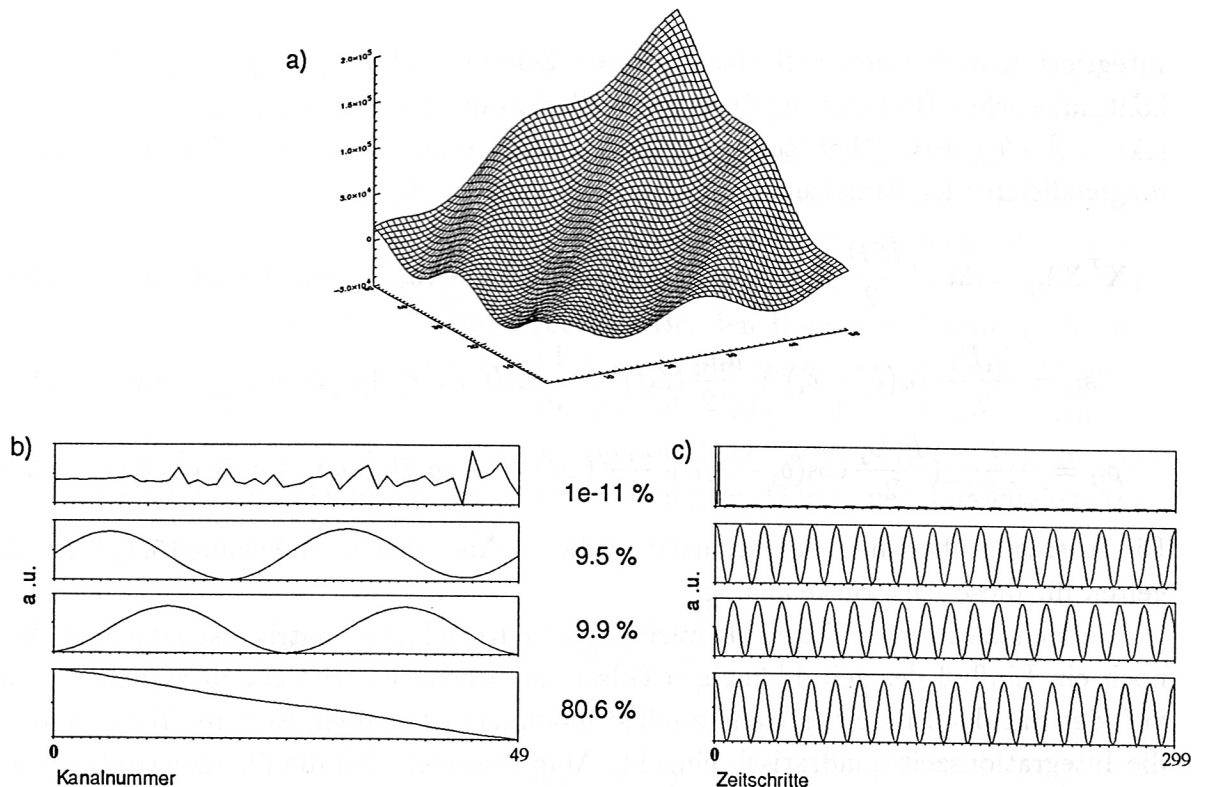


Abbildung 5.3: Dreidimensionale Darstellung der Matrix $X^T X$ und Eigenvektoren für eine zeitlich konstante, räumliche Struktur ($A_j(t_i) = A_j = a \cdot j$): a) $X^T X$, b) räumliche Eigenvektoren der Rohdaten, c) zeitliche Eigenvektoren der Rohdaten

nur die beiden Eigenvektoren auf, in welchen die Mode enthalten ist.

Verwendet man einen Offset mit räumlicher Struktur ($A_j = a \cdot j$), ergibt sich die in Bild 5.3 dargestellte Matrix $X^T X$. Die Eigenvektoren, die sich anhand der Rohdaten ergeben, sind ebenfalls gezeigt. Die Matrixelemente bei den Rohdaten werden um die mit sich selbst multiplizierten Struktur angehoben. Der erste räumliche Eigenvektor beschreibt wiederum die überlagerte komplexere Struktur. Der überlagerte Einfluß der Mode tritt nur in dem zeitlichen Eigenvektor in Form einer überlagerten Modulation auf. Ebenso wie im vorangegangenen Beispiel, ist es auch hier möglich, durch die Zentrierung der Daten den Eigenvektor, der die Struktur beschreibt, zum Verschwinden zu bringen. Es treten bei der Korrelationsmatrix nur die beiden Eigenvektoren auf, welche die Mode beschreiben. Die Eigenvektoren sind den in Bild 5.2 c) und d) gezeigten Eigenvektoren ähnlich.

In einem nächsten Schritt wird eine zeitliche Veränderung des Offsets ($A_j(t_i) = A_j(t_i)$) zugelassen, was durch folgende Gleichung beschrieben wird

$$x_{ij} = f_j(t_i) = A_j(t_i) + B \sin(\omega t_i + \delta_j). \quad (5.6)$$

Integriert man für den Fall einer linearen Zeitentwicklung ($A_j(t) = a_j \cdot t$) mit der kontinuierlichen Betrachtung über ein Vielfaches der Schwingungsperiode T der Mode ($\Delta t = N \cdot T$), bzw. über Zeiten $\Delta t \gg T$, erhält man folgende Ausdrücke für die zu diagonalisierenden Matrizen

$$(\mathbf{X}^T \mathbf{X})_{ij} = \Delta t \cdot \left(\frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i) + \frac{a_i a_j}{3} (\Delta t)^2 - \frac{1}{\omega} (a_i B_j \cos \delta_j + a_j B_i \cos \delta_i) \right), \quad (5.7)$$

$$s_{ij} = \frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i) + \frac{a_i a_j}{12} (\Delta t)^2 - \frac{1}{\omega} (a_i B_j \cos \delta_j + a_j B_i \cos \delta_i), \quad \text{bzw.} \quad (5.8)$$

$$\rho_{ij} = \frac{1}{\sqrt{s_{ii} s_{jj}}} \left(\frac{B_i B_j}{2} \cos(\delta_j - \delta_i) + \frac{a_i a_j}{12} (\Delta t)^2 - \frac{1}{\omega} (a_i B_j \cos \delta_j + a_j B_i \cos \delta_i) \right). \quad (5.9)$$

Die Aussagen über die Integrationsintervalle im Anschluß an Gleichung (5.3) bis (5.5) gelten für diese Ausdrücke analog.

Bei den zentrierten Daten (Kovarianz- oder Korrelationsmatrix) ist jetzt trotzdem noch ein Einfluß des zeitabhängigen Offsets zu sehen. Es tritt ein zusätzlicher Term auf, der mit der Phase der Kanäle selbst moduliert ist und ein weiterer Term, in dem die Integrationszeit quadratisch eingeht. Man erwartet, daß die überlagerte Struktur auch bei zentrierten Daten in den Eigenvektoren auftritt.

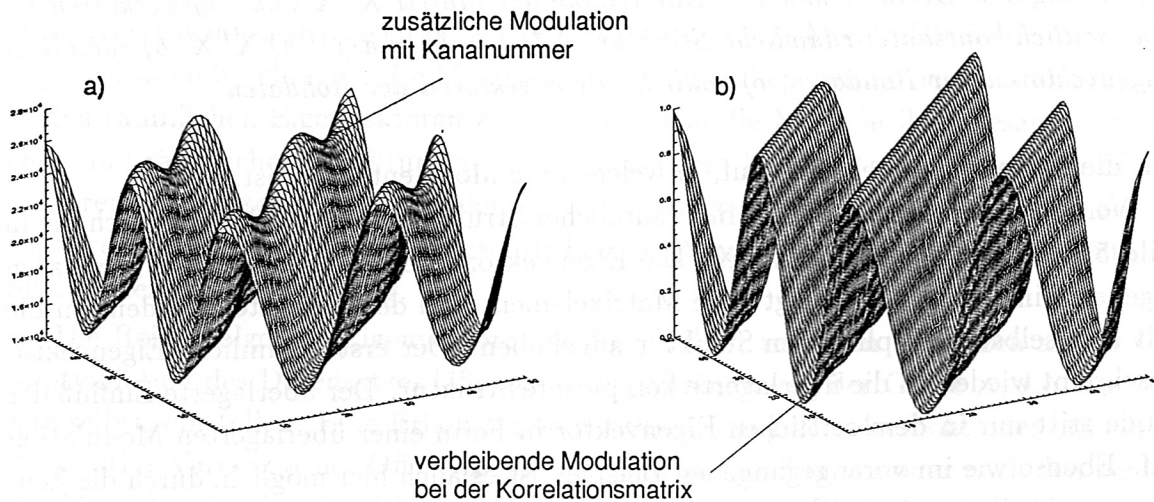


Abbildung 5.4: Dreidimensionale Darstellung der Matrizen für räumlich konstanten und zeitlich linear wachsenden Offset ($A_j(t_i) = A(t_i) = a \cdot t_i = a \cdot i$): a) $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, b) Korrelationsmatrix ρ_{ij}

Betrachtet man für diese Daten die in Bild 5.4 dargestellten Matrizen, sieht man die zusätzlich auftretende Modulation der Matrixelemente mit der Phase der Kanäle selbst. Beim Übergang von unzentrierten zu den zentrierten und normierten Daten der

Korrelationsmatrix ist zu beobachten, wie die Hauptdiagonale auf Eins normiert wird und dadurch die Modulation mit der Kanalnummer reduziert wird (vgl. Gleichung (5.7) und (5.9)). In den Außerdiagonalelementen ist die Modulation weiterhin vorhanden.

Bei den in Bild 5.5 dargestellten Eigenvektoren, tritt bei zentrierten Daten ebenso wie bei den Rohdaten ein großer erster Eigenwert auf. Die Verteilung der weiteren Eigenwerte ist jedoch unterschiedlich. Die Eigenvektoren selbst sind in beiden Fällen identisch und deshalb nur einmal gezeigt. Bei den Rohdaten dominiert der erste Eigenwert mit 80.4 %, während er bei der Korrelationsmatrix nur noch 51.1 % zur Gesamtvarianz beiträgt. In dem zugehörigen zeitlichen Eigenvektor ist die zeitliche Entwicklung, in dem räumlichen Eigenvektor die räumliche Struktur des Offsets zu sehen. Ähnlich Bild 5.2 ist auch hier eine Art Vermischung des Offsets mit dem Moden-Anteil im ersten räumlichen Eigenvektor zu beobachten.

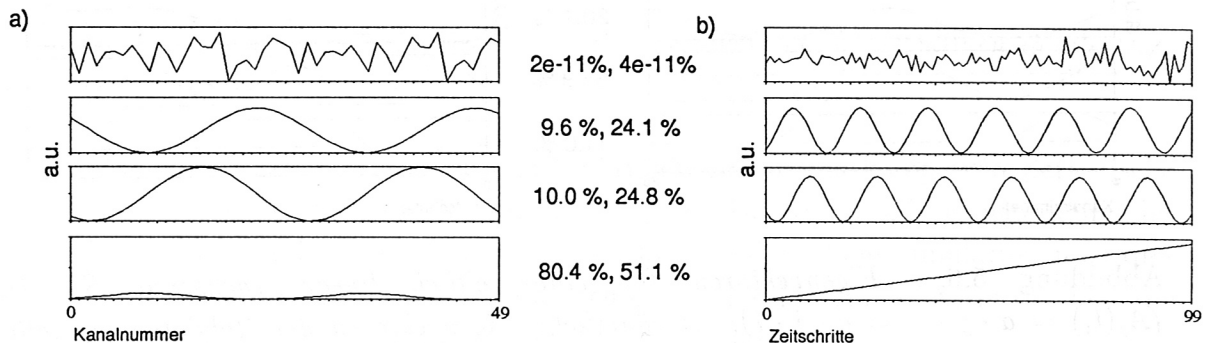


Abbildung 5.5: Eigenvektoren von $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ und der Korrelationsmatrix ρ_{ij} für räumlich konstanten und zeitlich linear wachsenden Offset ($A_j(t_i) = A(t_i) = a \cdot t_i = a \cdot i$); die relativen Varianzen sind für beide Fälle angegeben, die Eigenvektoren sind jeweils identisch: a) räumliche Eigenvektoren, b) zeitliche Eigenvektoren

Kombiniert man beide Arten von Offsets (räumliche Struktur mit zeitlicher Entwicklung: $A_j(t_i) = A_j \cdot t_i = a \cdot j \cdot i$) treten bei den Rohdaten vier, bei zentrierten Daten nur drei signifikante Eigenvektoren auf, die in Bild 5.6 zu sehen sind. Neben den zwei Moden-Vektoren treten bei den Rohdaten zwei weitere Eigenvektoren auf. Durch den ersten Eigenvektor mit 88.6 % relativer Varianz und den vierten Eigenvektor mit 0.31 % relativer Varianz wird der überlagerte Offset beschrieben. Bei der Korrelationsmatrix tritt nur noch ein zusätzlicher hoher Eigenwert mit 20.1 % der Varianz auf. Durch die zugehörigen Eigenvektoren wird die zeitliche Rampe des Offsets repräsentiert. Die räumliche Struktur ist durch die Zentrierung zum Verschwinden gebracht worden. In den Offset-Eigenvektoren ist jeweils eine Mischung mit der Modulation der Moden zu beobachten.

Der optimale Weg zur Datenanalyse mittels SVD ist somit der Folgende. In einem

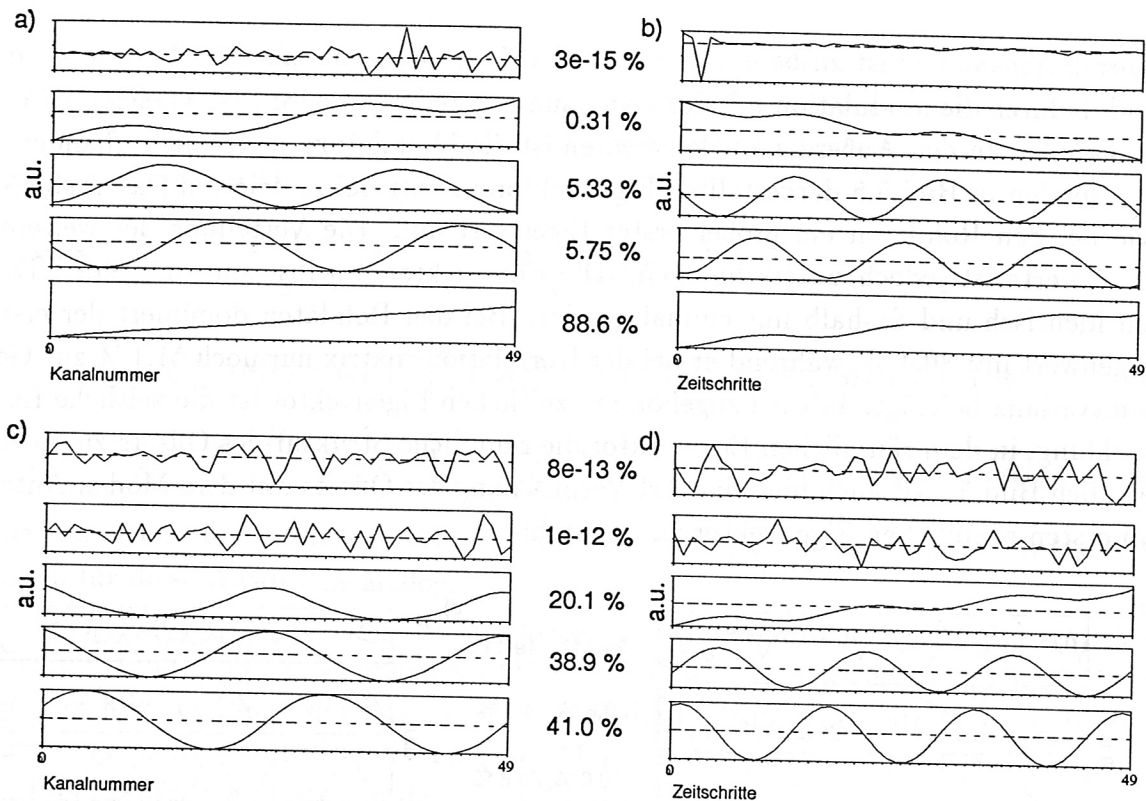


Abbildung 5.6: *Eigenvektoren für eine zeitlich linear wachsende Struktur ($A_j(t_i) = a \cdot j \cdot t_i = a \cdot j \cdot i$): a) räumliche Eigenvektoren der Rohdaten, b) zeitliche Eigenvektoren der Rohdaten, c) räumliche Eigenvektoren der zentrierten Daten, d) zeitliche Eigenvektoren der zentrierten Daten*

ersten Schritt betrachtet man die Rohdaten. Tritt ein erster dominierender Eigenwert auf, so ist bei der Interpretation dieses Anteils an den Daten der räumliche Eigenvektor von größerem Interesse. Verwendet man in einem zweiten Schritt zentrierte Daten und tritt der entsprechende signifikante Eigenwert nicht mehr auf, so ist es gelungen, einen dominanten zeitlich konstanten Offset zu eliminieren. Tritt weiterhin ein signifikanter Eigenwert auf, so hat man es mit einer sich zeitlich entwickelnden räumlichen Struktur zu tun. Im wesentlichen ist dann der zugehörige zeitliche Eigenvektor von Interesse. Bei zentrierten Daten muß noch überlegt werden, ob man die Daten durch Verwendung der Korrelationsmatrix zusätzlich auf Einheitsvarianz normiert. Man kann so auch Meßdaten mit unterschiedlichen physikalischen Dimensionen und Größenordnungen kombinieren und gemeinsam auf Korrelationen hin analysieren.

5.2 Komplexe periodische Signale

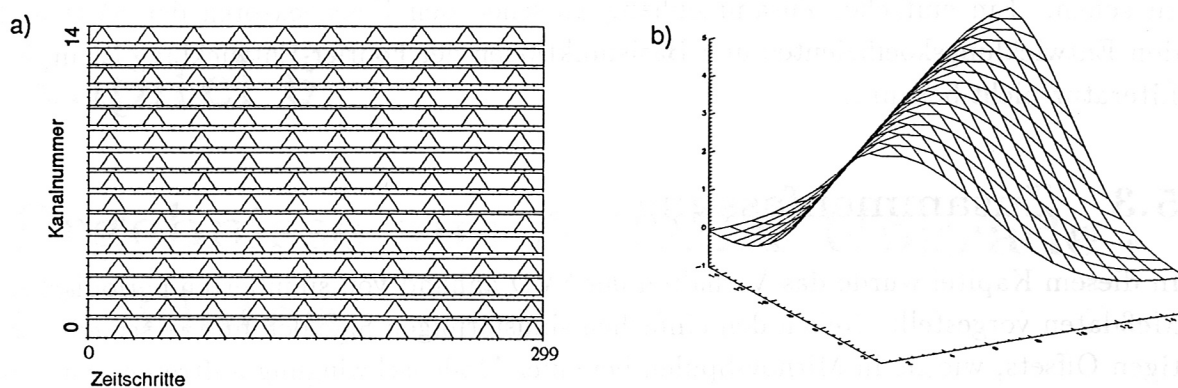


Abbildung 5.7: Komplexe periodische Signale: a) Rohdaten, b) dreidimensionale Darstellung von $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$

Neben der einfachen Struktur einer Sinusfunktion wird nun eine komplexere periodische Funktion untersucht. Es handelt sich um ein periodisch durch alle Kanäle laufendes Dreieck, wie es in Bild 5.7 zu sehen ist. In Analogie zu den Modensimulationen ist dies eine $m = 1$ Struktur. Bild 5.7 zeigt die sich ergebende Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$, in der klar die $m = 1$ Struktur entlang der Hauptdiagonalen zu erkennen ist.

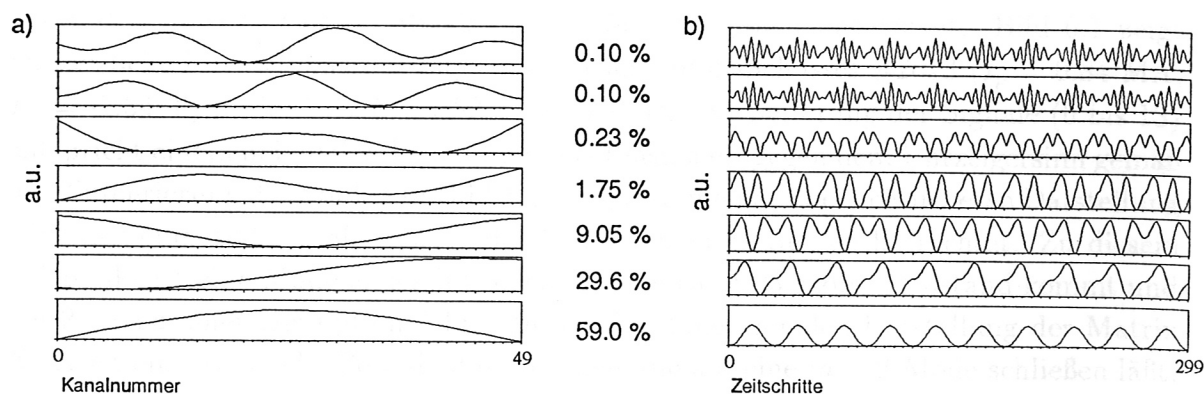


Abbildung 5.8: Komplexe periodische Signale: a) räumliche Eigenvektoren, b) zeitliche Eigenvektoren

Um ein derartiges Signal darstellen zu können ist eine größere Zahl der in Bild 5.8 gezeigten Eigenvektoren notwendig, wie die Verteilung der relativen Varianzen zeigt. Es gibt keinen großen Sprung auf nahezu 0 % der Varianz ab einer bestimmten Zahl

von Eigenvektoren, analog der einfachen Sinus-Form der Moden im vorhergehenden Beispiel.

Ein Zusammenhang mit der Fourier-Transformation ist in diesem Fall schwieriger zu sehen. Ein einfacher Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren der SVD und den Entwicklungskoeffizienten und Basisfunktionen der Fourier-Entwicklung ist in der Literatur nicht bekannt.

5.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Verhalten der SVD anhand von simulierten periodischen Meßdaten vorgestellt. Neben den einfachen sinusförmigen Signalen mit verschiedenartigen Offsets, wie sie in Mirnov-Spulen bei einer Modenschwingung auftreten, wurden komplexere Signale (Dreieck-Signal) untersucht. Der Einfluß auf die Ergebnisse der SVD von verschiedenen einfachen räumlichen und zeitlichen Strukturen wurde beschrieben, um bei realen Daten diese Erfahrungen berücksichtigen zu können. Es können Komponenten auftreten, die teilweise störend hohe Eigenwerte, d.h. relative Varianzen aufweisen. Für solche Eigenvektoren wurde ein Weg aufgezeigt, wie man durch kombinierte Betrachtung von unzentrierten und zentrierten, entsprechend normierten Daten weitere Informationen erhalten kann.

Kapitel 6

Ergebnisse aus ASDEX Upgrade - Meßdaten

Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Betrachtungen bezogen sich ausschließlich auf simulierte Daten zum Test des Verfahrens. Dabei konnten Anhaltspunkte für die Interpretation gewonnen werden. Diese Erfahrungen sollen nun auf reale Meßdaten angewandt und weiter verfeinert werden. Es werden Signale betrachtet, die im Hinblick auf Disruptionen interessant sind.

6.1 Modenschwingung

Als erstes Beispiel werden Meßdaten von Mirnov-Spulen untersucht. Bild 6.1 zeigt die zeitliche Entwicklung der Signale des Dichtelimit-Schusses #2613 ($I_p = 0.84$ MA, $B_t = -1.34$ T) in der Zeit $t = 1.80$ s - 1.85 s. Die Numerierung der Signale (0 bis 13) entspricht einem poloidalen Umlauf um das Plasma entgegen dem Uhrzeigersinn gemäß der Numerierung der Spulen in Bild 4.1. Zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung wird nur eine Teilauswahl von 14 der vorhandenen 32 Spulen betrachtet. Zu diesem Zeitpunkt ist eine Mode angeschwungen, die bei ca. 1.93 s zum Stillstand kommt und bei 2.0 s zu einer Disruption führt. In der dreidimensionalen Darstellung der Matrix $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ ist eine zweifache Periodizität zu sehen, die auf eine $m = 2$ Mode schließen läßt.

Bild 6.2 zeigt die mittels der Korrelationsmatrix berechneten zeitlichen und räumlichen Eigenvektoren mit den zugehörigen relativen Varianzen. Den ersten beiden Eigenvektoren entsprechen zusammen bereits 72.8 % der Gesamtvarianz der ursprünglichen Daten. In den beiden räumlichen Eigenvektoren ist deutlich die zweifache räumliche Periodizität zu sehen, die sich in $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ schon angedeutet hat. Es kann daraus endgültig auf eine $m = 2$ Mode geschlossen werden. Im Gegensatz zu den Simulationen liegt hier

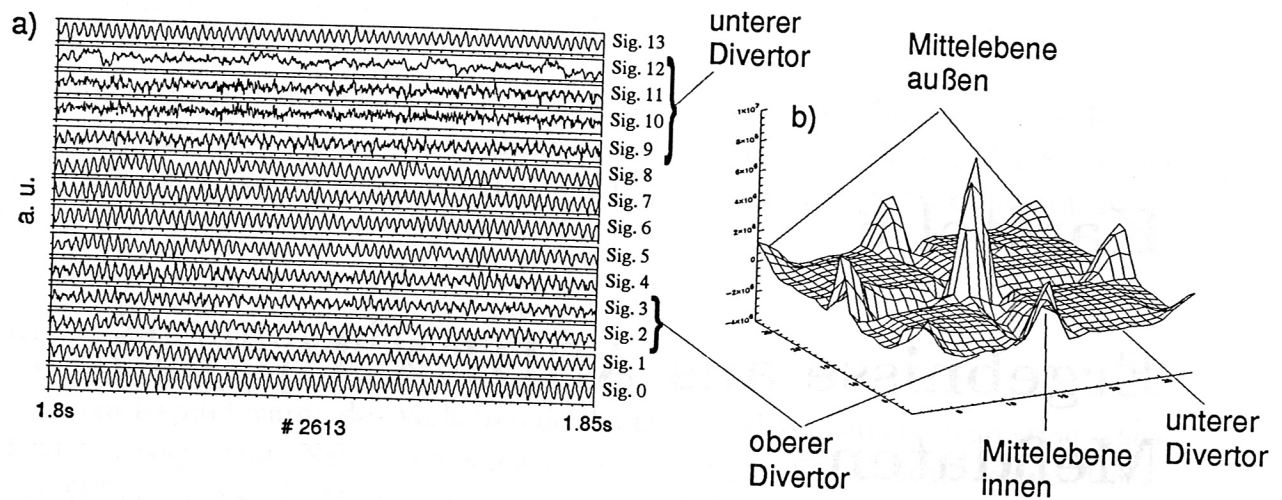


Abbildung 6.1: Signale von 14 ausgewählten Mirnov-Spulen in dem DL-Schuß #2613: a) Rohdaten, b) dreidimensionale Darstellung von $X^T X$ mit insgesamt 28 Spulen

keine lineare Phasenverschiebung zwischen den einzelnen Meßspulen vor, d.h. die Inselstruktur rotiert bei konstanter Phasengeschwindigkeit mit unterschiedlicher poloidaler Winkelgeschwindigkeit an den einzelnen Spulen vorbei. In den räumlichen Eigenvektoren tritt ein komplizierterer Verlauf auf. Die genaue Erklärung für den nichtlinearen Phasenverlauf zwischen den Spulen ist in [21] zu finden.

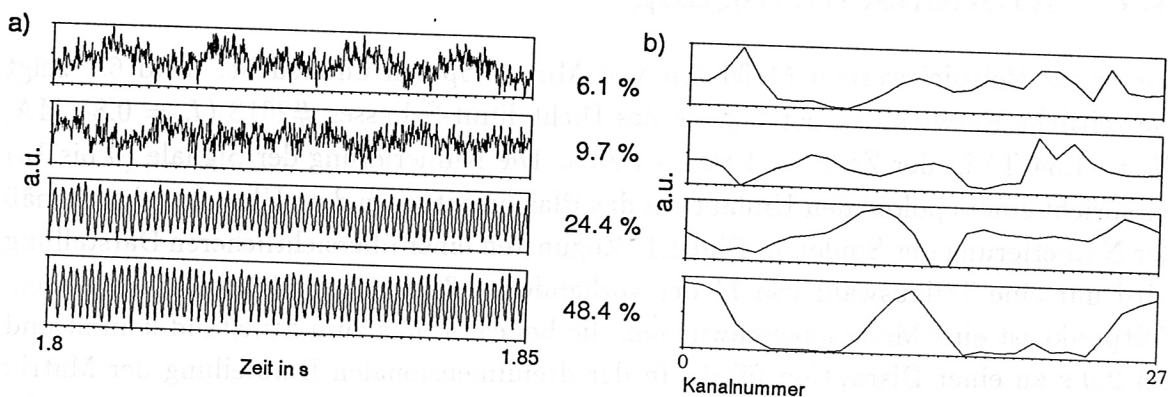


Abbildung 6.2: Eigenvektoren der Mirnov-Daten anhand der Korrelationsmatrix von der Entladung #2613: a) zeitliche Eigenvektoren, b) räumliche Eigenvektoren

Beschränkt man sich bei Speicherung und Rekonstruktion der Daten mittels Gleichung (3.5) auf die ersten beiden Eigenvektoren, die zusammen 72.8 % der Datenvarianz tragen, und vernachlässigt alle höheren Eigenvektoren mit geringerer Varianz, hat man eine deutliche Datenreduktion erreicht. Gegenüber den 14 Signalspuren der Rohdaten

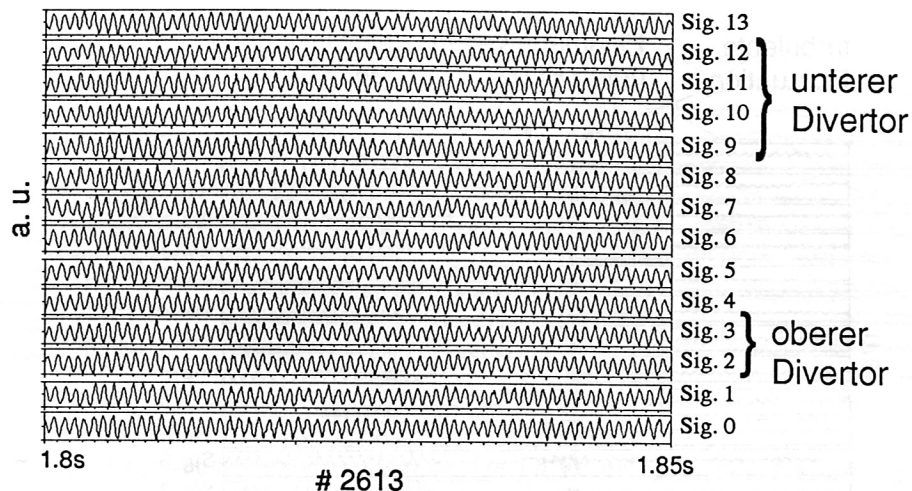


Abbildung 6.3: Rekonstruktion der Entladung #2613 mit den ersten beiden signifikanten Eigenvektoren, die 72.8 % der Varianz tragen

müssen nur zwei zeitliche und zwei räumliche Eigenvektoren mit ihren Eigenwerten abgespeichert werden.

Betrachtet man die so rekonstruierten Daten in Bild 6.3 fällt ein weiterer Effekt auf. In den Spulen oberhalb des oberen (Signal 2-3) und unterhalb des unteren Divertors (Signal 9-12) ist durch die zunehmende Distanz der Spulen von der $q = 2$ Fläche das Störfeld der Mode in den Rohdaten gegenüber dem Rauschen nur noch schwer zu erkennen. Bei den rekonstruierten Meßsignalen ist auch in diesen Kanälen die Mode deutlich zu beobachten. Es ist gelungen, durch die Filterung mit den ersten beiden Eigenvektoren die dominanten Anteile herauszufiltern und das überlagerte Rauschen zu eliminieren. Der Anteil der Modenschwingung an den mit Rauschen behafteten Signalen wurde auf Grund der Korrelationen mit anderen, weniger verrauschten Kanälen herauspräpariert.

6.2 ELMs in H-Mode

Als zweites Beispiel wird eine H-Mode Entladung untersucht, bei der das Plasma im wesentlichen mit Neutral-Teilchen-Injektion geheizt wurde. Es werden wieder die Mirnov-Spulen bei einem typischen Schuß (#3703, $I_p = 1.2$ MA, $B_t = -2.0$ T, $P_{NI+ICRH} = 5.5$ MW) in dem Zeitintervall zwischen 2.804 s und 2.812 s untersucht (Bild 6.4). In diesem Zeitintervall befindet sich die Entladung in der H-Mode mit ELMs (siehe Abschnitt 2.6). Neben einer Modenschwingung ist ein einzelner ELM in den Daten zu beobachten.

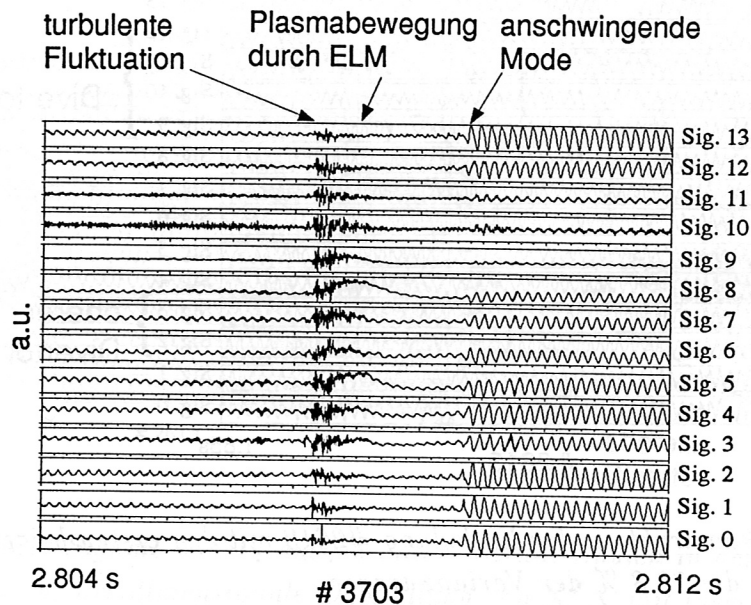


Abbildung 6.4: Signale von 14 ausgewählten Mirnov-Spulen in dem Schuß #3703 (ELM in H-Mode)

Bild 6.5 zeigt die Eigenvektoren, die sich bei Betrachtung der Korrelationsmatrix ergeben. Neben den hohen relativen Varianzen der ersten beiden Eigenvektoren, welche im wesentlichen die Mode repräsentieren, haben die nächsten Eigenvektoren immer noch eine hohe Varianz. Bei ca. 2.809 s ist in den ersten beiden, den Moden-Eigenvektoren ein starkes Anfachen der Modenschwingung zu beobachten. In den höheren Eigenvektoren ist eine Teilinformation des ELMs enthalten. Sie besteht im wesentlichen aus der vertikalen Lageverschiebung des Plasmas als Ganzes durch die veränderte Energieverteilung im Plasma. Sowohl in den Moden-Vektoren, als auch in den höheren Eigenvektoren ist eine räumlich unkorrelierte Fluktuation in den Daten zu beobachten. Sie rührt von einer hochfrequenten Turbulenz, die bei einem ELM auftritt. Da es sich um ein räumlich unkorreliertes Phänomen handelt, tritt es in allen Eigenvektoren gleichermaßen auf und kann nicht einem bestimmten Eigenvektor zugeordnet werden.

In Bild 6.6 sind mit bestimmten Eigenvektoren rekonstruierte Daten gezeigt. Verwendet man die ersten beiden Vektoren, die nur 67.3 % zur Gesamtvarianz beitragen, erhält man analog dem vorangegangenen Abschnitt den Moden-Anteil in den Signalen und kann wiederum Rauschen, aber nun auch die durch den ELM verursachte Plasmabewegung mit hoher relativer Varianz gezielt unterdrücken. Der Anteil der hochfrequenten Turbulenz bleibt jedoch erhalten, da er auch in den Moden-Eigenvektoren auftritt. Filtert man auf die nächsten fünf höheren Eigenvektoren mit insgesamt 31.1 %

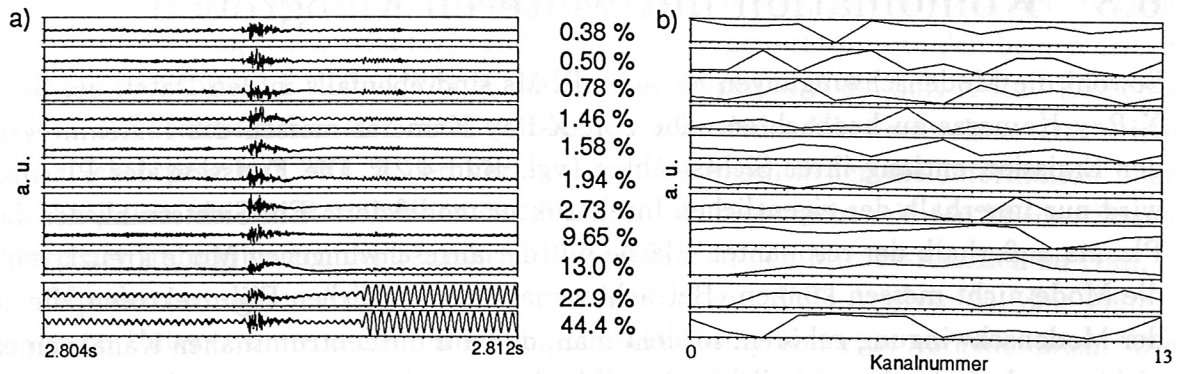


Abbildung 6.5: *Eigenvektoren der Mirnov-Daten in der H-Mode Entladung #3703: a) zeitliche Eigenvektoren b) räumliche Eigenvektoren*

der Datenvarianz, erhält man den Anteil des ELMs, der in einer Verschiebung des Plasmas besteht. Die eigentlich dominante Moden-Schwingung und das Rauschen werden gezielt unterdrückt. Auch hier tritt die Turbulenz wieder auf. Man kann somit gewünschte Anteile eines Signals gezielt herauspräparieren und andere Anteile mit eventuell höherer Varianz unterdrücken.

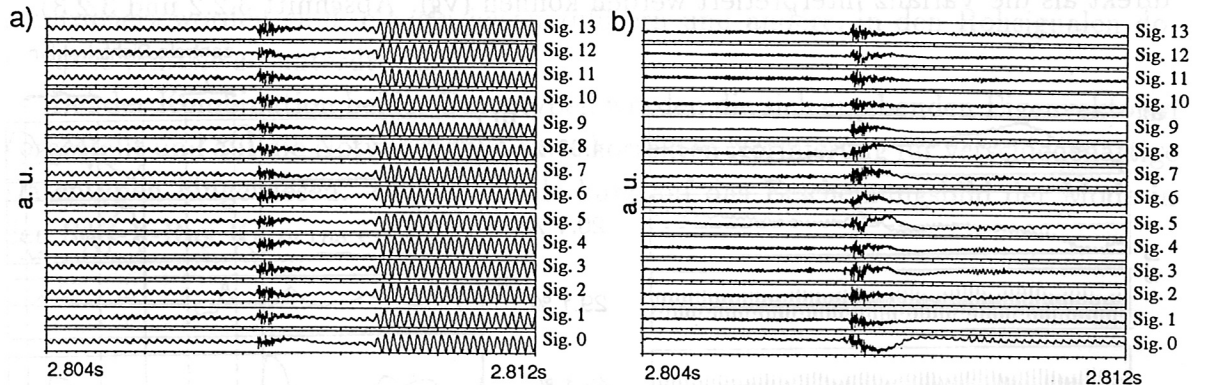


Abbildung 6.6: *Mit verschiedenen Eigenvektoren rekonstruierte Daten der Entladung #3703: a) Moden-Eigenvektoren 1 und 2 mit 67.3 % der Varianz, b) ELM-Eigenvektoren 3 bis 7 mit 31.1 % der Varianz*

Insbesondere fällt auf, daß in dem ersten Kanal (Signal 0) der Rohdaten die durch die Plasmabewegung während des ELMs hervorgerufene Induktion durch die Modenschwingung verdeckt war. In den auf den ELM, bzw. die Plasmabewegung gefilterten Daten ist in diesem Kanal deutlich der Einfluß der Plasmabewegung herauspräpariert worden.

6.3 Kombination mit weiteren Meßgrößen

Sowohl die Modenschwingungen als auch ELMs sind ebenfalls in den Daten der Soft-X-Ray Kameras zu beobachten. Die Soft-X-Ray Kameras messen das Linienintegral der Emission entlang ihrer Sichtstrahlen (vgl. Bild 4.2). Die Emission des Plasmas wird nur innerhalb der eigentlichen Inselstruktur modifiziert. Ein Sichtstrahl, der das Plasma außerhalb der resonanten Fläche mit der angeschwungenen Mode kreuzt, wird die Mode nicht messen können. Betrachtet man die räumlichen Eigenvektoren, die zu der Modenschwingung gehören, so sieht man, daß nur die zentrumsnahen Kanäle einen nicht verschwindenden räumlichen Anteil besitzen.

Bei einer Kombination der Daten beider Diagnostiken ist zu beachten, daß bei verschiedenartigen Signaltypen (Induktionsspannungen der Mirnov-Spulen und Strahlungsintensitäten im weichen Röntgenlicht) nur die Verwendung der Korrelationsmatrix sinnvoll ist, da durch sie alle Daten auf Einheitsvarianz normiert und somit von gleicher Größenordnung sind. Die Mirnov-Spulen zeigen bei einer Mode eine Schwingung um den Nullpunkt, während in den Daten der Soft-X-Ray Kameras ein hoher Strahlungsuntergrund durch das Plasma und zudem eine andere Schwingungsamplitude vorliegt. Eine Kombination der unnormierten Rohdaten würde somit die Analyse verfälschen. Die Verwendung der Korrelationsmatrix hat außerdem den Vorteil, daß die Eigenwerte direkt als die Varianz interpretiert werden können (vgl. Abschnitt 3.2.2 und 3.2.3).

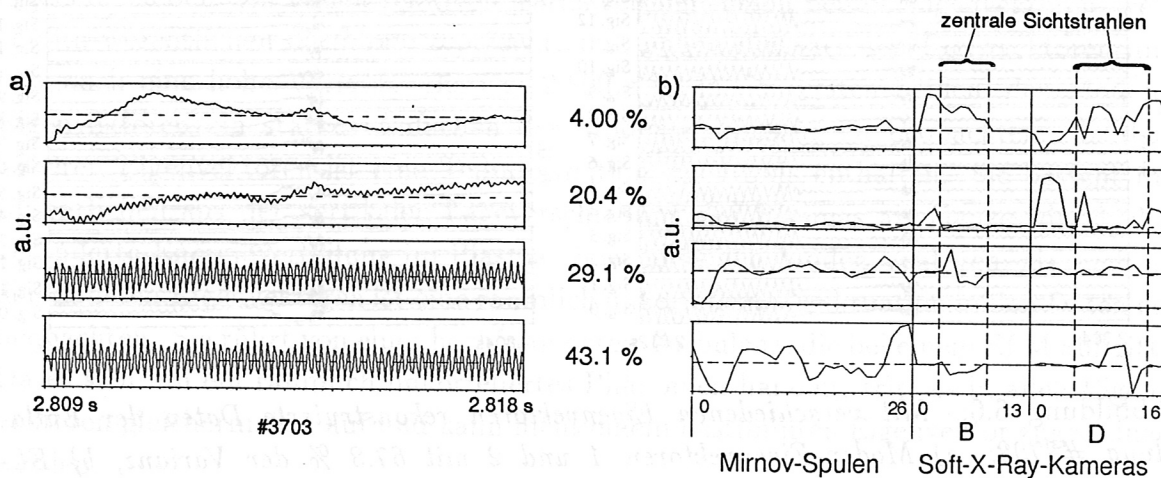


Abbildung 6.7: Kombinierte Eigenvektoren zwischen Mirnov- und Soft-X-Ray-Daten anhand der Korrelationsmatrix für die Entladung #3703: a) zeitliche Eigenvektoren, b) räumliche Eigenvektoren

Für die kombinierten Daten folgt eine entsprechende Form der Eigenvektoren. In den zeitlichen Eigenvektoren ist die zeitliche Entwicklung der Mode beider Diagnostiken zu sehen. Die räumlichen Eigenvektoren zeigen den Phasenverlauf der Mode

zum einen in den Mirnov-Daten und zum anderen in den Sichtstrahlen der weichen Röntgenstrahlung (siehe Bild 6.7). Die räumlichen Eigenvektoren zu den beiden ersten Eigenwerten mit 43.1 % und 29.1 % der Varianz zeigen, daß die Soft-X-Ray Kameras nur in den zentralen Kanälen einen von Null verschiedenen Wert aufweisen. Das dritte Eigenvektorpaar mit 20.4 % der Varianz zeigt im wesentlichen die Information über die Emission aus den Randbereich des Plasmas. Da diese nicht mit den Mirnov-Daten korreliert ist, ergibt sich der räumliche Eigenvektor in den Mirnov-Kanälen zu Null.

Mit dem in dieser Arbeit erstellten Programm zur SVD-Analyse wurden weitergehende Untersuchungen an den Daten der Soft-X-Ray Kameras vorgenommen. Die Ergebnisse, bei denen Sägezähne unter anderem auf ihre Frequenz und ihren Inversionsradius hin analysiert wurden, sind in [5] gezeigt.

6.4 Zusammenfassung

Als Beispiel für die Untersuchung realer Meßwerte mittels SVD wurden Daten von Mirnov-Spulen und Soft-X-Ray Kameras vorgestellt. Hierbei wurden Moden und ELMs in einer zusatzgeheizten H-Mode Entladung betrachtet. Es ist gelungen, durch Rauschen verdeckte Signalanteile des Datensatzes gezielt zu betonen. Bei den ELMs wurde die Möglichkeit aufgezeigt, bestimmte Anteile, die mit entsprechenden Eigenvektoren identifiziert worden sind, einzeln herauszufiltern und andere, in den Rohsignalen dominante Anteile zu unterdrücken.

Bei der Kombination beider Datentypen wurden die sich ergebenden Eigenvektoren vorgestellt und auf die Notwendigkeit einer korrekten Normierung für verschiedenartige Datentypen hingewiesen. Hierbei wurde kurz auf das Erscheinungsbild der Mode in den Soft-X-Ray Kameras eingegangen.

Kapitel 7

Ergebnisse im Hinblick auf Disruptionen

In [3], bzw. [4] wird das Anschwingen und anschließende Locken einer $m=2$ Mode als Precursor für Dichtelimit-Disruptionen beschrieben. Mittels PCA-Analyse von Mirnov-Daten wurde hierzu an ASDEX das Modenverhalten untersucht. Wie in Kapitel 6 gezeigt, kann mit dem hier verwendeten Verfahren der SVD ebenfalls an ASDEX Upgrade eine $m = 2$ Mode in den Daten der Mirnov-Spulen identifiziert und abgetrennt werden. Man hat jedoch das Ziel, unabhängig von dem Anschwingen der Tearing Mode einen Indikator für das Erreichen einer bestimmten Phase der Entladung zur Verfügung zu haben. Zum einen verschlechtern die Moden aufgrund ihres erhöhten radialen Transportes das Einschlußverhalten des Plasmas. Zum anderen kann die Zeitspanne zwischen Anschwingen der Mode und der Disruption insbesondere bei Entladungen mit niedrigem q -Wert sehr klein (≤ 10 ms) werden. Man will das Erreichen der Phase III gänzlich vermeiden und unabhängig von der $m = 2$ Mode bei hoher Dichte eine Entladung ohne Disruption gewährleisten.

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dargestellt, die durch SVD-Analyse von Meßdaten unter dem speziellen Aspekt der Disruptionsfrüherkennung gewonnen wurden. Hierzu wird die SVD auf Meßdaten in den einzelnen Phasen einer Dichtelimit-Entladung angewandt (vgl. Abschnitt 2.5). Im weiteren Verlauf wird die Anwendung der Funktions-Parametrisierung und deren Ergebnisse dargestellt.

Neben der Vorhersage der Disruption wäre es wünschenswert, eine Regelgröße zu erhalten durch die zum Beispiel die Gasblasrate so geregelt werden kann, daß die Dichte unterhalb des kritischen Wertes für einen Stromabriß bleibt.

7.1 Eigenvektoren in den verschiedenen Phasen der Entladung

In Abschnitt 2.5 wurde die Unterteilung einer Dichtelimit-Entladung in vier Phasen vorgestellt. Für jede der Phasen soll eine SVD-Analyse durchgeführt werden, um charakteristische Vorgänge anhand der Eigenvektoren in den einzelnen Phasen herauszuarbeiten. Beispielfhaft werden für diese Analyse die Meßdaten der Bremsstrahlungs-Diagnostik benutzt, wobei im wesentlichen Daten der im G-Port montierten Kamera benutzt werden, deren Sichtstrahlen von oben auf den Divertor blicken (vgl. Bild 4.3).

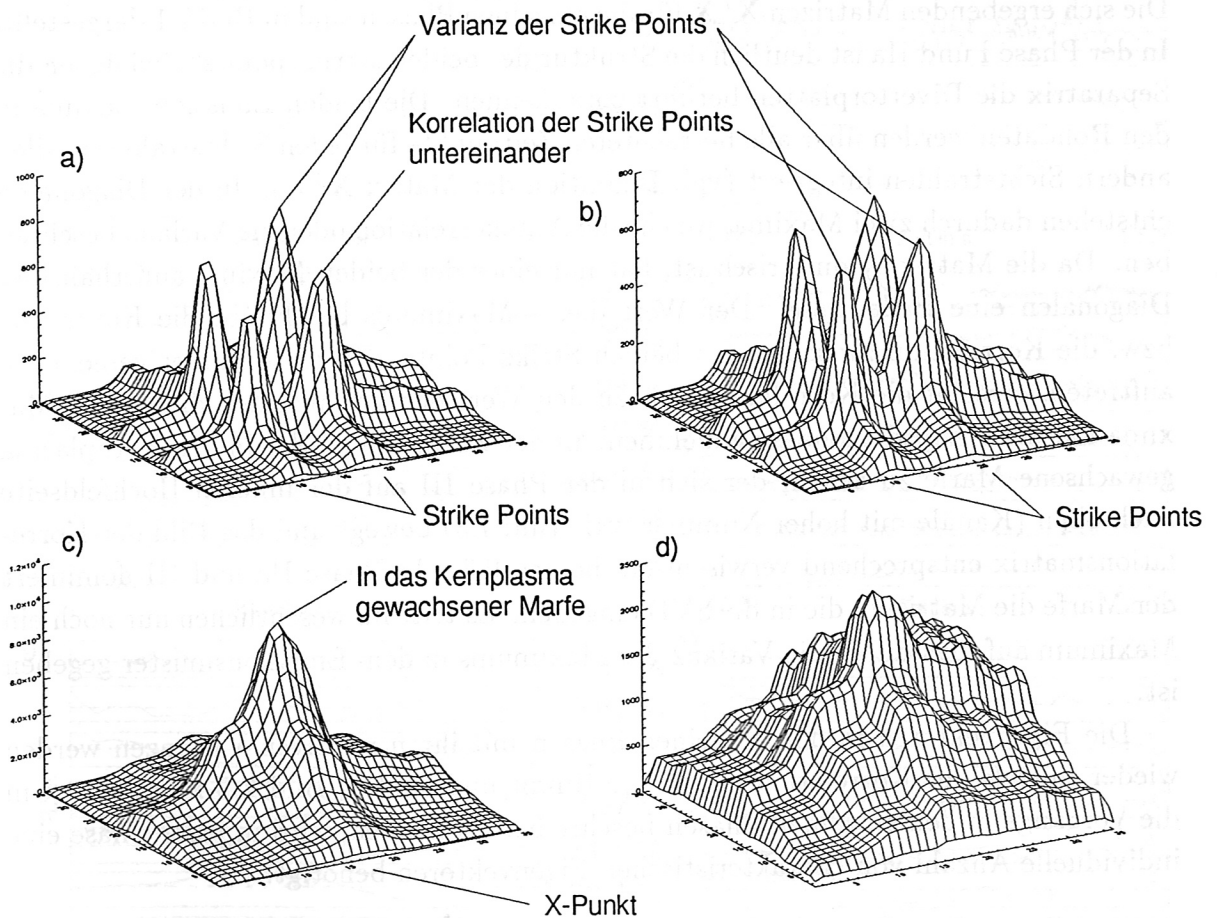


Abbildung 7.1: Dreidimensionale Darstellung von $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ für Daten der Bremsstrahlungs-Diagnostik aus der Entladung #3062: a) Phase I (heißer Divertor, Strike Points), b) Phase IIa (kalter Divertor), c) Phase IIb (kalter Divertor, Marfe über dem X-Punkt), d) Phase III (Marfe wandert auf Hochfeldseite nach oben, hohe Kanalnummer)

Für die Standard-Dichtelimit-Entladung #3062 mit $I_p = 0.6$ MA und $B_t = -1.94$ T werden folgende Zeitintervalle für die einzelnen Entladungsphasen festgelegt (vgl. Bild 2.5):

- Phase I: 0.69s - 1.225s
- Phase IIa: 1.225s - 1.520s
- Phase IIb: 1.520s - 2.173s
- Phase III: 2.173s - 2.277s

Die sich ergebenden Matrizen $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ für die einzelnen Phasen sind in Bild 7.1 dargestellt. In der Phase I und IIa ist deutlich die Struktur der beiden „strike points“, bei denen die Separatrix die Divertorplatten berührt, zu erkennen. Die beiden Emissionsmaxima in den Rohdaten werden über alle betrachteten Zeitpunkte für jeden Sichtstrahl mit allen andern Sichtstrahlen integriert (vgl. Definition der Matrix $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$). In der Diagonalen entstehen dadurch zwei Maxima, welche die Autokorrelation oder die Varianz beschreiben. Da die Matrix symmetrisch ist, hat nur eines der beiden Maxima außerhalb der Diagonalen eine Bedeutung. Der Wert dieses Maximums beschreibt die Kovarianz, bzw. die Korrelation zwischen den beiden Strike Points. Da diese immer gemeinsam auftreten, erreicht die Korrelation nahezu den Wert der Varianz, den die beiden Maxima auf der Hauptdiagonalen annehmen. In der Phase IIb ist der in das Kernplasma gewachsene Marfe zu sehen, der sich in der Phase III auf der inneren Hochfeldseite nach oben (Kanäle mit hoher Nummer, vgl. Bild 4.3) bewegt und das Bild der Korrelationsmatrix entsprechend verwischt erscheinen läßt. In Phase IIa und III dominiert der Marfe die Matrizen, die in die SVD eingehen. Es tritt im wesentlichen nur noch ein Maximum auf, das durch die Varianz des Maximums in dem Emissionsmuster gegeben ist.

Die Eigenvektoren in den einzelnen Phasen mit ihren relativen Varianzen werden wieder mittels der Korrelationsmatrix bestimmt und sind in Bild 7.2 zu sehen. Um die Vorgänge in den einzelnen Phasen beschreiben zu können, wird in jeder Phase eine individuelle Anzahl von charakteristischen Eigenvektoren benötigt.

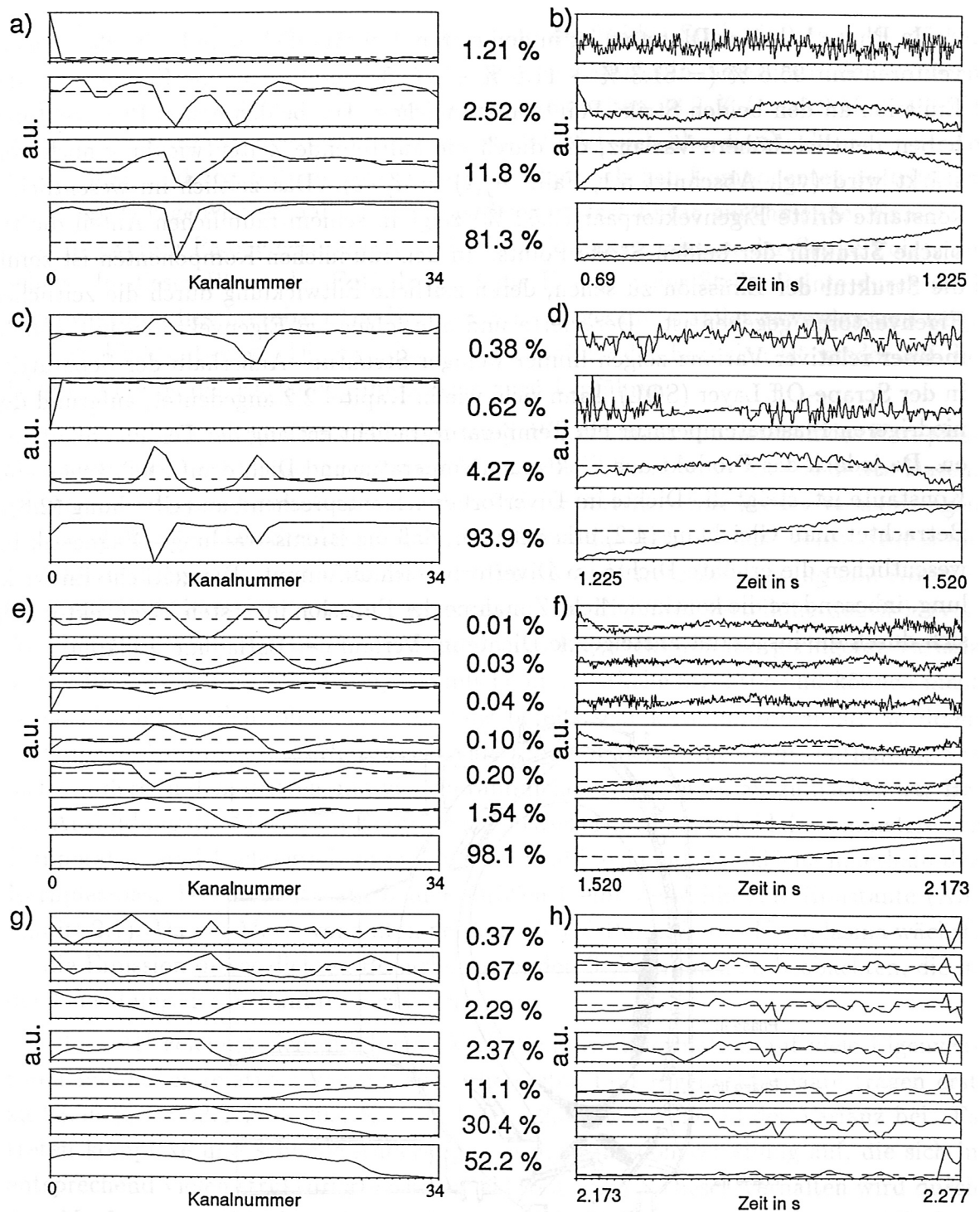


Abbildung 7.2: Eigenvektoren der Korrelationsmatrix für die Entladung #3062: a) und b) räuml. und zeitl. Eigenv. der Phase I; c) und d) räuml. und zeitl. Eigenv. der Phase IIa; e) und f) räuml. und zeitl. Eigenv. der Phase IIb; g) und h) räuml. und zeitl. Eigenv. der Phase III

In Phase I (heißer Divertor) ist in den ersten drei räumlichen und zeitlichen Eigenvektoren mit 95.6 % (= 81.3 % + 11.8 % + 2.5 %) der Varianz die Entwicklung der Emission an den beiden Strike Points auszumachen. Die beiden ersten Eigenvektoren haben deutlich höhere Varianz, die durch die auftretende Zeitentwicklung noch verstärkt wird (vgl. Abschnitt 5.1, Fall: $A_j(t) = a_j \cdot t$). Das zeitlich im wesentlichen konstante dritte Eigenvektorpaar (2.52 %) zeigt in seinem räumlichen Anteil die typische Struktur der beiden Strike Points. In den räumlichen Komponenten ist somit die Struktur der Emission zu sehen, deren zeitliche Entwicklung durch die zeitlichen Eigenvektoren gegeben ist. Der vierte und alle folgenden Eigenvektoren mit abnehmender relativer Varianz zeigen immer weniger Struktur. Außerhalb der Separatrix, in der Scrape-Off Layer (SOL), kann sich, wie in Kapitel 2.2 angedeutet, aufgrund der niedrigeren Plasmatemperatur ein Temperaturgradient entlang der Feldlinien aufbauen. Da jedoch das Produkt aus Elektronentemperatur und Dichte auf Flußflächen eine Konstante ist, steigt die Dichte im Divertorbereich entsprechend an (Gleichung (2.6)). Betrachtet man Gleichung (4.2) erkennt man, daß die Bremsstrahlungs-Diagnostik im wesentlichen die erhöhte Dichte im Divertorbereich aufnimmt. Die zeitliche Entwicklung, insbesondere die kontinuierliche Zunahme der Emission im ersten Eigenvektor läßt sich durch die insgesamt ansteigende Dichte im Verlauf der Entladung erklären.

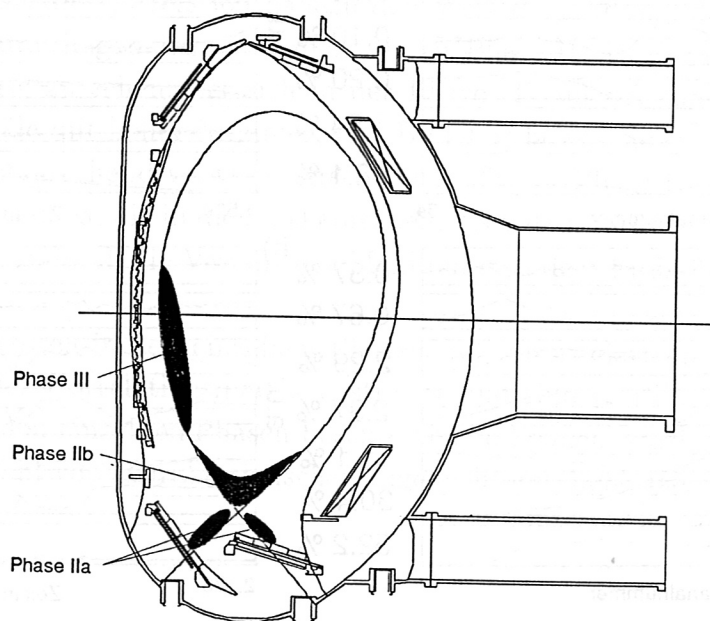


Abbildung 7.3: *Entwicklung der poloidalen Position des Marfes. In Phase I ist noch kein Marfe vorhanden*

Die Phase IIa mit kalten Divertor, über dem sich der Marfe zwischen X-Punkt und

Prallplatte ausgebildet, wird durch die Emission der beiden Strike Points noch stärker dominiert. Bild 7.3 zeigt die poloidale Position des Marfes in dieser und allen weiteren Phasen. Die ersten beiden Eigenvektorpaare beinhalten 98.2 % (= 93.9 % + 4.3 %) der Datenvarianz. In den räumlichen Anteilen findet sich klar die Struktur der Strike Points wieder, deren zeitliche Entwicklung in den zeitlichen Komponenten auftritt. In dem ersten Eigenvektorpaar ist die, mit der Zeit fast linear zunehmende, Emission, in dem zweiten Paar eine überlagerte Fluktuation der Emission der Strike Points zu sehen. In dieser Phase der Entladung ist die Emission der Strike Points durch zwei Eigenvektoren beschreibbar. Die Entladung ist insgesamt stabiler geworden und zeigt weniger Fluktuationen. Die grundsätzliche Zunahme der Emission ist wieder auf die Dichtezunahme der Entladung im Ganzen zurückzuführen.

Gelangt der Marfe in Phase IIb über den X-Punkt hinaus von unten in das Kernplasma, dominiert das Emissionsmuster des Marfes über alle anderen Anteile in den Daten. Die ersten beiden Eigenvektorpaare mit 99.6 % (= 98.1 % + 1.54 %) der Varianz zeigen im räumlichen Teil die Struktur des Marfes, der in das Kernplasma wächst. Durch die Zeitentwicklung der Struktur dominieren diese Anteile trotz Zentrierung und Normierung auf Einheitsvarianz (Korrelationsmatrix) die Eigenwertverteilung deutlich (vgl. Abschnitt 5.1, Fall: $A_j(t) = a_j \cdot t$). Die höheren Eigenvektoren mit geringerer Varianz zeigen immer noch eine eindeutige räumliche und zeitliche Struktur und können nicht vernachlässigt werden, obwohl die Varianz bereits sehr klein geworden ist. In ihnen ist unter anderem die weiterhin vorliegende Emission der Strike Points enthalten, was insbesondere in dem dritten und vierten räumlichen Eigenvektor auszumachen ist. Bei der Ausbildung des Marfes im Kernplasma entwickelt sich ein poloidal asymmetrischer Temperatur- und Dichtegradient entlang der Feldlinien einer Flußfläche innerhalb des Kernplasmas. Das Produkt aus beiden Größen bleibt weiterhin eine Konstante (Abschnitt 2.1). Da der Marfe von unten her über den X-Punkt in das Kernplasma wächst, ist die Emission dieses dichten Bereichs nur in den Sichtstrahlen zu beobachten, die in der Umgebung des X-Punktes verlaufen.

Phase III zeichnet sich durch eine Verteilung der Information auf viele Eigenvektoren mit hoher relativer Varianz aus. Die ersten fünf Eigenvektorpaare tragen erst zu 98.36 % (= 52.2 % + 30.4 % + 11.1 % + 2.37 % + 2.29 %) der Varianz bei. Es treten komplexe und schnelle Änderungen in der Emissionsverteilung auf, die sich in entsprechend vielen strukturierten Eigenvektoren äußert. Dieses Verhalten wird durch den Marfe verursacht, der schnell seine poloidale Position ändert. Da nun alle korrelierten Signalanteile eine mehr oder weniger komplexe Zeitabhängigkeit enthalten, bzw. auch unkorrelierte Anteile enthalten sind, dominiert kein Anteil aufgrund seiner Zeitabhängigkeit, wie dies in Phase IIa und IIb der Fall war.

In den ersten drei Phasen I, IIa und IIb ist in den Eigenvektoren eine kontinuierliche

Zunahme der Emission zu beobachten. Der Grund ist in der Zunahme der Dichte während der gesamten Entladung zu finden. Bei einer Dichtelimit-Entladung wird, wie in Bild 2.5 gezeigt, die Dichte bis zum Erreichen des Dichtelimits und somit der Disruption erhöht.

Berücksichtigt man bei den Daten der Bremsstrahlungs-Diagnostik die Sichtstrahlen der im A-Port montierten Kamera, die von unten her auf das innere Hitzeschild blickt (vgl. Abschnitt 4.3), ergeben sich bezüglich der Zeitentwicklung ähnliche Resultate. Es treten die zusätzlichen Sichtstrahlen, die von außen den Marfe kreuzen, in den räumlichen Eigenvektoren auf. Sie tragen die entsprechende Information über die vertikale Position des Marfes.

7.2 Projektion auf neue Meßdaten

Bis jetzt wurden nur die Eigenvektoren der Daten und deren Projektion auf die räumlichen Eigenvektoren, die Hauptkomponenten, betrachtet. Man kann nun die Meßdaten eines gesamten Schusses auf die räumlichen Eigenvektoren einer bestimmten herausgegriffenen Entladungsphase projizieren und diese weiter betrachten.

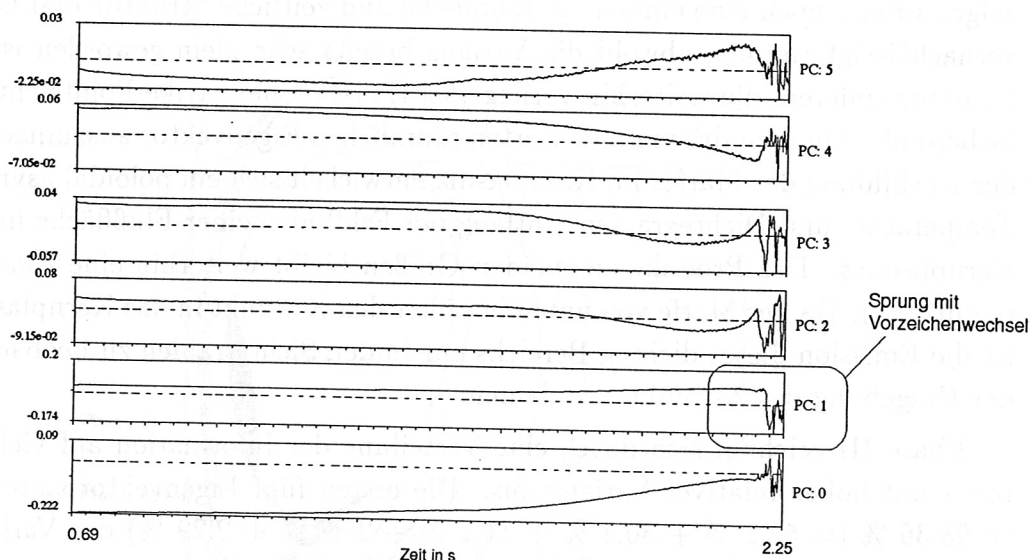


Abbildung 7.4: Projektion der Daten der gesamten Entladung #3062 auf die Eigenvektoren der Phase III derselben Entladung

Bei der Projektion der gesamten Entladung auf die Eigenvektoren der Phase III (siehe Bild 7.4) ist kurz nach dem Übergang in Phase III bei der Projektion auf den zweiten Eigenvektor ein Sprung mit einem Vorzeichenwechsel zu beobachten. Betracht-

tet man den zugehörigen zweiten räumlichen Eigenvektor der Phase III in Bild 7.2, g, so kann man erkennen, daß das Verhalten der Projektion gerade dem Auftreten einer entsprechenden Strahlungsverteilung durch den Marfe entspricht. In Phase III bleibt der Marfe nicht mehr unter dem X-Punkt, bzw. über dem X-Punkt im Kernplasma bestehen. Vielmehr bewegt er sich innerhalb der Separatrix im Kernplasma auf der inneren Hochfeldseite nach oben. Danach bewegt er sich mehrfach auf und ab, was sich an einer Oszillation in den zeitlichen Eigenvektoren der Phase III bemerkbar macht. Die Strahlungsverteilung entspricht ursprünglich dem noch am X-Punkt sitzenden Marfe. Das Verschwinden dieser Komponente, bzw. Auftreten mit negativem Vorzeichen beschreibt, daß der Marfe sich vom diesem Ort entfernt und auf der Torusinnenseite erscheint. Die Projektion auf den zweiten Eigenvektor könnte als ein Indikator für das Erreichen von Phase III mit den schnellen Bewegungen des Marfes dienen.

Man kann also über die Betrachtung der Projektionen von Daten auf charakteristische Eigenvektoren Aussagen über das Auftreten eines, mit den Eigenvektoren identifizierten, Ereignisses bekommen. Um komplexere Ereignisse auf diese Weise zu betrachten, müssen mehrere Projektionen gemeinsam, bzw. Kombinationen von mehreren Projektionen betrachtet werden. Erschwerend ist hierbei die Identifikation komplexer Vorgänge mit bestimmten Eigenvektoren. Man kann sich mit künstlich eingeführten Hilfsgrößen behelfen, um die Ereignisse zu beschreiben. Dieser Gedanke wird systematisch bei der Funktions-Parametrisierung weitergeführt, die im nächsten Abschnitt zum Einsatz kommt.

7.3 Erkennung der Phasen durch Funktions-Parametrisierung

Die im letzten Abschnitt dargestellten Projektionen auf Eigenvektoren (Hauptkomponenten) sind der Ausgangspunkt für einen Indikator für bestimmte Ereignisse. In unserem speziellen Fall sind diese Ereignisse Disruptionen. Die Verknüpfung zwischen den eigentlichen Indikator-Größen und aus Meßdaten gewonnenen Hauptkomponenten wird mittels einer Funktions-Parametrisierung durch Regressionsanalyse hergestellt.

Im folgenden wird weiterhin die Bremsstrahlungs-Diagnostik aus Vergleichsgründen als Ausgangspunkt für die Meßdaten herangezogen. Wie im vorangegangenen Abschnitt wird wieder die Standard-Dichtelimit-Entladung für die weitere Analyse betrachtet. Es findet also eine Spezialisierung auf diesen Entladungstyp statt.

7.3.1 Kenngrößen für die Disruptionserkennung

Um eine Disruption vorhersagen zu können, benötigt man die in Abschnitt 3.3, bzw. 3.3.2 angesprochenen Indikator-Größen. Sie geben ein Maß dafür, wie weit man noch von einer Disruption entfernt ist.

Als erste Größe wurde hierbei die Phase der Entladung benutzt. Die vier Phasen I, IIa, IIb und III wurden mit den ganzen Zahlen 1 bis 4 identifiziert. Da bei der weiteren Betrachtung diese Größe auch nichtganzzahlige Werte annehmen kann, wird zur graphischen Darstellung zusätzlich die jeweils nächste ganze Zahl benutzt.

Eine zweite Größe ist die noch verbleibende Zeit $\Delta t = t_{DL} - t$ bis zur eigentlichen Disruption, wobei t der betrachtete Zeitpunkt der Entladung und t_{DL} der Zeitpunkt der Disruption selbst ist. Dieser „countdown“ hat jedoch den Nachteil, eine absolute Zeit anzugeben, die nur für Dichtelimit-Entladungen mit vergleichbarer Dichterampe von Bedeutung ist und somit schwer als Regelgröße zu benutzen ist. Durch die Normierung der verbleibenden Zeit mit der relativen Steigung der Dichterampe der Phase IIb $\frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t_{DL})$, bzw. $\frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t)$ kann dieses Problem beseitigt werden. $\frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t_{DL})$ ist die auf das Dichtelimit normierte Rampe, $\frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t)$ ist auf die zum Zeitpunkt t vorliegende Dichte normiert. Die nun dimensionslosen Größen

$$\Delta\bar{n}_{e,rel}^{DL} = \frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}_e(t_{DL})} = \Delta t \cdot \frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t_{DL}), \text{ bzw.}$$

$$\Delta\bar{n}_{e,rel}^t = \frac{\Delta\bar{n}}{\bar{n}_e(t)} = \Delta t \cdot \frac{d\bar{n}_e}{dt}/\bar{n}_e(t)$$

geben somit den Spielraum für eine weitere Dichteerhöhung bis zur Disruption an. Vorausgesetzt ist hierbei eine konstante Dichtezunahme.

Als letzte betrachtete Größe wird die auf den Wert des Dichtelimits normierte Dichte $\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL})$ mit einbezogen. Diese sechs Indikator-Variablen sind gemeinsam in Bild 7.5 für die Entladung #3062 zu sehen.

Geht man von einer Gasblasrate $g(t)$ aus, die angibt wie viele Teilchen pro Sekunde dem Plasma von außen zugeführt werden, kann man folgenden Zusammenhang zwischen der Plasmadichte \bar{n}_e und der Gasblasrate g angeben

$$\frac{d\bar{n}_e(t)}{dt} = \alpha \cdot g(t).$$

Die Nachfülleffizienz α ist ein Maß dafür, welche Dichtezunahme pro zugeführtem Teilchen erreicht werden kann ($[\alpha] = \text{m}^{-3}$). Die Parameter $\Delta\bar{n}_{e,rel}^{DL}$, bzw. $\Delta\bar{n}_{e,rel}^t$ können somit als Regelgrößen für die Gasblasrate benutzt werden, um die Plasmadichte zum Beispiel 90 % unterhalb des Wertes, bei dem eine Disruption auftreten würde zu halten. Denkbar wäre auch eine Regelung mit der auf das Dichtelimit normierten Dichte $\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL})$.

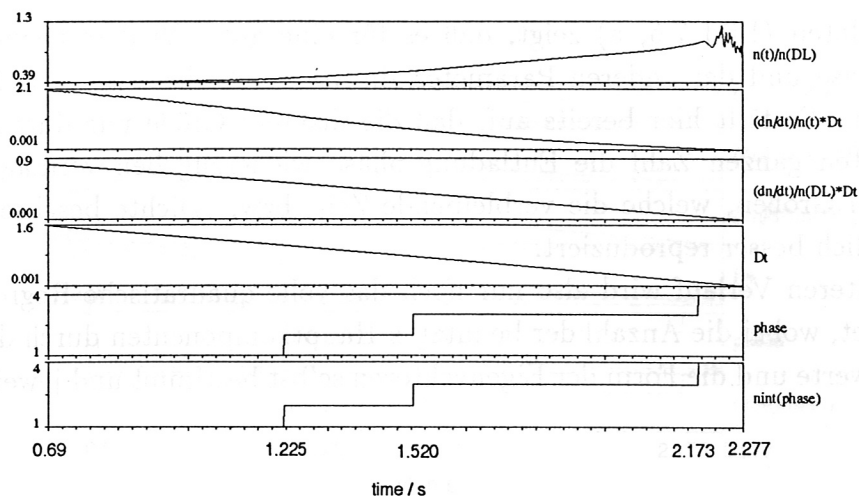


Abbildung 7.5: Kenngrößen zur Disruptionsgefahr anhand der Entladung # 3062

Die Größe $\bar{n}_e(t)$ steht als Meßwert während der Entladung zur Verfügung. Kann man anhand anderer Diagnostiken die Indikator-Größe $\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL})$ unabhängig davon bestimmen, hat man die Möglichkeit die Größe $\bar{n}_e(t_{DL})$ zu berechnen

$$\bar{n}_e(t_{DL}) = \frac{\bar{n}_e(t)}{(\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL}))}$$

Es ist hierbei zu betonen, daß die direkte Messung von $\bar{n}_e(t)$ nicht zur Bestimmung von $\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL})$ benutzt wird, sondern die Daten anderer Messungen. Man kann somit das Dichtelimit vorhersagen, ohne es wirklich erreicht zu haben und kann versuchen die mögliche DL-Disruption zu vermeiden.

7.3.2 Vergleich zwischen den Regressionsmodellen

Bevor die Erkennung von Disruptionen anhand von Indikator-Größen beschrieben wird, soll die Wahl des geeigneten Regressionsmodells getroffen werden (vgl. Abschnitt 3.3.1). Zur Berechnung der Regressionskoeffizienten wurde, wie in den vorangegangenen Abschnitten, die Bremsstrahlungs-Diagnostik benutzt. Anhand der Eigenvektoren wurden die Hauptkomponenten und mit den manuell erzeugten Indikatorgrößen (Bild 7.5) die Regressionskoeffizienten bestimmt. Bild 7.6 zeigt die Indikator-Größen wie sie sich ergeben, wenn man die Daten mit den eigenen Eigenvektoren und Regressionskoeffizienten erneut zu bestimmen versucht. Hierbei wurden die ersten fünf Hauptkomponenten benutzt, die 99,0 % der Varianz enthalten.

Ein Vergleich der Resultate zwischen den mit einem rein linearen (Bild 7.6, b), bzw. mit dem vollen quadratischen Modell (Bild 7.6, c) untersuchten Daten und den

Ausgangsdaten (Bild 7.6, a) zeigt, daß es für eine gute Wiedererkennung der Entladungsphase und der anderen Parameter sinnvoller ist, das quadratische Modell zu verwenden. Es fällt hier bereits auf, daß die diskrete Größe nur durch Berechnung der nächsten ganzen Zahl die Entladungsphase wiederzugeben vermag. Die kontinuierlichen Größen, welche die verbleibende Zeit, bzw. Dichte beschreiben, werden grundsätzlich besser reproduziert.

Im weiteren Verlauf wird also nur noch das volle quadratische Regressionsmodell angewendet, wobei die Anzahl der benutzten Hauptkomponenten durch die Verteilung der Eigenwerte und die Form der Eigenvektoren selbst bestimmt und jeweils angegeben wird.

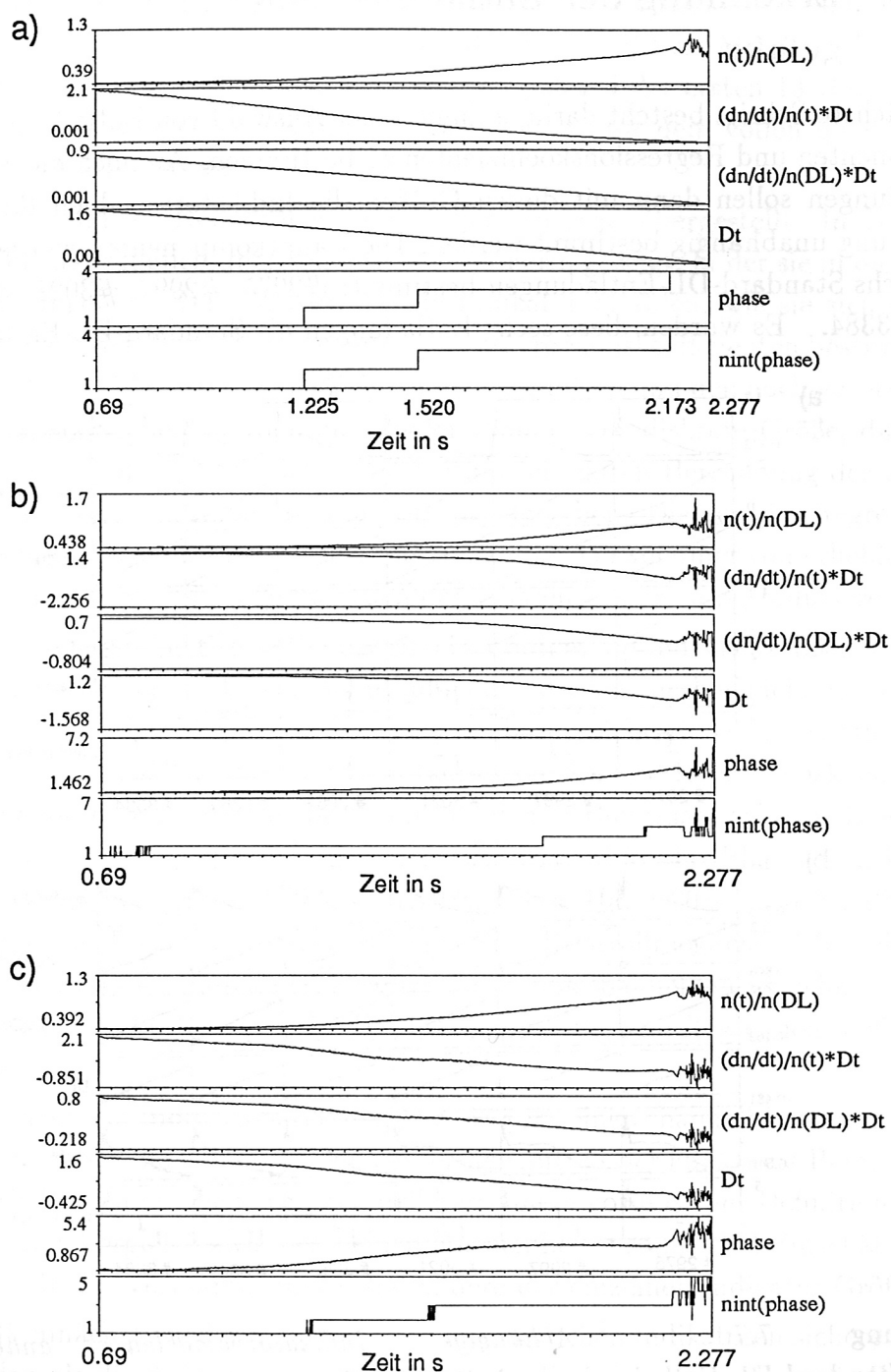


Abbildung 7.6: Anhand der eigenen fünf ersten Eigenvektoren und Regressionskoeffizienten berechnete Indikatorvariablen für die Entladung #3062 : a) manuell bestimmte Indikatorgrößen, b) lineares Regressionsmodell, c) quadratisches Regressionsmodell

7.3.3 Erkennung der Entladungsphase und der Disruptionsgefahr

Der nächste Schritt besteht darin, anhand einer Auswahl von Entladungen die Hauptkomponenten und Regressionskoeffizienten zu bestimmen. An noch nicht betrachteten Entladungen sollen dann mit diesen Größen die Indikatorvariablen für eine weitere Entladung unabhängig bestimmt werden. Die Hauptkomponenten wurden mit folgenden sechs Standard-DL-Entladungen bestimmt: #2975, #2997, #3021, #3062, #3369 und #3384. Es wurden diese sechs Entladungen als Standard-DL-Entladungen aus-

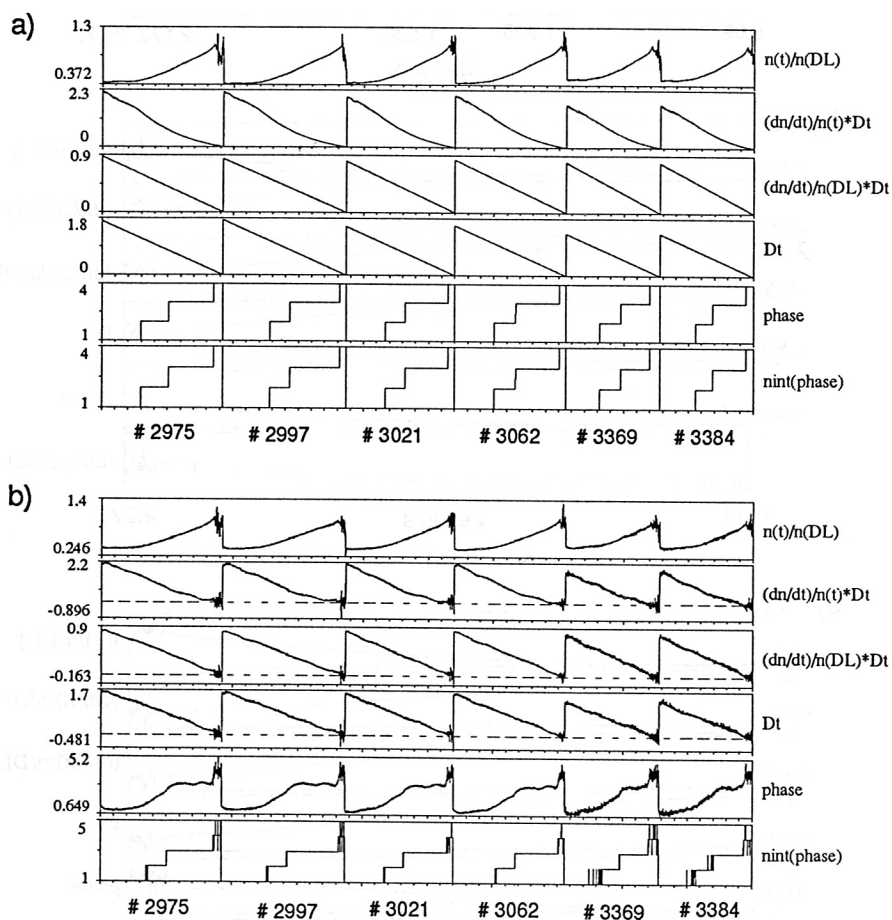


Abbildung 7.7: Abhängige Indikatorvariablen anhand von sechs Standard-DL-Entladungen: a) Für die Regressionsanalyse vorgegebene abhängige Größen, b) Mittels der FP mit 13 Hauptkomponenten und einem quadratischen Regressionsmodell wiedererkannte abhängige Größen

gewählt, da für sie die Phasen der Entladungen gut zu bestimmen waren. Sie stellen typische Standard-DL-Entladungen dar. Als Eingangsdaten wurden, ebenso wie in den

bisherigen Betrachtungen, die Daten der Bremsstrahlung-Diagnostik benutzt. Insbesondere wurde die liniengemittelte Elektronendichte \bar{n}_e nicht als Meßgröße betrachtet. Die Regressionskoeffizienten werden anschließend anhand der ersten 13 Hauptkomponenten, die 99.9 % der Gesamtvarianz repräsentieren, mit dem vollen quadratischen Regressionsmodell bestimmt.

In Bild 7.7 sind die Kenngrößen in zwei Formen gegenübergestellt. In Teilbild a) sind sie in der ursprünglich, manuell bestimmten Form gezeigt, in der sie in die Regressionsanalyse eingehen. Teilbild b) zeigt die Indikatorvariablen, wie sie sich ergeben, wenn man sie mit den Hauptkomponenten und Regressionskoeffizienten bestimmt. Die kontinuierlichen Größen, welche die Zeit bis zur Disruption und den noch verbleibenden Dichtespielraum angeben, werden gut wiedererkannt. Die diskrete Größe, durch welche die Entladungsphase beschrieben wird, kann nur durch Berechnung der nächsten ganzen Zahl die Entladungsphase vernünftig wiedergeben. Die von der Regression direkt berechnete Phaseninformation vermag nur durch Verwendung von erheblich mehr Hauptkomponenten die Sprünge zwischen den Phasen besser zu reproduzieren.

In einem nächsten Schritt soll nun versucht werden, die Indikatorgrößen von neuen Entladungen vorherzusagen. Diese Entladungen wurden hierbei nicht bei der SVD und der Berechnung der Regressionskoeffizienten berücksichtigt. Die Disruptionsgefahr dieser neuen Schüsse soll mittels der Hauptkomponenten und Regressionskoeffizienten, die zuvor an anderen Entladungen bestimmt wurden, vorhergesagt werden. Beispielhaft wurde die Entladung # 2908 für den Test benutzt. Für die Phasen ergaben sich folgende Zeitintervalle: Phase I: 0.69s - 1.208s, Phase IIa: 1.208s - 1.525s, Phase IIb: 1.525s - 1.823s und Phase III: 1.823s - 1.917s. Eine Kontrollmöglichkeit besteht darin, für diese Entladung die Indikator-Variablen zusätzlich manuell zu berechnen und mit den diagnostizierten Vorhersagen der Hauptkomponenten und Regressionskoeffizienten zu vergleichen.

Bild 7.8 zeigt die Indikatorvariablen, wie sie zum einen manuell bestimmt wurden und zum anderen wie sie sich durch die Vorhersage mittels der Funktions-Parametrisierung anderer Entladungen ergeben. Die manuell berechnete Form ist per Definition die korrekte Form. Der Vergleich zwischen beiden Formen liefert somit eine Einschätzung der Verwendbarkeit des Verfahrens und insbesondere der einzelnen Indikator-Größen.

Hier fällt zunächst wieder auf, daß die kontinuierlichen Indikatoren sicherer vorhergesagt werden als die diskrete Indikatorgröße, d.h. die Information über die Phase der Entladung. Insbesondere die auf das Dichtelimit normierte Dichte $\bar{n}_e(t)/\bar{n}_e(t_{DL})$ wird meist gut vorhergesagt. In Phase III der Entladung sind bei allen Größen mehr oder weniger starke Abweichungen gegenüber der manuell bestimmten Form zu erkennen. Die Werte der Indikatoren sind in der Phase III somit kaum noch glaubwürdig. Da man die Entladung jedoch nicht in der Phase III, sondern in der Phase IIa oder IIb

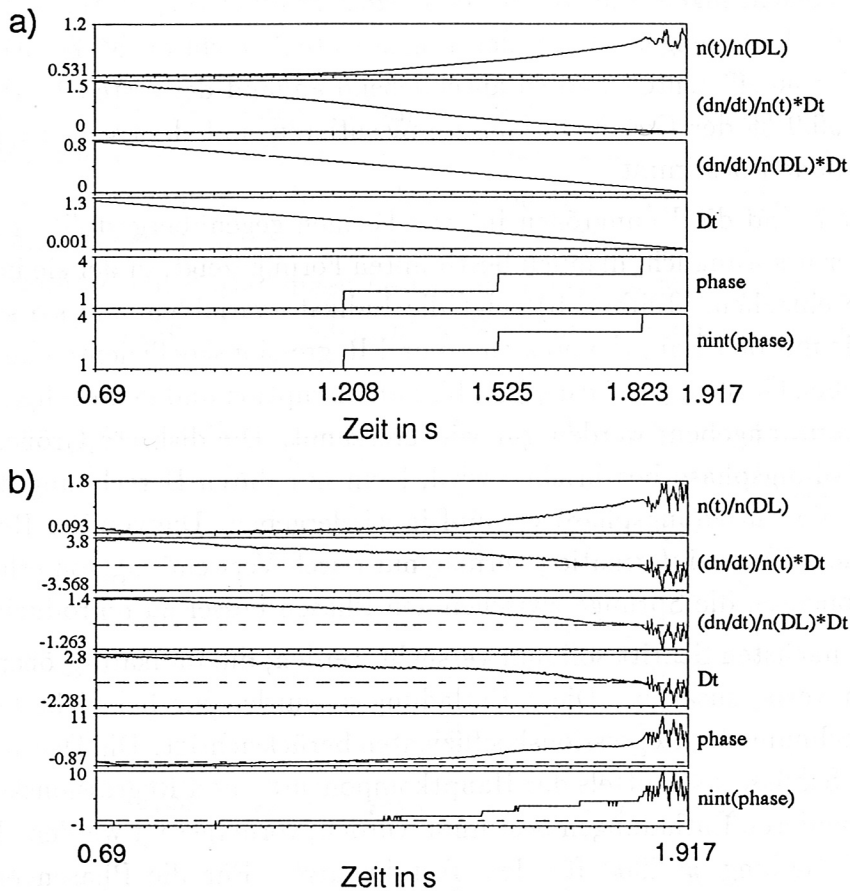


Abbildung 7.8: Abhängige Indikatorvariablen der Entladung #2908: a) manuell berechnete Indikatoren, b) Durch FP bestimmte Indikatoren anhand der im Text beschriebenen Entladungen

stabil halten will, ist dies kein Hinderungsgrund für die Verwendbarkeit des Verfahrens.

Ein möglicher Weg, die Erkennung der diskreten Indikatorgröße d.h. der Entladungsphase zu verbessern, besteht darin, auf die Hauptkomponenten der SVD eine Diskriminantenanalyse anzuwenden. Hiermit wird zunächst die Phase der Entladung vorgegeben. Für jede der vier Phasen werden anschließend unabhängig die Regressionskoeffizienten bestimmt. Bei der Erkennung der Indikatorgrößen wird dann mit den Resultaten der Diskriminantenanalyse die Phase zurückgewonnen. Die verbleibenden Indikatoren werden für jede Phase einzeln mit den jeweils zugehörigen Regressionskoeffizienten berechnet. Eine ähnliche Vorgehensweise wird bei der Funktions-Parametrisierung an ASDEX Upgrade verwendet, um im wesentlichen zwischen Limiter- und Divertorplasmen zu unterscheiden [17].

Die Beschränkung auf die Bremsstrahlungs-Diagnostik ist keine grundsätzliche Ein-

schränkung. Durch die Kombination mit weiteren Meßgrößen ist die Qualität der Funktions-Parametrisierung noch zu steigern. Dies wurde an einigen weiteren Diagnostiken untersucht, wobei insbesondere die Emissionmessung der H_α -Strahlung ähnliche Resultate lieferte wie die Messung der Bremsstrahlung.

Durch die Einschränkung auf Standard-Dichtelimit-Entladungen wurde eine Teilauswahl getroffen, die noch genauer zu betrachten ist. Es wurden nur Entladungen betrachtet, bei welchen eine Disruption auftrat und damit ein Wert für das Dichtelimit explizit angegeben werden kann. Bezieht man in die Untersuchung Entladungen mit ein, die mit diesem Entladungstyp vergleichbar sind, jedoch nicht zu einer Disruption führten, erhält man nur eine untere Grenze für das Dichtelimit. Dieser Wert ist dann durch die maximal erreichte Dichte gegeben. Wie hoch das Dichtelimit wirklich gewesen wäre, ist nicht zu bestimmen. Um die Informationen dieser Entladungen benutzen zu können, bedarf es einer weitergehenden Betrachtung. Die Regressionsanalyse mit diesen eingeschränkten Informationen der Indikator-Größen, bezeichnet man als „zensierte Regressionsanalyse“. Weitergehende Untersuchungen sollten diesen Aspekt berücksichtigen.

7.4 Zusammenfassung und Ausblick

Dieses Kapitel galt dem Versuch, anhand von Meßdaten bestehender Entladungen künstliche Hilfsgrößen zu konstruieren, die als Maß für die Gefahr einer Disruption dienen sollen.

In einem ersten Schritt wurden Daten der Bremsstrahlungs-Diagnostik getrennt in allen Entladungsphasen mittels SVD untersucht und die Eigenvektoren interpretiert. Projektionen der gesamten Entladung auf die Eigenvektoren der Teilphase III wurden als mögliche Indikatorgrößen vorgestellt.

Im nächsten Schritt wurden künstliche Indikatorgrößen zur Charakterisierung der Disruptionsgefahr eingeführt. Mittels einer Funktions-Parametrisierung wurden die in Hauptkomponenten der SVD transformierten Meßdaten auf diese Indikatoren abgebildet. Die Beschreibung der Indikatoren als Funktion der eigentlichen Meßdaten wird in dem nächsten, entscheidenden Schritt dazu benutzt, die Indikatorgrößen an den Daten von neuen, noch unbekanntem Entladungen zu bestimmen.

Bei dem Vergleich mit den manuell bestimmten Indikatoren dieser Entladungen hat sich ergeben, daß die kontinuierlichen Indikator-Variablen sicherer erkannt werden. Der verbleibende Dichtespielraum und die normierte Zeitspanne bis zur Disruption sind hierbei die Größen, die für die Regelung der Entladung in Betracht kommen. Die auf das Dichtelimit normierte Dichte ist eine weitere erfolgversprechende Größe.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war das Aufspüren von signifikanten Korrelationen in Meßdaten im Vorfeld von Disruptionen, um diese zu einem frühen Zeitpunkt zuverlässig vorhersagen zu können. An ASDEX wurde das Auftreten einer $m = 2$ Tearing Mode als Precursor für Disruptionen nachgewiesen. Da Moden mit ihrem erhöhten radialen Transport jedoch unerwünscht sind und zudem nur sehr wenig Zeit zur Reaktion zulassen, war es das Ziel, unabhängig davon einen Precursor zu erarbeiten, um eine disruptionsfreie Entladung bei hoher Dichte zu gewährleisten.

Bei der Untersuchung von Korrelationen kam die Singular Value Decomposition (SVD), bei der eigentlichen Disruptionsvorhersage eine Funktions-Parametrisierung mittels Regressionsanalyse zur Anwendung. Für die Analyse beliebiger Kombinationen von Datentypen und Entladungen wurde ein entsprechendes Programm erstellt.

Um die Ergebnisse der SVD-Analyse besser verstehen und interpretieren zu können, wurden verschiedene Typen von simulierten Meßdaten erzeugt und untersucht. Neben den einfachen sinusförmigen Signalen mit verschiedenartigen Offsets, wie sie in Mirnov-Spulen bei einer Modenschwingung auftreten, wurden komplexere Signale (Dreieck-Signal) untersucht. Der Einfluß verschiedener einfacher räumlicher und zeitlicher Strukturen auf die Ergebnisse der SVD wurde beschrieben. Es wurde dargelegt, wie man durch kombinierte Betrachtung von unzentrierten und zentrierten, entsprechend normierten Daten Informationen über Eigenvektoren mit unter Umständen störend hohen Eigenwerten bzw. relativen Varianzen erhalten kann.

Als erstes Beispiel für die Untersuchung realer Meßdaten wurden Daten von Mirnov-Spulen und Soft-X-Ray Kameras analysiert. Hierbei wurden Moden und ELMs in einer zusatzgeheizten H-Mode Entladung betrachtet. Es ist gelungen, vom Rauschen verdeckte Signalanteile im Datensatz gezielt zu betonen. Bei den ELMs wurde die Möglichkeit gezeigt, bestimmte Anteile einzeln herauszufiltern, die mit entsprechenden Eigenvektoren identifiziert worden sind. Andere Anteile mit höherer Varianz der

Eingangsdaten konnten unterdrückt werden. Die gemeinsame Betrachtung beider Diagnostiken zeigte die Notwendigkeit einer korrekten Normierung bei verschiedenartigen Datentypen.

Um die eigentliche Vorhersage von Disruptionen zu ermöglichen, wurden künstliche Hilfsgrößen eingeführt, welche die Gefahr einer Disruption charakterisieren. Diese Indikatoren werden für jede betrachtete Entladung manuell bestimmt.

In einem ersten Schritt wurden hierzu Daten der Bremsstrahlungs-Diagnostik, getrennt in jeder Entladungsphase einer Standard-Dichtelimit-Entladung, mittels SVD untersucht und die Eigenvektoren interpretiert. Projektionen der gesamten Entladung auf bestimmte Eigenvektoren der Teilphase III wurden als mögliche Indikatorgrößen für das Erreichen dieser Phase vorgestellt.

Im nächsten Schritt wurden mittels einer Funktions-Parametrisierung die aus der SVD gewonnenen Hauptkomponenten auf die künstlichen Indikatoren abgebildet. Dieser funktionelle Zusammenhang wurde im darauffolgenden entscheidenden Schritt dazu benutzt, die Indikatorgrößen von neuen, noch nicht untersuchten Entladungen zu bestimmen. Der Vergleich mit den manuell bestimmten Indikatoren zeigte, daß insbesondere die kontinuierlichen Größen, welche die verbleibende Zeit, bzw. den verbleibenden Dichtespielraum bis zur Disruption charakterisieren, als mögliche Indikatoren für Disruptionen in Betracht kommen.

Es wurde ein Verfahren entwickelt, das die gemeinsame statistische Analyse vieler, beliebiger Signaltypen mittels SVD ermöglicht. Betrachtet man die Aufbereitung von Meßdaten, so hat das Verfahren seine Leistungsfähigkeit in dieser Arbeit und in [5] unter Beweis gestellt. Durch die Verwendung einer Funktions-Parametrisierung konnte ein Weg aufgezeigt werden, zuverlässig Disruptionen vorherzusagen. Es wurde die Grundlage für eine online Erkennung von Disruptionen geschaffen. Darauf aufbauend wird eine Regelung ermöglicht, mit der die Entladung bei hoher Dichte unterhalb des Dichtelimits und somit ohne Disruption betrieben werden kann.

Anhang A

Tokamak ASDEX Upgrade

Das Tokamak Experiment ASDEX Upgrade ist das Nachfolgeexperiment des Tokamaks ASDEX. Der Name ist eine Kurzform für Axial Symmetrisches Divertor Experiment. Bild A.1 zeigt eine Teilansicht eines Sektors des Experiments.

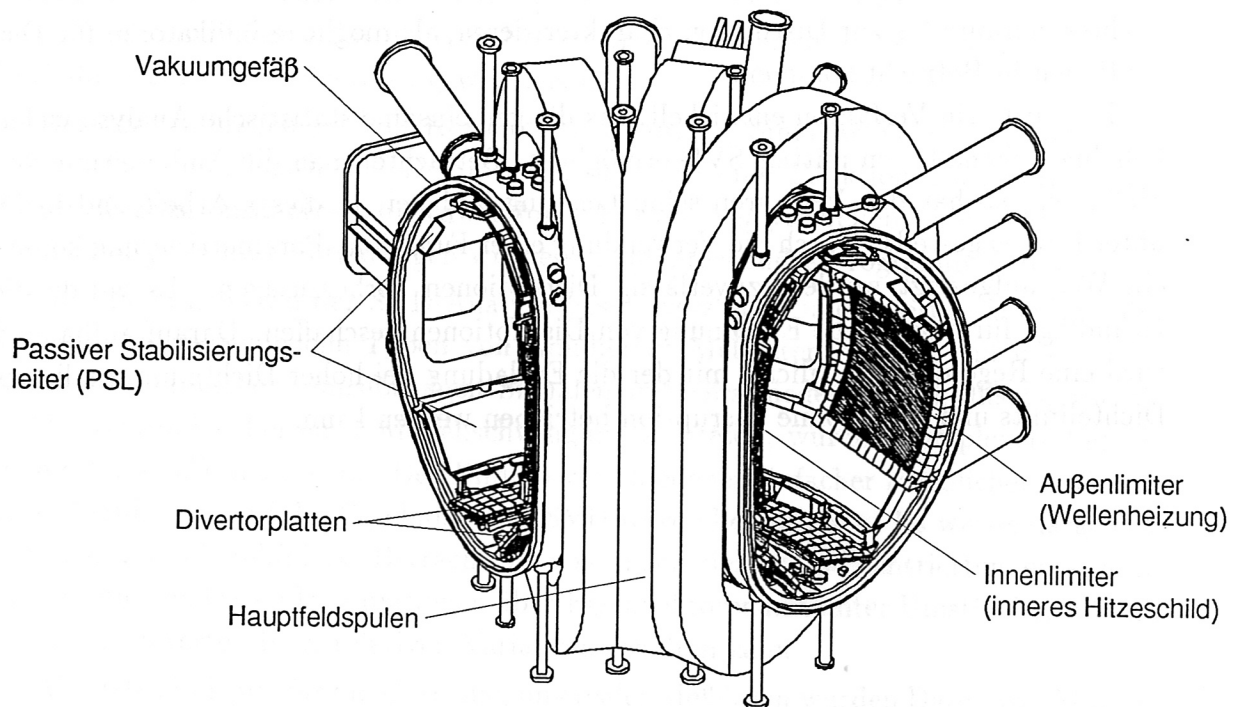


Abbildung A.1: Ansicht eines Teilsektors von ASDEX Upgrade

Großer Plasmaradius	R	1.65 m
kleiner Plasmaradius	a	0.5 m
Plasmahöhe	b	0.8 m
Plasmaelongation	$\kappa = b/a$	1.6
Aspektverhältnis	$A = R/a$	3.3
Plasmavolumen	V_{Plasma}	13 m ³
Plasmaoberfläche	S_{Plasma}	42 m ²
Masse der Protonen		$2 \cdot 10^{21} \hat{=} 3.3$ mg
Gefäßvolumen	$V_{Gefäß}$	32 m ³
maximaler Plasmastrom	I_p	1.2 MA [1.6 MA]
maximales Toroidalfeld	$B_{t,max}$	3.9 T
maximale Heizleistung	$P_{Heiz,max}$	9 MW [24 MW]
Entladungsdauer	t_D	≤ 10 s

Tabelle A.1: Grundlegende Technische Daten von ASDEX Upgrade (erreichte Werte bis Juni 1994, projizierte Werte in Klammern)

Mit Einführung eines Divertors ist ein neues verbessertes Einschlußregime, die H-Mode mit einer höheren Energieeinschlußzeit entdeckt worden [9]. Das an ASDEX entwickelte Konzept soll an ASDEX Upgrade in einer reaktorrelevanten Form untersucht und optimiert werden. Durch die hohen Neutronenflußdichten, die in einem zukünftigen Fusionsreaktor auftreten, ist es notwendig, die Poloidalfeldspulen möglichst weit vom Plasma entfernt zu montieren, um Strahlenschäden zu reduzieren. Der fehlende Platz innerhalb des Gefäßes bei zukünftigen Tokamak Experimenten, die Forderung nach einer Kühlmöglichkeit und leichter Wartbarkeit der Spulen machen es somit insgesamt notwendig, diese außerhalb des Plasmagefäßes zu montieren. Durch die veränderte Feldkonfiguration der weiter vom Plasma entfernten Spulen ist ein offener Divertor zu verwenden. (siehe Bild A.1). Die hierzu notwendige aufwendigere Form der Experimentsteuerung soll erprobt werden. Ein weiteres wichtiges Untersuchungsziel ist die Leistungs- und Teilchenabfuhr unter Reaktorbedingungen, d.h. die Entwicklung einer Divertorkonfiguration, welche die Flußdichten in einem Fusionsplasma überdauern kann und dabei nicht beschädigt wird.

Die wichtigsten technischen Daten von ASDEX Upgrade sind in Tabelle A.1 zusammengestellt. In Bild A.2 ist ein poloidaler Querschnitt des Gefäßes und des Plasmas von ASDEX Upgrade zu sehen. Neben den wichtigsten technischen Komponenten ist zusätzlich die Lage eines elliptisch elongierten Plasmas angedeutet (vgl. Bild 2.3).

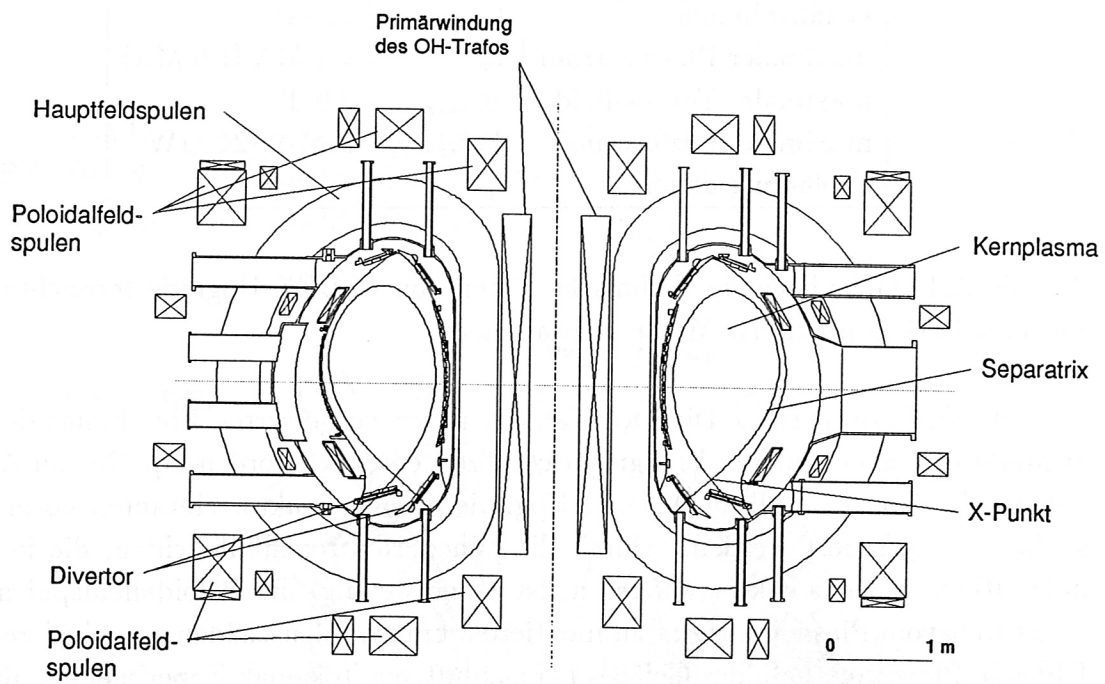


Abbildung A.2: Querschnitt durch das Vakuumgefäß von ASDEX Upgrade

Anhang B

Mathematische Grundlagen

Mit der Principal Component Analysis (Hauptkomponenten Analyse) und der Singular Value Decomposition (Singulärwert Zerlegung) wird in dieser Arbeit versucht versteckte Korrelationen in einem Datensatz aufzudecken. Mit den daraus gewonnenen Informationen läßt sich zum einen eine Datenreduktion erreichen und zum anderen kann man störende Signalanteile herausfiltern, bzw. ganz allgemein gewünschte Anteile betrachten. Die folgende Darstellung ist an die Beschreibung in [22] angelehnt.

Es werden zu N Zeitpunkten Meßdaten aufgenommen. Verallgemeinert sagt man es wird an N Objekten eine Messung vorgenommen. Bei jeder dieser N Messungen werden hierbei p physikalische Größen betrachtet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird für die weitere Rechnung $N \geq p$ vorausgesetzt. Man erhält folgende $N \times p$ - Meßmatrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots & x_{Np} \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$x_{ij} = x_j(t_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, p, \quad \text{bzw.}$$

$$x_{ij} = x_j(\text{Objekt}_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, p.$$

Durch den Zeilenindex wird somit der Zeitpunkt der Messung, bzw. verallgemeinert das zu messende Objekt, durch den Spaltenindex die physikalische Meßgröße bestimmt.

B.1 Principal Component Analysis - PCA

Man versucht, ein neues Koordinatensystem zu finden, in dem die Daten durch die Projektion auf möglichst wenige Achsen darstellbar ist. Dies wird erreicht, wenn die Abstände der Punkte von den Achsen minimal, bzw. die Projektionen der Ortsvektoren

zu den Meßpunkten auf die Achsen maximal werden. Es läßt sich zeigen, daß beide Formulierungen zueinander äquivalent sind. Die zweite Darstellung besagt, daß die Elongation der Meßwerte entlang der Achsen des neuen Koordinatensystems maximiert wird. Für das neue System wird zusätzlich gefordert, daß die Achsen orthonormal sind.

Beide Vorstellungen werden vorerst im p -dimensionalen Raum der Meßobjekte, bzw. dem der Zeitpunkte betrachtet, in dem die Zeilenvektoren aufgetragen werden. In diesem Raum entspricht jeder der N Punkte den p Messungen an einem Objekt, bzw. zu einem Zeitpunkt. Später wird der N -dimensionale Raum der Meßgrößen betrachtet, in dem die Spaltenvektoren dargestellt werden. Hier beschreibt jeder der p Punkte die Daten einer Meßgröße von allen N Objekten, bzw. zu allen N Zeitpunkten.

B.1.1 PCA im Raum der Meßobjekte

Der Betrag der Projektion d_{ij} des i -ten Zeilenvektors \vec{x}_i der Meßmatrix auf den j -ten gesuchten Basisvektor \vec{a}_j des neuen Koordinatensystems

$$d_{ij} = \vec{a}_j^T \vec{x}_i \quad (\text{B.2})$$

soll maximiert werden. Faßt man die N Abstände für den j -ten Basisvektor in einem N -dimensionalen Vektor \vec{d}_j zusammen, so sind nun dessen Komponenten betragsweise zu maximieren:

$$\vec{d}_j = \mathbf{X} \vec{a}_j.$$

Ebenso kann man die Norm dieses Vektors insgesamt maximieren:

$$d_j^2 = (\mathbf{X} \vec{a}_j)^T (\mathbf{X} \vec{a}_j). \quad (\text{B.3})$$

Im p -dimensionalen Raum der Meßpunkte läßt sich dieser Ausdruck umschreiben zu:

$$d_j^2 = \vec{a}_j^T \mathbf{S} \vec{a}_j, \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}.$$

Die symmetrische $p \times p$ -Matrix \mathbf{S} heißt „*sums of squares and cross-products matrix*“, bzw. frei übersetzt „Summenmatrix der Quadrate und Kreuzprodukte“. Der Rang von \mathbf{S} ist der gleiche wie der von der Matrix \mathbf{X} .

Von dem neuen Koordinatensystem wird verlangt, daß es orthonormal ist. Dies wird durch folgende Zusatzbedingungen ausgedrückt

$$\vec{a}_i^T \vec{a}_j = \delta_{ij}, \quad (\text{B.4})$$

die mit Lagrange-Multiplikatoren dem Extremalwertproblem hinzugefügt werden. Aus Gründen, die sich im Verlauf der weiteren Rechnung ergeben, werden die Nebenbedingungen subtrahiert.

Für jeden Basisvektor \vec{a}_j ist somit folgende Forderung zu erfüllen

$$\vec{a}_j^T \mathbf{S} \vec{a}_j = \max, \quad \text{mit} \quad \vec{a}_i^T \vec{a}_j = \delta_{ij}, \quad (\text{B.5})$$

die sich mit Lagrangemultiplikatoren in folgende Form überführen läßt

$$\vec{a}_j^T \mathbf{S} \vec{a}_j - \lambda_j (\vec{a}_j^T \vec{a}_j - 1) - \sum_{i=1, i \neq j}^p \mu_{ji} (\vec{a}_j^T \vec{a}_i) = \max. \quad (\text{B.6})$$

Durch Differentiation nach den einzelnen Komponenten von \vec{a}_j und zu Null setzen der Ableitung ist dieses Problem zu lösen:

$$2\mathbf{S}\vec{a}_j - 2\lambda_j\vec{a}_j - \sum_{i=1, i \neq j}^p \mu_{ji}\vec{a}_i = 0. \quad (\text{B.7})$$

Multipliziert man diese Forderung $p - 1$ mal von links mit dem Basisvektor \vec{a}_k^T , $k = 1, \dots, p$, $k \neq j$, so erhält man $p - 1$ Gleichungen

$$\vec{a}_k^T \mathbf{S} \vec{a}_j - \lambda_j \vec{a}_k^T \vec{a}_j - \sum_{i=1, i \neq j}^p \frac{\mu_{ji}}{2} \vec{a}_k^T \vec{a}_i = 0, \quad \text{für} \quad k \neq j. \quad (\text{B.8})$$

Unter Ausnutzung der Orthogonalität ergibt sich

$$\forall k = 1, \dots, p, k \neq j : \sum_{i=1, i \neq j}^p \mu_{ji} \vec{a}_k^T \vec{a}_i = 0. \quad (\text{B.9})$$

Hierzu mußte benutzt werden, daß das Skalarprodukt orthogonaler Vektoren, die auf die gleiche Matrix projiziert werden, auch verschwindet

$$\vec{a}_k^T \mathbf{S} \vec{a}_j = (\mathbf{X}\vec{a}_k)^T (\mathbf{X}\vec{a}_j) = 0, \quad \text{für} \quad k \neq j.$$

Die Bedingung (B.9) ist allgemein für alle $k \neq j$ nur erfüllbar, wenn alle μ_{ji} für jedes j und $i \neq j$ verschwinden, womit sich die Forderung (B.7) auf folgende Gleichung reduziert

$$\mathbf{S}\vec{a}_j = \lambda_j \vec{a}_j. \quad (\text{B.10})$$

Man erhält somit für die Berechnung der orthogonalen Basisvektoren ein Eigenwertproblem. Die Eigenvektoren der „Summenmatrix der Quadrate und Kreuzprodukte“ \mathbf{S} sind die gesuchten Basisvektoren, die noch zu Einheitsvektoren normiert werden müssen. Da die Matrix \mathbf{S} wie oben erwähnt symmetrisch ist, existieren immer Lösungen mit reellen Eigenwerten.

Die Interpretation der Eigenwerte λ_j ist bis jetzt noch offen geblieben. Multipliziert man die Eigenwertgleichung (B.10) von links mit \vec{a}_j^T und benutzt, daß die Vektoren normiert sind, gelangt man zu

$$\vec{a}_j^T \mathbf{S} \vec{a}_j = (\mathbf{X}\vec{a}_j)^T (\mathbf{X}\vec{a}_j) = \lambda_j. \quad (\text{B.11})$$

Dieser Schritt entspricht der noch ausgebliebenen Multiplikation von Gleichung (B.7) mit $\vec{a}_k^T = \vec{a}_j^T$ von links, die zu dem gleichen Resultat führt. Der Eigenwert ist somit die mittlere quadratische Projektion d_j^2 , die nach Gleichung (B.3) maximiert werden sollte. Es ist üblich, die Eigenwerte und Eigenvektoren in absteigender Größe der Eigenwerte, d.h. der mittleren quadratischen Projektion, umzusortieren.

Um die Meßpunkte bezüglich des neuen Koordinatensystems darzustellen, benutzt man folgende Transformation

$$\mathbf{X}' = \mathbf{X}\mathbf{A}. \quad (\text{B.12})$$

In der Matrix \mathbf{A} sind spaltenweise die neuen Basisvektoren abgelegt. Die Projektion des i -ten Zeilenvektors \vec{x}_i auf den j -ten Eigenvektor \vec{a}_j bzw. die j -te neue Achse heißt „ j -te Hauptkomponente“ bezüglich des i -ten Meßpunktes

$$x'_{ij} = \vec{a}_j^T \vec{x}_i. \quad (\text{B.13})$$

Das sind aber gerade die Matrixelemente der transformierten Matrix. Die transformierten Daten sind also die Hauptkomponenten der PCA. Hieraus ergibt sich der Name dieses Verfahrens, da man die Daten als Hauptkomponenten in dem neuen System beschreibt.

Die Rücktransformation in das ursprüngliche System erhält man, wenn man die Transformationsgleichung von rechts mit \mathbf{A}^T multipliziert:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}'\mathbf{A}^T. \quad (\text{B.14})$$

Man hat also durch eine Hauptachsentransformation der Matrix \mathbf{S} ein neues Koordinatensystem gefunden, in dem die Meßwerte entlang der orthogonalen Achsen maximale Elongation haben

$$\mathbf{S}' = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A}.$$

Die Matrix \mathbf{S} ist hierbei auf Diagonalgestalt transformiert worden.

B.1.2 PCA im Raum der Meßgrößen

Man kann in gleicher Weise den N -dimensionalen Raum der Meßgrößen betrachten und die Projektion

$$d_{ik} = \vec{b}_k^T \vec{x}_i \quad (\text{B.15})$$

maximieren. Hierbei ist \vec{x}_i der i -te Spaltenvektor der Meßmatrix und \vec{b}_k der k -te Basisvektor des neuen Koordinatensystems im Raum der Meßgrößen. Analog folgt für die Extremalwertaufgabe mit Nebenbedingungen

$$d_{ik}^2 = (\mathbf{X}^T \vec{b}_k)^T (\mathbf{X}^T \vec{b}_k) \stackrel{!}{=} \max, \quad \text{mit} \quad \vec{b}_i^T \vec{b}_k = \delta_{ik}.$$

Definiert man noch

$$\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T, \quad (\text{B.16})$$

so erhält man in analoger Weise wie oben ein Eigenwertproblem mit anschließender Normierung der Eigenvektoren

$$\mathbf{T}\vec{b}_k = \lambda'_k \vec{b}_k. \quad (\text{B.17})$$

\mathbf{T} ist hierbei eine $N \times N$ Matrix von gleichem Rang wie die Matrix \mathbf{X} , weshalb sich die gleiche Anzahl von Eigenwerten ergibt. Multipliziert man Gleichung (B.10) von links mit \mathbf{X} , folgt

$$\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})\vec{a}_j = \mathbf{T}(\mathbf{X}\vec{a}_j) = \lambda_j(\mathbf{X}\vec{a}_j)$$

und somit, daß die Eigenwerte in beiden Räumen identisch sind

$$\lambda'_k = \lambda_k. \quad (\text{B.18})$$

Unter Berücksichtigung der Normierung der Eigenvektoren lassen sich für deren Zusammenhang zwischen beiden Räumen folgende Transformationen aufstellen

$$\vec{b}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\mathbf{X}\vec{a}_k, \quad (\text{B.19})$$

$$\vec{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\mathbf{X}^T\vec{b}_k. \quad (\text{B.20})$$

Die Hauptkomponenten in beiden Räumen (Projektionen auf die zugehörigen Eigenvektoren) sind somit proportional zu den Eigenvektoren des jeweils anderen Raums.

Die Anzahl der Eigenwerte bzw. der linear unabhängigen Eigenvektoren hängt von dem Rang der Matrix \mathbf{X} ab. Dies gilt in beiden betrachteten Räumen. Man findet also, wenn l der Rang der Meßmatrix ist, $l = \text{Rang}(\mathbf{X}) \leq \min(p, N)$ Eigenwerte und Eigenvektoren. Dies liegt daran, daß der Rang von \mathbf{X} , $\mathbf{S} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ und $\mathbf{T} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ jeweils identisch ist.

Für die Transformation in dieses Koordinatensystem und zurück gelten analoge Gleichungen wie im Raum der Meßobjekte.

B.2 Singular Value Decomposition - SVD

Die Singular Value Decomposition oder kurz SVD ist eine Verallgemeinerung der oben vorgestellten PCA. Multipliziert man Gleichung (B.19) von rechts mit \vec{a}_k^T , stellt diese um und summiert über alle k , so ergibt sich

$$\mathbf{X} \sum_{k=1}^p \vec{a}_k \otimes \vec{a}_k^T = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \vec{b}_k \otimes \vec{a}_k^T.$$

Mit den Orthogonalitätseigenschaften folgt eine Entwicklung der Meßmatrix in der neuen Koordinatenbasis

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^p \sqrt{\lambda_k} \vec{b}_k \otimes \vec{a}_k^T, \quad (\text{B.21})$$

oder in kompakter Matrixschreibweise

$$\mathbf{X} = \mathbf{BDA}^T. \quad (\text{B.22})$$

Dies ist nichts anderes als eine Reihenentwicklung der Meßmatrix nach den Eigenvektoren der Summenmatrix der Quadrate und Kreuzprodukte. Die entsprechende Rücktransformation erhält man durch Multiplikation von rechts mit \mathbf{A} und von links mit \mathbf{B}^T

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}^T \mathbf{X} \mathbf{A}. \quad (\text{B.23})$$

\mathbf{A} und \mathbf{B} enthalten hierbei spaltenweise die oben berechneten Eigenvektoren, \mathbf{D} enthält in der Hauptdiagonalen die Wurzeln der Eigenwerte. Demzufolge ist \mathbf{A} eine $p \times p$ -Matrix, \mathbf{B} eine $N \times N$ -Matrix und \mathbf{D} eine $p \times N$ -Matrix. Je nach dem Verhältnis zwischen p und N sind \mathbf{B} bzw. \mathbf{A} nicht voll besetzt.

Insofern kann man die SVD auch als eine Art verallgemeinerte Hauptachsentransformation für nicht quadratische Matrizen ansehen. Die Zahlen $\sqrt{\lambda_k}$ heißen hier nun „singular values“, bzw. Singulärwerte, die Eigenvektoren der PCA im Raum der Meßobjekte rechtsseitige „singular vectors“ in der Matrix \mathbf{A} , die Eigenvektoren der PCA im Raum der Meßgrößen linksseitige „singular vectors“ in der Matrix \mathbf{B} .

Für die Anzahl der Singular Values und der Singular Vectors gilt analog das oben für die Anzahl der Eigenwerte und Eigenvektoren Gesagte. Deren Anzahl wird ebenso durch den Rang der Matrix \mathbf{X} bestimmt. In den Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{D} sind demzufolge nur die ersten l Spalten besetzt, wenn l der Rang der Meßmatrix ist. Für l gilt wiederum $l = \text{Rang}(\mathbf{X}) \leq \min(p, N)$.

Anhang C

Programmtechnische Realisation

C.1 Aufbau des Programms

Das gesamte Programm das im Rahmen dieser Arbeit erstellt wurde, wurde in der Programmiersprache C++, bzw. C geschrieben. Für die numerische Berechnung der Eigenvektoren und der Regressionskoeffizienten wurde auf erprobte mathematische Bibliotheken zurückgegriffen. Hierbei ist insbesondere die NAG-Bibliothek zu erwähnen, da mit dieser die Eigenwert- und Eigenvektorbestimmung, bzw. die Regressionsanalyse durchgeführt wurde. Darüber hinaus wurden für den Zugriff auf die Schußdaten und die graphische Darstellung der Meß- und Analysedaten institutseigene Routinen benutzt. Beim Zugriff auf die Schußdaten mußte besonderes Augenmerk darauf gerichtet werden, daß die einzelnen Datensätze der verschiedenen Diagnostiken mit unterschiedlichen Taktraten aufgenommen werden, wenngleich die Meßzeitpunkte selbst synchronisiert sind. Es mußte eine entsprechende Umrechnung auf eine geeignete Zeitbasis vorgesehen werden, um zu jedem Zeitpunkt einen vollständigen Meßvektor $\vec{x}(t_i)$ für jedes Signal zu erhalten.

Die Aufgabe bei der Bearbeitung der Meßdaten bestand darin, in eine Matrix die Daten von verschiedenen Schüssen und von einzelnen Signalspuren der benutzten Diagnostiken einzulesen. Der Zeilenindex gibt hierbei Schuß und Zeitpunkt der Messung innerhalb des Schusses an, der Spaltenindex die Diagnostik und die Signale der Diagnostik. Die Gesamtmatrix zerfällt somit in ein System von Teilmatrizen, die durch Schußnummer und Diagnostikname gekennzeichnet sind. Jede dieser Teilmatrizen ist entsprechend durch den Meßzeitpunkt und das benutzte Signal charakterisiert

$$\mathbf{X} = (\tilde{\mathbf{X}}_{\#,D})$$

mit:
$$\tilde{\mathbf{X}}_{\#,D} = (\tilde{x}_{t_i(\#),s_j(D)})$$

Für jede Spalte von Teilmatrizen der Gesamtmatrix, die einer Diagnostik entspricht, wurde eine abgeleitete C++ - Klasse `DiagXXX` angelegt, in der ausschließlich der Programmtext, der für die entsprechende Diagnostik angepaßt werden mußte, vorhanden ist. Hier werden insbesondere Aufgaben der diagnostikspezifischen Signalaufbereitung und Normierung untergebracht. Alle Aufgaben, die für alle Diagnostiken in gleicher Weise anfallen, wurden in einer abstrakten Oberklasse `Diagnostic` untergebracht, deren Eigenschaften (Variablen und Funktionen) durch Vererbung der individuellen Diagnostik zugänglich gemacht wurden. Objekte dieser Diagnostikklassen werden erst zur Programmlaufzeit erzeugt und zwar abhängig davon, welche Diagnostikdaten benötigt werden.

Die Verwaltung dieser Objekte wird von einem Objekt der Klasse `MainData` ausgeführt, die ihrerseits den Speicherplatz für die Gesamtmatrix allokiert und die Information über Schüsse, Zeitpunkte und die zu benutzenden Diagnostiken enthält. Alle Daten für die weitere Analyse sind in diesem Objekt enthalten, wobei das Laden und Normieren der Daten durch die Objekte der Diagnostikklassen vorgenommen wird.

Zwei weitere wichtige Klassen `NormData` und `SVDDData` greifen nun auf die Daten der Gesamtmatrix eines Objekts der Klasse `MainData` zu. `NormData` nimmt die Zentrierung und Normierung der Daten vor und kann diese Information für weitere Anwendungen zwischenspeichern. `SVDDData` berechnet aus `MainData` die Eigenwerte, Eigenvektoren und Hauptkomponenten und nimmt die Filterung von Daten vor.

Da mehrere Objekte parallel existieren können, ist es möglich, Daten eines `MainData` Objekts auf die Eigenvektoren eines anderen Datensatzes zu projizieren. Für derartige Neukombinationen ist nur geringer Programmieraufwand nötig. Für eine hierarchische Datenstruktur mußten nun lediglich neue Objekte der Klasse `MainData` bzw. `SVDDData` angelegt und deren Ergebnisse, d.h. die Hauptkomponenten, über ein neue Diagnostik dem primären `MainData` Objekt zugänglich gemacht werden. Diese virtuellen Diagnostiken erben nun zusätzliche Eigenschaften von einer Oberklasse, welche die Organisation für diese Verknüpfungen beinhaltet.

In ähnlicher Weise greift die Klasse `RegrModel` auf die abhängigen Variablen der Klasse `MainData` zu, um mit dem gewünschten Regressionsmodell die Daten an die Klasse `LinRegr` zu übergeben, die mittels einer NAG-Routine die Regressionskoeffizienten bestimmt.

Welche Schüsse zu welchen Zeitpunkten, bzw. welche Diagnostiken mit welchen Signalen betrachtet werden, wird dem Programm über eine allgemeine Konfigurationsdatei und spezielle Konfigurationsdateien für die Schüsse, die Diagnostiken und jede einzelne Diagnostik individuell mitgeteilt. Was nun mit den so geladenen Daten zu tun ist, wird durch einen interaktiven Dialog vom Benutzer bestimmt.

C.2 Bedienung des Programms

Die Grundeinstellungen des Programms werden in einer allgemeinen Konfigurationsdatei `svd.ini` vorgegeben. Dort werden zwei untergeordnete Dateien festgelegt, welche die Informationen über die zu verwendenden Diagnostiken (default = `diags.ini`) und die zu verwendenden Schüsse, Zeitintervalle mit Phase, Entladungstyp, maximale Dichte und Dichterampe (default = `shots.ini`) enthalten. Jede einzelne Diagnostik hat ein eigenes Konfigurationsfile `DIA.ini` in dem festgelegt wird, welche Signale, bzw. Signalgruppen mit den entsprechenden Indizes zu verwenden sind. Für `DIA` ist hierbei der Diagnostikname einzusetzen. Nachdem diese Dateien geschrieben sind, kann man das Programm selbst mit dem Namen `svd` starten und man gelangt in die Befehlszeile des Programms.

In der Befehlszeile erhält man mit dem Befehl `help` einen kurzen Überblick über die verfügbaren Befehle und deren Bedeutung. Es stehen zwei Datensätze, die mit dem Namen `data` und `new` angesprochen werden, zur Verfügung, die den Vergleich zwischen zwei Sätzen von Entladungen ermöglichen.

Wird als letzter Befehl das Programm mit `quit` verlassen, ist das Programm auch batch-fähig und kann über eine Datei automatisiert einen Satz von Befehlen abarbeiten und die Resultate auf dem Bildschirm oder in eine Datei ausgeben. Das Programm ist dann mit dem Befehl:

```
% svd < filename zu starten.
```

Literaturverzeichnis

- [1] U. Schumacher, *Fusionsforschung*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1993.
- [2] J. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, 1974.
- [3] J. A. Wesson, R. D. Gill, M. Hugon, F. C. Schüller, J. A. Snipes, D. J. Ward, et al., Disruptions in JET, *Nucl. Fusion* **29**(4), 641–666 (1989).
- [4] H. Zohm, Untersuchung magnetischer Moden am Tokamak ASDEX, Dissertation, Universität Heidelberg, IPP Report 1/254 (1990).
- [5] M. Bessenrodt-Weberpals, M. Maraschek, H. Zohm, The ASDEX Upgrade Team, and The NI Team, Sawteeth Filtering by Singular Value Decomposition, *Controlled Fusion and Plasma Physics, Proceedings of the 21th European Conference, Montpellier* (1994).
- [6] G. Bateman, *MHD Instabilities*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1978.
- [7] R. Büchse, Tomografie der weichen Röntgenstrahlung von Sägezähnen und $m=1$ Moden in Tokamakplasmen, Dissertation, TU-München (1990).
- [8] V. Mertens, K. Büchl, W. Junker, F. Mast, M. Schittenhelm, et al., Experimental Investigation Of Marfes And The Density Limit in ASDEX Upgrade, angenommen zur Veröffentlichung in *Controlled Fusion and Plasma Physics* (1994).
- [9] F. Wagner et al., Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1408–1412 (1982).
- [10] The ASDEX Team, The H-Mode of ASDEX, *Nucl. Fusion* **29**, 1959–2040 (1989).

- [11] O. Vollmer, F. Ryter, K. H. Steuer, F. Wagner, and H. Zohm, Long pulse stationary H-mode with ELMs on ASDEX, *Controlled Fusion and Plasma Physics, Proceedings of the XVIII Conference, Berlin I*, 385–388 (1991).
- [12] K. H. Burrell, S. L. Allen, G. Bramson, N. H. Brooks, R. W. Callis, T. N. Carlstrom, M. S. Chu, A. P. Colleraine, D. Content, et al., Confinement Physics of H-Mode Discharges in DIII-D, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **31**(10), 1649–1664 (1989).
- [13] O. Kardaun, Private Mitteilung.
- [14] M. Sir Kendall, A. Stuart, and J. Ord, *Advanced Theory of Statistics, Vol. 1*, Charles Griffin & Co Ltd., 5th edition, 1986.
- [15] *The NAG Fortran Library Manual, Mark 15*, 1991.
- [16] P. J. McCarthy, Private Mitteilung.
- [17] P. J. McCarthy, An Integrated Data Interpretation System For Tokamak Discharges, Dissertation, The National University Of Ireland (Aug. 1992).
- [18] W. Junker, Untersuchung der Bremsstrahlung eines Fusionsplasmas im nahen Infrarot, Diplomarbeit, TU-München, IPP Report 1/270 (1992).
- [19] S. de Peña Hempel, Untersuchung der effektiven Ionenladungszahl Z_{eff} am Divertortokamak ASDEX Upgrade mit Hilfe der Plasmabremsstrahlung im nahen Infrarot, Diplomarbeit, TU-München (1993).
- [20] H. Bartels, M. Bessenrodt-Weberpals, H. Bosch, K. Krieger, F. Leuterer, D. Lortz, J. Mayer-ter Vehn, D. Pfirsch, U. Schwenn, U. Stroth, F. Wesner, R. Wilhelm, H. Wobig, and H. Zohm, *Summer University for Plasma Physics*, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Oct. 1993.
- [21] H. Zohm, J. Greene, L. Lao, and E. Strait, Mirnov coil analysis in the DIII-D tokamak using the singular value decomposition method, GA-A20886, 1992.
- [22] F. Murtagh and A. Heck, *Multivariate Data Analysis*, Astrophysics and Space Science Library, 1987.
- [23] B. Braams and K. Lackner, A Proposed Method for Fast Determination of Plasma Parameters, IPP Report 1/128, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik (1984).
- [24] B. Braams, W. Jilge, and K. Lackner, Fast Determination of Plasma Parameters through Function Parametrisation, *Nuclear Fusion* **26**(6), 699–708 (1986).

- [25] P. McCarthy and M. Sexton, Plasma Profile Recovery by Function Parametrisation, IPP Report 5/12 (1986).
- [26] M. Kendall, *Multivariate Analysis*, C. Griffin & Company LTD., 2nd edition, 1980.
- [27] M. Sir Kendall and A. Stuart, *Advanced Theory of Statistics, Vol. 2*, Charles Griffin & Co Ltd., 4th edition, 1978.
- [28] M. Sir Kendall, A. Stuart, and J. Ord, *Advanced Theory of Statistics, Vol. 3*, Charles Griffin & Co Ltd., 4th edition, 1982.
- [29] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, and W. Vetterling, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1988.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. K. Pinkau und Herrn Prof. Dr. M. Kaufmann für die Möglichkeit, diese Arbeit am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik am Experiment ASDEX Upgrade durchführen zu können.

Herrn Prof. Dr. F. Wagner danke ich für die akademische Betreuung dieser Arbeit.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Dr. H. Zohm. Von ihm wurde mir diese interessante Arbeit angeboten und hervorragend fachlich betreut.

Für unzählige Diskussionen möchte ich mich bei Herrn Dr. H.P. Zehrfeld bedanken. Seine Unterstützung und konstruktiven Ratschläge waren stets sehr hilfreich und gewinnbringend für diese Arbeit.

Herrn Dr. P.J. McCarthy möchte ich für die informativen Diskussionen zu Fragen der Funktions-Parametrisierung danken.

Herrn Dr. O. Kardaun gilt mein Dank für viele Diskussionen über statistische Fragen und Konzepte.

Bei Herrn Dipl.-Phys. M. Schittenhelm möchte ich mich sowohl für die vielen guten Ideen, die sich aus Diskussionen mit ihm ergeben haben, als auch für die kritische Durchsicht der Arbeit bedanken.

Herrn Dipl.-Phys. W. Junker gilt mein Dank für die Unterstützung bei der Analyse der Bremsstrahlungs-Diagnostik.

Frau Priv. Doz. Dr. M. Bessenrodt-Weberpals möchte ich für die Hilfe bei der Bearbeitung der Daten der Soft-X-Ray Diagnostik danken.

Für die Unterstützung in allen Informatik- und Rechner-Fragen bedanke ich mich bei allen Mitarbeitern der Informatik und Datenverarbeitungsgruppe.

Für die freundliche Aufnahme im Kreise der Doktoranden und Diplomanden möchte ich Herrn Dipl.-Phys. K. Asmussen, Herrn Dipl.-Phys. S. de Peña Hempel, Herrn Dipl.-Phys. T. Kass, Herrn Cand.-Phys. J. Pfirstinger und Herrn Dipl.-Phys. M. Sokoll danken. Für die kritische Durchsicht dieser Arbeit möchte ich mich insbesondere bei Herrn T. Kass und Herrn J. Pfirstinger bedanken.

Dem gesamten ASDEX Upgrade Team möchte ich für die sehr gute, kollegiale Aufnahme in den Abteilungen E1 und TOK danken.

Meinen Eltern möchte ich dafür danken, daß sie durch ihre Unterstützung und Geduld mein Physikstudium erst ermöglicht haben.