

Bachelorarbeit

Eine Kugel im Keil – Ergodizität in granularen Packungen

A sphere in a groove – Ergodicity in granular packings

angefertigt von

Christian Sagrey

aus Arnsberg

am Max-Planck-Institut für Dynamik und Selbstorganisation

Bearbeitungszeit: 15. August 2010 bis 15. November 2010

Betreuer/in: Dr. Matthias Schröter

Erstgutachter/in: Prof. Dr. Stephan Herminghaus

Zweitgutachter/in: Prof. Dr. Jürgen Vollmer

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Theoretische Grundlagen	3
2.1. Das Edwards Ensemble	3
2.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Kugel im Keil	4
2.3. Bestimmung der Messgrößen aus der Geometrie des Keils	7
3. Experimentelle Vorgehensweise	11
3.1. Aufbau des Experiments	11
3.2. Veränderungen im Aufbau	14
3.3. Eichung des Sensors	16
3.4. Temperaturdrift	17
3.4.1. Erste Messung des Temperaturdrifts	17
3.4.2. Drift bei ausgebautem Sensor	19
3.5. Zeitlicher Abfall der Sensorwerte	21
3.6. Messverfahren und Fehlerabschätzung	22
4. Messergebnisse	23
4.1. Messungen mit Schrittmotor	23
4.2. Messungen mit Gleichstrommotor	24
4.2.1. Verschiedene Zeiten der Datennahme	27
4.2.2. Rollbewegung der Kugel	28
4.2.3. Vergleich mit der theoretischen Verteilung	30
5. Diskussion und Ausblick	31
A. Anhang	33
A.1. LabView-Programmierung	33
A.2. Steuerungsschaltplan	37

1. Einleitung

Ein granulares Medium besteht aus einer großen Anzahl makroskopischer Teilchen. Die Größe der Teilchen kann von einigen Nanometern bis zu mehreren Metern reichen; ebenso können die Partikel höchst unterschiedliche Oberflächenstrukturen und -Formen aufweisen. So sind beispielsweise Getreide, Sand, Mehl und sogar Lawinen Granulate. Bei trockenen granularen Medien bilden Reibung und inelastische Stöße die einzig mögliche Wechselwirkung zwischen den Teilchen, so dass es sich hier um dissipative Systeme handelt. Die Eigenschaften eines einzelnen Kornes unterliegen der klassischen Mechanik, ein Granulat bildet allerdings durch die große Anzahl von Partikeln und die Vielzahl von möglichen Freiheitsgraden eines jeden Teilchens ein komplexes System, dessen Eigenschaften ein aktuelles Forschungsgebiet der Physik sind.

Je nach Dichte des granularen Mediums wird sein Zustand zwischen den drei Phasen *fest*, *flüssig* und *gasähnlich* unterschieden. Hier handelt es sich jedoch nicht um die fest definierten thermodynamischen Zustände, sondern um unscharfe Bezeichnungen. Bei geringer Teilchendichte befindet sich ein granulares Medium im gasähnlichen Zustand. Im Falle eines ungetriebenen Systems verliert das Medium seine kinetische Energie durch dissipative Prozesse – im getriebenen System kann jedoch ein stationärer Zustand mit sich bewegenden Partikeln hergestellt werden. Wenn das Medium eine mittlere Dichte aufweist, kann es sich ähnlich wie eine Flüssigkeit verhalten. Dazu ist eine äußere Kraft, wie beispielsweise die Gravitation oder eine Scherkraft, notwendig, welche die Reibungskraft zwischen den Partikeln überwindet. So kann Sand durch Rohre fließen oder eine Lawine entstehen. Wie ein Festkörper verhält sich ein Granulat bei einer großen Teilchendichte. Es entstehen hierbei Packungen, in denen die Partikel feste Nachbarn besitzen und mit diesen in ständigem Kontakt sind.

1. Einleitung

In einem solchen, ruhenden Granulat, in dem die einzelnen Teilchen aufgrund der Gewichtskraft unter Spannung stehen, kann die Reibungskraft zwischen den Teilchen nicht durch theoretische Überlegungen bestimmt werden. Die normal zur Tangentialebene stehende Kraft F_N wird durch den zugehörigen Kontaktpunkt und die wirkende Gewichtskraft festgelegt. Die Tangentialkraft F_T kann sich allerdings in einem Intervall von Null bis μF_N bewegen, wobei es sich bei μ um den Haftreibungskoeffizienten handelt.

In der vorliegenden Bachelorarbeit beschäftigte ich mich mit diesem Problem und werde das Verhältnis der Tangential- und Normalkraft experimentell untersuchen. Zuerst werde ich einige theoretische Grundlagen erläutern. Danach werde ich im Hauptteil dieser Arbeit meine experimentelle Vorgehensweise darlegen. Hier werde ich auf den Auf- und Umbau des Experiments, die Eichung des Sensors und die Fehlerabschätzung eingehen. Darauf folgend werde ich meine erzielten Messergebnisse vorstellen und auswerten. Abschließend werde ich die erzielten Daten diskutieren und einen möglichen Ausblick auf weitere Messungen geben.

2. Theoretische Grundlagen

2.1. Das Edwards Ensemble

Für granulare Packungen wurde von Sam Edwards im Jahr 1989 [2] das sogenannte *Edwards Ensemble* postuliert. Dieses wird als erster Schritt zu einer Beschreibung von dissipativen Nichtgleichgewichtssystemen angesehen, welche der klassischen Thermodynamik ähnelt. Das *Edwards Ensemble* besagt, dass bei einer gegebenen Packungsdichte alle mechanisch stabilen Zustände gleich wahrscheinlich sind. Dies entspricht der Ergodenhypothese der Thermodynamik, die aussagt, dass alle Mikrozustände, die von dem System angenommen werden können, mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten. Der äußeren Anregung des granularen Systems wird im *Edwards Ensemble* eine Rolle ähnlich der Temperatur im klassischen thermodynamischen System zugesprochen. Dieses Ensemble wurde von Bouchaud und Cates berechnet, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Verhältnis der Tangential- zur Normalkraft zwischen den einzelnen Partikeln des granularen Mediums bestimmen zu können [1]. Sie kamen für diesen Fall zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$P(\{\mathbf{F}_i^\alpha\}) = \frac{1}{Z} \prod_i \left[\underbrace{\delta\left(\sum_\alpha \mathbf{F}_i^\alpha\right)}_{\text{Kraftterm}} \underbrace{\delta\left(\sum_\alpha \mathbf{F}_i^\alpha \times \mathbf{r}_i^\alpha\right)}_{\text{Drehmomentterm}} \underbrace{\prod_\alpha \Theta\left(\mu F_{i,N}^\alpha - |F_{i,T}^\alpha|\right)}_{\text{CoulombscheReibung}} \right] \quad (2.1)$$

Hier handelt es sich bei \mathbf{F}_i^α um die Kontaktkraft des α -ten Kontakts des i -ten Teilchens sowie bei \mathbf{r}_i^α um die Position des Kontaktpunkts. Weiterhin ist μ der Haftreibungskoeffizient zwischen den Partikeln.

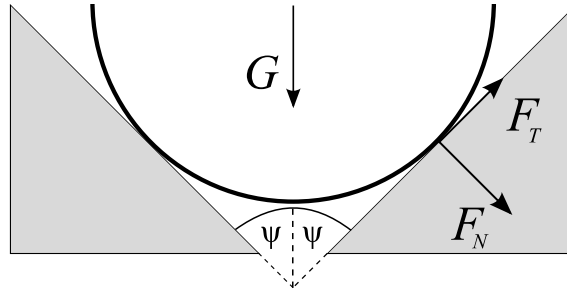


Abb. 2.1.: Die Normal-, Tangential- und Gewichtskraft (F_N , F_T und $G = m_K g$), die auftreten, wenn eine Kugel der Masse m_K in einem Keil abgelegt wird. Der Öffnungswinkel des Keils beträgt 2ψ .

2.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Kugel im Keil

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Tangential- und Normalkraft für eine Kugel in einem Keil kann nun aus der Gleichung 2.1 berechnet werden. Die Gleichung vereinfacht sich stark, da nur ein Partikel ($i = 1$) mit zwei Kontaktpunkten ($\alpha = 2$) betrachtet wird.

$$P(\mathbf{F}_\alpha) = \frac{1}{Z} \delta \left(\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha + \mathbf{G} \right) \delta \left(\sum_\alpha \mathbf{F}_\alpha \times \mathbf{r}_\alpha \right) \prod_\alpha \Theta(\mu F_{\alpha,N} - |F_{\alpha,T}|)$$

Für die Normalkräfte ergibt sich aus der Geometrie des Systems (vgl. Abbildung 2.1) und der Annahme, dass sich das System im Gleichgewicht befindet:

$$F_{1,N} = F_{2,N} = F_N.$$

Da die Kugel nicht rotiert, befinden sich ebenso die Tangentialkräfte im Gleichgewicht:

$$F_{1,T} = F_{2,T} = F_T.$$

Die Randbedingungen geben also vor, dass die Beträge, der an den Kontaktpunkten wirkenden Kräfte, gleich groß sind. Es reicht daher aus, einen der Kontaktpunkte der Kugel zu betrachten. Die Summe der Kontaktkräfte an einem Punkt berechnet sich aus den vertikalen Komponenten von F_N und F_T sowie der halben Gewichtskraft $\frac{G}{2} = \frac{m_K g}{2}$. Hier bedeutet $F_T > 0$, dass die Tangentialkraft nach oben zeigt.

2.2. Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Kugel im Keil

Da bereits die Rotation der Kugel ausgeschlossen wurde, existieren keine Drehmomente und es gilt $\mathbf{F}_\alpha \times \mathbf{r}_\alpha = 0$. Somit vereinfacht sich die Gleichung 2.1 schlussendlich zu

$$P(F_N, F_T) = \frac{1}{Z} \delta \left(F_N \sin \psi + F_T \cos \psi - \frac{m_k g}{2} \right) \Theta (\mu F_N - |F_T|) ,$$

wobei ψ – wie aus Abbildung 2.1 hervorgeht – der halbe Öffnungswinkel des Keils ist. Aus dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung kann man die Verteilung des Kräfteverhältnisses $r = \frac{F_T}{F_N}$ berechnen. Um die Darstellung der weiteren Rechnung übersichtlicher zu gestalten, werden die folgenden Abkürzungen eingeführt: $u := F_N$, $v := F_T$ sowie $m := \frac{m_k g}{2}$. Es ergibt sich demzufolge:

$$P(u, v) = \frac{1}{Z} \delta (u \sin \psi + v \cos \psi - m) \Theta (\mu u - |v|) .$$

Um nun die Distribution des Kräfteverhältnisses $r = \frac{v}{u}$ zu berechnen, wird die Verteilung $P(u, v)$ über eine Delta-Distribution in die Verteilung $P(r)$ umgewandelt.

$$P(r) = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} dv P(u, v) \delta \left(r - \frac{v}{u} \right)$$

Die Integralgrenzen werden hierbei durch die Heavyside-Funktion $\Theta(\mu u - |v|)$ vorgegeben:

$$P(r) \propto \int_0^{\infty} du \int_{-\mu|u|}^{+\mu|u|} dv \delta (u \sin \psi + v \cos \psi - m) \delta \left(r - \frac{v}{u} \right) .$$

Wenn sich r außerhalb des Intervalls $[-\mu, +\mu]$ befindet, gilt $P(r) = 0$.

Um eine Testfunktion $\phi(x)$ über eine Delta-Distribution $\delta(g(x))$ auszuwerten, existiert für die Hintereinanderausführung die folgende Rechenvorschrift:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(g(x)) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{d}{dx} g(x_i) \right|} dx \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\phi(x_i)}{\left| \frac{d}{dx} g(x_i) \right|} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Diese Vorschrift setzt voraus, dass $g(x)$ endlich viele und nur einfache Nullstellen x_i besitzt. In dem hier vorliegenden Fall haben die betrachteten Funktionen jeweils

2. Theoretische Grundlagen

nur eine Nullstelle, was die Auswertung recht einfach gestaltet. Durch Benutzung dieser Vorschrift ergibt sich für das Integral über dv :

$$\begin{aligned} P(r) &\propto \int_0^\infty du \int_{-\mu|u|}^{+\mu|u|} dv \delta(u \sin \psi + v \cos \psi - m) \delta\left(r - \frac{v}{u}\right) \\ &\propto \int_0^\infty du \left[\frac{\delta(u \sin \psi + v \cos \psi - m)}{\left|\frac{1}{u}\right|} \right]_{v=ur} \\ &\propto \int_0^\infty du u \delta[u(\sin \psi + r \cos \psi) - m] \end{aligned}$$

Das Verfahren 2.2 wird nochmals auf das verbliebene Integral angewendet.

$$P(r) \propto \left[u \frac{1}{|\sin \psi + r \cos \psi|} \right]_{u=\frac{m}{\sin \psi + r \cos \psi}}$$

Da die Normalkraft (hier: u) positiv sein muss, gilt:

$$\sin \psi + r \cos \psi > 0.$$

In diesem Fall erhält man für die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verhältnisses der Tangential- zur Normalkraft nach Bouchaud und Cates das Ergebnis

$$P(r) \propto \frac{m_K g}{2 (\sin \psi + r \cos \psi)^2}. \quad (2.3)$$

Es ist interessant, dass das hier erzielte Ergebnis nicht mit der von Bouchaud und Cates in *Stealing the gold* [1] vorgestellten Gleichung übereinstimmt¹.

Das Experiment, das in dieser Arbeit durchgeführt wird, enthält einen Keil, der einen Öffnungswinkel von $2\psi = 90^\circ$ aufweist. Daher vereinfacht sich die Verteilung zu

$$P(r) \propto \frac{m_K g}{(1+r)^2} \text{ mit } -\mu \leq r \leq \mu. \quad (2.4)$$

Weiterhin wird sich in der hier betrachteten Konfiguration der Haftreibungskoeffizient μ deutlich unter einem Wert von 1 bewegen. Daher wird die Polstelle bei $r = -1$ für diese Arbeit nicht betrachtet.

¹Während eines Treffens von Cates und Schröter im Sommer-Workshop 2007 in Aspen führte Cates diese berichtigte Rechnung durch, welche kurz darauf auch von Bouchaud bestätigt wurde.

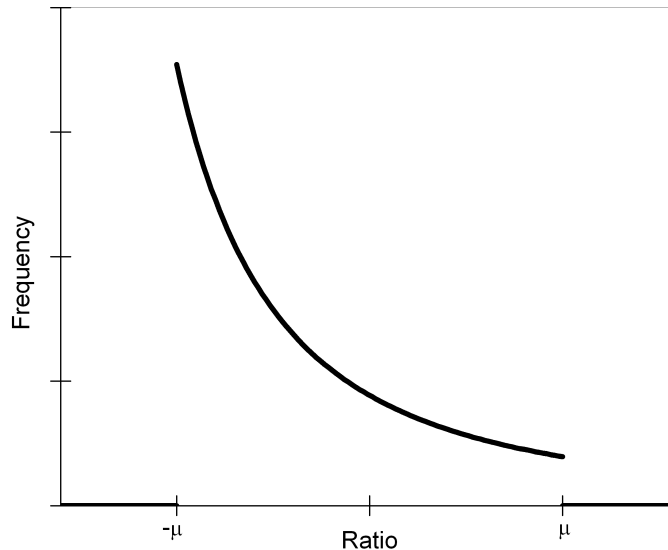


Abb. 2.2.: Die Verteilung $P(r) \propto \frac{m_K g}{(1+r)^2}$ des Kräfteverhältnisses r für $|\mu| < 1$

Im Gegensatz zu der hier vorgestellten Herangehensweise stellten Halsey und Ertas die These auf, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Materialeigenschaften bestimmt wird [3]. Die Verteilung würde in diesem Fall einen einzelnen Peak aufweisen.

2.3. Bestimmung der Messgrößen aus der Geometrie des Keils

Nach dem theoretischen soll nun das experimentell messbare Verhältnis zwischen Tangential- und Normalkraft bestimmt werden. In der Abbildung 2.3 sind nun anstatt der Tangential- und Normalkraft die Kräfte F_M und F_G aufgezeigt. F_M ist die Kraft, die den Keil orthogonal zur Gewichtskraft bewegt und F_G ist die Kraft, die ihn parallel zur Gewichtskraft belastet.

Wenn sich das System im Gleichgewicht befindet, gelten die folgenden Zusammenhänge:

$$F_{M_{links}} = -F_{M_{rechts}}$$

$$F_{G_{links}} = F_{G_{rechts}}$$

Das bedeutet, dass F_M auf jeder Seite des Keils gleich stark, aber entgegengesetzt

2. Theoretische Grundlagen

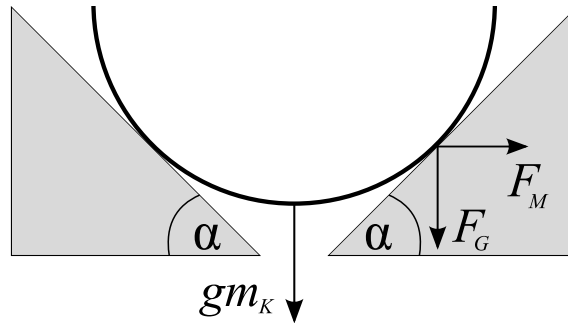


Abb. 2.3.: Die Kräfte F_M und F_G für eine Kugel in einem Keil.

wirkt und die vertikale Kraft F_G für beide Seiten des Keils gleich groß ist. Da sich diese Kräfte additiv aus G zusammensetzen, gilt also:

$$F_{G_{links}} = F_{G_{rechts}} = \frac{1}{2}G.$$

Nun kann man F_G und F_M jeweils in ihre tangentialen und normalen Komponenten aufteilen. In der Abbildung 2.4 ist der geometrische Zusammenhang zwischen den Komponenten und den Ausgangskräften dargestellt.

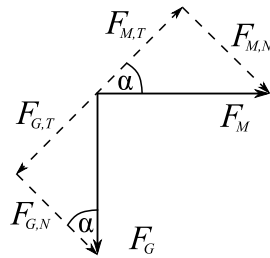


Abb. 2.4.: Tangentiale und normale Komponenten der Kräfte F_M und F_G der Kugel im Keil.

Die Komponenten berechnen sich also wie folgt:

$$F_{M,N} = F_M \sin \alpha$$

$$F_{M,T} = F_M \cos \alpha$$

$$F_{G,N} = F_G \cos \alpha$$

$$F_{G,T} = F_G \sin \alpha.$$

2.3. Bestimmung der Messgrößen aus der Geometrie des Keils

Die Addition der beiden tangentialen Komponenten ergibt die gesamte Tangentialkraft. Gleiches gilt für die Normalkraft.

$$F_T = F_{G,T} - F_{M,T}$$

$$F_N = F_{G,N} + F_{M,N}$$

Nun kann man das Verhältnis zwischen diesen Kräften bilden.

$$\begin{aligned} \frac{F_T}{F_N} &= \frac{F_{G,T} - F_{M,T}}{F_{G,N} + F_{M,N}} \\ &= \frac{F_G \sin \alpha - F_M \cos \alpha}{F_M \sin \alpha + F_G \cos \alpha} \\ &= \frac{F_G \tan \alpha - F_M}{F_M \tan \alpha + F_G} \\ &= \frac{g m_K \tan \alpha - 2 F_M}{g m_K + 2 F_M \tan \alpha} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Das Verhältnis $r = F_T/F_N$ ist dementsprechend aus der gemessenen Kraft F_M und den bekannten Größen α und $g m_K$ bestimmbar.

3. Experimentelle Vorgehensweise

3.1. Aufbau des Experiments

Die erste Version des Versuchsaufbaus wurde bereits im Jahr 2007 von Luis Salinas [6] erstellt. Während der Durchführung der Bachelorarbeit wurde der Aufbau geändert, sowie die Steuerung und Datenerhebung entwickelt.

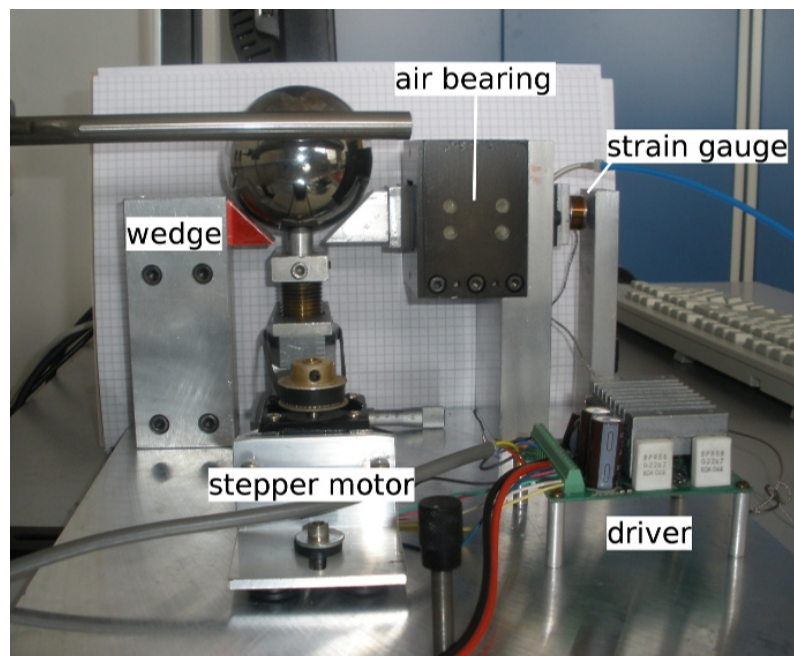


Abb. 3.1.: Versuchsaufbau mit Schrittmotor

Der Aufbau des Experiments besteht aus einer Metallplatte, auf welcher mehrere Gerätschaften installiert wurden. In Abbildung 3.1 ist zu erkennen, dass der Keil durch zwei Schrägen realisiert wurde. Die Schräge, die sich in der Abbildung links befindet, ist fixiert. Im Gegensatz dazu wird die rechte Schräge durch ein Luftlager gehalten. Durch dieses Luftlager kann sie nahezu reibungsfrei hindurchgleiten. Die Kraft, welche in horizontaler Richtung auf die Schräge wirkt, wird durch einen Kraftmesser bestimmt.

3. Experimentelle Vorgehensweise

Die Kugel kann über eine Hebevorrichtung auf den Keil aufgesetzt und später wieder angehoben werden. Den Antrieb für diesen Mechanismus bildet ein Schrittmotor, welcher über einen Schrittmotor-Treiber angesprochen wird. Die Steuerung dieses Treibers ist über den Parallelport des PCs realisiert. Dazu werden – wie in der Abbildung 3.2 aufgezeigt – zwei Leitungen benötigt. Die erste Leitung gibt den Puls des Motors vor, während die zweite Leitung die Drehrichtung steuert. Über unterschiedliche Pulslängen und -Pausen kann die Geschwindigkeit des Motors geregelt werden. Allerdings werden bei zu langen Intervallen nur noch einzelne abrupte Schritte erzeugt, so dass starke Vibrationen entstehen. Die hier genutzte Pulslänge bewegt sich zwischen $100\ \mu\text{s}$ und $10\ \text{ms}$.

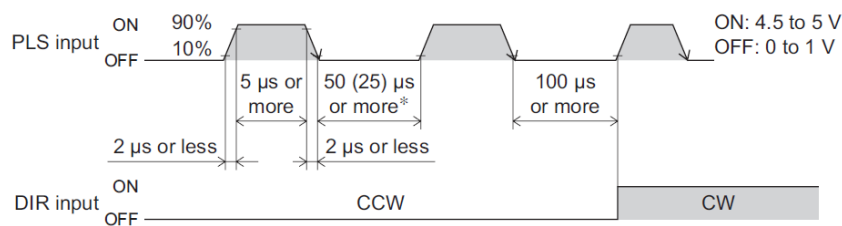


Abb. 3.2.: Schaubild der Motorsteuerung [5]. PLS: Geschwindigkeit des Motors wird über die Pulse dieser Leitung gesteuert; DIR: Leitung um die Drehrichtung zu bestimmen: CW bedeutet *im Uhrzeigersinn* und CCW *gegen den Uhrzeigersinn*

Der Kraftmesser (*Honeywell Typ 31, 1000 g*) beinhaltet einen Dehnungsmessstreifen, welcher bei angelegter Kraft seinen Widerstand verändert. Um diesen adäquat bestimmen zu können, ist eine Wheatstone'sche Brückenschaltung in dem Kraftmesser integriert. Diese wird durch einen *Strain Gage Conditioner* des Herstellers *Vishay* (Model *2120B*) ausgelesen, welcher als Ausgangssignal eine Gleichspannung ausgibt. Gemessen wird diese mit Hilfe eines programmierbaren *Keithley 2000 Digitalmultimeters* (DMM). Die Steuerung des Multimeters und des Parallelports ist über einen PC mit Hilfe des Programms *LabView* realisiert. Dieses führt für eine einzelne Messung die folgenden Schritte durch:

1. Initialisierung des DMM
2. Start der Messung
3. Absenken der Kugel
4. Warten bis der Buffer des DMM gefüllt ist (1000 Werte)

5. Auslesen des Buffers und Speicherung der Werte

6. Anheben der Kugel

Für längere Messreihen wird das Programm als Schleife wiederholt. Das gesamte Programm ist im Anhang in Abschnitt A.1 aufgezeigt und genauer erklärt.

Die Abbildung 3.3 zeigt die ersten durchgeführten Messungen, wobei pro Sekunde fünfzig Werte gemessen wurden. Es wurden sechs Messungen für jeweils drei unterschiedliche Geschwindigkeiten des Schrittmotors aufgenommen. Gut zu erkennen sind die starken Vibrationen, welche durch die einzelnen Schritte des Motors erzeugt werden, wenn dieser mit einer langsamen Geschwindigkeit betrieben wird (blaue Kurve). Vermutlich hängt die Kraftmessung von der Aufsetzgeschwindigkeit beziehungsweise den daraus resultierenden Vibrationen ab. Es fällt auf, dass eine Messung mit einem Offset von etwa -1 V beginnt. Nach Aufsetzen der Kugel ist diese Verschiebung jedoch nicht mehr vorhanden. Anscheinend treten hin und wieder mechanische Spannungen innerhalb der Messapparatur auf, die in Richtung Keilmitte, also entgegengesetzt zur eigentlichen Belastungsrichtung, wirken.

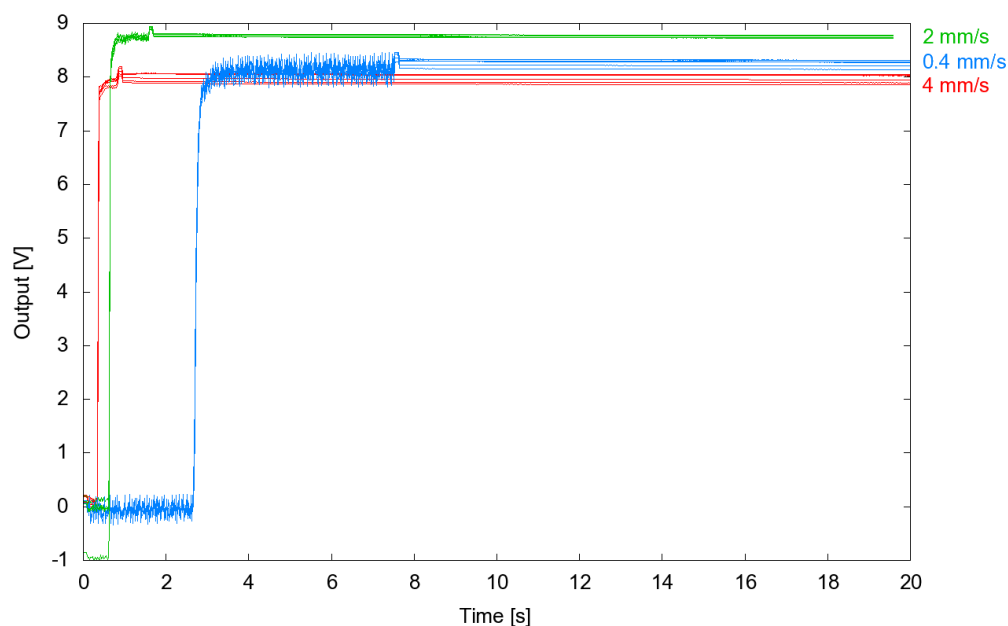


Abb. 3.3.: Drei verschiedene Aufsetzgeschwindigkeiten mit jeweils sechs Kraftmessungen

3.2. Veränderungen im Aufbau

Um die Vibrationen des Schrittmotors als Grund für die unterschiedlichen Messwerte auszuschließen, wurde dieser durch einen Gleichstrommotor ersetzt. Um den neuen Motor adäquat ansteuern zu können, wurde eine Steuerung entworfen mit der der Motor ein- und ausgeschaltet sowie umgepolt werden kann. Weiterhin wurde eine Vorrichtung entwickelt, welche die oberste sowie unterste Position des Motors definiert. Der Aufbau ist in der Abbildung 3.4 dargestellt.

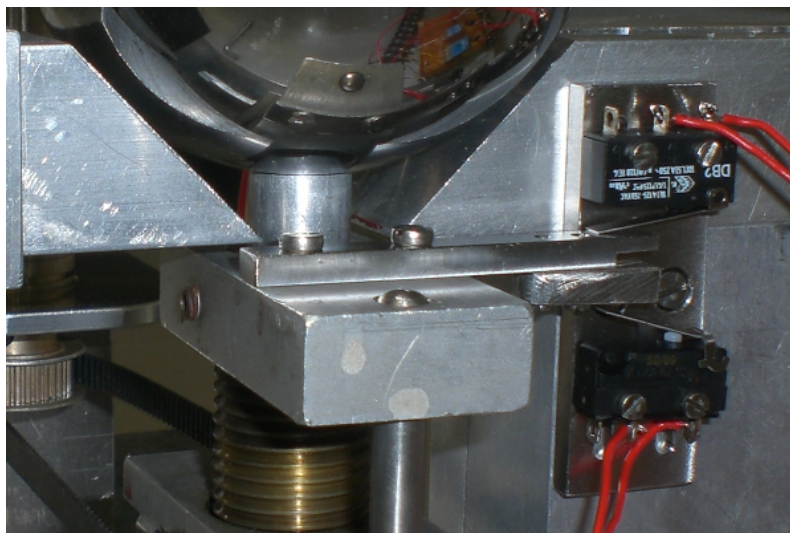


Abb. 3.4.: Geänderter Versuchsaufbau mit Schaltvorrichtung für die Endpositionen des Motors

Es ist gut zu erkennen, dass an den beiden Endpositionen jeweils ein Mikroschalter befestigt ist, welcher durch einen (am Hebemechanismus befestigten) Taster ausgelöst wird. Die selbst entworfene und hergestellte Steuerungsplatine ist in der Abbildung 3.5 gezeigt. Kontrolliert wird diese Platine über den Parallelport. Unter Verwendung von zwei Datenleitungen wird der Motor eingeschaltet und die Drehrichtung bestimmt. Durch Auslesen von zwei Status-Leitungen des Parallelports wird geprüft, ob sich der Motor an der obersten beziehungsweise untersten erlaubten Position befindet.

Mit diesem Aufbau kann gewährleistet werden, dass der Motor bei jeder Messung an der korrekten Position stoppt, welche bei Bedarf durch Verstellen der Schalter variiert werden kann. Auf diese Weise kann also recht einfach ermittelt werden, ob

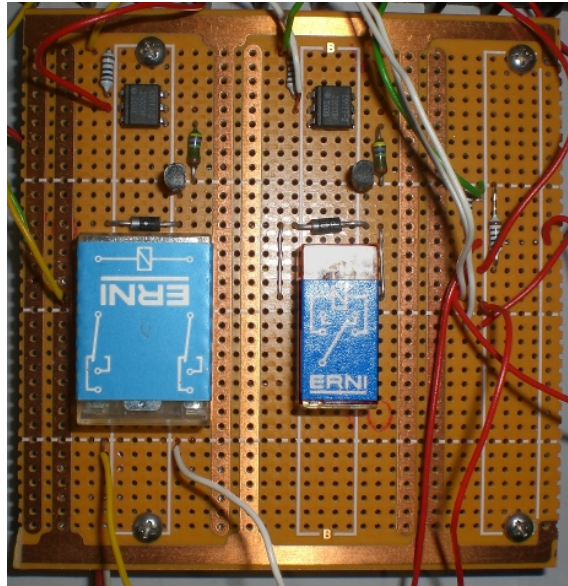


Abb. 3.5.: Selbst hergestellte Platine zur Motorsteuerung

sich die Kugel an der gewünschten Position befindet. So kann gleichzeitig sichergestellt werden, dass der Motor nur betätigt wird, wenn sich die Kugel an einer dafür sinnvollen Position befindet. Der Motor wird sich nur Absenken lassen, wenn die Kugel an der obersten Position liegt, jedoch nicht reagieren, wenn sie sich bereits an der unteren Position befindet. Die genaue Funktionsweise der Schaltung wird im Anhang in Abschnitt A.2 anhand des detaillierten Schaltplans erklärt.

3.3. Eichung des Sensors

Um den Kraftsensor korrekt zu kalibrieren, wurden verschiedene bekannte Gewichte auf dem Sensor positioniert. Mit jedem Gewicht wurde die Messung mehrfach durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Messungen wurden gegen die Mittelwerte der Gewichtsdaten aufgetragen (Abbildung 3.6). Der Fehler der Gewichts-Mittelwerte ist in der Auftragung nicht zu erkennen, da er sich zwischen $57\ \mu\text{N}$ und $150\ \mu\text{N}$ bewegt. Der lineare Fit der Daten ergab für die Funktion $f(U) = mU$ der Kraft in Newton:

$$m = 0.821 \pm 0.008\ \text{N/V}$$

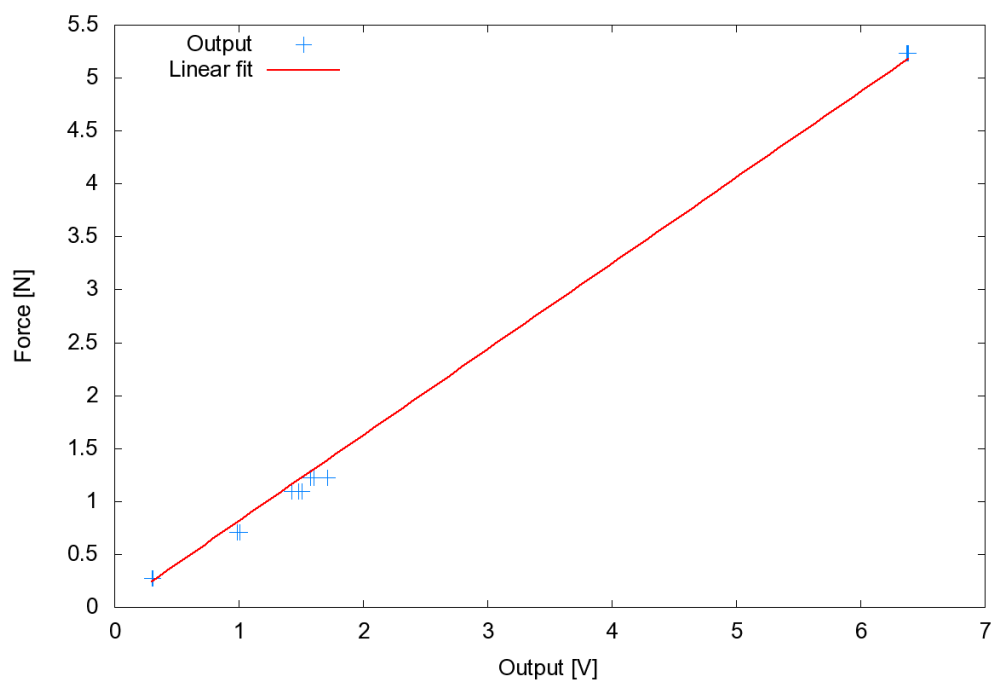


Abb. 3.6.: Kalibrierung des Kraftmessers

3.4. Temperaturdrift

Um die Änderung der Ausgabe des Sensors bei Temperaturschwankungen bestimmen zu können, wurden mehrere Langzeitmessungen durchgeführt und die Temperatur währenddessen aufgenommen.

3.4.1. Erste Messung des Temperaturdrifts

Die erste Messung wurde mit eingebautem und unbelastetem Sensor gestartet. Es wurden 41 Stunden lang Temperatur- sowie Sensordaten (eine Messung pro Minute) aufgenommen. In der Abbildung 3.7 ist zu erkennen, dass einerseits keine Korrelation zwischen den Sensordaten und der Temperatur besteht und andererseits die Messdaten mehrere Sprünge und einen extremen Anstieg nach etwa 1500 Minuten zeigen.

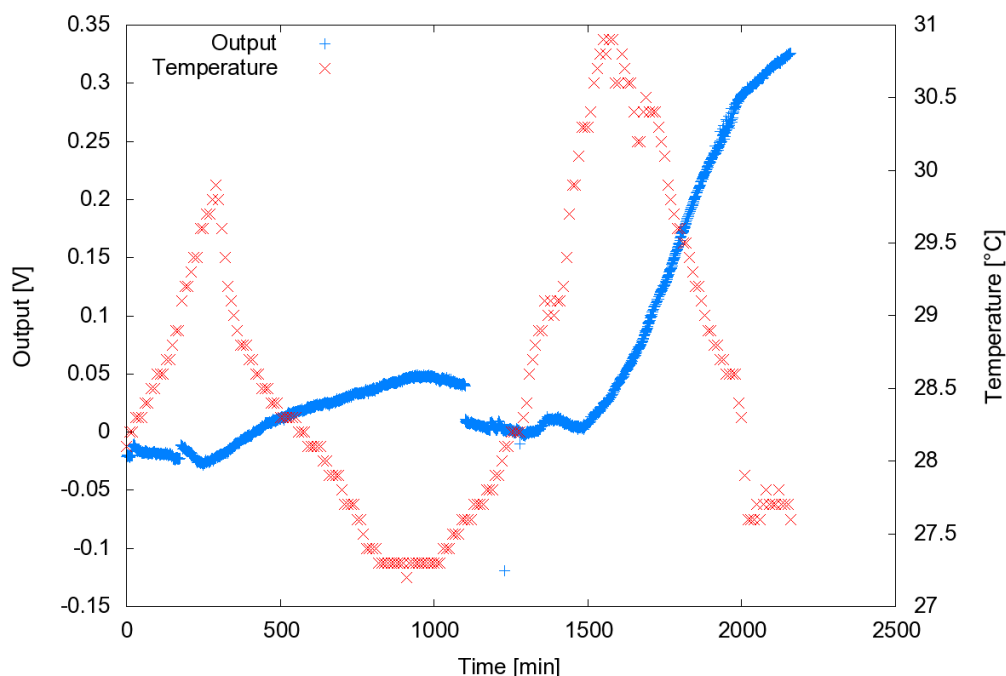


Abb. 3.7.: Temperaturdrift des eingebauten Sensors

Die Daten lassen vermuten, dass ein Problem innerhalb des Versuchsaufbaus existiert. So könnte etwa das Luftlager nicht korrekt mit Druckluft versorgt werden. Ein anderer Grund könnte das Auftreten einer Spannung zwischen dem Keil und dem Kraftmesser sein. Der Sensor wird sowohl mit dem Keil, als auch mit einer festen Halterung verschraubt. Selbst bei kleinen Abweichungen können hier Kräfte

3. Experimentelle Vorgehensweise

orthogonal zur eigentlichen Messrichtung auf den Sensor ausgeübt werden, die das Ergebnis gravierend verfälschen.

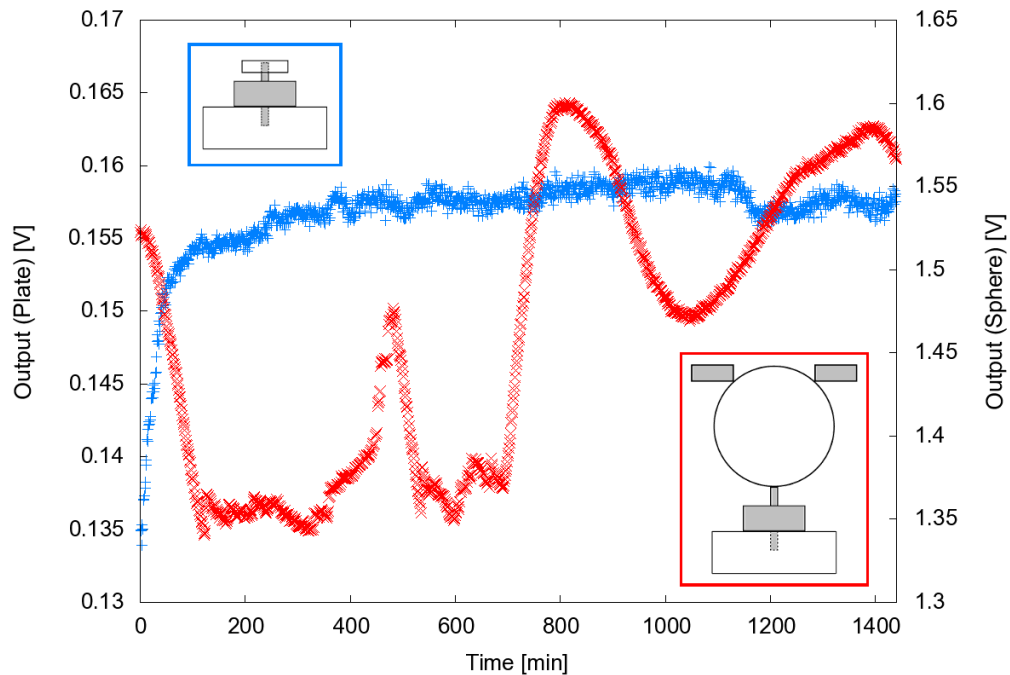


Abb. 3.8.: Messschwankungen bei zwei verschiedenen Messarten. Die Skizzen des Aufbaus sind in der jeweiligen Farbe des entsprechenden Graphen umrandet.

Für dieses Verhalten ist Abbildung 3.8 als Beispiel angegeben. Die blaue Kurve zeigt das Messergebnis für ein kleines Plättchen, welches auf dem vertikal stehenden Sensor geschraubt wurde. Hier ist zu beachten, dass die anfängliche Steigung dieser Kurve durch einen Kalibrierungsvorgang des Messgerätes hervorgerufen wurde. Die rote Kurve wurde dagegen mit Hilfe einer Kugel erzeugt, die möglichst genau auf dem Sensor abgelegt wurde. Dabei wurde sie durch eine Halterung am oberen Viertel der Kugel fixiert. Die durch die Kugel ausgelösten Kräfte, die nicht in Messrichtung wirken, beeinflussen das Ergebnis der Messung stark. Um diese Faktoren für die Messung des Temperaturdrifts auszuschließen, wurde der Sensor aus dem Experiment ausgebaut. Die Ergebnisse der so durchgeführten Drift-Messung sind im Abschnitt 3.4.2 zu finden.

Um zu vermeiden, dass weiterhin Spannungen zwischen dem Keil und dem Sensor entstehen, wurde die Bohrung des Keils mit einer Schraube verschlossen und poliert.

Der Sensor ist also nicht mehr mit dem Keil verbunden, sondern wird nur beim Aufsetzen der Kugel durch den Keil belastet.

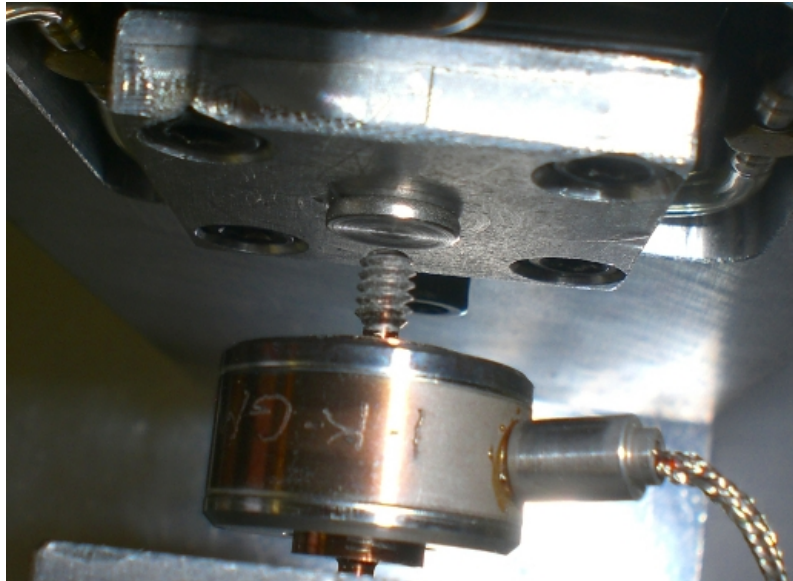


Abb. 3.9.: Verschlossene Bohrung des Keils mit Kraftsensor im Vordergrund

3.4.2. Drift bei ausgebautem Sensor

Die Abbildung 3.10 zeigt eine 72 Stunden dauernde Messung bei ausgebautem Sensor. Hier ist deutlich zu erkennen, dass nun keine Sprünge innerhalb der Messung vorliegen. Weiterhin ist eine Korrelation zwischen Sensor- und Temperaturdaten zu sehen. Um diese Korrelation weiter zu untersuchen, wurden die Daten gegeneinander aufgetragen.

Die Auftragung 3.11 stellt den linearen Zusammenhang zwischen der Änderung der Ausgabe des Sensors und der Umgebungstemperatur dar. Der lineare Fit der Daten ergab für die Funktion $f(T) = mT$ des Outputs in Volt:

$$m = 3.58 \pm 0.03 \text{ mV}/^\circ\text{C}$$

Diese Temperaturabhängigkeit kann zur Berechnung des Fehlers der Messwerte durch Temperaturschwankungen genutzt werden. Um die Auswirkungen des Phasendriffs zwischen der Temperatur und der Sensorausgabe zu untersuchen, wurde die Temperaturkurve um zweihundert Minuten (in der Abbildung 3.10 nach rechts)

3. Experimentelle Vorgehensweise

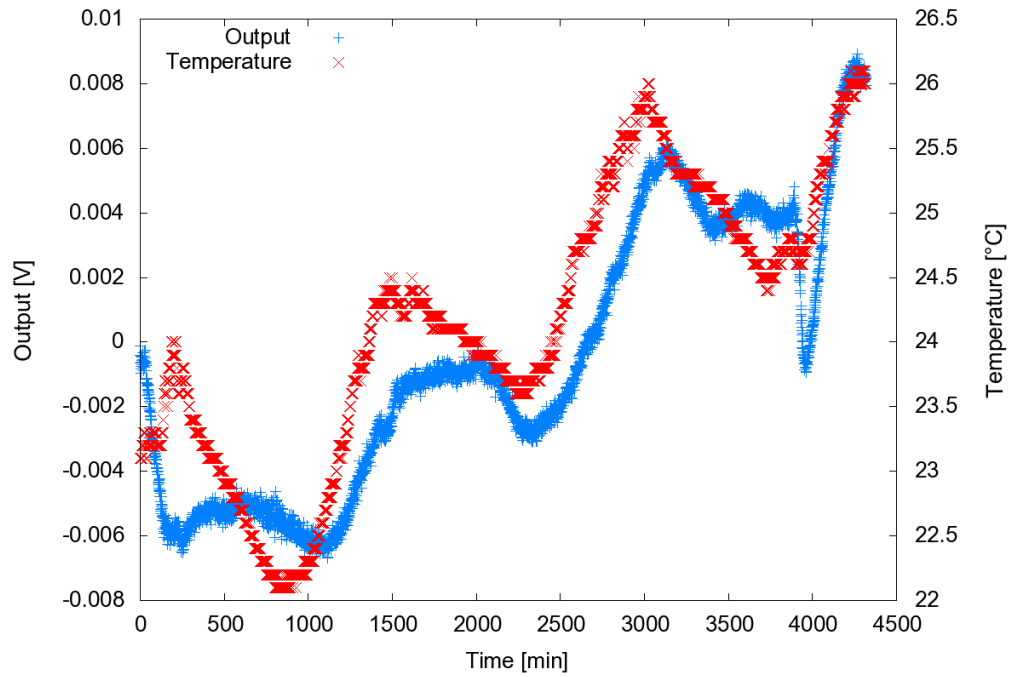


Abb. 3.10.: Temperaturdrift des unbelasteten Sensors

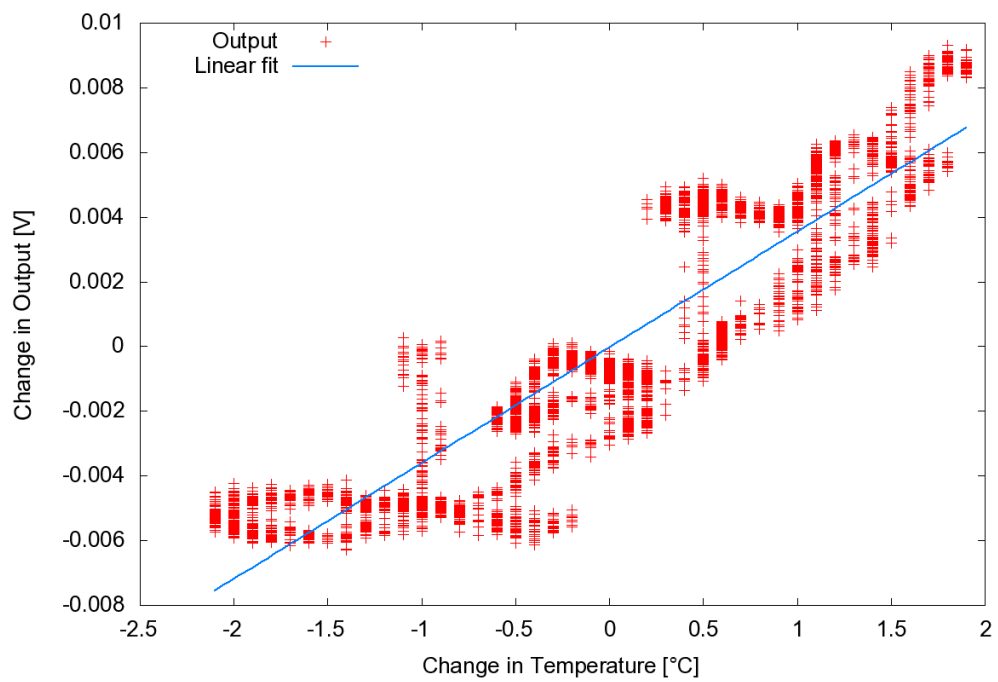


Abb. 3.11.: Temperatur gegen Output aufgetragen

verschoben. Diese Vorgehensweise beeinflusst jedoch kaum die Steigung m : der Wert ist um etwa $0.05 \text{ mV}/^\circ\text{C}$ verschoben. Die daraus resultierende Änderung des Fehlers wirkt sich in der weiteren Fehlerrechnung nicht aus, so dass die ersten Ergebnisse zur weiteren Berechnung genutzt wurden.

3.5. Zeitlicher Abfall der Sensorwerte

Die Messwerte des Kraftmessers ändern sich nach Aufsetzen der Kugel auf kürzeren Zeitskalen unabhängig von der Temperatur. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 3.12 für den Zeitraum von einer Stunde dargestellt. Alle sechzig Sekunden wurde eine einzelne Messung des Multimeters durchgeführt. Die resultierende Messungengenauigkeit (vgl. Abschnitt 3.6) ist in der Abbildung nicht zu erkennen. Während der ersten Minuten kommt es zu einem deutlichen Abfall, welcher danach immer flacher wird. Diese zeitliche Entwicklung muss bei der Wahl des Messzeitpunkts berücksichtigt werden. Weiterhin ist die Veränderung der Verteilung bei verschiedenen Messzeitpunkten interessant, welche in Abschnitt 4.2.1 untersucht wird.

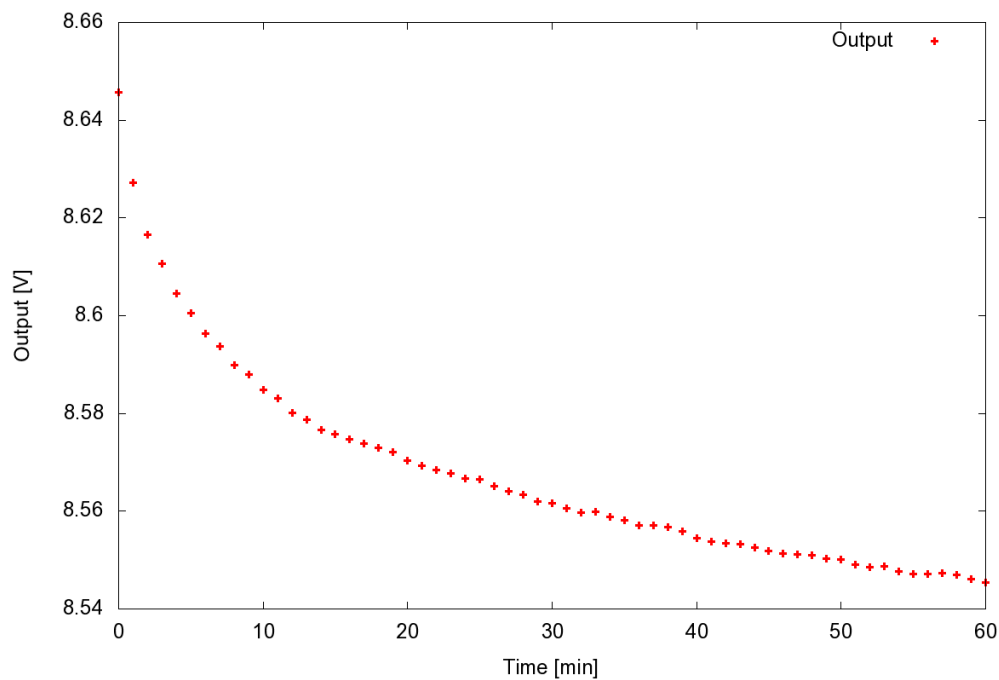


Abb. 3.12.: Änderung der Sensorwerte innerhalb der ersten Stunde

3.6. Messverfahren und Fehlerabschätzung

Aus den eintausend Werten einer Messung wird zunächst der Offset bestimmt. Dazu werden die ersten einhundert Werte genutzt, die aufgenommen wurden, bevor der Elektromotor startete. Typischerweise liegt die Standardabweichung des Offsets im Bereich von 1 mV. Danach wird der Mittelwert aus den letzten fünfhundert aufgenommenen Werten ermittelt und von ihm der Offset abgezogen. In die Standardabweichung des Mittelwerts fließt die Standardabweichung des Offsets über die Fehlerfortpflanzung ein. Es ergibt sich nun beispielsweise ein Wert von 40 mV.

Während der Datenerhebung wurde die Raumtemperatur protokolliert. Es zeigte sich, dass innerhalb der Minute, die eine Messung etwa dauert, die Temperatur maximal um $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$ schwankt. Daraus resultiert nach Abschnitt 3.4.2 ein systematischer Fehler von 0.4 mV.

Laut der Beschreibung des *Keithley 2000 Digitalmultimeters* [4] ergibt sich für den Messbereich von $\pm 10\text{ V}$ ein Fehler von $1.9 \cdot 10^{-3}\%$. Aus einem Messwert von beispielsweise 9 V resultiert dementsprechend ein Fehler von 171 μV .

Als nächstes werden die systematischen Fehler der Temperatur und des Messgeräts zu der Standardabweichung hinzu addiert. Bevor nun das Verhältnis $r = F_T/F_N$ über die Formel 2.5 bestimmt werden kann, muss der Mittelwert der Ausgabe mit Hilfe der Eichgeraden aus Kapitel 3.3 in die Kraft F_M umgerechnet werden. Die Fehler der Eichwerte sowie des vorher berechneten Mittelwerts fließen über die Fehlerfortpflanzung in den Fehler des Verhältnisses r ein. Ein typischer Wert des Fehlers ist hier $\Delta r = 6 \cdot 10^{-3}$. Zuletzt wird noch das gewichtete Mittel von r bestimmt, dessen Fehler etwa gleich groß ist.

4. Messergebnisse

4.1. Messungen mit Schrittmotor

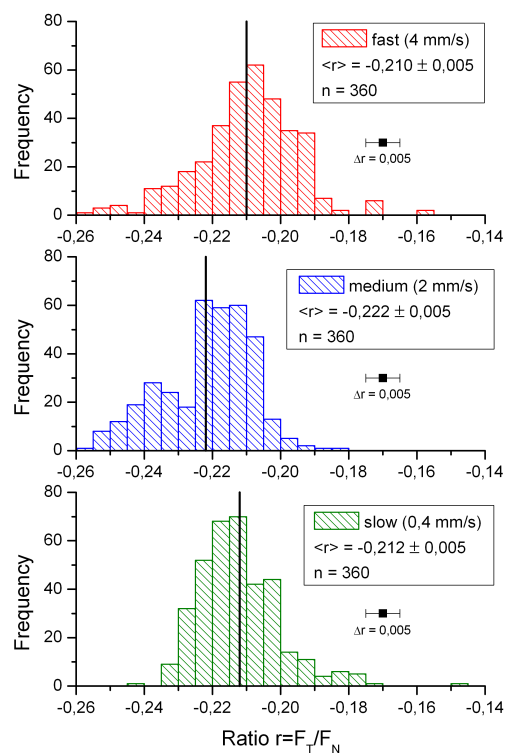


Abb. 4.1.: Histogramme der Messungen mit Schrittmotor

Die Abbildung 4.1 zeigt drei Histogramme, die mit Hilfe des älteren Aufbaus mit Schrittmotor durchgeführt wurden. Die Messreihen wurden innerhalb von 24 Stunden mit jeweils 360 Durchgängen aufgenommen. Die Geschwindigkeit wurde für jede Messreihe verändert. Die in Abbildung 3.3 gezeigte Abhängigkeit der Messwerte von der Motorgeschwindigkeit und den daraus resultierenden Vibrationen ist auch in den Mittelwerten dieser Histogramme zu erkennen.

4.2. Messungen mit Gleichstrommotor

Nach der Änderung des Versuchsaufbaus mit Einbau des Gleichstrommotors wurden erneut Messreihen durchgeführt. Diese enthalten eintausend einzelne Messdurchgänge und dauerten jeweils etwa 48 Stunden. Während der Messungen wurde die Raumtemperatur protokolliert, um später die Messunsicherheit aus den Temperaturschwankungen zu ermitteln. Die Abbildung 4.2 zeigt zwei Histogramme, welche im Abstand von drei Tagen aufgenommen wurden.

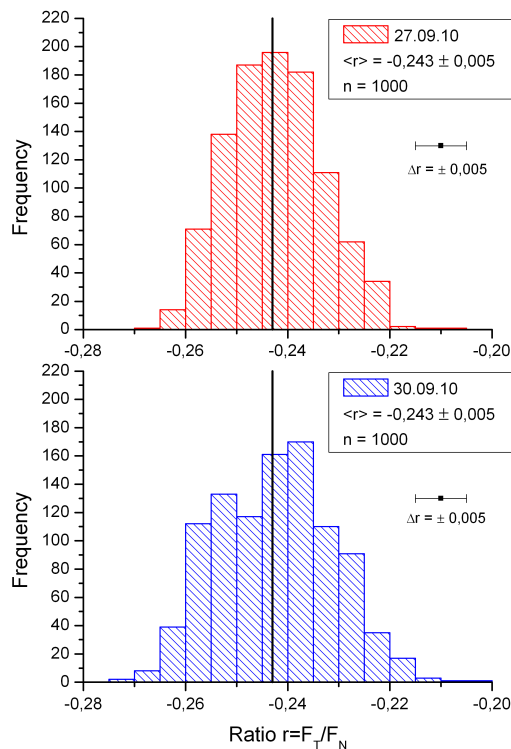


Abb. 4.2.: Histogramme der Messungen mit Gleichstrommotor

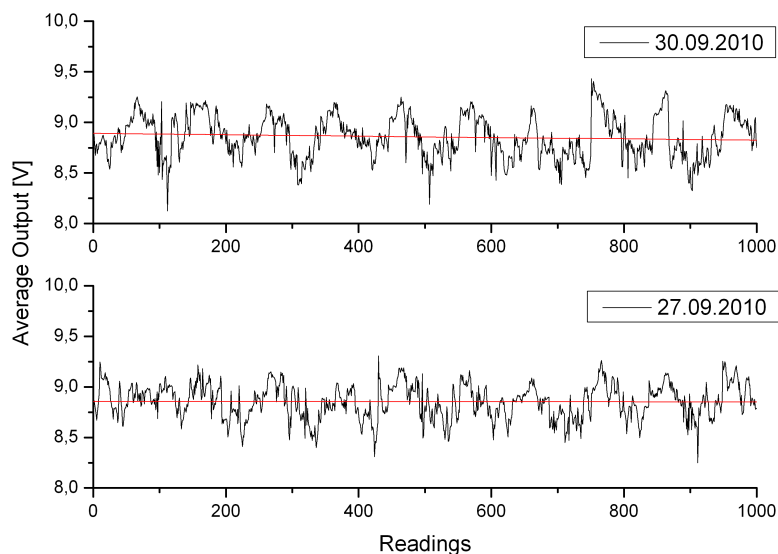


Abb. 4.3.: Auftragung der Sensorausgabe gegen die Messabfolge. Die Dauer einer einzelnen Messung beträgt etwa zwei Minuten

Um zu untersuchen, ob die Messwerte statistisch verteilt sind, wurden in Abbildung 4.3 die Sensorwerte gegen die Anzahl der Messungen aufgetragen. Man erkennt in beiden Messreihen deutlich eine Wellenform der Messwerte. Sie sind also nicht statistisch verteilt.

Um diesen Sachverhalt weiter zu untersuchen, wurde eine schnelle Fouriertransformation (FFT) für beide Messungen durchgeführt. Das Resultat ist in Abbildung 4.4 normiert zur Schwingungsdauer aufgezeigt. Es wird deutlich, dass eine Schwingung mit der ungefähren Schwingungsdauer von 205 Minuten bei beiden Auswertungen dominiert. Eine zweite Schwingung besitzt etwa die Dauer von etwa fünfzig Minuten. Am 30.09.2010 existierte eine zusätzliche Schwingung bei einer Schwingungsdauer von sechzig Minuten.

Als nächstes wird geprüft, in wie weit die Werte von r mit der Raumtemperatur korrelieren. In der Auftragung 4.5 zeigt sich keine Korrelation zwischen diesen beiden Größen. Dies liegt vor allem darin begründet, dass die Dauer der einzelnen Messungen nur etwa sechzig Sekunden beträgt. Innerhalb dieser Zeit verändert sich die Raumtemperatur kaum. Bei längeren Messzeiten könnte es also durchaus zu einer Korrelation kommen.

4. Messergebnisse

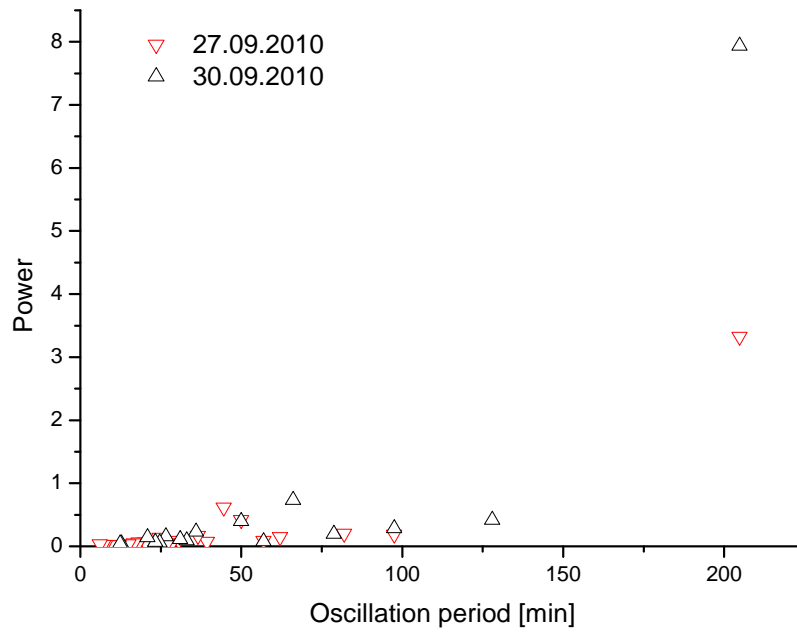


Abb. 4.4.: Ergebnis der Fouriertransformation

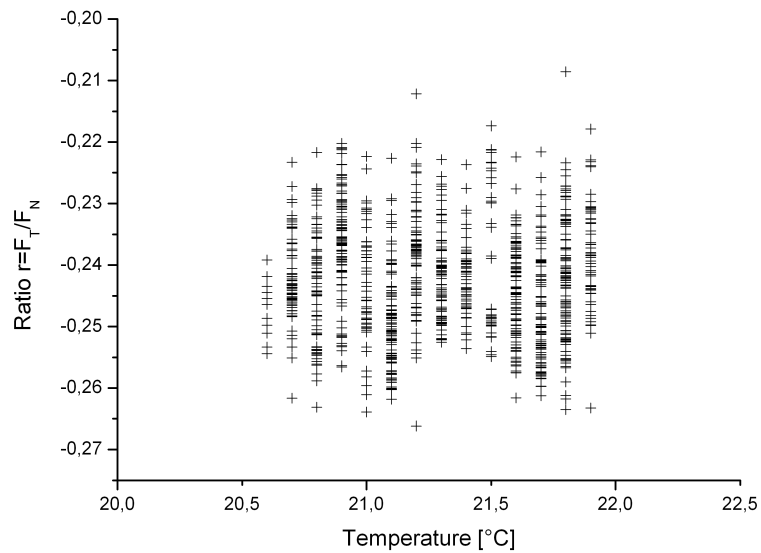


Abb. 4.5.: Auftragung der Temperatur zum Verhältnis r am Beispiel der Messung vom 27.09.2010

4.2.1. Verschiedene Zeiten der Datennahme

Da sich die Messwerte des Sensors innerhalb der ersten Stunde nach Aufsetzen der Kugel deutlich absenken, wurde eine Messreihe gestartet, in welcher drei einzelne Werte – jeweils eine Sekunde, eine Minute und zehn Minuten nach Aufsetzen der Kugel – aufgenommen wurden. Auf längere Wartezeiten wurde aus zeitlichen Gründen zunächst verzichtet. Diese Messreihe beinhaltet zweihundert Wiederholungen und die Ergebnisse sind in der Abbildung 4.6 zu sehen. Es fällt sofort auf, dass sich die Verteilungen sehr stark ähneln. Die Mittelwerte der ersten beiden Messungen sind identisch, während das Mittel der zehnminütigen Messung minimal abweicht.

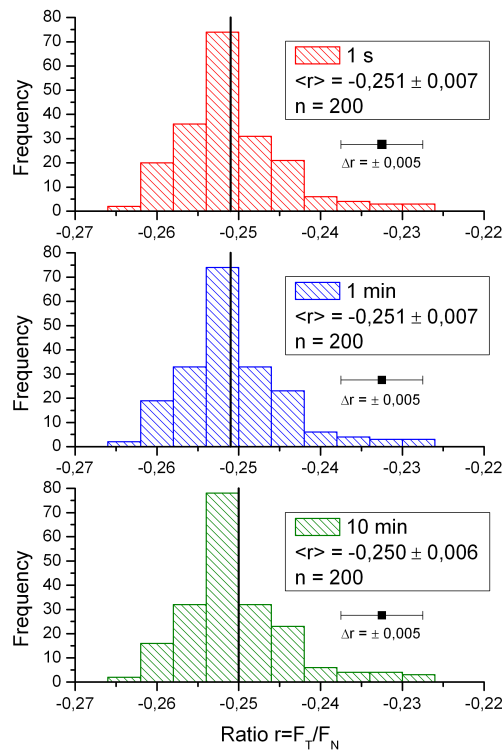


Abb. 4.6.: Histogramme bei verschiedenen Zeiten der Datennahme

Es kann also vermutet werden, dass der Zeitpunkt der Messung zwar für die eigentliche Größe der Kraft entscheidend ist, die Verteilung des Verhältnisses allerdings nicht beeinflusst. Der Abfall der Sensorwerte bewegt sich also immer in der selben Größenordnung.

4. Messergebnisse

Weiterhin kann davon ausgegangen werden, dass sich der Zustand des Systems nicht entscheidend mit der Zeit verändert. Um dies jedoch zu verifizieren, sind deutlich längere Messungen erforderlich, die zum einen größere Intervalle von bis zu einer Stunde abdecken. Zum anderen sollten wesentlich mehr Datensätze aufgenommen werden, um aussagekräftigere Ergebnisse zu erhalten.

4.2.2. Rollbewegung der Kugel

Um zu prüfen, in welcher Größenordnung sich die Ergebnisse verändern, wenn die Kugel nicht in der Mitte des Keils positioniert wird – also während dem Absetzen eine Rollbewegung ausführt – wurden zwei Messreihen mit unterschiedlichen Positionen des Hebemechanismus aufgenommen. Der Mechanismus wurde um 0.5 mm beziehungsweise 1 mm in Richtung des Luftlagers bewegt. Danach ist eine reguläre Messreihe mit eintausend Durchgängen gestartet worden. Die Auftragung der Messdaten in Abbildung 4.7 zeigt eine geringe Veränderung des Mittelwerts bei modifizierter Kugelposition.

Aus dem Vergleich der drei Mittelwerte in Abhängigkeit von der Position der Kugel (Abbildung 4.8) ist ersichtlich, dass sich die Änderung wahrscheinlich nicht linear verhält. Allerdings müssen auch hier deutlich mehr Messungen durchgeführt werden, um aussagekräftigere Ergebnisse erzielen zu können.

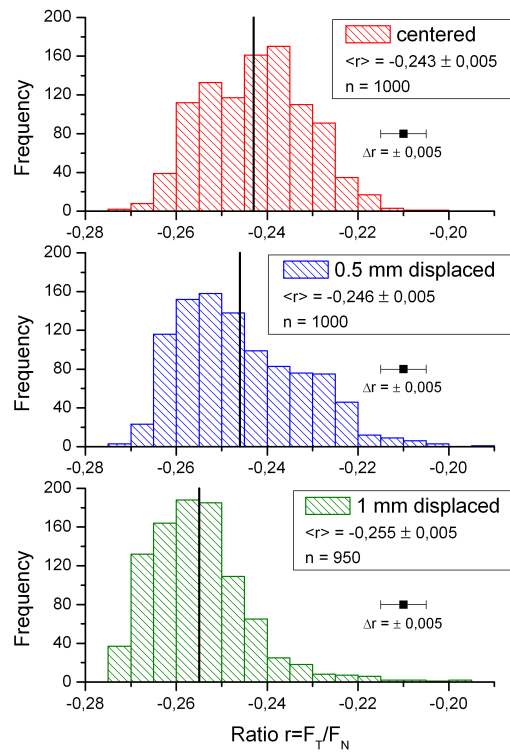


Abb. 4.7.: Histogramme bei verschiedenen Positionen des Hebemechanismus: Zentriert im Keil sowie 0.5 mm beziehungsweise 1 mm in Richtung des Luftlagers verschoben

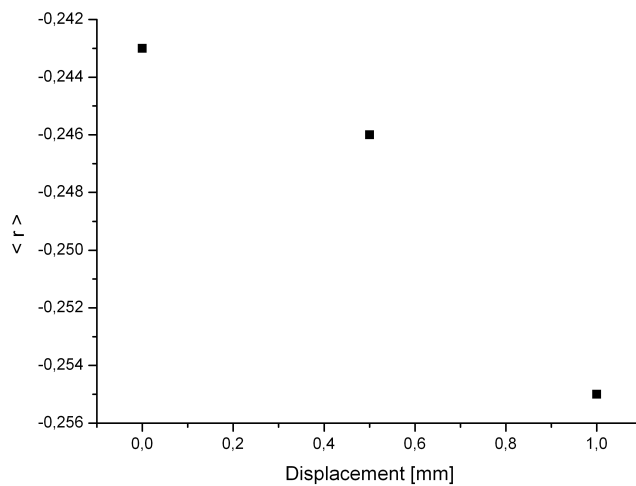


Abb. 4.8.: Veränderung des Mittelwertes mit zunehmender Verschiebung

4.2.3. Vergleich mit der theoretischen Verteilung

Um die in Abbildung 4.2 ersichtlichen Daten mit der theoretischen Verteilung 2.4 zu vergleichen, wurde die Verteilung für einen Reibungskoeffizienten $\mu = 0.3$ aufgetragen. Man erkennt deutlich (Abbildung 4.9), dass sich die Verteilung der Messdaten nicht mit der theoretischen Verteilung in Einklang bringen lässt.

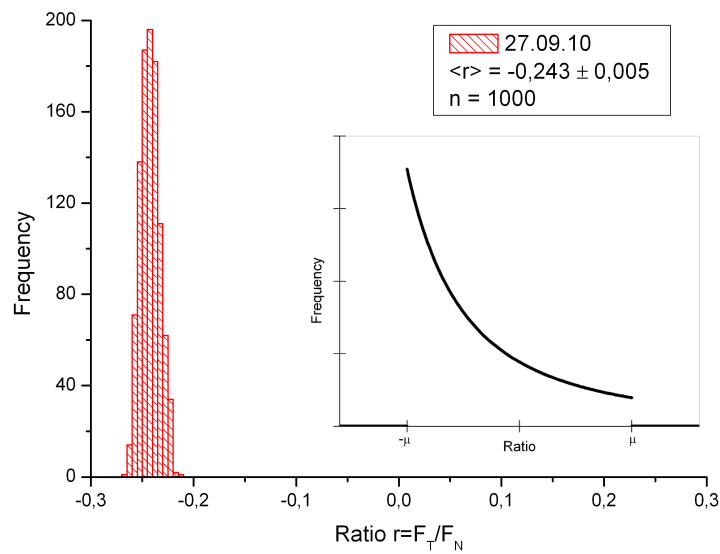


Abb. 4.9.: Histogramm verglichen mit der theoretischen Verteilung

5. Diskussion und Ausblick

Die Ergebnisse der Messungen unter Einsatz eines Schrittmotors zeigen, dass sich der Mittelwert der resultierenden Histogramme mit den Geschwindigkeitseinstellungen des Motors ändert. Dies kann einerseits an der Geschwindigkeit des eigentlichen Kugelaufsetzens liegen. Andererseits kann die Kugel durch die Vibrationen des Motors bestimmte Gleichgewichtspunkte präferieren, die beispielsweise von der Vibrationsfrequenz abhängig sein könnten. Um dieser Frage weiter nachzugehen, sollte das Experiment möglichst ohne jede äußere wie innere Vibration betrieben werden. Der Motor müsste dementsprechend möglichst von dem Aufbau, der auf einem optischen Tisch aufgestellt werden sollte, entkoppelt werden. Infolge dessen können die Auswirkungen von Geschwindigkeitsunterschieden beim Aufsetzen näher untersucht werden. Weiterhin könnte man Vibrationen mit konstanter Frequenz und Amplitude in das System einkoppeln, um deren Konsequenzen näher zu betrachten.

Nachdem der Schrittmotor durch einen Gleichstrommotor ersetzt wurde, änderten sich die Mittelwerte der Histogramme um etwa zehn Prozent. Dies könnte durch das Fehlen der Motorvibrationen begründet sein. Die beiden durchgeführten Messungen liefern nur marginal voneinander abweichende Werte. Wesentlich interessanter ist das zeitliche Verhalten der Messwerte. Diese oszillieren wahrnehmbar, was im Vorfeld des Experiments nicht erwartet worden war. Die Schwingungsdauer lässt einen äußeren Grund für die Änderungen als eher unwahrscheinlich erscheinen. Einen Grund für dieses Phänomen könnte eine Drehbewegung der Kugel darstellen. Selbst wenn diese bei einer einzelnen Messung kaum wahrnehmbar ist, kann sie über den Messzeitraum von eintausend Einzelmessungen eine gewichtige Rolle spielen. Um diesen Effekt weiter zu untersuchen, sollte die Bewegung der Kugel mit Hilfe von Markierungen auf ihrer Oberfläche protokolliert werden. Eventuell wird die Verteilung der Messwerte durch die Oszillation verbreitert, so dass die Breite der Verteilung ohne diese Änderungen verringert würde. Daher ist es äußerst wichtig, die Ursachen zu verstehen und so weit wie möglich zu reduzieren.

5. Diskussion und Ausblick

Die Änderung der Position des Absenkmechanismus, die eine Rotation während des Aufsetzens zur Folge hat, bewirkt eine leichte Änderung des Mittelwerts. Aus den drei durchgeführten Messungen lässt sich noch kein konkreter Zusammenhang herstellen – es scheint jedoch ein nichtlineares Verhalten zu sein. Um dieses näher zu bestimmen, muss die Position des Hebemechanismus stärker variiert werden. So sollten Verschiebungen in Richtung der feststehenden Schräge genauso realisiert werden, wie extremere Verschiebungswerte. Natürlich sind weiterhin feinere Abstufungen in der Positionsänderung notwendig, um einen genaueren Trend beobachten zu können. Der derzeitige Versuchsaufbau limitiert allerdings die Verstellmöglichkeiten der Hebevorrichtung, so dass er eventuell angepasst werden müsste.

Die Messergebnisse konnten die theoretische Vorhersage von Bouchaud und Cates bislang nicht bestätigen. Anstatt einer breiten Verteilung innerhalb der Grenzen des Reibungskoeffizienten konnte ein recht scharfer Peak beobachtet werden. Dies könnte einerseits daran liegen, dass durch die Mechanik des Experiments ein gewisser Wertebereich präferiert wird. So könnten kleine „Kippbewegungen“ des Luftlagers beim Aufsetzen der Kugel eine Rolle spielen. Diese könnte man eventuell mit Hilfe einer weicheren Kugel reduzieren, so dass die Oberflächenänderungen der Kugel einen deutlich größeren Effekt haben, als die Kippbewegung des Keils. Zum anderen könnten die Materialeigenschaften der Kugel und des Keils diese Festlegung steuern. Aus diesem Grund wäre es ratsam, Materialien mit unterschiedlichen Reibungskoeffizienten zu benutzen.

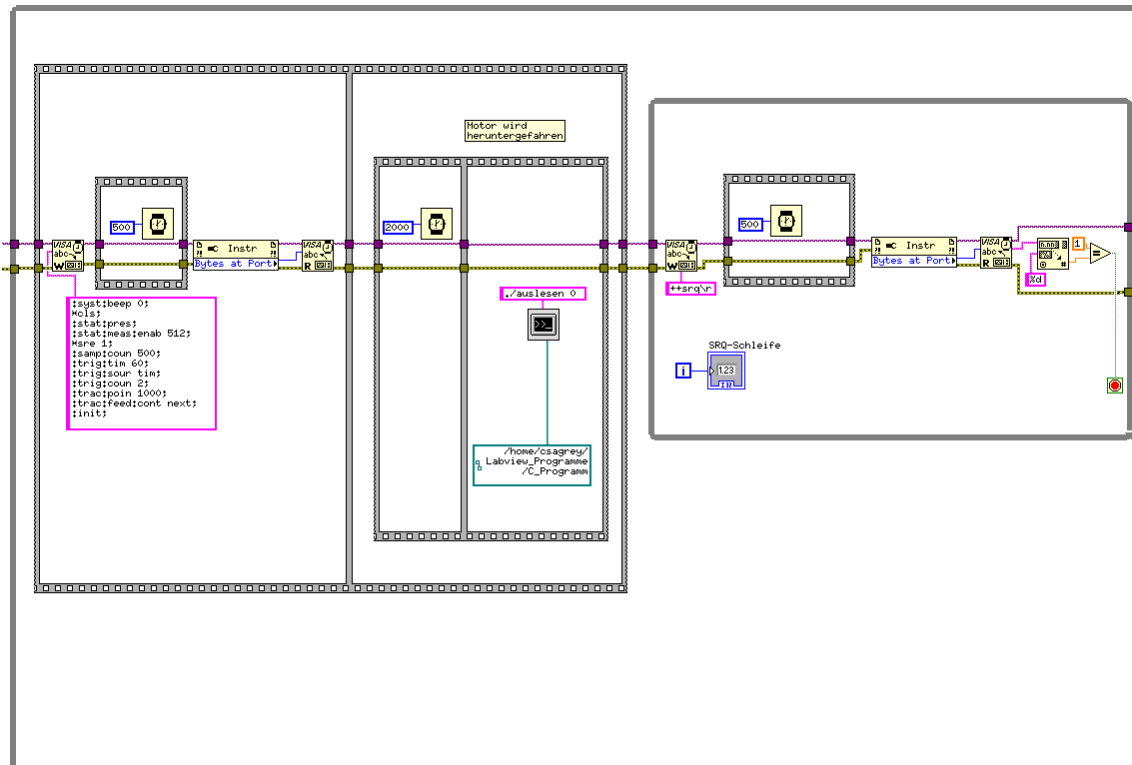


Abb. A.2.: LabView-Programm Teil 2

- Wiederholung bis die Zahl der angegebenen Durchgänge erreicht wurde:
 - Einstellungen DMM:
 - * srq bei „Buffer full“
 - * 1 Sample sind 500 Lesevorgänge bei 50 Vorgängen pro Sekunde
 - * Zeit zwischen den Samples: 60 Sekunden
 - * Es werden zwei Samples durchgeführt.
 - * Größe des Buffers: 1000 Werte
 - * Start der Messung
 - nach zwei Sekunden: Absenken der Kugel
 - Warten auf srq=1 (Buffer ist voll)

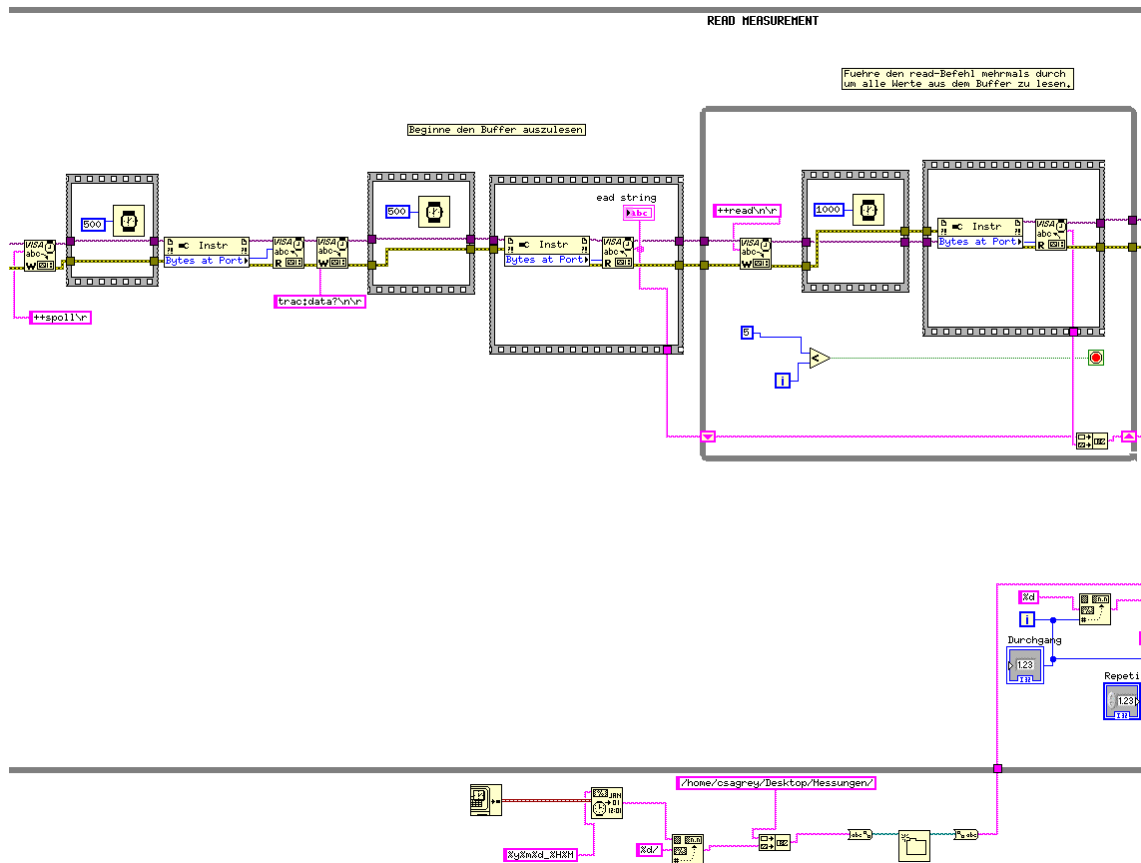


Abb. A.3.: LabView-Programm Teil 3

- spoll setzt den srq wieder auf 0
- Auslesen der ersten Bufferwerte, Sicherung in einem String
- Wiederholtes Auslesen des Buffers bis dieser leer ist, Sicherung der Werte in gleichem String
- Außerhalb der Schleife:
Anlage des Ordners „Datum_Zeit“ Bsp: 100930_11170 am 30.09.2010 um 11:17

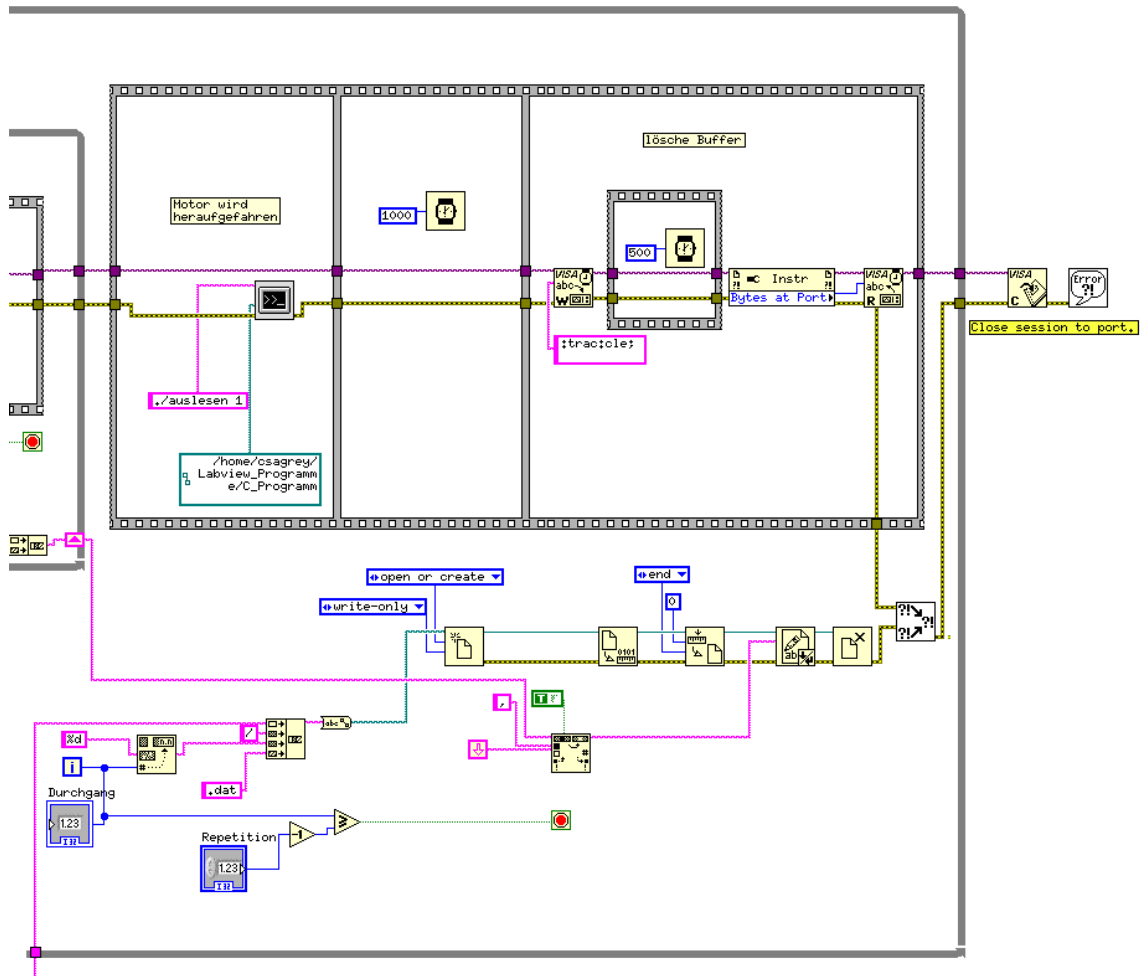


Abb. A.4.: LabView-Programm Teil 4

- Erstellung einer Datei mit Benennung: „Nr. des Durchgangs.dat“
- Die im String gesicherten Daten werden in diese Datei geschrieben und die Datei wird danach geschlossen.
- Die Kugel wird angehoben.
- Löschen des Buffers
- Die Verbindung zum DMM wird getrennt.
- Beenden des Programms

A.2. Steuerungsschaltplan

Dieser Abschnitt beschreibt die Funktionsweise der selbst entwickelten Steuerungsplatine. Der gesamte Schaltplan ist in Abbildung A.5 aufgezeigt. Die Datenleitungen 2 und 5 des Parallelports (Pins 4 und 7) sind jeweils über einen $1\text{ k}\Omega$ Widerstand an einen Optokoppler angeschlossen. Dieser besteht aus einer Leuchtdiode und einem Fototransistor. Wenn die Datenleitung auf *high* gesetzt wird, durchfließt ein Strom von etwa 3 mA die Leuchtdiode. Das von ihr ausgesendete Licht bewirkt, dass der Fototransistor den Schaltkreis auf der rechten Seite, der an eine 24 V -Quelle angeschlossen ist, schließt. Auf diese Weise kann der zweite Stromkreis gesteuert werden, ohne dass eine direkte Verbindung zum Parallelport besteht. So kann der Computer effektiv vor Beschädigungen geschützt werden.

Wenn der Optoisolator den Stromkreis schließt, wird der zweite Transistor von Strom durchflossen und schließt den Relais-Schaltkreis. Das Relais schaltet daraufhin den jeweiligen Schalter im Motoren-Stromkreis um. Sobald die Leitung auf *low* gesetzt wird, öffnet der Optokoppler den Schaltkreis und das Relais bewirkt ein erneutes Umschalten. So wird über den Pin 4 die Polung (also die Drehrichtung) des Motors gesteuert sowie über Pin 7 der Motor ein- und ausgeschaltet.

Über die Statusleitungen 3 und 4 des Parallelports (Pins 13 und 15) wird geprüft, ob sich der Motor an der obersten beziehungsweise untersten erlaubten Position befindet. Pin 3 wird als Stromquelle genutzt. Die Schalter in dem jeweiligen Stromkreis sind nur geschlossen, wenn sich die Kugel an einer der beiden Endpositionen befindet. Wenn sie sich also an ihrer obersten Position befindet, ist der obere Schalter geschlossen und der Strom aus Pin 3 (3 mA) fließt durch den Schalter und nicht durch Pin 13 (Statusleitung 3). Die Statusleitung wird in dem Moment also auf *low* gesetzt. Das Steuerungsprogramm des Computers reagiert entsprechend auf dieses Signal.

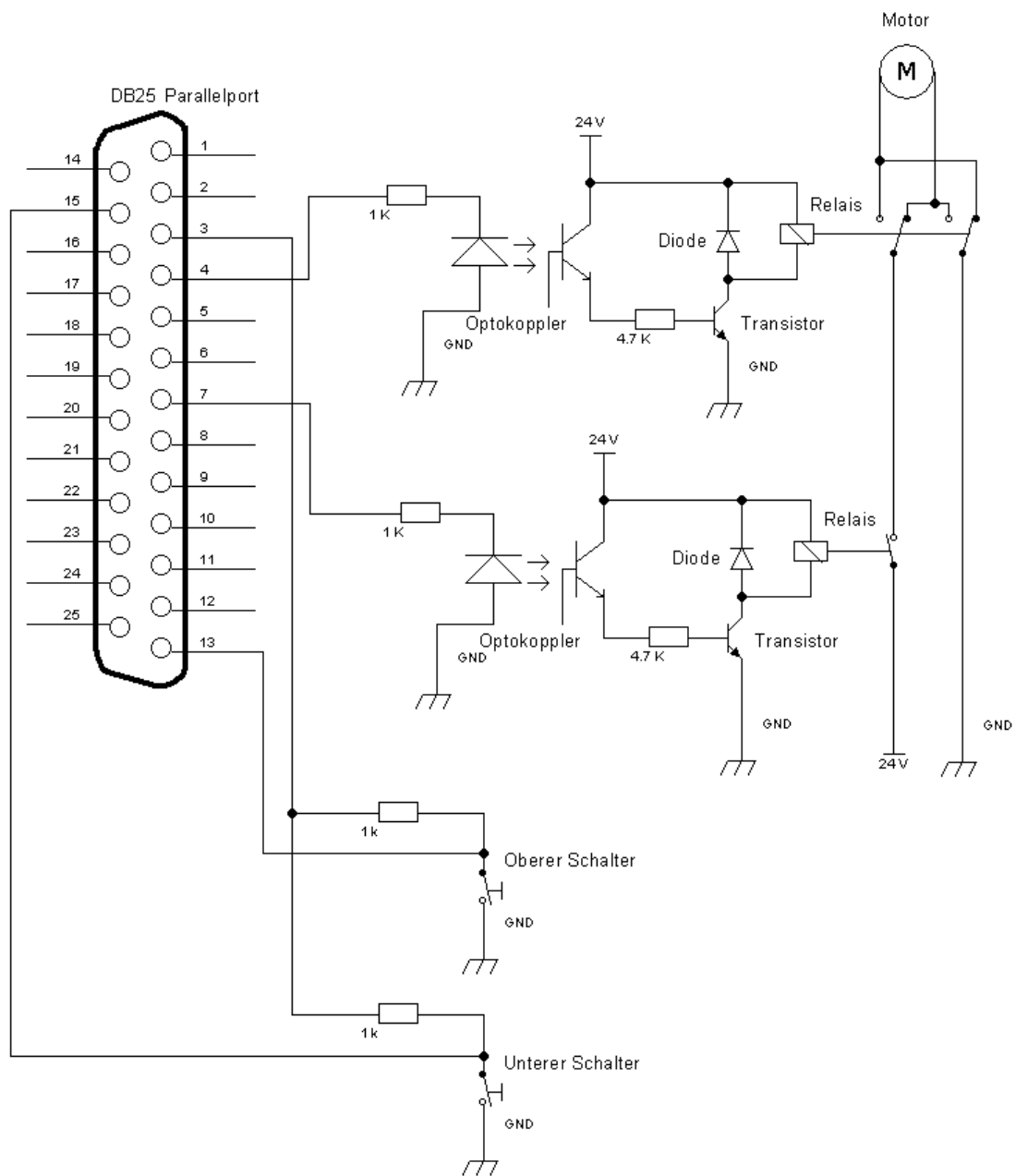


Abb. A.5.: Schaltkreise der Motorsteuerung

Literaturverzeichnis

- [1] J. P. Bouchaud and M. E. Cates. Granular media: Three seminal ideas of sir sam. In P. M. Goldbart, N. Goldenfeld, and D. Sherrington, editors, *Stealing the gold: A celebration of the pioneering physics of Sam Edwards*, chapter 25.2. Clarendon Press, 2004.
- [2] S.F. Edwards and R.B.S. Oakeshott. Theory of powders. *Physica A*, 157:1080–1090, 1989.
- [3] Thomas C. Halsey and Deniz Ertas. A ball in a groove. *Physical Review Letters*, 83(24):5007–5010, December 1999.
- [4] KEITHLEY. *Model 2000 Multimeter – User’s manual*.
- [5] Orientalmotor. *CSK Series – OPERATING MANUAL*.
- [6] Luis Salinas. Determination of the static force distribution on a sphere resting in a wedge. Master’s thesis, Graduate School of The University of Texas at Austin, 2007.

Erklärung nach §13(8) der Prüfungsordnung für den Bachelor-Studiengang Physik und den Master-Studiengang Physik an der Universität Göttingen:

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Abschlussarbeit selbständig verfasst habe, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe und alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen wurden, als solche kenntlich gemacht habe.

Darüberhinaus erkläre ich, dass diese Abschlussarbeit nicht, auch nicht auszugsweise, im Rahmen einer nichtbestanden Prüfung an dieser oder einer anderen Hochschule eingereicht wurde.

Göttingen, den 10. November 2010

(Christian Sagrey)