

**Fakultät für Physik und Astronomie  
Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Physik  
eingereicht von

**Alexander Ackermann**

geboren in Sinsheim (Germany)

**2017**



# Modellierung und Charakterisierung eines Kompressors für ultrakurze Laserpulse durch Strahlenverfolgung

Diese Bachelorarbeit wurde von Alexander Ackermann am  
Max Planck Institut für Kernphysik in Heidelberg  
unter Betreuung von  
Priv.-Doz. Dr. José Ramón Crespo López-Urrutia  
erstellt.



# Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Kompressor, aufgebaut aus einem transmissivem Gitter, einem Prisma sowie zwei Retroreflektoren, für Pulse im Femtosekundenbereich mithilfe von Strahlenverfolgung modelliert. Ziel war es die bei Propagation durch eine Verstärkungsstufe, bestehend aus einer Ytterbium-dotierten lasergepumpten Faser, eingeführte  $1,55 \text{ ps}^2$  Gruppenverzögerungsdispersion und  $0,0025 \text{ ps}^3$  Dispersion dritter Ordnung zu kompensieren. Zur Verifikation des erstellten Modells wurde es im Grenzfall weniger komplexer Aufbauten, welche nur eine Art von dispersivem Element enthalten, mit theoretischen Modellen verglichen. Dabei stimmte die rein analytische Berechnung mit weniger als 1% Abweichung mit der Theorie überein. Für die numerische Methode wurden große Abweichungen aufgrund fehlender Präzision in den Koeffizienten zweiter und dritter Ordnung bei der Anpassung der Phase durch ein Polynom dritten Grades gefunden. Weiterhin wurde ein Aufbau mit einem Gitter mit 1250 Linien/mm und einem SF10 Prisma auf die Abhängigkeit der Dispersion von freien Parametern untersucht. Es konnten Parameterwerte gefunden werden, welche die Gruppenverzögerungsdispersion, allerdings nicht die Dispersion dritter Ordnung der Verstärkungsstufe kompensieren.

## Abstract

In this thesis a compressor for ultrashort laser pulses consisting of a transmissive grating, a prism and two retroreflectors was modeled using a ray-tracing method. The goal was to compensate for  $1,55 \text{ ps}^2$  group delay dispersion and  $0,0025 \text{ ps}^3$  third order dispersion introduced by an amplifier stage, consisting of a Ytterbium-doped fibre pumped by a diode laser. In order to verify the model it was applied to less complex systems for which theoretical models exist. A comparison of the results obtained by the model to the theoretical values yielded an agreement of more than 99% for the analytical calculations. The numerical method lacked precision in computing second and third order coefficients of a polynomial fit onto the phase derived by ray-tracing. Furthermore the dependence of the dispersion on free parameters of the modeled compressors was investigated. Finally, using those relations for a setup consisting of a SF10 prism and a 1250 lines/mm grating a configuration was found which compensates the desired amount of GDD but not of TOD.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1	Femtosekunden Laserpuls Erzeugung . . . . .	8
2.1.1	Allgemeines Funktionsprinzip eines Lasers . . . . .	8
2.1.2	Modenkopplung . . . . .	10
2.1.3	Absorptionssättigung und SESAM . . . . .	10
2.1.4	Kerrlinsen-Effekt . . . . .	12
2.1.5	Faserlaser . . . . .	13
2.2	Frequenzkamm . . . . .	14
2.3	Beschreibung elektromagnetischer Pulse . . . . .	16
2.4	Dispersion . . . . .	18
2.4.1	Prismenpaar . . . . .	20
2.4.2	Gitterpaar . . . . .	23
2.5	Pulscharakterisierung im Femtosekundenbereich . . . . .	26
2.5.1	Intensitätsautokorrelator . . . . .	26
2.5.2	FROG - Frequency Resolved Optical Gating . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>28</b>
3.1	Übersicht des Aufbaus . . . . .	28
3.2	Aufbau zur Pulscharakterisierung mit FROG . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Modellierung des Kompressors</b>	<b>35</b>
4.1	Strahlverfolgung des Kompressors . . . . .	35
4.2	Berechnung der Dispersion . . . . .	41
4.3	Test der Strahlenverfolgung . . . . .	43
4.3.1	Strahlenverfolgung eines Gitterpaares . . . . .	43
4.3.2	Strahlenverfolgung von Gitter und Retroreflektor . . . . .	44
4.3.3	Strahlenverfolgung eines Prismenpaars . . . . .	45
4.3.4	Strahlenverfolgung von Prisma und Retroreflektor . . . . .	47
4.3.5	Untersuchung des Polynomfits . . . . .	48

4.4	Dispersion in Abhängigkeit der freien Parameter . . . . .	50
4.4.1	SF10-Prisma . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Auswertung des Spektrograms mit FROG-Algorithmus</b>	<b>54</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>55</b>
6.1	Mathematica Skript zur Modellierung des Kompressors . . . . .	60
6.2	Mathematica Skript zur Modellierung des Prismenpaares . . . . .	78
6.3	SF10 Prisma und 1250 Linien/mm Gitter: Dispersion in Abhängigkeit freier Parameter . . . . .	87

# 1 Einleitung

In den letzten Jahren haben Veröffentlichungen theoretischer Natur hochgeladene Ionen (engl.: highly charged ion, HCI) als nächsten Schritt in der Einführung noch präziserer Frequenzstandards ins Rampenlicht gerückt [1, 2, 3, 4]. Modernste Atomuhren erreichen relative Genauigkeiten von  $10^{-18}$  [5], limitiert durch Einflüsse externer Felder. Mit hochgeladenen Ionen sollen Genauigkeiten im Bereich von  $10^{-19}$  möglich sein [2]. Aufgrund ihres hohen Ladungszustandes sind die restlichen Elektronen sehr stark gebunden und die damit verbundene geringe räumliche Ausdehnung ihrer Wellenfunktion reduziert die Kopplung an externe Störungen, wie elektromagnetische Felder. Weiterhin sind HCIs zum Test einer möglichen Variation der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  geeignet. Die Sensitivität zur  $\alpha$ -Variation  $q$  ist zum einen proportional zur Ionisationsenergie  $I$  eines Elektronenzustandes [6]. Diese ist in HCIs aufgrund des hohen Ladungszustandes größer als bei einfach geladenen Ionen, wie  $\text{Hg}^+$  und  $\text{Ag}^+$ , die bisher zur Eingrenzung der  $\alpha$ -Variation genutzt werden. Zum anderen ist  $q$  proportional zum Quadrat der Kernladungszahl  $Z$ , welche durch Nutzung schwerer Elemente maximiert werden kann [6]. Um diese Vorteile zu nutzen, ist es notwendig Übergangsenergien in HCIs mit höchster Präzision zu messen.

Hochgeladene Ionen können in einer „electron beam ion trap (EBIT)“ produziert werden. Ein intensiver und hochenergetischer Elektronenstrahl, von einem Magnetfeld komprimiert und gelenkt, ionisiert Atome und hält die entstandenen positiven Ionen aufgrund seiner negativen Raumladung in Zusammenarbeit mit dem Magnetfeld radial gefangen. Spektroskopie an diesen Ionen ist allerdings auf eine Genauigkeit im ppm Bereich [7] limitiert, da Temperaturen von  $10^6$  K aufgrund der Stoßprozesse mit den hochenergetischen Elektronen in der EBIT vorherrschen. Am MPIK gelang es die hochgeladenen Ionen im „cryogenic Paul trap experiment (CryPTEx)“ zu extrahieren und in einer linearen Paulfalle zu fangen, um sie dort mithilfe sympathetischer Laserkühlung mit  $\text{Be}^+$  Ionen auf Temperaturen im Millikelvin Bereich zu kühlen [8]. Das Ziel unseres Experiments ist es hochgeladene Ionen mit einem Frequenzkamm im extrem ultravioletten Bereich (XUV) zu spektroskopieren, da ein Großteil der Übergänge darin liegt. Um einen solchen Frequenzkamm zu generieren, macht man sich den nichtlinearen Prozess der Erzeugung hoher Harmonischer zunutze. Dabei werden Edelgasatome Infrarotpulsen mit Intensitäten von mehr als  $10^{13}$  W/cm<sup>2</sup> ausgesetzt, um Tunnelionisation der Elektronen aus dem Coulomb-

Potential der Atome heraus zu ermöglichen. Nach der Ionisation bewegen sich die Elektronen im oszillierenden Potential des Lichtfeldes. Dabei können sie wieder mit dem Ion, unter Emission von ungeradzahlig höheren Harmonischen der ursprünglichen Laserfrequenz, rekombinieren. Um die genannten Intensitäten zu erreichen, werden Pulse mit mJ Energien in einer Verstärkungs-kavität auf einige zehn Mikrometer fokussiert. Um einzelne Pulse mit solchen Energien zu erhalten, werden die Pulse zuvor zeitlich gestreckt und verstärkt. Um die Energie der Pulse optimal zu nutzen, müssen sie erneut komprimiert werden, sodass möglichst hohe Intensitäten am Fokalkpunkt erreicht werden.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Dispersionsmanagement durch einen Kompressor, bestehend aus einem Prisma, einem transmissiven Gitter und zwei Retroreflektoren. Dieser soll die Pulse, welche in einer gepumpten optischen Faser gestreckt und verstärkt wurden, verstärken bevor sie in die Kavität geschickt werden. Dazu wird ein Strahlenverfolgungsmodell des Kompressors in Mathematica erstellt. Das erste Kapitel beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen, welche Erzeugung ultrakurzer Laserpulse und eines Frequenzkamms, die mathematische Beschreibung von Laserpulsen sowie die Pulscharakterisierungsmethode FROG umfassen. Im Folgenden Kapitel werden bestehender und Teile des zukünftig geplanten Aufbaus beschrieben und die Anforderungen an den Kompressor formuliert. Nachdem das Strahlenverfolgungsmodell in Kapitel 4 eingeführt wurde, wird das Verhalten des Kompressors bezüglich der freien Parameter untersucht und ein Satz von optimalen Parametern für das Experiment gesucht.

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Femtosekunden Laserpuls Erzeugung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Erzeugung ultrakurzer Laserpulse, welche eine zentrale Rolle im Experiment spielen. Zu Beginn soll das Grundprinzip eines Lasers in Erinnerung zurückgerufen werden. Weiterführend werden Mechanismen zur Modenkopplung und Pulsformierung sowie der Übergang zum Frequenzkamm erklärt.

#### 2.1.1 Allgemeines Funktionsprinzip eines Lasers

Jeder Laser besteht aus drei grundlegenden Bestandteilen, welche in Abbildung 1 schematisch dargestellt werden.

- Aktives Medium:  
Im aktiven Medium entstehen, durch stimulierte Emission angeregter Atome oder Moleküle, Photonen, woraus eine Verstärkung des Lichts resultiert. Das Medium muss dazu mehr als zwei Energieniveaus und unterschiedliche Lebensdauern der angeregten Niveaus besitzen.
- Pumpe:  
Damit stimulierte Emission bei Einstrahlung eines Photons mit Übergangsenergie der bevorzugte Prozess ist, muss eine Besetzungsinversion im aktiven Medium vorliegen. Die Pumpe führt die dazu nötige Energie entweder optisch, durch Einstrahlung von Licht, oder elektrisch, wie z.B. per Gasentladung oder durch Anlegen eines elektrischen Stroms, zu.
- Optischer Resonator:  
Das Medium befindet sich in einem Resonator, der durch seine Abmessungen die erzeugten Photonen nach Impuls und Wellenlänge selektiert. Ein Ende des Resonators ist teildurchlässig, sodass Laserlicht ausgekoppelt werden kann.

Zunächst wird durch die Pumpe eine Besetzungsinversion der Zustände im aktiven Medium erzeugt. Ein Photon mit passender Energie stimuliert durch die Besetzungsinversion

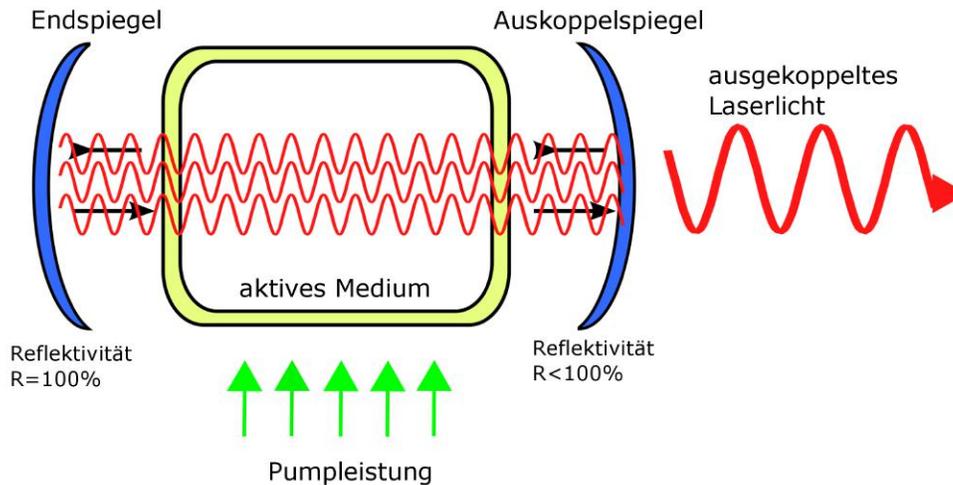


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines Lasers. End- und Auskoppelspiegel stellen den optischen Resonator dar, welcher das aktive Medium enthält. Atome des aktiven Mediums werden durch die Pumpleistung angeregt. Durch stimulierte Emission vervielfältigen sich Photonen bei der Oszillation im Resonator. Ein kleiner Anteil der Photonen wird aufgrund der Teildurchlässigkeit des Auskoppelspiegels ausgekoppelt [9].

mit höherer Wahrscheinlichkeit die Emission eines zweiten Photons, welches gleichen Impuls, gleiche Energie und gleiche Phase wie das Ursprüngliche besitzt. Das zweite Photon kann nun zusätzlich zum Ersten weitere stimulierte Emissionen auslösen, sodass eine Kettenreaktion entsteht, die das Licht verstärkt. Diese Verstärkung muss größer als die Verluste durch Absorption, Streuung sowie Auskopplung sein, sodass eine Nettoverstärkung besteht und Licht konstanter Leistung ausgekoppelt werden kann.

### 2.1.2 Modenkopplung

Um ultrakurze Pulse zu erzeugen benötigt man mehrere grundlegende Elemente, die bestimmte Funktionen erfüllen: Ein Verstärkungsmedium mit großer Bandbreite ( $\Delta\nu \gg 1$  THz) [10], welches kurze Pulsdauern (siehe Gl. (9)) ermöglicht; ein dispersives Element, welches die Pulse möglichst nahe an das Bandbreitenlimit bringt; Phasenmodulation, um die Bandbreite weiter zu steigern und einen Verstärkungs- oder Abschwächungsprozess gesteuert durch Energie oder Intensität, der das Licht zwingt hohe Intensitäten anzustreben.

### 2.1.3 Absorptionssättigung und SESAM

Zur Modenkopplung befindet sich im Laserresonator entweder ein aktives oder ein nichtlineares passives Element, ein sättigbarer Absorber. Aktive Modenkopplung erfolgt durch periodische Modulation der Resonatorverluste oder der Phasenverschiebung pro Resonatordurchlauf beispielsweise durch akusto-optische oder elektro-optische Modulatoren. Im Folgenden fokussieren wir uns aber auf sättigbare Absorber, da diese auch im Laser des Experiments genutzt werden. Ein sättigbarer Absorber ist ein nichtlineares optisches Element, wie etwa ein reflektierender Spiegel, dessen optischer Verlust eine nichtlineare Intensitätsabhängigkeit für hohe Intensitäten aufweist. Für niedrige Intensitäten ist die Abhängigkeit der Reflektivität linear, ab einem gewissen Intensitätsgrenzwert beginnt der nichtlineare Bereich. In diesem läuft der Reflexionsgrad asymptotisch auf einen Maximalwert zu. Diese Eigenschaft ist grundlegend für die Formierung von Pulsen. Bei Inbetriebnahme eines selbststartenden Modenkopplungslasers ist die Emission eher kontinuierlich mit großen Leistungsschwankungen. Bei jedem Rundlauf im Resonator wird das Licht mit höherer Intensität bevorzugt, da es die Absorption stärker sättigen kann und somit weniger Verluste erleidet. Nach vielen Durchläufen bleibt idealerweise ein einziger Puls übrig, welcher jedes Mal beim Auftreffen auf den sättigbaren Absorber die Absorption sättigt und temporär die Verluste senkt, siehe Abbildung 2.

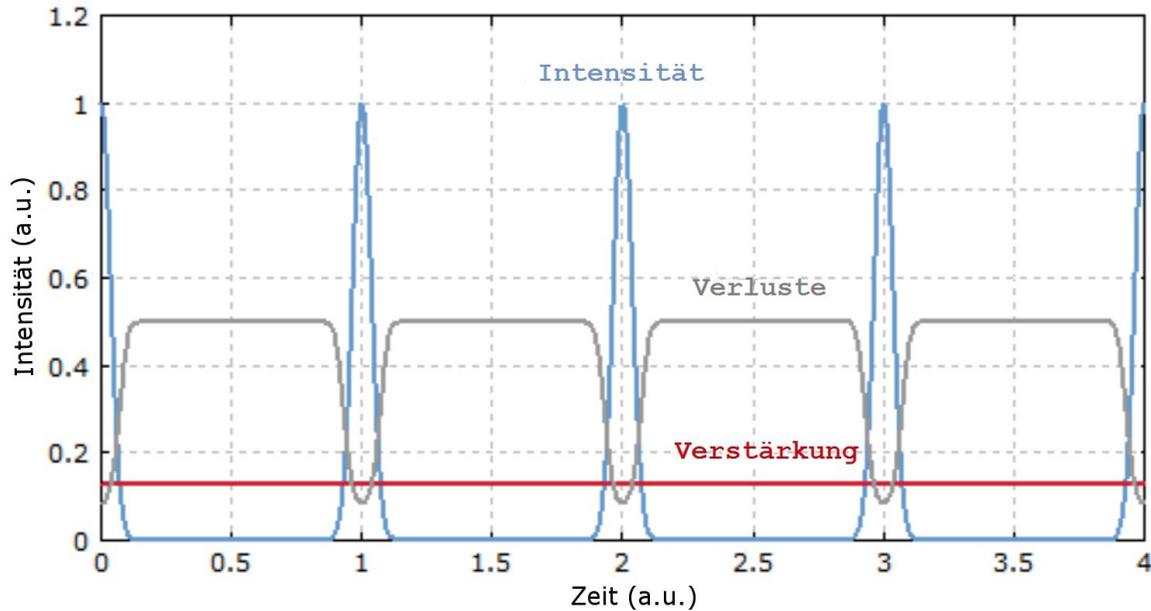


Abbildung 2: Lichtintensität in einem passiv modengekoppelten Laser. Ausreichend intensive Lichtpulse (blau) senken die Verluste (grau) eines sättigbaren Absorbers temporär, sodass die Verstärkung (rot) des Lichts die Verluste im Resonator überwiegt und eine Nettoverstärkung resultiert [11].

Licht mit geringerer Intensität, wie zusätzliche schwächere Pulse oder Hintergrundlicht, wird unterdrückt, da es den Absorber nicht sättigen kann. Demzufolge wird die Pulsfront aufgrund unzureichender Intensität gedämpft. Ist nun die Zeit bis der Absorber wieder in den ungesättigten Zustand übergeht, die sogenannte Relaxationszeit, geringer als die Pulsdauer, wird auch das Ende des Pulses gedämpft, sodass der gesamte Puls verkürzt wird. Dieser Prozess kompensiert im Gleichgewichtszustand Effekte wie chromatische Dispersion die zur Pulsverlängerung beitragen. Im Experiment wird ein sättigbarer Halbleiterspiegel (engl.: semiconductor saturable absorber mirror, SESAM) verwendet, welcher aus einem Braggspiegel und einem Quantenwall besteht. Ein Braggspiegel besteht aus alternierenden Schichten zweier optischer Materialien, wobei jede Schicht ein Viertel der Lichtwellenlänge, für welche der Spiegel gebaut wurde, dick ist. Dadurch haben von aufeinanderfolgenden Grenzschichten reflektierte Lichtstrahlen eine halbe Wellenlänge Gangunterschied. Weiterhin haben die Amplituden-Reflexionskoeffizienten für die

Grenzschichten alternierende Vorzeichen, sodass reflektierte Lichtstrahlen in Phase sind und konstruktiv interferieren. Auf diese Weise wird ein hoher Reflexionsgrad erreicht, welcher durch Variation der Anzahl der Schichtenpaare und des Brechungsindexunterschieds beeinflusst werden kann. Der Quantenwall ist eine dünne Schicht Halbleitermaterial mit kleinerer Bandlücke als die des Materials des Braggspiegels. Einfallende Strahlung wird von den Elektronen des Materials absorbiert, sodass diese vom Valenz- auf das Leitungsband angeregt werden. Bei hohen Lichtintensitäten, wie in einem Laserpuls, sammeln sich Elektronen im Leitungsband an, sodass Anregung weiterer Valenzelektronen auf das Leitungsband unwahrscheinlicher wird. Es resultiert die erwünschte Sättigung der Absorption und das Material wird transparent für nachfolgende Photonen. Nach Durchlauf des Pulses wird die Absorptionsfähigkeit durch Rekombination der Elektronen mit den entstandenen Löchern wiederhergestellt.

#### 2.1.4 Kerrlinsen-Effekt

Der Kerrlinsen-Effekt beruht auf dem quadratischen elektro-optischen Effekt, auch Kerr-Effekt genannt. Dieser bezeichnet das Phänomen, dass sich der Brechungsindex  $n$  eines Mediums in Anwesenheit eines elektrischen Feldes mit Intensität  $I$  nach  $n = n_0 + n_2 I$  ändert, wobei  $n_0$  der lineare Brechungsindex und  $n_2$  der nichtlineare Brechungsindex zweiter Ordnung ist. Normalerweise wird ein zusätzliches elektrisches Feld extern angelegt. Bei hochintensiven Lichtstrahlen, wie bei einem Laser, reicht das Feld des Lichtes selbst aus um den Brechungsindex zu modulieren. Bei Annahme eines Gauß'schen Strahlenprofils und positivem  $n_2$  würde das Zentrum den größten Brechungsindex erfahren, während er nach außen hin abfällt. Dadurch propagiert das Licht im Zentrum langsamer als außen, die Wellenfront biegt sich und der Strahl wird fokussiert. Bei mehrmaligem Durchlaufen des Kerr-Mediums fokussiert sich der Strahl immer weiter. Bei Anwendung auf einen Puls wird dessen Front mit geringerer Intensität schneller propagieren als der Peak, sodass die Front effektiv gedämpft wird. Während der Peak, durch die langsamere Fortbewegung aufgrund des höheren Brechungsindex gegenüber des weniger intensiven Ende des Pulses, auf jenes aufgeschoben wird. Aufgrund der Intensitätsabhängigkeit des Brechungsindex variiert dieser auch zeitlich bei Durchlauf eines Pulses. Verschiedene Teile des Pulses „spüren“ also unterschiedliche Brechungsindizes. Dies führt zu einer Phasenverschiebung

quer durch den Puls. Dieser Prozess wird Selbstphasenmodulation genannt, erzeugt neue Frequenzkomponenten und vergrößert somit die Bandbreite des Pulsspektrums, wodurch die minimal mögliche Pulsdauer verringert wird, siehe Gl. 9.

### 2.1.5 Faserlaser

In einem Faserlaser ist das aktive Medium eine mit Metallen der seltenen Erden dotierte optische Faser. In Abbildung 3 ist ein schematischer Aufbau abgebildet.

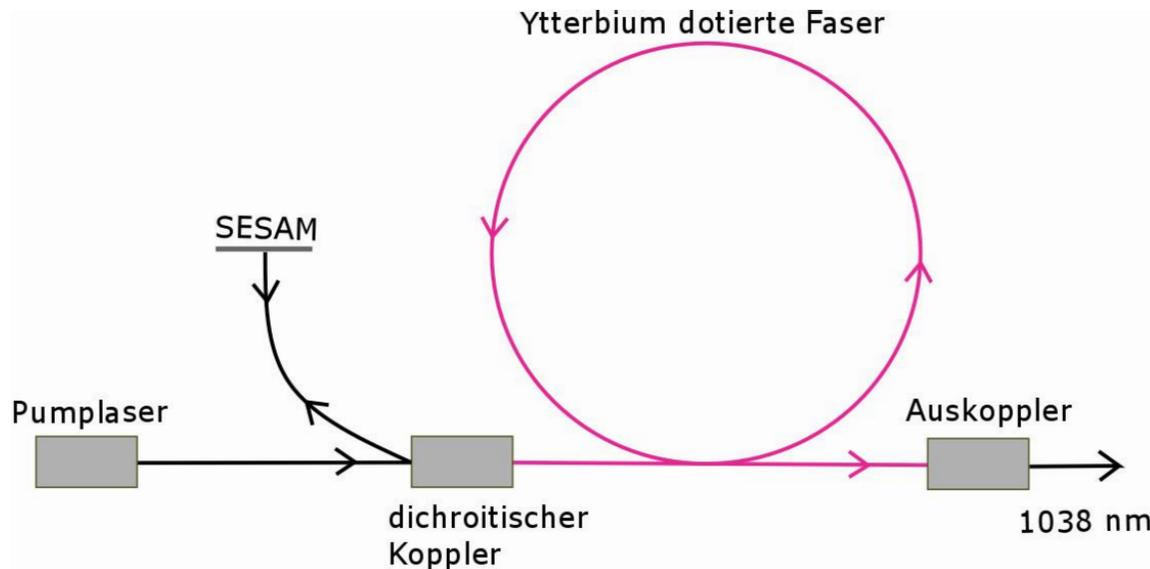


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines Ringfaserlasers. Ein Pumplaser erzeugt eine Besetzungsinversion in der dotierten Faser, welche die Erzeugung intensiven und kohärenten Lichts durch spontane und darauffolgende stimulierte Emission in Gang setzt. Das Dauerstrichlicht wird durch den sättigbaren Absorber in Form eines SESAM zur Pulsformierung gezwungen. Die Pulse werden anschließend am teildurchlässigen Auskoppler entnommen.

An einem Ende der Faser wird der Pumpstrahl eines Diodenlasers eingekoppelt. Beim Durchlaufen der optischen Faser wird das aktive Medium angeregt und spontane Emission setzt Photonen frei, welche ihrerseits wiederum weitere Photonen durch stimulierte Emission erzeugen. Der sättigbare Halbleiterspiegel sorgt durch passive Modenkopplung

für die Formierung von Pulsen, welche am anderen teilreflektierenden Ende der Faser nach jedem Durchlauf ausgekoppelt werden, sodass eine Pulsfolge entsteht.

Die Pulswiederholungsrate  $f_{\text{rep}}$  (engl.: pulse repetition rate) wird durch die Länge des Resonatordurchlaufs  $L_{\text{RT}}$  bestimmt. Idealerweise zirkuliert ein einzelner Puls, sodass das Inverse der Durchlaufdauer  $1/T_{\text{RT}} = c/2L_{\text{RT}} = f_{\text{rep}}$ , mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$ , die Wiederholungsrate ergibt. Da das Licht im Resonator eines Faserlasers nicht durch Luft propagiert, sondern durch das Fasermaterial, ist die Temperaturabhängigkeit der optischen Resonatorlänge viel geringer als in Festkörperlasern. Weiterhin entfällt die Justierung von Kavitätsspiegeln bei Inbetriebnahme, im Gegensatz zu Festkörperlasern. Dies macht Faserlaser viel robuster gegenüber Störfaktoren der Umwelt.

## 2.2 Frequenzkamm

Die zuvor beschriebene Pulsfolge ist eine unendlich lange Folge von identischen Lichtpulsen mit einem jeweiligen zeitlichen Abstand von  $\tau = 1/f_{\text{rep}}$ . Die Fouriertransformierte der Einhüllenden einer solchen Pulsfolge ergibt im Frequenzbereich einen Kamm aus äquidistanten Moden mit Frequenzabstand  $f_{\text{rep}}$ . Typische Pulsdauern liegen bei  $\sim 100$  fs, Pulse haben  $\sim 10$  ns Abstand und die Periodendauer des elektrischen Feldes innerhalb des Pulses bei 1080 nm Wellenlänge beträgt 3,6 fs [12]. Das bedeutet viele Oszillationen werden innerhalb eines 100 fs Pulses vollzogen. Das Maximum des elektrischen Feldes muss demnach nicht mit dem Maximum der Intensitätseinhüllenden übereinstimmen und kann bei Betrachtung zum gleichen Zeitpunkt von Puls zu Puls unterschiedlich sein. Diese Phasenverschiebung des elektrischen Feldes relativ zum Peak der Einhüllenden nennt man Träger-Einhüllende Phasenverschiebung  $\phi_{\text{CEO}}$  (engl.: carrier envelope offset phase, CEO). Sie beruht auf dem Unterschied zwischen Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{p}}$  des elektrischen Feldes und Gruppengeschwindigkeit  $v_{\text{g}}$  der Einhüllenden, aufgrund der Dispersion innerhalb des Resonators. Sie lässt sich durch [12]

$$\phi_{\text{CEO}} = (1/v_{\text{g}} - 1/v_{\text{p}})L_{\text{RT}}/w_{\text{T}} \quad (1)$$

beschreiben, wobei  $w_{\text{T}}$  die Trägerfrequenz, also Kreisfrequenz des elektrischen Feldes, ist. Für die Beschreibung der Pulsfolge ist es allerdings praktischer die Frequenz mit der

die Trägerphase das Einhüllendenmaximum passiert, die Träger-Einhüllenden Phasenverschiebungsfrequenz  $f_{\text{CEO}} = \phi_{\text{CEO}} f_{\text{rep}} / 2\pi$ , zu verwenden.

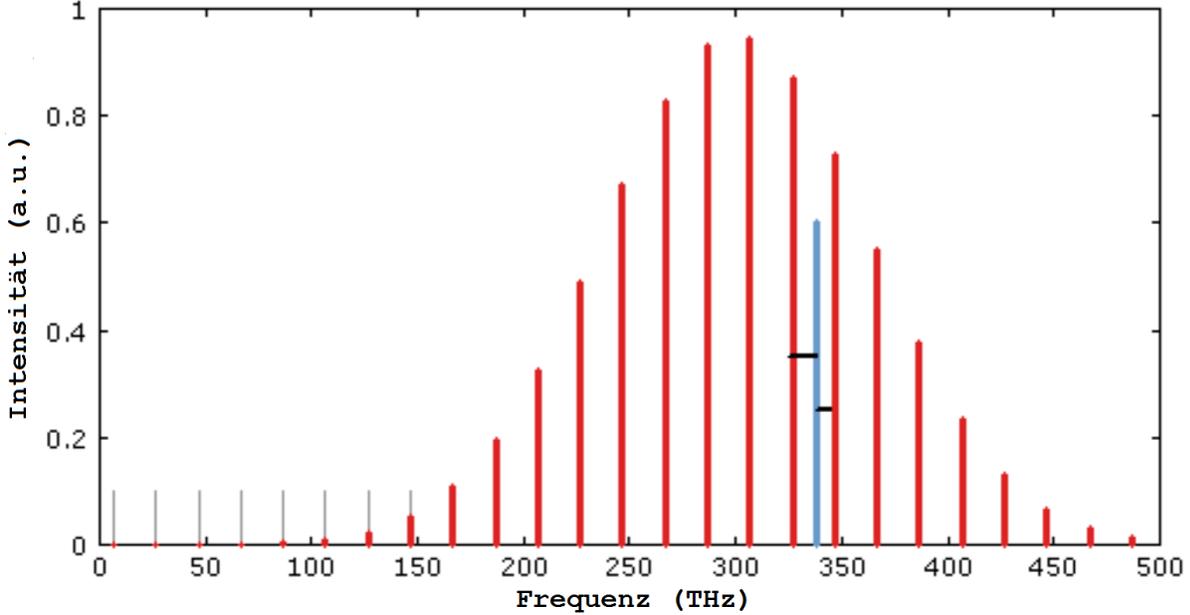


Abbildung 4: Optischer Frequenzkamm in rot mit einer unbekanntem Frequenz in blau zwischen zwei Moden des Kammes gelegen. Die äquidistanten Kammmoden haben einen Abstand von  $f_{\text{rep}}$  zueinander und sind um  $f_{\text{CEO}}$  von Null verschoben [?].

Im Frequenzbereich bedeutet dies, dass alle Moden des Frequenzkamms um  $f_{\text{CEO}}$  von null verschoben sind. Die absolute Frequenz  $f_n$ , im optischen Bereich, einer beliebigen Mode des Frequenzkamms lässt sich somit durch eine Kombination von zwei Radiofrequenzen [13]

$$f_n = n f_{\text{rep}} + f_{\text{CEO}} \quad (2)$$

beschreiben, wobei  $n$  eine ganzzahlige Zahl ist. Ein Frequenzkamm ist in Abbildung 4 abgebildet. Sind sowohl Wiederholungsfrequenz als auch die erfahrene Träger-Einhüllenden Phasenverschiebung bekannt, ist es möglich jede Frequenz innerhalb der Bandbreite des Frequenzkamms aufgrund der Schwebung zwischen der unbekanntem Frequenz und den Frequenzkammmoden zu bestimmen. Die Bandbreite des Kamms ist gegeben durch das Verhältnis von Resonatorlänge zu Pulsdauer. Für einen 1 m langen Resonator in dem

100 fs lange Pulse oszillieren ergibt dies  $10^5$  Moden, die zur Bandbreite beitragen.

## 2.3 Beschreibung elektromagnetischer Pulse

In diesem Unterkapitel wird der mathematische Formalismus elektromagnetischer Pulse und der Zusammenhang zwischen der Repräsentation im Frequenz- und Zeitraum näher betrachtet, um schließlich das Phänomen der Dispersion zu erklären. Formeln innerhalb dieses Kapitels beziehen sich auf [14], wenn nicht anders vermerkt.

Das elektromagnetische Feld eines Laserpulses kann sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich vollständig beschrieben werden. Die räumliche Abhängigkeit wird zunächst vernachlässigt. Ein elektromagnetischer Puls wird im Zeitbereich im Allgemeinen durch das Produkt einer sich langsam ändernden Einhüllenden  $\varepsilon(t)$  und einem schnell oszillierenden Teil, charakterisiert durch die Phase  $\phi(t)$ , als

$$E(t) = \varepsilon(t) \cos(\phi(t)), \quad (3)$$

ausgedrückt, wobei lineare Polarisation angenommen wird. Die Einhüllende wird durch ihre Dauer charakterisiert und beschreibt somit die grobe zeitliche Struktur des Pulses. Die Dauer wird dabei durch die Halbwertsbreite  $\tau_p$ , im Englischen „full width half maximum“ (FWHM), des Intensitätsprofils  $I(t)$ , welches proportional zum Quadrat des realen und positiven Teils der Einhüllenden ist,  $I(t) \propto \varepsilon(t)^2$ , bestimmt. Die zeitabhängige Phase des elektrischen Feldes enthält für uns wichtige Informationen, welche bei Erweiterung in einer Taylorreihe ersichtlich werden. Sie lässt sich als

$$\phi(t) = \phi_{\text{CEO}} + \omega_0 t + \varphi(t), \quad (4)$$

mit der Träger-Einhüllenden Phasenverschiebung  $\phi_{\text{CEO}}$  aus Kapitel 2.2 und  $\varphi(t)$  den Phasentermen höherer Ordnung in der Zeit ( $t^k$  mit  $k \gg 2$ ), schreiben. Falls  $\varphi(t) = 0$ , so enthält die Einhüllende eine konstante Oszillation der Frequenz  $\omega_0$ . Durch Ableitung der Phase

$\phi(t)$  erhält man die instantante Frequenz  $\omega(t)$  des Pulses

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt}, \quad (5)$$

welche die Zeitabhängigkeit der zentralen Frequenz des Pulses beschreibt. Ist die Ableitung eine lineare Funktion der Zeit, d.h.  $\phi(t) \neq 0$ , ändert sich die zentrale Frequenz linear mit der Zeit und der Puls wird als frequenzmoduliert oder „down- oder up-chirped“ bezeichnet, je nachdem ob die Frequenz mit der Zeit sinkt oder steigt. Enthält  $\phi(t)$  Terme höherer Ordnung als  $k = 2$ , so enthält der Puls einen nichtlinearen chirp.

Weiterhin ist zur Beschreibung elektromagnetischer Pulse eine komplexe Repräsentation nützlich

$$\tilde{E}(t) = \varepsilon(t)e^{i\phi(t)}. \quad (6)$$

Allerdings ist nur der Realteil eine messbare Größe, welche mit physikalischen Systemen wechselwirkt. Ausgehend vom zeitabhängigen komplexen elektrischen Feld wird das komplexe Spektrum der Feldstärke  $\tilde{E}(\omega)$ , durch die Fouriertransformation ( $\mathcal{F}$ )

$$\tilde{E}(\omega) = \mathcal{F}[\tilde{E}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(t)e^{-i\omega t} dt = \varepsilon(\omega)e^{i\phi(\omega)} \quad (7)$$

definiert, wobei  $\varepsilon(\omega)$  die Einhüllende im Frequenzbereich und  $\phi(\omega)$  die spektrale Phase ist. Umgekehrt erhält man durch inverse Fouriertransformation ( $\mathcal{F}^{-1}$ ) von  $\tilde{E}(\omega)$  das zeitabhängige elektrische Feld

$$\tilde{E}(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{E}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

Aufgrund der Verknüpfung des Zeit- und Frequenzbereiches durch die Fouriertransformation, können Bandbreite  $\Delta\omega_p$  und Pulsdauer  $\tau_p$  nicht unabhängig voneinander geändert werden. Sie erfüllen die Unschärferelation der Fourieranalyse

$$\tau_p \Delta\omega_p = 2\pi \Delta\nu_p \tau_p \geq 2\pi c_B, \quad (9)$$

wobei die spektrale Breite  $\Delta\omega_p$  als Halbwertsbreite der spektralen Intensität definiert

wird.  $c_B$  ist eine Konstante, die von der Pulsform abhängt. Die Ungleichung in (9) gilt, für spektrale (oder temporale) Phasen mit Termen höherer Ordnung ( $k \geq 2$ ), also wenn die Pulse “chirped“ sind. Gleichheit gilt für Pulse ohne chirp, welche eine minimale Dauer für vorliegende Bandbreite und Pulsform besitzen. Solche Pulse nennt man bandbreitenlimitiert oder fourierlimitiert.

## 2.4 Dispersion

Dieses Unterkapitel ist der Dispersion, dem zentralen physikalischen Phänomen bei der Kompression von Pulsen, und deren Auswirkung auf ultrakurze (Femtosekundenbereich) Pulse gewidmet. Nach einer allgemeinen Beschreibung inklusive Herleitung der Dispersion, werden typische einfache Aufbauten zur Erzeugung von Dispersion, das Prismen- und Gitterpaar, näher betrachtet.

Die spektrale Phase des elektrischen Feldes, wie sie in Gleichung (4) eingeführt wurde, ist die grundlegende physikalische Größe bei der Bestimmung von Dispersion. Sie kann als Taylorreihe [14]

$$\phi(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k \phi(\omega)}{d\omega^k} \omega^k = \phi_{\text{CEO}} + \tau_0 \omega + \varphi(\omega), \quad (10)$$

ausgedrückt werden. Hier enthält  $\varphi(\omega)$  Terme mit höherer Ordnung bezüglich der Frequenz ( $\omega^k$  mit  $k \geq 2$ ). In Analogie zu (5) kann nun die Gruppenverzögerung, im Englischen Group Delay (GD), als [14]

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = -\tau_0 - \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (11)$$

definiert werden. Diese beschreibt eine zeitliche Verzögerung der Einhüllenden, welche sich mit der Frequenz ändert, falls  $\varphi(\omega)$  ungleich Null ist.

Anhand des Verschiebungstheorems der Fouriertransformation lassen sich die einzelnen Terme der spektralen und auch zeitlichen Phase anschaulich erklären. Lineare Phasenterme sowohl im Frequenz- als auch im Zeitbereich verschieben den gesamten Puls im jeweils

anderen Bereich ohne seine Form zu beeinflussen, siehe Abbildung 5.

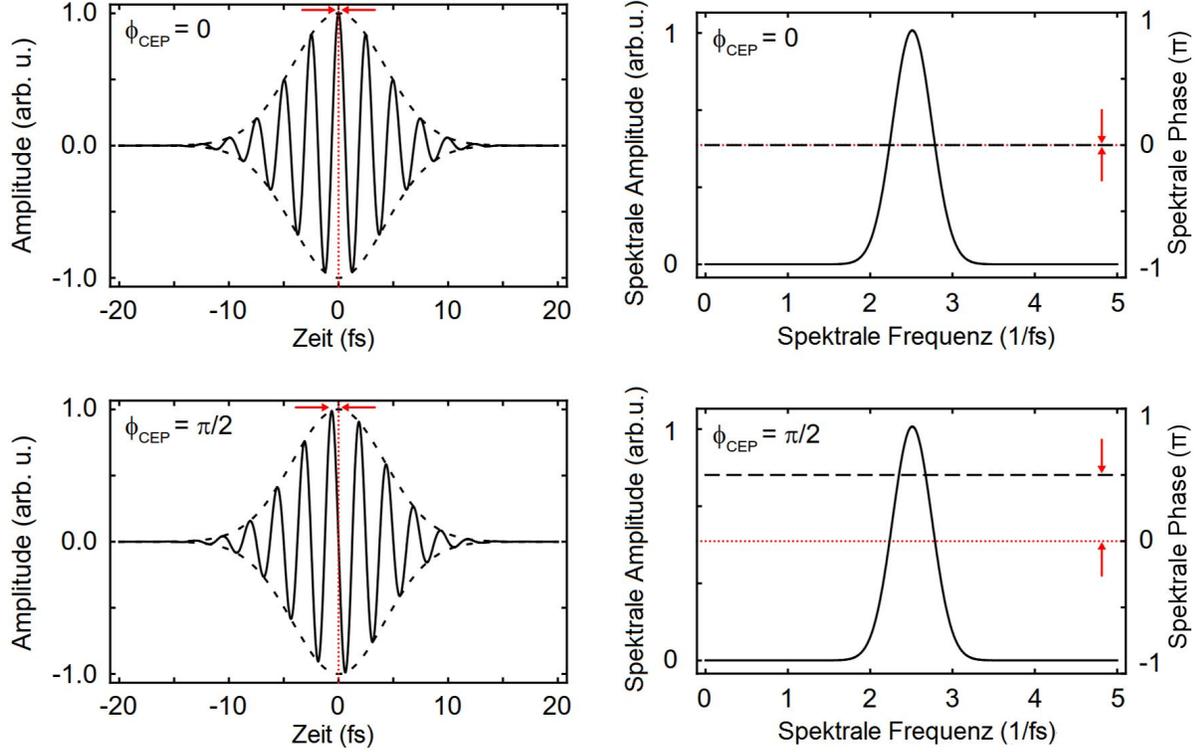


Abbildung 5: Gaußpulse in Frequenz- (rechts) und Zeitbereich (links) mit  $\phi_{\text{CEO}} = 0$  (oben) und  $\phi_{\text{CEO}} = \pi/2$  (unten). In der zeitlichen Repräsentation stellt die schwarze gestrichelte Linie die Einhüllende und die schwarze durchgezogene Linie die Trägerfrequenz des elektrischen Feldes dar. Die Einhüllende ist um  $t = 0$  zentriert, markiert durch die rote gestrichelte Linie. Im Frequenzbereich sind die spektrale Phase, schwarze gestrichelte Linie, und die spektrale Einhüllende, schwarze durchgezogene Linie, miteinander gegen die Frequenz aufgetragen. Die roten gestrichelten Linien markieren den spektralen Phasenwert 0. Die roten Pfeile zeigen die Verschiebung bei Wechsel zwischen den Repräsentationen aufgrund der jeweiligen CEO Phasen auf [14].

$\tau_0$  und  $\omega_0$  können demnach als mittlere Werte, um die der Puls im jeweiligen Bereich zentriert ist, verstanden werden. Die Terme höherer Ordnungen führen zu frequenzabhängigen Verzögerungen, das heißt verschiedene Frequenzkomponenten werden unterschiedlich in der Zeit verschoben. Diese Terme sind interessant für das Verständnis eines Kompressors. Falls Terme zweiter Ordnung in der Frequenz den Phasenterm  $\varphi(\omega)$  domi-

nieren, also im Falle eines linearen chirps, haben die Ableitungen der niedrigen und hohen Frequenzen in (11) entgegengesetzte Vorzeichen, sodass hohe und niedrige Frequenzen zeitlich in entgegengesetzte Richtungen verschoben werden und sich der Puls verbreitert. Dies wird Gruppenverzögerungsdispersion (engl.: group delay dispersion (GDD)) oder Dispersion zweiter Ordnung genannt und berechnet sich durch die zweifache Ableitung der Phase nach der Frequenz  $\frac{d^2\phi(\omega)}{d\omega^2}$ . Die dritte Ableitung der Phase  $\frac{d^3\phi(\omega)}{d\omega^3}$  korrespondiert zu nichtlinearen chirps, da Frequenzterme dritter Ordnung dominieren. Die Ableitung des Phasenterms hat somit gleiches Vorzeichen für hohe und niedrige Frequenzen. Ergo werden diese zeitlich in die gleiche Richtung verschoben. In diesem Fall können diese Frequenzen miteinander interferieren und es entsteht eine Schwebung. Auf diese Weise können Vor- bzw. Nachpulse erklärt werden, welche bei Dispersion dritter Ordnung oft zu sehen sind. Eine Taylorreihenentwicklung der spektralen Phase um die zentrale Frequenz macht die Relevanz der Terme in Abhängigkeit von der Bandbreite des Spektrums deutlich. Für geringe Bandbreiten sind die Terme höherer Ordnung, proportional zu  $(\omega - \omega_0)^3$  und  $\propto (\omega - \omega_0)^4$ , vernachlässigbar gegenüber der Gruppenverzögerungsdispersion. Da man große Bandbreiten benötigt (siehe Gl. 9), um kurze Pulse erzeugen zu können, muss man Dispersion höherer Ordnungen beachten.

Zuletzt werden noch die Begriffe Material- und Winkeldispersion eingeführt. Materialdispersion beruht auf der Abhängigkeit des Brechungsindex eines Materials von der Frequenz. Aufgrund dieser Abhängigkeit variiert die Länge des optischen Weges durch ein Material mit der Frequenz. Dies kann einen „chirp“ des Pulses in Propagationsrichtung zur Folge haben. Winkeldispersion beruht auf der Frequenzabhängigkeit des Ablenkungswinkels bei Brechung, Beugung und anderen Prozessen. Für Brechung ist die Frequenzabhängigkeit des Brechungsindex ebenso die Ursache des Phänomens, da der Brechungswinkel abhängig vom Brechungsindex des Materials (12) ist. Die Folge von Winkeldispersion ist eine Auffächerung des Pulses in Abhängigkeit der Frequenz senkrecht zu dessen Propagationsrichtung und infolgedessen frequenzabhängige Weglängen.

### 2.4.1 Prismenpaar

Zur Untersuchung der Dispersion eines Prismenpaares werden zwei identische Prismen wie in Abbildung 6 angeordnet. Der Einfachheit halber werden nur zwei Frequenzkompo-

nenen betrachtet: Die zentrale Frequenz  $\omega_0$ , durch die durchgezogene Linie dargestellt, und eine andere beliebig gewählte Frequenz  $\omega$  innerhalb des Spektrums, dargestellt durch die gestrichelte Linie. Das erste Prisma sorgt für Winkeldispersion nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n_1(\omega) \sin(\theta_1) = n_2(\omega) \sin(\theta_2). \quad (12)$$

Das zweite Prisma richtet die Strahlen, aufgrund der parallelen Anordnung der beiden gegenüberliegenden Seiten der beiden Prismen, wieder parallel zueinander aus. Auf diese Weise wird eine Defokussierung des Strahls verhindert. Es resultiert eine räumliche Aufspaltung der Frequenzkomponenten senkrecht zur Propagationsrichtung, welche auch nicht erwünscht ist. Daher wird der Strahl zurückreflektiert. So wird jede Frequenzkomponente erneut zweimal gebrochen und legt den gleichen Weg wie zuvor zurück, sodass sie sich wieder in einem Strahl überlagern. Bei Anordnung für minimale optische Verluste sowie minimale Ablenkung, d.h. der Auftreffwinkel auf das erste Prisma entspricht dem Brewsterwinkel und die Strahlen der zentralen Frequenz verlaufen symmetrisch durch das Prisma, ergibt sich für die Gruppenverzögerungsdispersion [10]

$$\left. \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \approx -\frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} \left( 4l \left( \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} \right)^2 - L \left. \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right|_{\lambda_0} \right), \quad (13)$$

wobei  $l$  die Weglänge der zentralen Wellenlänge zwischen den beiden Prismen und  $L$  die Weglänge durch die Prismen hindurch ist. Bei gleicher Anordnung findet man für die Dispersion dritter Ordnung [10]

$$\left. \frac{d^3\phi}{d\omega^3} \right|_{\omega_0} \approx \frac{\lambda_0^4}{4\pi^2 c^3} \left( 12l \left[ \left( \frac{dn}{d\lambda} \right)^2 \left( 1 - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda} (n^{-3} - 2n) \right) + \lambda_0 \left( \frac{dn}{d\lambda} \frac{d^2n}{d\lambda^2} \right) \right] - L \left[ 3 \frac{d^2n}{d\lambda^2} + \lambda_0 \frac{d^3n}{d\lambda^3} \right] \right). \quad (14)$$

Terme von geringerer Magnitude als die Obigen wurden vernachlässigt.

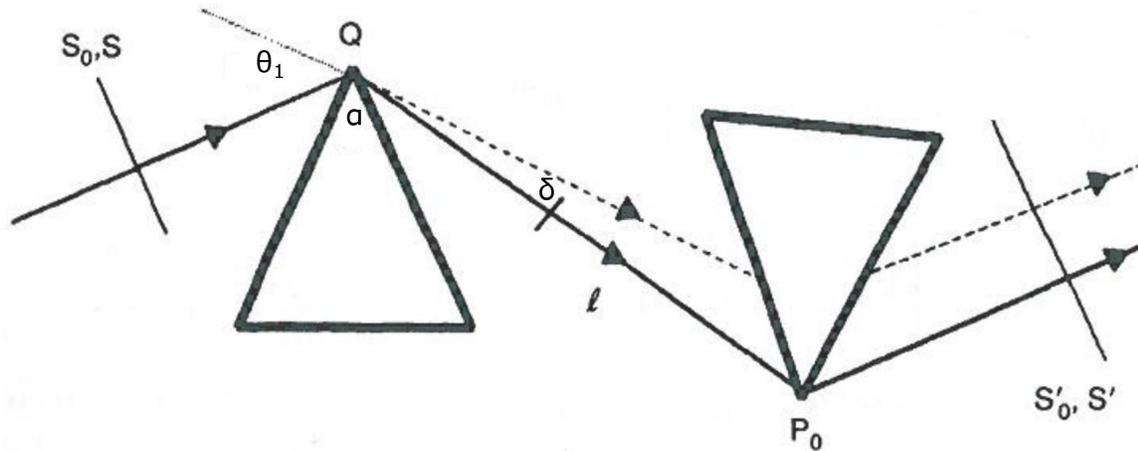


Abbildung 6: Strahlenverlauf der zentralen Frequenz  $\omega_0$  und einer beliebig gewählten Frequenz  $\omega$  durch ein Paar identischer Prismen. Die zentrale Frequenz legt den Weg entsprechend der durchgezogenen Linie zurück und  $\omega$  folgt der gestrichelten Linie. Beide Frequenzkomponenten fallen unter dem Winkel  $\theta_i$  auf das Lot des ersten Prisma, allerdings unterscheidet sich der Gesamtablenkwinkel nach Brechung an beiden Grenzschichten um  $\delta$ . Die Punkte Q und P markieren die Apexpositionen der Prismen,  $\alpha$  ist der Apexwinkel und  $l$  die Weglänge von  $\omega_0$  zwischen den Prismen [10].

Am zweiten Term in Gleichung (13), welcher die Materialdispersion im Prisma-Paar beschreibt, kann man erkennen: Je tiefer die Prismen in den Strahl eingeschoben werden, also die Strecke  $L$  durch die Prismen vergrößert wird, desto größer wird die Dispersion zweiter Ordnung bei gleicher Wellenlänge. Im gleichen Fall kann auch die Dispersion dritter Ordnung für entsprechende Brechungsindizes steigen. Andererseits wird die Winkeldispersion, durch den ersten Term in Gleichung (13), erhöht, wenn der Abstand  $l$  zwischen den Prismen erhöht wird. Dies senkt die Dispersion zweiter und dritter Ordnung [15]. Werte der Gruppenverzögerungsdispersion von Prisma-Paaren liegen üblicherweise im Bereich von  $1000 \text{ fs}^2$ . Um höhere Dispersion zu kompensieren werden Gitter genutzt.

## 2.4.2 Gitterpaar

Der einfachste Aufbau zur Untersuchung der Dispersion von Gittern ohne effektive Winkeldispersion sind zwei parallele Gitter, wie in Abbildung 7 abgebildet. Nach dem ersten Gitter werden die beiden Frequenzkomponenten aufgrund ihrer unterschiedlichen Beugungswinkel aufgespalten. Diese Winkel werden durch die Gittergleichung reflektiver Gitter

$$n\lambda = \frac{1}{g}(\sin(\theta_n) + \sin(\theta_i)) \quad (15)$$

bestimmt, wobei  $g$  die Gitterkonstante in Linien pro Längeneinheit,  $\theta_i$  der Einfallswinkel,  $n$  die Ordnung des betrachteten Hauptmaxima und  $\theta_n$  der Ablenkwinkel des  $n$ -ten Hauptmaximums ist. Auf diese Weise wird Winkeldispersion erzeugt, welche durch das zweite Gitter wieder aufgehoben wird. Zur Modellierung des Kompressors wird ein transmissives Gitter genutzt, dessen Gleichung lautet

$$n\lambda = \frac{1}{g}(\sin(\theta_n) - \sin(\theta_i)). \quad (16)$$

Um die gesammelte Dispersion zu bestimmen, muss der zurückgelegte optische Weg  $L_{\text{opt}}(\omega)$  der Frequenzkomponente  $\omega$  bestimmt werden. Der optische Weg ergibt sich durch [10]

$$L_{\text{opt}}(\omega) = \overline{ACP} = b/(\cos(\mu' + \delta))[1 + \cos(\mu' + \mu + \delta)], \quad (17)$$

wobei  $\mu$  der Einfallswinkel,  $\mu'$  der Ablenkwinkel der zentralen Frequenz und  $\delta$  der zusätzliche Ablenkwinkel von  $\omega$  gegenüber  $\omega_0$  ist. Weiterhin wird an jeder Furche des Gitters eine Phasenverschiebung von  $-2\pi$  eingeführt [16]. Um die relative Phasenverschiebung bezüglich der beiden Frequenzen zu berücksichtigen, werden die Furchen ab dem Schnittpunkt der Normalen des Gitters G1 mit Gitter G2 ausgehend vom Auftreffpunkt des Strahls auf Gitter 1 bis zum Auftreffpunkt des Strahls auf Gitter G2 gezählt. Damit ergibt sich eine Phasenverschiebung von

$$\phi(\omega) = \frac{\omega}{c}L_{\text{opt}} - 2\pi bg \tan(\delta + \mu'). \quad (18)$$

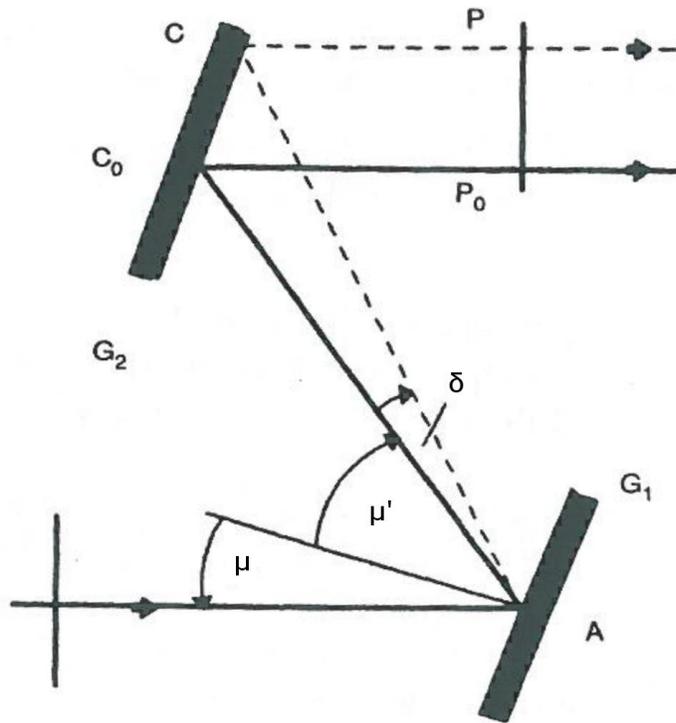


Abbildung 7: Strahlenverlauf zweier Frequenzkomponenten durch ein Gitterpaar (G1 und G2) in paralleler Anordnung. Die zentrale Frequenz  $\omega_0$  legt den Weg  $\overline{AC_0P_0}$  zurück und eine beliebige gewählte abweichende Frequenz  $\omega$  den Weg  $\overline{ACP}$ . Beide Frequenzen fallen unter dem Winkel  $\mu$  ein,  $\omega_0$  wird um  $\mu'$  abgelenkt und  $\omega$  um den Winkel  $\mu' + \delta$  [10].

Daraus ergibt sich die Gruppenverzögerungsdispersion mit [10]

$$\left. \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} = -\frac{\lambda_0^3}{2\pi c^2} g^2 \frac{b}{\sqrt{r}} \frac{1}{r}, \quad (19)$$

mit der zentralen Wellenlänge  $\lambda_0$  und  $r = 1 - \left[ \frac{2\pi cg}{\omega_0} - \sin \mu \right]^2 = \cos \mu'^2$ , sowie Dispersion dritter Ordnung [10]

$$\left. \frac{d^3\phi}{d\omega^3} \right|_{\omega_0} = -\frac{3\lambda_0}{2\pi cr} [r + \lambda_0 g (\lambda_0 g - \sin \mu)] \left. \frac{d^2\phi}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}. \quad (20)$$

Ein Gitterpaar generiert ausschließlich positive Dispersion zweiter und dritter Ordnung, unabhängig von Auftreffwinkel, Gitterkonstante und Beugungsordnung [15]. Bei Änderung des Gitterabstandes verhalten sich Dispersion zweiter und dritter Ordnung linear, sodass deren Verhältnis  $R_G = \text{TOD}/\text{GDD}$  unverändert bleibt. Durch Änderung des Auftreffwinkels lässt sich das Verhältnis kontrollieren. Bei größerem Auftreffwinkel wird das Verhältnis verringert, das bedeutet Dispersion zweiter Ordnung skaliert stärker mit der

Änderung des Auftreffwinkels. Mit steigender Gitterkonstante erhöht sich Dispersion dritter Ordnung stärker, sodass das Verhältnis  $R_G$  auch größer wird [15].

## 2.5 Pulscharakterisierung im Femtosekundenbereich

Dieses Kapitel liefert einen kurzen Einblick in die Methoden zur Pulscharakterisierung im Femtosekundenbereich. Zunächst wird die Intensitätsautokorrelation behandelt und anschließend zur komplizierteren FROG Methode übergegangen. Alle Formeln wurden [10] entnommen.

### 2.5.1 Intensitätsautokorrelator

Ein Signal kann nur dann charakterisiert werden, wenn ein kürzeres Referenzsignal von bekannter Form verfügbar ist. Man benötigt die Intensitätskreuzkorrelation

$$A_c(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_s(t)I_r(t - \tau)dt \quad (21)$$

und die Fouriertransformierte der Intensitätsprofile

$$\mathcal{F}[I_j(t)] = I_j(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_j(t)e^{-i\omega t}dt, \quad (22)$$

mit der Verzögerung zwischen den beiden Signalen  $\tau$ . Die Indizes r und s stehen jeweils für Signal und Referenzsignal und  $j \in (r,s)$ . Nun kann das unbekannte Signal, aufgrund des Zusammenhangs zwischen der Fouriertransformierten der Intensitätskorrelation  $A_c(\omega)$  und den fouriertransformierten Intensitäten

$$A_c(\omega) = I_r(\omega)I_s^*(\omega) \quad (23)$$

bestimmt werden. Teilt man die gemessene und fouriertransformierte Kreuzkorrelation  $A_c(\omega)$  durch die Fouriertransformation des Referenzpulses, erhält man das Verhältnis  $A_c(\omega)/I_r(\omega) = I_s^*(\omega)$ , dessen Fouriertransformierte das gesuchte zeitliche Profil  $I_s(t)$  ist. Allerdings erhält man auf diesem Wege noch keine Information über Frequenz- oder Phasenmodulation des Pulses.

Im Femtosekundenbereich ist ein Referenzpuls mit bekannter Form meist nicht verfügbar. Daher nutzt man den Puls selbst als Referenz, somit gilt  $I_r(t) = I_s(t) = I(t)$ . Da nun beide zeitlichen Profile identisch sind, erhält man für Verzögerungen entgegengesetzter Vorzei-

chen, aber gleicher Beträge, gleiche Überlappintegrale. Das bedeutet Autokorrelationen sind symmetrisch. Allerdings kann man daraus nur wenig über die Pulsform erfahren, da eine Vielzahl von symmetrischen und antisymmetrischen Pulsen zur gleichen Autokorrelation führen können. Unter Annahme einer Pulsform kann allerdings die Pulsdauer abgeschätzt werden.

### 2.5.2 FROG - Frequency Resolved Optical Gating

FROG ist eine Technik zur Charakterisierung von ultrakurzen Pulsen. Es können Pulsenergie, Pulsdauer und das Spektrum inklusive der frequenzabhängigen spektralen Phase bestimmt werden. Der Aufbau ist identisch zu einem Intensitätsautokorrelator mit der Ausnahme des Spektrometers, das anstelle eines Photodetektors verwendet wird, siehe Abbildung 8. Am Strahlenteiler werden einkommende Pulse zweigeteilt. Daraufhin wird ein Puls zeitlich relativ zum anderen versetzt, indem dessen Weglänge mechanisch variiert wird. In einem nichtlinearen Kristall werden die Pulse überlagert und deren zweite Harmonische erzeugt. Das Intensitätssignal wird anschließend in Abhängigkeit der Verzögerung via Spektrometer aufgezeichnet.

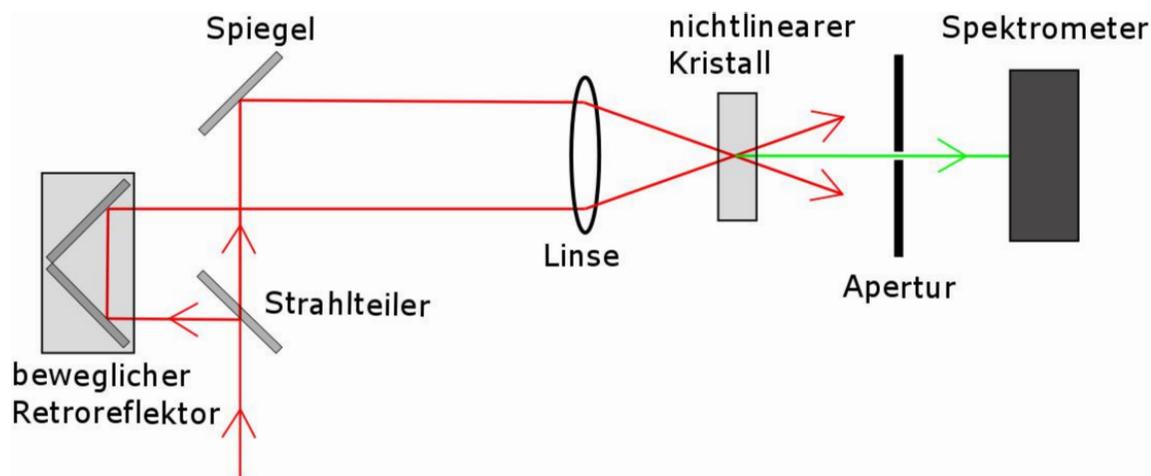


Abbildung 8: Schematischer Aufbau zur FROG-Messung. Der einkommende Laserstrahl wird am Strahlteiler aufgespalten, dabei wird ein Teil gegenüber dem anderen zeitlich versetzt. Anschließend werden beide Strahlen in einen nichtlinearen Kristall fokussiert. Das Spektrum der zweiten Harmonischen wird im Spektrometer in Abhängigkeit der zeitlichen Verzögerung  $\tau$  aufgezeichnet.

## 3 Experimenteller Aufbau

### 3.1 Übersicht des Aufbaus

Eine Übersicht des geplanten experimentellen Aufbaus ist in Abbildung 9 zu sehen. Das Lasersystem ist als blaue Box dargestellt. Der genutzte Laser ist ein passiv modengekoppelter Ytterbium-dotierter Faserlaser von MenloSystems (FC1000-250). Der Laserresonator ist ein Faserring, welcher durch Halbleiterdiodenlaser gepumpt wird, wie in Abbildung 3 dargestellt.

Der Laser hat eine zentrale Wellenlänge von 1040 nm bei einer Bandbreite von 14 nm. 100 nJ Pulse mit 160 fs Pulsdauer werden mit einer Wiederholungsrate von 100 MHz produziert [17]. Zur Stabilisierung der Pulswiederholungsfrequenz wird ein lokaler GPS-synchronisierter Oszillator mit 10 Mhz Frequenz genutzt. Damit wird eine relative Stabilität von  $10^{-13}$  erreicht. Nach einer Verstärkerstufe, bestehend aus einer Ytterbium-dotierten Faser, und einem TOD-Kompressor wird eine durchschnittliche Ausgangsleistung von 10 W erreicht. Geplant ist im Anschluss eine weitere Verstärkungsstufe einzubauen. In Zukunft wird der Kompressor allerdings umgangen, um einen weiteren Streckvorgang zu vermeiden. Die zusätzliche Verstärkerstufe besteht aus einer weiteren Ytterbium-dotierten 60 m langen Faser, deren Besetzungsinversion mit einem 250 W Diodenlaser erzeugt wird. Durch den frequenzabhängigen Brechungsindex der Faser wird eine Gruppenverzögerungsdispersion von  $1,55 \text{ ps}^2$  und  $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ ps}^3$  Dispersion dritter Ordnung verursacht, was einem Verhältnis von 1,61 fs entspricht. Diese Dispersion soll mithilfe des in dieser Arbeit modellierten Kompressors kompensiert werden.

Die nun verstärkten und komprimierten Pulse werden in eine Verstärkungskavität geleitet, welche eine Weglänge von 3 m hat, dies entspricht genau dem Verhältnis aus Lichtgeschwindigkeit und Pulswiederholungsrate  $c/f_{\text{rep}}$ . Auf diese Weise überlagern sich die Pulse in der Kavität mit neu Ankommenden und interferieren konstruktiv, sodass die Pulsenergie und Intensität gesteigert werden. Die Verstärkungskavität besteht aus einem einkoppelnden Spiegel und vier hochreflektiven Spiegeln. Zwei der hochreflektiven Spiegel sind konkav, um den Strahl auf einen  $15 \mu\text{m}$  Durchmesser zu fokussieren. Am Fokus wird durch eine Gasdüse Gas zur Erzeugung hoher Harmonischer injiziert, welche kollinear mit den Infrarotpulsen propagieren. Um die Hohen Harmonischen im Ultravioletten

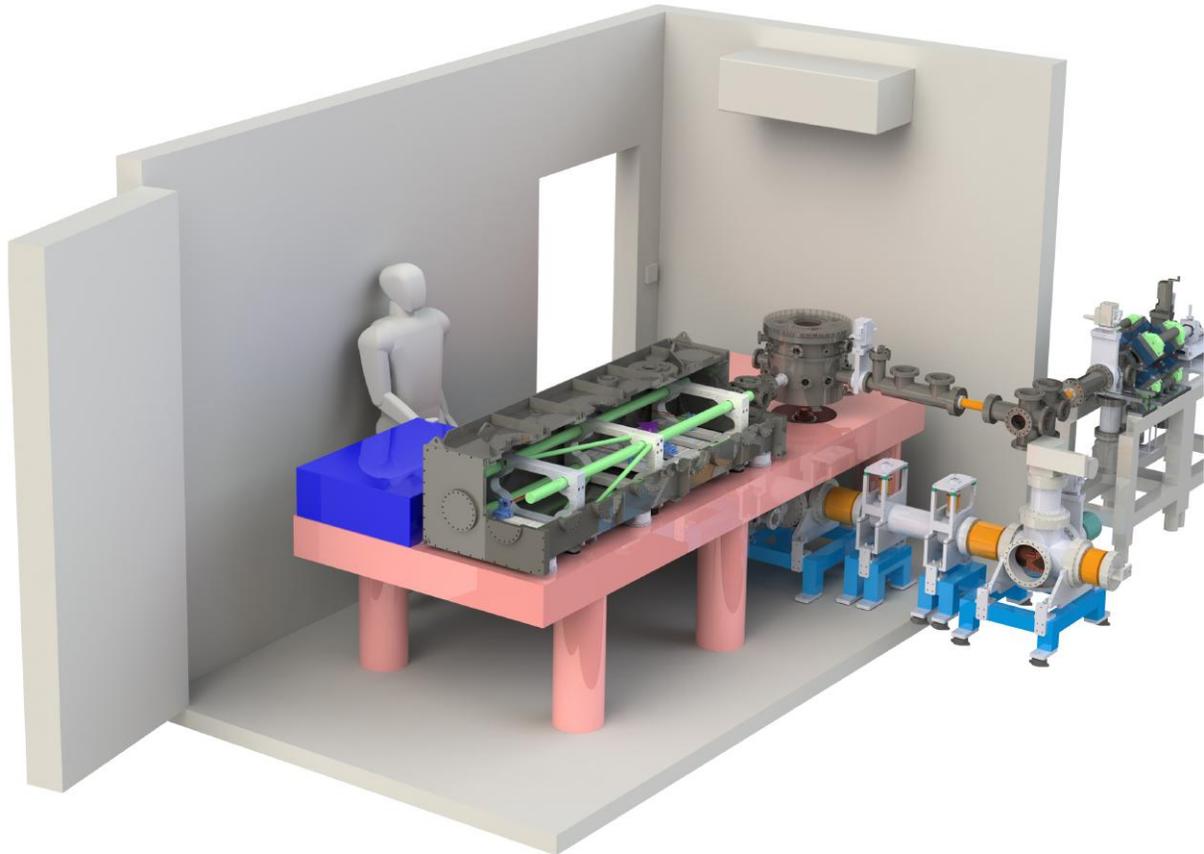


Abbildung 9: Übersicht des gesamten Experiments. Das Lasersystem (blau markiert), steht auf dem optischen Tisch (lachsfarben). Der infrarote Frequenzkamm wird aus dem Lasersystem in die Verstärkungskavität in der Vakuumkammer (grau) geleitet, dort verstärkt und nach der Erzeugung hoher Harmonischer in die zylinderförmige Paulfalle (grau) gelenkt. Unter dem Tisch aus dem Container hinausreichend steht ein kryogenes Kühlsystem (orange markiert). Ebenfalls außerhalb steht die Mini-EBIT (grün markiert), welche hochgeladene Ionen erzeugt, die durch die Beamline zur Paulfalle gelangen, wo sie sympathetisch lasergekühlt und spektroskopiert werden.

Bereich auszukoppeln ohne die Infrarotpulse zu beeinflussen, ist ein flaches Gitter mit 2000 Linien/mm in einen der hochreflektiven Spiegel eingätzt [18]. Die Infrarotpulse „sehen“ das Gitter aufgrund ihrer großen Wellenlänge nicht und werden lediglich reflektiert, während das XUV-Licht gebeugt und auf diese Weise ausgekoppelt wird. Nach der Auskoppelung des XUV-Lichts, wird dieses auf die Paulfalle, als grauer Zylinder am Ende des optischen Tisches dargestellt, gelenkt, um kalte hochgeladene Ionen zu spektroskopieren. Die Verstärkungskavität befindet sich innerhalb der grauen quaderförmigen Vakuumkammer (Abbildung 9) und ist darin an vier Titanstäben, die direkt auf dem lachsfarbenen dargestellten optischen Tisch angebracht sind, befestigt. Titan wurde aufgrund der geringen thermischen Expansion und des geringen Gewichts gepaart mit der großen mechanischen Belastbarkeit gewählt. Die optischen Elemente sind durch Brücken aus Titan an der Stabstruktur befestigt, siehe Abbildung 10. Die Vakuumkammer steht auf 6 Membranluftfedern (BiAir, Bilz Vibration Technology AG), die dafür sorgen, dass sich die Kammer immer wieder zurück in die ursprüngliche Position bewegt.

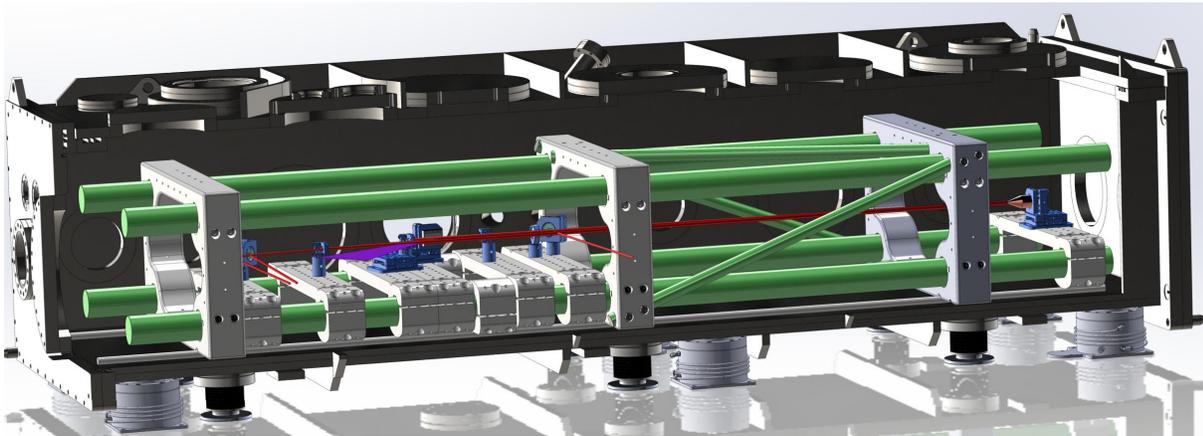


Abbildung 10: Innenansicht der Vakuumkammer. Die optischen Elemente (blau) der Verstärkungskavität sind mithilfe von Brücken an den Titanstäben (grün) befestigt. Der Strahlenverlauf ist in rot dargestellt.

Durch eine flexible Verbindung zwischen der 650 kg schweren Kammer und den stählernen Standvorrichtungen der Stabstruktur wird sichergestellt, dass sich die Vibrationen der Turbomolekularpumpen, welche in Abbildung 11 oben an der Kammer angebracht sind, nicht auf die optischen Elemente übertragen. Denn durch die große träge Masse der

Kammer fungiert sie als Tiefpassfilter und dämpft die hochfrequenten Vibrationen der Pumpen komplett ab.

Um die Störfaktoren der Umwelt zu minimieren, befinden sich die Optik, die Vakuumkammer und die Paulfalle in einem akustisch und thermisch abgeschirmten Container. Die kryogene Kühlerröhre auf den hellblauen Standstrukturen (siehe Abbildung 9) ist zum größten Teil außerhalb des Containers gelegen, um Übertragung von Vibrationen zu minimieren. Sie sorgt für die Kühlung der Paulfallenwände, um Restgase an den kalten Oberflächen zu binden. Auf diese Weise wird ein besseres Vakuum und damit einhergehend eine größere Speicherzeit erreicht.

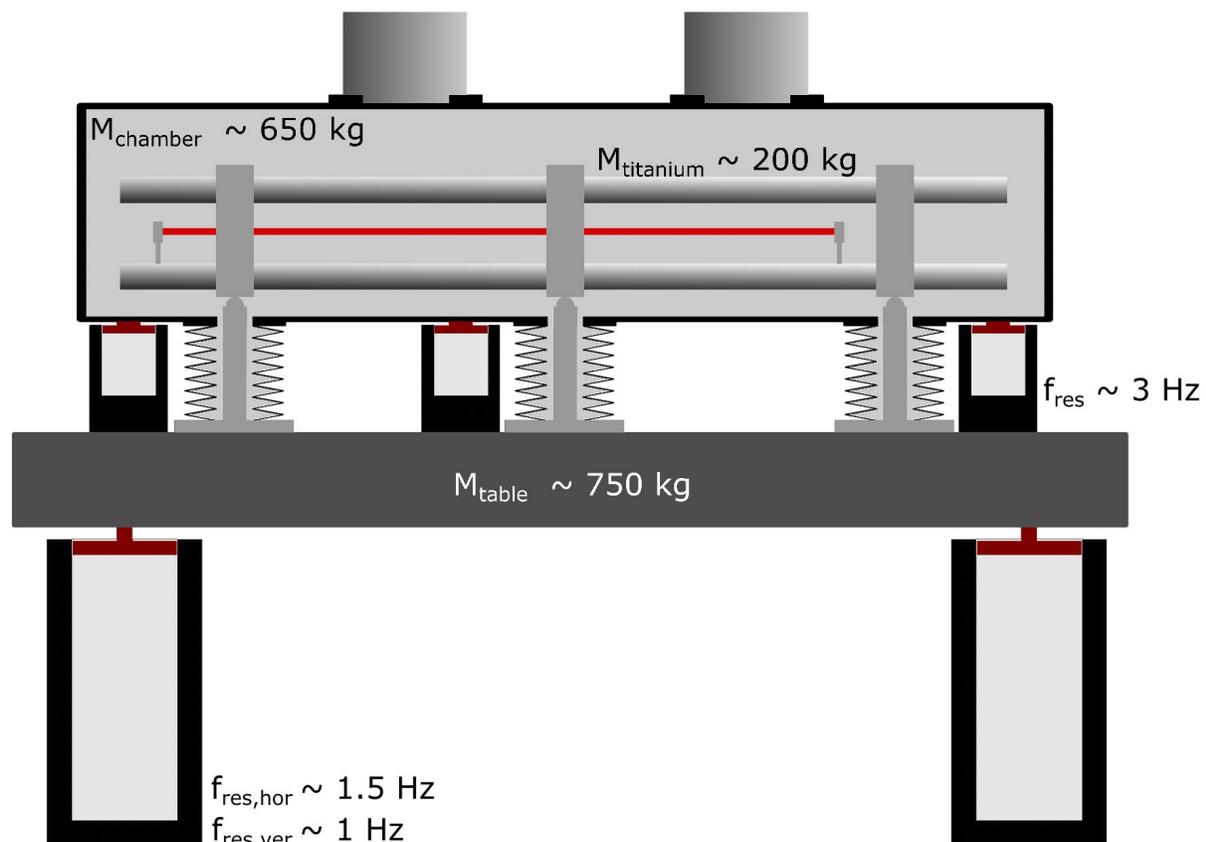


Abbildung 11: Vakuumkammer auf Membranluftfedern auf optischem Tisch. Durch die geringen Resonanzfrequenzen der Verbindung von Kammer und Stabstruktur, werden hochfrequente Vibrationen abgedämpft.

Die hochgeladenen Ionen werden in der grün markierten Mini-EBIT erzeugt und anschließend auf dem Weg zur Paulfalle vorgekühlt und gebremst [19]. In der Paulfalle werden die gespeicherten HCIs sympathetisch lasergekühlt, um präzise Spektroskopie zu ermöglichen.

## 3.2 Aufbau zur Pulscharakterisierung mit FROG

Aktuell durchläuft der Strahl nur eine Verstärkungsstufe, wird durch den TOD-Kompressor geleitet und steht anschließend zur Nutzung mit 10 W Ausgangsleistung zur Verfügung. Die restlichen Parameter sind wie zu Beginn des vorigen Abschnitts beschrieben. Dieser Strahl wird dann in den Autokorrelator Aufbau mit Spektrometer, in Abbildung 12 zu sehen, geleitet. An einem Strahlteilerspiegel wird der Strahl aufgeteilt, ein Strahl wird über drei Spiegel auf die Linse gelenkt, während der andere auf einen Retroreflektor und anschließend auch auf die Linse gelenkt wird, siehe Abbildung 13. Der Retroreflektor ist beweglich, um die zeitliche Verzögerung zwischen den Strahlen steuern zu können. Die Position des Brennpunktes der Linse liegt im nichtlinearen Kristall, sodass die beiden Strahlen dort zur Erzeugung der zweiten Harmonischen der ursprünglichen Laserfrequenz überlagert werden. Durch den frequenzverdoppelnden nichtlinearen Prozess wird grünes Licht mit einer Wellenlänge von 519 nm in Richtung der Winkelhalbierenden der beiden ursprünglichen Strahlen erzeugt. Nur die zweite Harmonische wird dann mithilfe mehrerer Spiegel und einer Linse, die der Refokussierung des Strahls dient, auf eine Apertur gelenkt, um einen gut kollimierten Strahl zu erhalten. Dieser wird anschließend auf ein Gitter gelenkt, welches den Strahl in Abhängigkeit der Frequenz räumlich vertikal leicht auffächert. Ein zweites Gitter mit 75 Linien/mm fächert die Strahlen horizontal nach der Frequenz auf. Somit ist der Auftreffpunkt auf der Kamera frequenzabhängig, folglich korrespondieren verschiedene Bins der CCD zu verschiedenen Frequenzen. Dies ermöglicht die Aufnahme des Pulsspektrums in Abhängigkeit der zeitlichen Verzögerung, welche wie folgt erzeugt wird: Der Retroreflektor ist mit einer verschiebbaren Plattform verbunden, welche von einem piezoelektrischen Schwingquarz (Piezo) angesteuert wird.

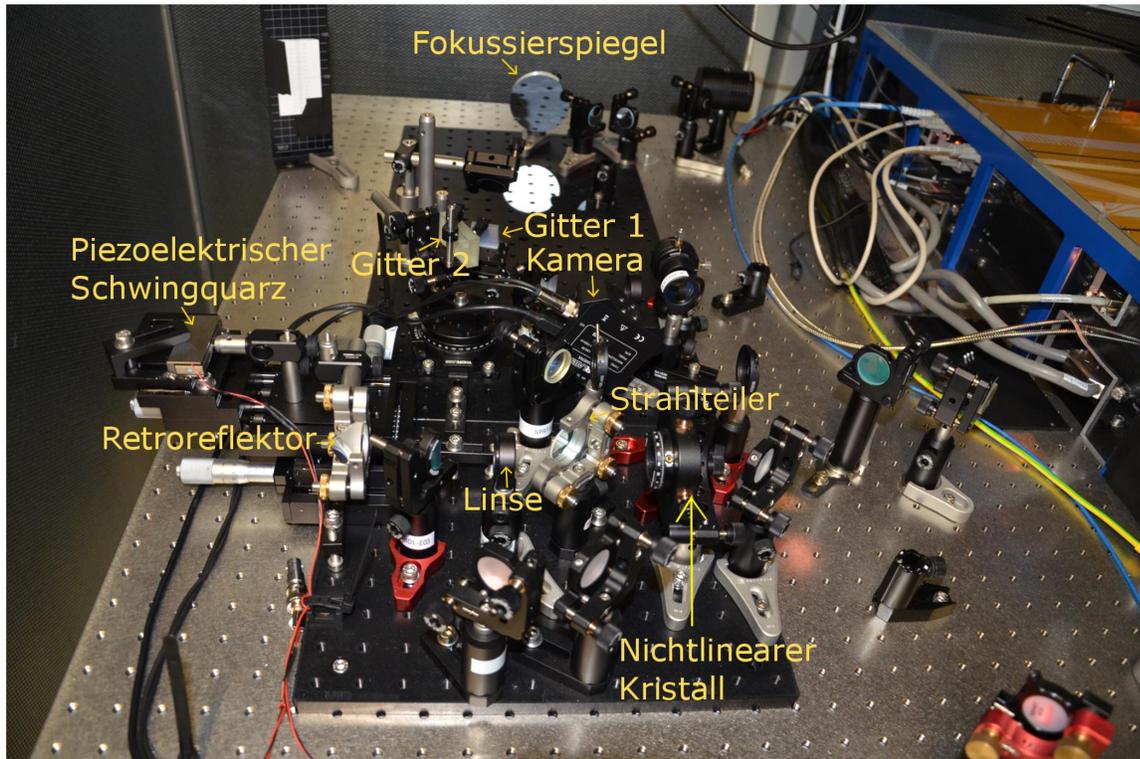


Abbildung 12: Übersicht des Autokorrelator Aufbaus mit Spektrometer. Der Strahl wird am Strahlteiler gespalten, ein Teil wird gegenüber dem Anderen durch den per Schwingquarz gesteuerten Retroreflektor zeitlich verzögert. Die beiden Strahlen werden anschließend durch eine Linse in den nichtlinearen Kristall fokussiert. Die zweite Harmonische wird in den hinteren Teil des Aufbaus geleitet und dort mit zwei Gittern in Abhängigkeit der Frequenz räumlich aufgefächert. Das Signal wird mit der Kamera aufgenommen.

Dessen Schwingungsamplitude beträgt  $420 \mu\text{m}$  und kann den Retroreflektor um die zweifache Strecke senkrecht zum einfallenden Strahl bewegen. Der Piezo ist an einen Frequenzgenerator und Verstärker angeschlossen, sodass die zeitliche Verzögerung elektrisch gesteuert werden kann.

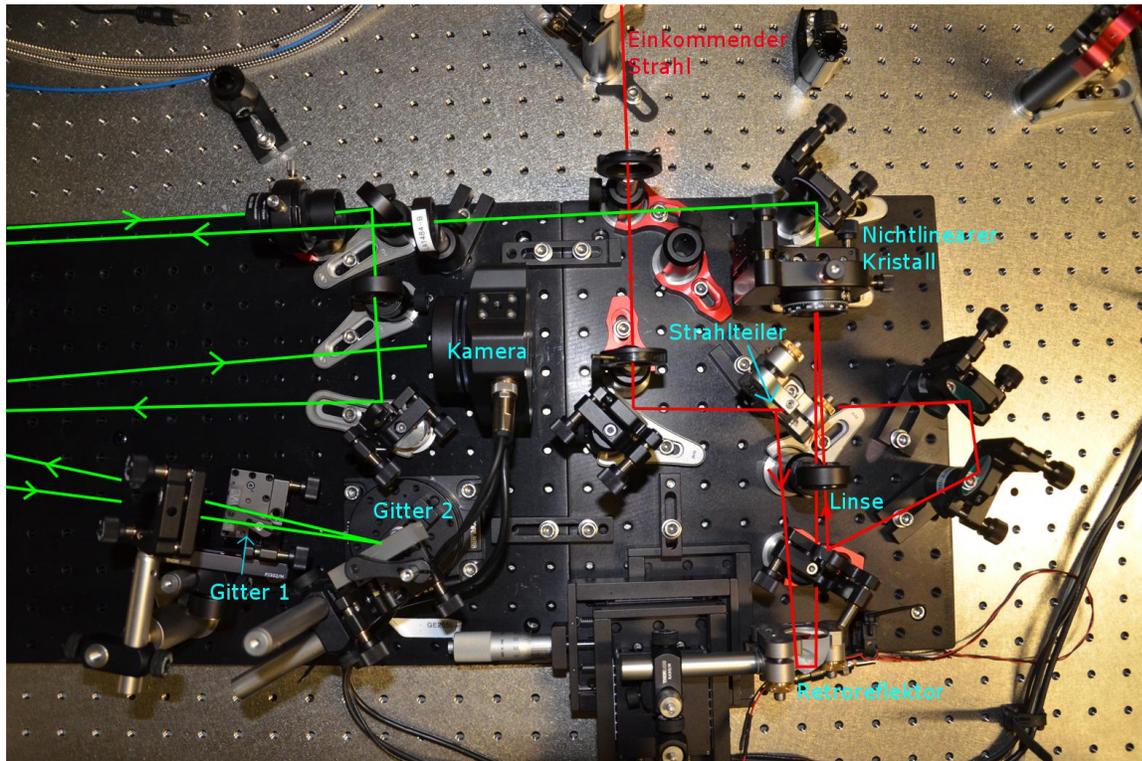


Abbildung 13: Strahlenverlauf, bei der Erzeugung der zweiten Harmonischen ( $\lambda=519$  nm, grün) der ursprünglichen Laserfrequenz ( $\lambda=1040$  nm, rot) (rechts im Bild), sowie im Spektrometernaufbau (links im Bild).

## 4 Modellierung des Kompressors

In diesem Kapitel wird das Strahlenverfolgungsmodell des Kompressors hergeleitet, geprüft und die Dispersion in Abhängigkeit der freien Parameter berechnet, um einen Satz von Parametern zur Kompensation der Dispersion der zweiten Verstärkungsstufe des Lasers zu finden.

### 4.1 Strahlverfolgung des Kompressors

Der Aufbau besteht aus einem Prisma, einem Gitter und 2 Retroreflektoren. Um aus diesen Bestandteilen einen Kompressor zu konzipieren, wird der Strahlenverlauf analytisch verfolgt. Aus der berechneten optischen Weglänge  $L_{\text{opt}}$  in Abhängigkeit der Frequenz werden Eigenschaften, wie Gruppenverzögerungsdispersion, Dispersion dritter Ordnung und deren Verhältnis, abgeleitet. Durch Anpassung der freien Parameter werden GDD und TOD so gesteuert, dass die GDD der optischen Faser kompensiert wird und idealerweise ein bandbreitenlimitierter Puls generiert wird.

Der Ursprung des kartesischen Koordinatensystem liegt im Auftreffpunkt des Strahls auf das optische Gitter. Die x-Achse verläuft entlang des grün gezeichneten Gitters, in positiver Verlaufsrichtung der y-Achse werden Prisma (grün) und Retroreflektor 1 (RR1, braun) positioniert. Der Retroreflektor 2 (RR2) befindet sich neben dem eintreffenden Strahl und verläuft senkrecht dazu. Die Oberflächen der optischen Elemente werden im folgenden durch Liniengleichungen ausgedrückt.

Die Gitterebene wird als Referenzebene genutzt, alle Winkel bezüglich der Steigung des Strahls im kartesischen Koordinatensystem werden relativ zu dieser Ebene ausgedrückt, um Schnittpunkte mit Oberflächen optischer Elemente zu berechnen. Dabei werden positive Winkel analog zur Handhabung in Mathematica vom positiven Teil der x-Achse aus in entgegengesetztem Uhrzeigersinn gezählt. Negative Winkel werden entsprechend im Uhrzeigersinn gezählt. Brechungs-, Beugungs- und Reflexionswinkel werden im entsprechenden Koordinatensystem, also relativ zum Lot des jeweiligen optischen Elementes ausgedrückt und mit einem Strich gekennzeichnet. Die aus diesen Prozessen resultierenden Winkel werden daraufhin relativ zur Gitterebene ausgedrückt.

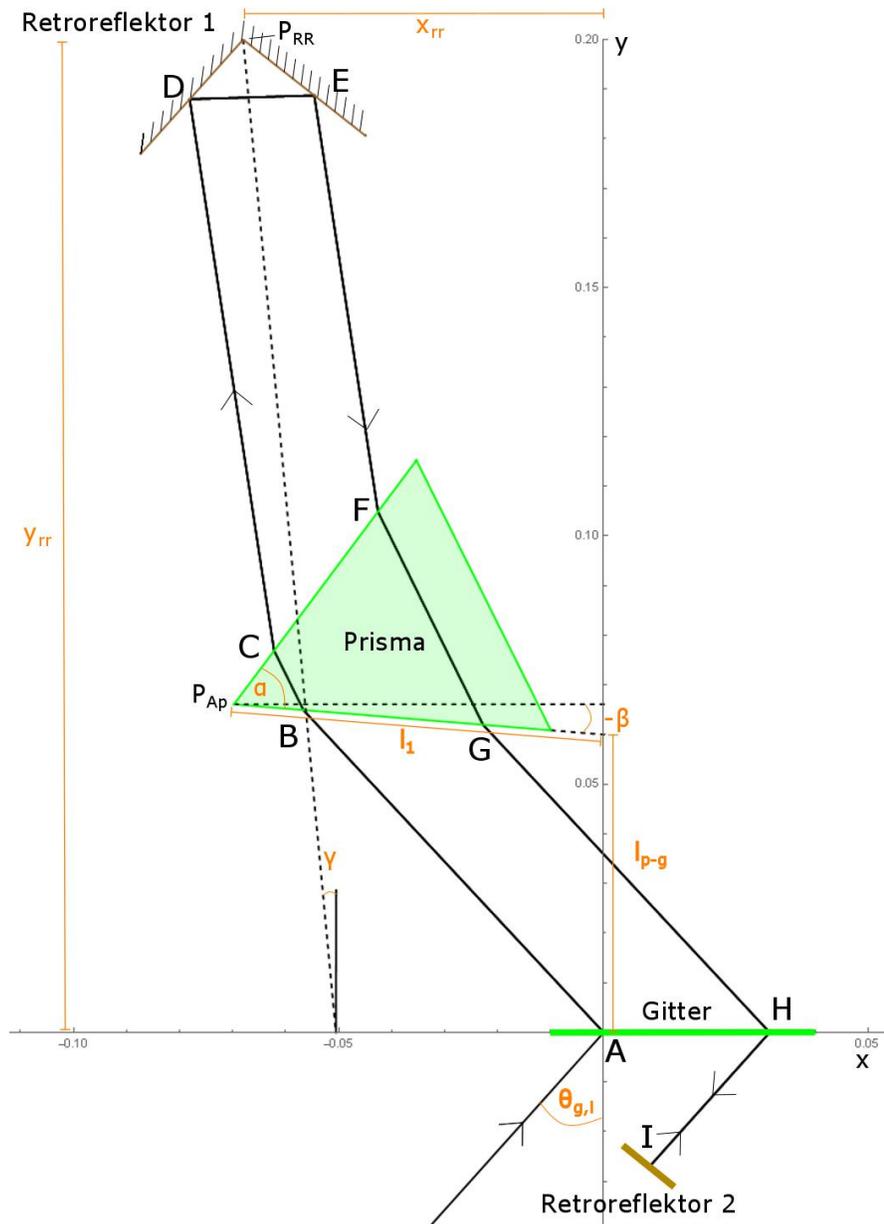


Abbildung 14: Übersicht des Kompressors. Der Laserstrahl (schwarze durchgezogene Linie) propagiert von Punkt A zu I und wird am Punkt I reflektiert, um den Aufbau ein zweites Mal zu durchlaufen. Alle freien Parameter sind orange markiert:  $\theta_{g,i}$  ist der Einfallswinkel auf das Gitter,  $\beta$  ist der Winkel zwischen Prisma und Gitter,  $l_{p-g}$  ist der Abstand von A zum Schnittpunkt der unteren Prismaseite mit der y-Achse,  $l_1$  ist der Abstand des Apexpunkts  $P_{Ap}$  von Punkt  $(0, l_{p-g})$ ,  $\alpha$  ist der Apexwinkel des Prismas,  $\gamma$  ist die Neigung von RR1 gegenüber dem Gitter und  $x_{RR}$  und  $y_{RR}$  sind die Koordinaten des Punktes  $P_{RR}$ .

Der ankommende Strahl hat einen beliebigen Winkel  $\theta'_{g,i}$  relativ zum Lot des optischen Gitters, welches entlang der y-Achse verläuft. Der Strahl wird nach der Gittergleichung (16) gebeugt und tritt relativ zum Lot unter dem Winkel

$$\theta'_{g,o} = \arcsin \left( \frac{-2\pi c}{\omega} g + \sin(\theta_{g,i}) \right) \quad (24)$$

wieder aus, der Index „g,o“ ist eine Abkürzung für grating out, „g,i“ steht für grating in. Nach gleichem Schema werden alle weiteren Winkel bezeichnet. Man beachte, dass zur Bestimmung des Austrittswinkels das Hauptmaximum -1. Ordnung gewählt wurde, sodass der Austrittswinkel  $\theta'_{g,o}$  relativ zum Gitterlot negativ ist. Im Hauptkoordinatensystem entspricht dies einem Steigungswinkel von  $\theta_{g,o} = 90^\circ - \theta'_{g,o}(\omega)$ . Daraus folgt die Liniengleichung

$$y_{g,o}(x) = x \tan(\theta_{g,o}) \quad (25)$$

für den Strahlenverlauf nach der ersten Beugung. Die dem Gitter zugewandte Prismenoberfläche wird durch  $y_{pr,1} = l_{p-g} + x \tan(\beta)$  definiert, wobei  $l_{p-g}$  der Abstand von Prisma und Gitter in y-Richtung vom Ursprung aus und  $\beta$  die Neigung der betrachteten Prismenoberfläche gegenüber dem Gitter ist (siehe Abbildung 14). Setzt man nun  $y_{pr,1}$  und Gleichung (25) gleich, erhält man die Koordinaten des Auftreffpunktes auf das Prisma B( $x_B, y_B$ )

$$x_B = \frac{l_{p-g}}{\cot(\theta_{g,o}) - \tan(\beta)} \quad (26)$$

und  $y_B$  durch Einsetzen von  $x_B$  in eine der beiden gleichgesetzten Gleichungen. Der Auftreffwinkel auf das Prisma relativ zu dessen Lot beträgt  $\theta_{p,1,i} = -\beta - \theta_{g,o}$ . Nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz wird der Brechungswinkel  $\theta'_{p,r,1}$  berechnet, welcher im Hauptkoordinatensystem als  $\theta_{p,r,1} = 90^\circ + \theta'_{p,r,1} + \beta$  ausgedrückt wird. Der Strahl verläuft im Prisma also nach

$$y = y_B + (x - x_B) \tan(\theta_{pr,r,1}). \quad (27)$$

Die Liniengleichung der Prismaoberfläche 2 ist

$$y_{pr,2} = y_A + (x - x_{Ap}) \tan(\alpha + \beta), \quad (28)$$

mit dem Apexwinkel  $\alpha$  und den Apexpunktkoordinaten  $y_{Ap} = l_{p-g} - \sin(-\beta)$  und

$x_{Ap} = l_1 \cos \beta$ , wobei  $l_1$  die Strecke von  $(0, l_{p-g})$  bis  $B(x_B, y_B)$  ist. Aus Gleichsetzen der beiden vorigen Gleichungen resultiert der Auftreffpunkt  $C(x_C, y_C)$  des Strahls auf Prismaoberfläche 2 mit

$$x_C = \frac{-y_{Ap} + y_B + x_{pA} \tan(\alpha + \beta) - x_B \tan(\theta_{p,r,1})}{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\theta_{p,r,1})} \quad (29)$$

und

$$y_C = y_{Ap} + (x_C - x_B) \tan(\theta_{p,r,1}). \quad (30)$$

Aus dem Auftreffwinkel auf Prismaoberfläche 2  $\theta'_{p,2,i} = \alpha - \theta'_{p,r,1}$  und dem Snelliusschen Brechungsgesetz wird der ausgehende Winkel  $\theta'_{p,r,2}$  berechnet. Relativ zum Gitter entspricht dies  $\theta_{p,r,2} = \alpha + \beta + 90^\circ - \theta'_{p,r,2}$ . Daraus resultiert die Liniengleichung

$$y = y_C + (x - x_C) \tan \theta_{p,r,2} \quad (31)$$

des Strahlenverlaufs nach dem Prisma. Die beiden Brechungsprozesse sind samt Winkel in Abbildung 15 zur Veranschaulichung illustriert. Der Retroreflektor wird wie zwei senkrecht aufeinanderstehende Spiegel behandelt, deren gemeinsame Kante in z-Richtung verläuft und in diesem Modell daher als Punkt  $P_{RR}$  mit den Koordinaten  $x_{RR}$  und  $y_{RR}$  beschrieben wird. Die Neigung des Retroreflektors gegenüber der Gitterebene wird durch den Winkel  $\gamma$  beschrieben, dieser beträgt null, wenn die Spiegel im  $45^\circ$ -Winkel zur Referenzebene stehen. Der erste Spiegel wird durch die Liniengleichung  $y_{m,1} = y_{RR} + (x - x_{RR}) \tan(45^\circ + \gamma)$  beschrieben. Der Strahl trifft im Punkt  $D(x_D, y_D)$  mit

$$x_D = \frac{y_C - y_{RR} + x_{RR} \tan(\pi/4 - \gamma) - x_C \tan(\theta_{p,r,1})}{\tan(\pi/4 - \gamma) - \tan(\theta_{p,r,1})} \quad (32)$$

und

$$y_D = y_{RR} + (x_D - x_{RR}) \tan(45^\circ + \gamma), \quad (33)$$

unter einem Winkel von  $\theta'_{m,1} = 135^\circ - \theta_{p,r,2} + \gamma$  relativ zum Lot auf Spiegel 1 auf. Mit dem reflektierten Winkel  $\theta_{m,1,r} = \theta_{p,r,2} - 2\theta'_{m,1}$  lässt sich der Strahlverlauf zwischen den beiden Spiegeln durch

$$y = y_D + (x - x_D) \tan(\theta_{m,1,r}) \quad (34)$$

beschreiben.

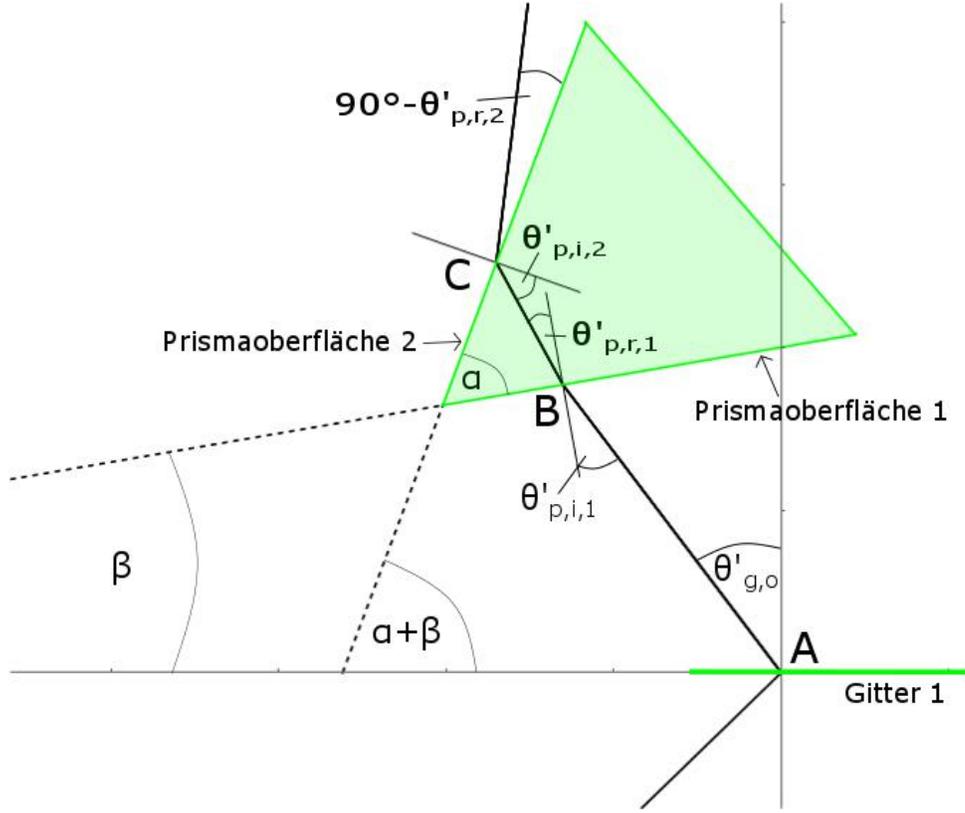


Abbildung 15: Strahlenverlauf im Prisma. Nach der Beugung am Gitter (grün) im Punkt A propagiert der Strahl (schwarze durchgezogene Linie) durch das Prisma (grün gefüllt) und wird an den Punkten B und C jeweils gebrochen. Dabei sind  $\theta'_{p,i,1}$  und  $\theta'_{p,i,2}$  die Einfallswinkel auf das Lot der jeweiligen Prismaoberfläche 1 oder 2.  $\theta'_{p,r,1}$  und  $\theta'_{p,r,2}$  sind die resultierenden Brechungswinkel relativ zum jeweiligen Lot. Gestrichelte Linien sind Hilfslinien zum Verständnis von Formeln einiger Winkel.

Der zweite Spiegel steht senkrecht zum ersten und lässt sich folglich mit  $y_{m,2} = y_{RR} + (x - x_{RR}) \tan(-45^\circ + \gamma)$  beschreiben. Gleichsetzen ergibt den Schnittpunkt E( $x_E, y_E$ ) mit

$$x_E = \frac{-y_D + y_{RR} + x_{RR} \tan(\pi/4 - \gamma) - x_D \tan(\theta_{m,1} - \theta_{p,r,2})}{\tan(\pi/4 - \gamma) - \tan(\theta_{m,1} - \theta_{p,r,2})} \quad (35)$$

und

$$y_E = y_{RR} + (x_E - x_{RR}) \tan(-45^\circ + \gamma). \quad (36)$$

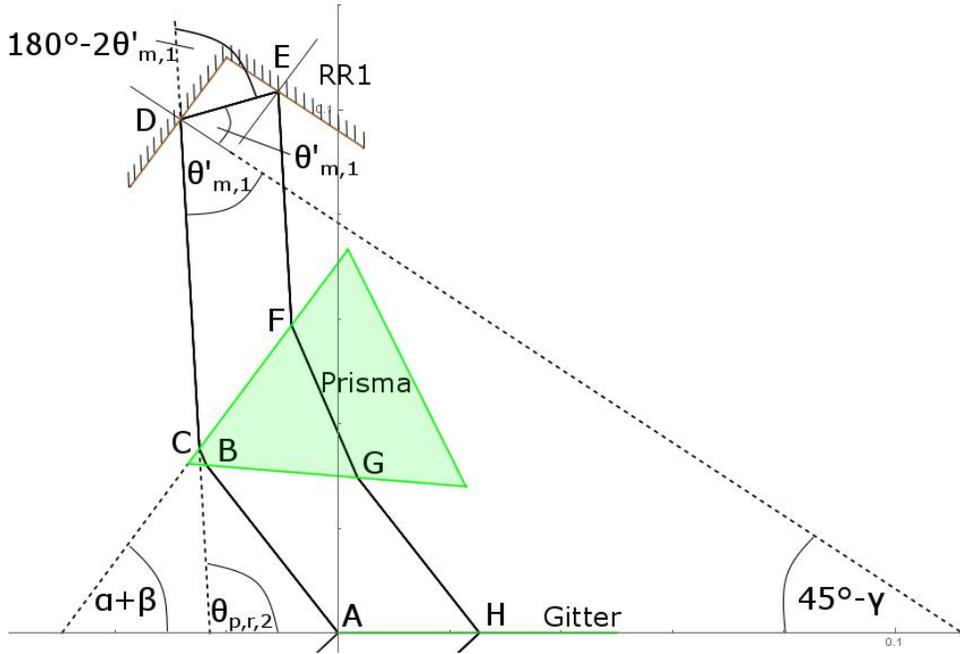


Abbildung 16: Strahlenverlauf am Retroreflektor 1 (RR1, braun). Nach den Brechungen im Prisma (grün gefüllt) wird der Strahl (schwarze durchgezogene Linie) zweimal an den Punkten D und E von RR1 reflektiert. Bei der ersten Reflexion wird der Strahl um den Winkel  $180 - 2\theta'_{m,1}$  abgelenkt, wobei  $\theta'_{m,1}$  der Einfallswinkel auf das Lot des ersten RR-Spiegels ist. Durch die zweite Reflexion wird der Strahl wieder parallel zum eingehenden Strahl (von C nach D) ausgerichtet. Gestrichelte Linien sind Hilfslinien zum Verständnis von Formeln einiger Winkel.

Daraufhin propagiert der Strahl antiparallel zum aus dem Prisma austretenden Strahl, das heißt die Liniengleichung (31) kann mit entsprechend geänderten Offsets für die x- und y-Koordinate genutzt werden. Diese wird mit der Gleichung der Prismaoberfläche 2 wiederum gleichgesetzt. Somit trifft der Strahl im Punkt  $F(x_F, y_F)$  erneut auf das Prisma auf. Analog werden die Punkte  $G(x_G, y_G)$  und  $H(x_H, y_H)$  ermittelt. Nach der zweiten Beugung am Gitter propagiert der Strahl in Richtung Retroreflektor 2, dieser ist senkrecht zur Strahlrichtung ausgerichtet und wird durch

$$y_{RR,2} = y_{m,RR,2} + (x - x_{m,RR,2}) \tan(\theta_{i,g} - 90^\circ) \quad (37)$$

beschrieben. Gleichsetzen liefert Punkt I( $x_I, y_I$ ) mit

$$x_I = \frac{x_H + y_{RR,2} \cot(\theta_{g,i}) + x_{RR,2} \cot^2(\theta_{g,i})}{1 + \cot^2(\theta_{g,i})} \quad (38)$$

und

$$y_I = (x_I - x_H) \tan(\theta_{g,i}). \quad (39)$$

Nun wird der Strahl vertikal versetzt in Richtung des Gitters zurückreflektiert, sodass der gesamte beschriebene Weg ein zweites Mal durchlaufen wird.

## 4.2 Berechnung der Dispersion

Aus dem zurückgelegten optischen Weg

$$L_{\text{opt}} = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} n_P + \dots + \sqrt{(x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2} \quad (40)$$

und der Phasenverschiebung durch den schrägen Einfall auf das Gitter, wird die beim Durchlaufen des Kompressors erfahrene Phasenverschiebung

$$\phi_K(\omega) = \frac{\omega}{c} L_{\text{opt}} - 4\pi g \sqrt{x_H^2 + y_H^2} \quad (41)$$

bestimmt. Dabei ist  $n_P$  der Brechungsindex des Prismenmaterials, welcher durch die Sellmeiergleichung [?]

$$n_P = 1 + \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \quad (42)$$

und die jeweiligen materialspezifischen Koeffizienten  $B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  bestimmt wird. K-fache Ableitung der Phasenverschiebung nach der Winkelfrequenz  $\omega$  ergibt die Dispersion k-ter Ordnung, wie zu Beginn von Kapitel 2.4 beschrieben. Da die Koordinaten der Punkte A bis I im Strahlenverfolgungsmodell jeweils von den Koordinaten der vorigen Punkte abhängen, wird die analytische Berechnung der Ableitungen in Mathematica aufwendig. Eine numerische Vorgehensweise ist besser geeignet, um verschiedene Parametersätze schnell auf die gewünschten Dispersionswerte zu prüfen. Aus diesem Grund wird die Phase zuerst analytisch bestimmt und anschließend anhand von 50 Phasenwerten,

korrespondierend zu Frequenzen innerhalb der Bandbreite des Lasers, durch ein Polynom dritten Grades genähert. Mit diesem Phasenpolynom werden anschließend die Dispersion zweiter und dritter Ordnung sowie deren Verhältnis bestimmt.

## 4.3 Test der Strahlenverfolgung

In diesem Unterkapitel wird das Strahlenverfolgungsmodell auf Übereinstimmung mit den Formeln für Dispersion zweiter und dritter Ordnung aus Kapitel 2.4, in verschiedenen Konfigurationen geprüft. Zuerst werden ein Gitter- und ein Prismenpaar modelliert, anschließend Prisma bzw. Gitter mit einem Retroreflektor, um einen Schritt näher an den geplanten Kompressor zu kommen.

### 4.3.1 Strahlenverfolgung eines Gitterpaares

Zwei identische Gitter mit Gitterkonstante  $g = 1250$  Linien/mm sind parallel zur x-Achse angeordnet, wobei Gitter 1 auf der x-Achse selbst liegt. Der modellierte Strahl hat die Eigenschaften des von uns genutzten Faserlaser von MenloSystems, also eine zentrale Wellenlänge von  $\lambda = 1040$  nm und eine Bandbreite von  $\Delta\omega = 14$  nm. Der einkommende Strahl fällt unter dem Winkel  $\theta'_{g,1,i}$  auf das Lot von Gitter 1, sein Auftreffpunkt liegt im Ursprung. Nach der Beugung an Gitter 1 entsprechend der Gleichung für transmissive Gitter (16) propagiert der Strahl mit dem Winkel  $\theta'_{g,1,o}$  relativ zum Lot nach Frequenzen aufgefächert in Richtung Gitter 2. Die Liniengleichung wurde analog zu (25) erstellt. Die Position und gleichzeitig die Liniengleichung von Gitter 2 werden durch die Koordinate  $y_{g,2}$  beschrieben. Im Modell haben die Gitter, da sie lediglich durch eine Liniengleichung dargestellt werden, eine unendliche räumliche Ausdehnung und werden in Abbildung 17 zur Illustration endlich dargestellt. Der Strahl trifft unter dem Winkel  $\theta'_{g,2,i}$  auf das Lot von Gitter 2 auf und wird um den Winkel  $\theta'_{g,2,o}$  relativ zum Lot gebeugt. Nach der zweiten Beugung propagieren die verschiedenen Frequenzkomponenten wieder parallel, sind aber räumlich getrennt. Senkrecht zur Bewegungsrichtung wird eine Linie definiert, welche die Endpunkte der Berechnung des Strahlenverlaufs parallel zur Phasenfront der Pulse liefert. Aus dem bestimmten optischen Weg und der Phasenverschiebung am Gitter wird die Phase mithilfe von Gleichung (18) bestimmt. Wie in Kapitel 4.2 erklärt, wird die Phase durch ein Polynom genähert und Dispersion zweiter und dritter Ordnung durch zwei- bzw. dreifache Ableitung des Phasenpolynoms nach der Winkelfrequenz  $\omega$  berechnet. Alle Liniengleichungen und Berechnungen zur Dispersion sind im Appendix in einem Mathematica-Skript enthalten. Die Dispersion wurde auch auf rein analytische Weise, durch direktes Ableiten der aus der Strahlenverfolgung erhaltenen Phase bestimmt. Die

Dispersionswerte beider Berechnungsmethoden werden mit den Ergebnissen der Gleichungen (18) und (19) aus [10] verglichen. In den genannten Gleichungen entspricht der normale Abstand zwischen Gitter 1 und 2 der Koordinate  $y_{g,2}$  und der Ablenkwinkel  $\mu'$  entspricht dem Beugungswinkel  $\theta_{g,1,o}$ . Alle berechneten Werte sind in Tabelle 1 aufgelistet, wobei die Indizes „ana“ und „poly“ die Berechnungsmethoden analytisch und Polynomnäherung bezeichnen.

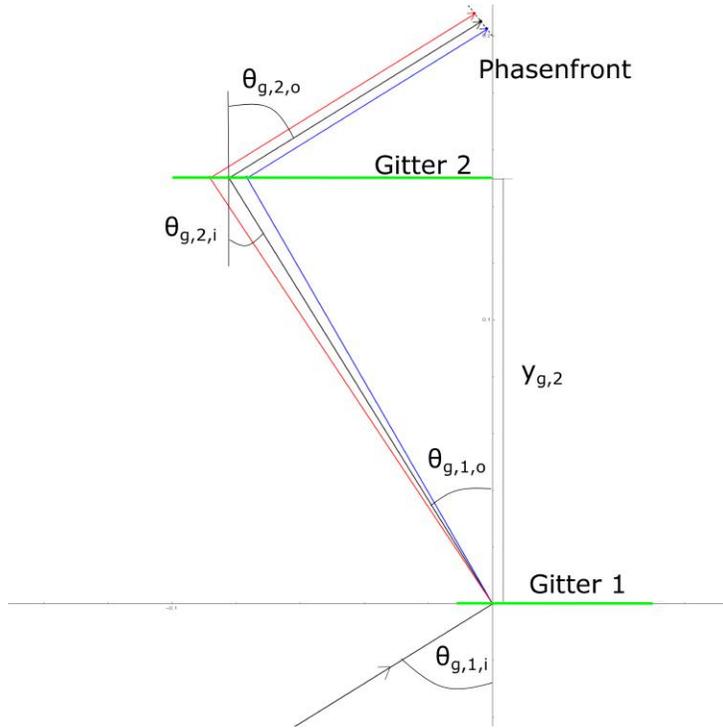


Abbildung 17: Strahlenverlauf verschiedener Frequenzkomponenten des im Experiment genutzten Lasers in einem parallel angeordneten Gitterpaar.  $\theta'_{g,1,i}$  und  $\theta'_{g,2,i}$  sind die Auftreffwinkel der zentralen Wellenlänge  $\lambda_0$  (schwarz) auf das Lot von Gitter 1 bzw. 2, während  $\theta'_{g,1,o}$  und  $\theta'_{g,2,o}$  die jeweiligen Beugungswinkel sind. Die blaue und rote Linie stellen die maximale (rot) und minimale (blau) Wellenlänge innerhalb der Bandbreite des Lasers dar.

Tabelle 1: Dispersionswerte für das Gitterpaar

GDD <sub>ana</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>poly</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>B</sub> [ps <sup>2</sup> ]	TOD <sub>ana</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>poly</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>B</sub> [fs <sup>3</sup> ]
-0,69	-0,69	-0,69	$2,05 \cdot 10^{-3}$	$2,05 \cdot 10^{-3}$	$2,05 \cdot 10^{-3}$

Die Werte stimmen in diesem Fall überein.

### 4.3.2 Strahlenverfolgung von Gitter und Retroreflektor

Um dem gesamten Kompressor aus Retroreflektoren, Prisma und Gitter näher zu kommen, wird ein Aufbau aus Gitter und Retroreflektor modelliert. Um einen Vergleich mit den

theoretischen Formeln (19,20) zu ziehen, werden kleine Ablenkwinkel  $\theta_{g,o} < 5^\circ$  betrachtet. Für große Winkel ist die Gleichheit des Abstands zwischen den beiden Auftreffpunkten auf Gitter 1 und  $b \tan(\delta + \mu')$  aus (18) nicht mehr gegeben. Um bei einem Gitter mit  $g = 1250$  Linien/mm kleine Ablenkwinkel zu erreichen, muss eine andere Wellenlänge als bisher gewählt werden. Da für die Wellenlänge des Laser nach der Gittergleichung (17) Ablenkwinkel  $\theta_{g,o} < 5^\circ$  nicht möglich sind. Weiterhin wird der Retroreflektor so angeordnet, dass eine minimale horizontale Verschiebung durch Reflexionen im Retroreflektor auftritt. Dazu wird der Auftreffpunkt des Strahls möglichst nahe zur Mitte des Retroreflektors gerückt und die Neigung  $\gamma$  des Retroreflektors gleich dem Beugungswinkel  $\theta_{g,o}$  gewählt. Unter diesen Bedingungen wurden die in Tabelle 2 präsentierten Dispersionswerte gefunden.

Tabelle 2: Dispersionswerte für Gitter und Retroreflektor

GDD <sub>ana</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>poly</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>B</sub> [ps <sup>2</sup> ]	TOD <sub>ana</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>poly</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>B</sub> [fs <sup>3</sup> ]
-0,20	-0,20	-0,20	$2,57 \cdot 10^5$	$2,57 \cdot 10^5$	$2,57 \cdot 10^5$

### 4.3.3 Strahlenverfolgung eines Prismenpaars

Zwei identische Prismen mit Apexwinkel  $\alpha$  werden so angeordnet, dass die beiden Seiten die sich gegenüber stehen parallel zueinander sind, siehe Abbildung 18. Auf diese Weise ist der Brechungswinkel am ersten Prisma gleich dem Einfallswinkel am zweiten Prisma. Weiterhin wird als Einfallswinkel auf das erste Prisma der Brewsterwinkel  $\theta_B = \arctan \frac{n_P}{n_L}$ , mit dem Brechungsindex der Luft  $n_L = 1$  und des Prismas  $n_P$ , gewählt. Gleichzeitig wird der Apexwinkel so gewählt, dass das Licht den Weg geringster Ablenkung wählt. Somit sind Einfallswinkel und Brechungswinkel beim Austritt aus dem Prisma identisch, der Strahl verläuft symmetrisch. Die gleichen Winkel liegen am zweiten Prisma wegen der parallelen Anordnung vor. Damit sind die gleichen Bedingungen an den Aufbau gestellt, wie in Kapitel 2.4.1 [10], sodass das Ergebnis der Strahlenverfolgung mit Gleichungen (19, 20) geprüft werden kann. Die Liniengleichungen werden analog zur vorigen Vorgehensweise (Kapitel 4.1) bestimmt.

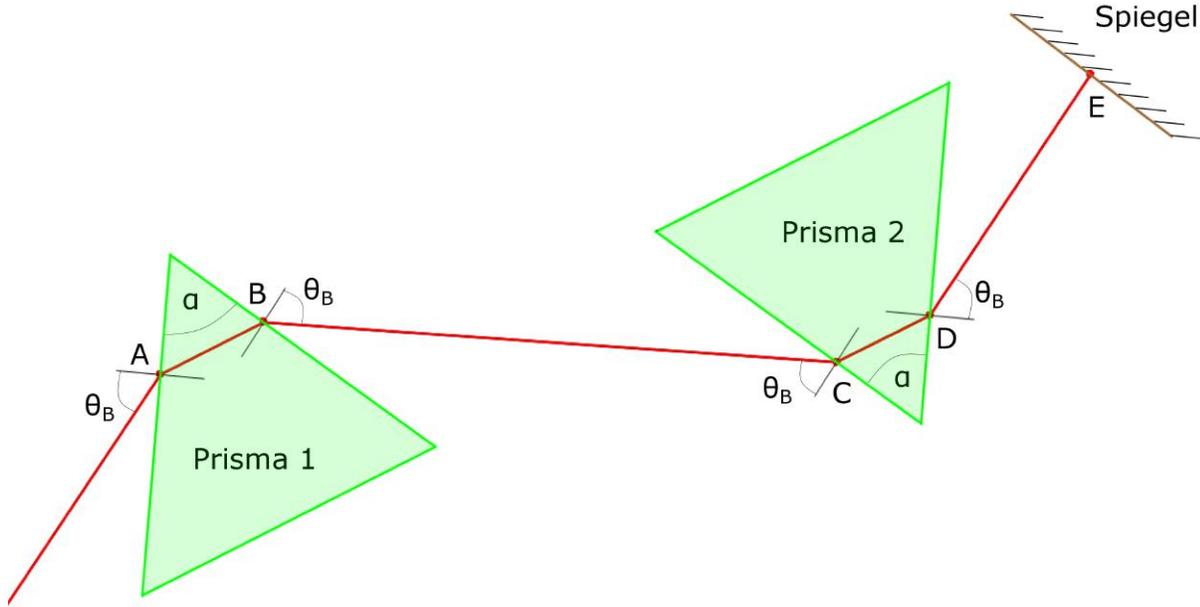


Abbildung 18: Strahlenverlauf von Licht der zentralen Wellenlänge  $\lambda_0$  durch ein Prismenpaar in paralleler Anordnung. Der Apexwinkel  $\alpha$  wurde so gewählt, dass alle aus- und eingehenden Winkel an den Prismen gleich sind. Einfallswinkel auf Prisma 1 ist der Brewsterwinkel  $\theta_B$ .

Wie zuvor werden Dispersionswerte analytisch und durch Polynomfit berechnet. Diese Werte werden mit den Ergebnissen der Formeln (19) und (20) verglichen. Die Weglänge  $L$  durch die Prismen wird durch Addition der Strecken  $\overline{AB}$  und  $\overline{CD}$  bestimmt, während der Weg zwischen den Prismen  $l$  durch die Strecke  $\overline{BC}$  bestimmt wird. Alle Ergebnisse sind in Tabelle 3 dargestellt.

Tabelle 3: Dispersionswerte für das Prismenpaar

$GDD_{ana}$ [ps <sup>2</sup> ]	$GDD_{poly}$ [ps <sup>2</sup> ]	$GDD_B$ [ps <sup>2</sup> ]	$TOD_{ana}$ [fs <sup>3</sup> ]	$TOD_{poly}$ [fs <sup>3</sup> ]	$TOD_B$ [fs <sup>3</sup> ]
$9,79 \cdot 10^{-3}$	$3,11 \cdot 10^{-3}$	$9,80 \cdot 10^{-3}$	$9,53 \cdot 10^3$	$2,95 \cdot 10^3$	$9,56 \cdot 10^3$

Die analytisch gewonnenen Werte stimmen sehr gut mit den Vergleichswerten überein. Die Abweichung von  $< 1\%$  ist auf vernachlässigte Terme [10] in der Herleitung der Gleichungen (19, 20) zurückzuführen. Die Werte der Polynomnäherung weichen etwa um

Faktor 3 von den restlichen Werten ab. Diese Abweichung wird in Kapitel 4.3.5 näher untersucht.

#### 4.3.4 Strahlenverfolgung von Prisma und Retroreflektor

Um dem tatsächlichen Kompressor näher zu kommen, wird das Strahlenverfolgungsmodell an einem Prisma und Retroreflektor Aufbau getestet. Um einen Vergleich mit den Formeln aus der Theorie zu ermöglichen, werden die gleichen Bedingungen an den Strahlenverlauf gestellt wie im vorigen Kapitel. Die Bedingung der parallelen Oberflächen ist durch den Einsatz des Retroreflektors automatisch gegeben, Apex und Einfallswinkel werden wie zuvor gewählt. Zur Veranschaulichung ist der Strahlenverlauf in Abbildung 19 dargestellt.

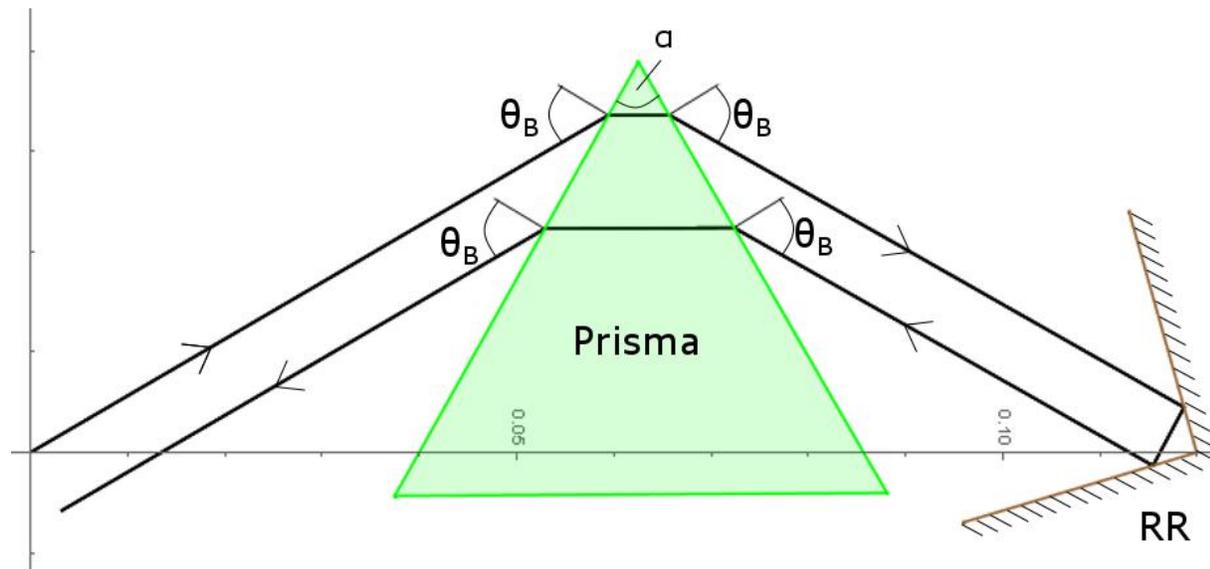


Abbildung 19: Strahlenverlauf von Licht der zentralen Wellenlänge  $\lambda_0$  durch einen Prisma-Retroreflektor Aufbau. Der Apexwinkel  $\alpha$  wurde so gewählt, dass alle aus- und eingehenden Winkel am Prisma gleich sind. Einfallswinkel auf das Prisma ist der Brewsterwinkel  $\theta_B$ . Die y-Achse verläuft horizontal, die x-Achse vertikal.

Es wurden die in Tabelle 4 dargestellten Dispersionswerte berechnet. Die zugehörigen Parameterwerte sind im Mathematica Skript im Appendix enthalten. Auch in diesem Fall weichen die Werte der Dispersion zweiter und dritter Ordnung des Polynomfits etwa um Faktor 3 ab.

Tabelle 4: Dispersionswerte für Prisma und Retroreflektor

GDD <sub>ana</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>poly</sub> [ps <sup>2</sup> ]	GDD <sub>B</sub> [ps <sup>2</sup> ]	TOD <sub>ana</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>poly</sub> [fs <sup>3</sup> ]	TOD <sub>B</sub> [fs <sup>3</sup> ]
$1,98 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$1,99 \cdot 10^{-3}$	$1,38 \cdot 10^2$	$6,54 \cdot 10^2$	$1,40 \cdot 10^3$

#### 4.3.5 Untersuchung des Polynomfits

Für das Prismenpaar weichen die Dispersionswerte etwa um den Faktor 3 von den Vergleichswerten ab. Um die Genauigkeit des Fits zu verbessern wurden mehrere Verbesserungen durchgeführt. Die Koeffizienten nullter und erster Ordnung des Phasenpolynoms  $a_0 + a_1\omega + a_2\omega^2 + a_3\omega^3$  dominieren gegenüber den höheren Ordnungen mit Werten von  $a_0=1,72 \cdot 10^6$  und  $a_1=9,51 \cdot 10^{-10}$ . Die Koeffizienten zweiter und dritter Ordnung haben Größenordnungen von  $10^{-27}$  und  $10^{-42}$  und spielen somit für den Kurvenlauf der Phase keine signifikante Rolle. Aber deren Ungenauigkeit ist die Ursache der Abweichung der Dispersionswerte.

Zunächst wurden Plots der analytischen Phase mit dem Phasenpolynom abgeglichen. Dazu wurden die Fehler der Anpassung bestimmt, indem an 50 äquidistanten Punkten die Differenz der Phasenwerte des Polynoms und der analytischen Phase gebildet wurde. Die größte absolute Abweichung befindet sich im  $10^{-8}$  Bereich, während die Phasenwerte eine Größenordnung von  $10^6$  besitzen. Dies entspricht einem relativen Fehler von  $10^{-12}$  %. Das bedeutet die Koeffizienten nullter und erster Ordnung des Polynoms, stimmen sehr gut mit der analytischen Phase überein. Dies wird auch durch die Abweichung der Gruppenverzögerung bestätigt. Diese beläuft sich auf  $\sim 0,6\%$ .

Es handelt sich also um ein Präzisionsproblem bei der Bestimmung der Koeffizienten höherer Ordnung, welche extrem geringe Werte annehmen. Um die Zahlen mit denen Mathematica rechnet groß zu halten, wurde die Frequenz, welche sich im  $10^{15}$  Hz Bereich befindet, durch Petahertz ausgedrückt, sodass auch die Koeffizienten 15 Größenordnungen höher liegen. Damit ließ sich allerdings nur eine Änderung der numerisch berechneten Dispersionswerte (Tabelle 3 und 4) auf der vierten Nachkommastellen erreichen.

Um einen direkt ersichtlichen Zusammenhang zwischen Koeffizienten k-ter Ordnung und Dispersion k-ter Ordnung zu erstellen, wird statt der absoluten Frequenz  $\omega$  im Folgenden die Verschiebung  $\Delta\omega$  von der zentralen Frequenz  $\omega_0$  als Variable verwendet. Auf diese Weise entspricht der Koeffizient  $a_2$  der Hälfte der Gruppenverzögerungsdispersion und  $a_3$

einem Drittel der Dispersion dritter Ordnung. Eine Steigerung der Anzahl der äquidistanten Punkte an die das Polynom angepasst wird von 50 auf 1000 liefert keine signifikante Änderung der Dispersionswerte. Ebenso verhält es sich bei der Reduzierung des betrachteten Frequenzintervalls. Anschließend wurden die Abstände zwischen den betrachteten Frequenzwerten nicht mehr äquidistant gewählt, sondern mithilfe eines Potenzgesetzes bestimmt. Wobei die Grenzen des Frequenzintervalls 1 und -1, der vollen Bandbreite entsprechen und die übrigen Frequenzverschiebungsbeträge Werten  $< 1$  entsprechen. Somit werden viele Punkte nahe um Frequenzverschiebung  $\Delta\omega = 0$  und wenige Punkte mit großer Differenz zu  $\omega_0$  zur Anpassung genutzt. Da die Dispersion für die zentrale Frequenz bestimmt werden soll, hilft dies die Genauigkeit im gewünschten Bereich zu erhöhen. Auch für diese Methode wurden verschieden große Frequenzintervalle betrachtet und die Anzahl der Fitpunkte variiert. Allerdings ließ sich damit keine signifikante Annäherung an die Vergleichswerte erreichen.

Zuletzt wurden die Koeffizienten des Polynoms durch Anpassungen einzeln bestimmt. Für den Koeffizient  $a_0$  wurde der Wert der analytischen Phase bei der zentralen Frequenz  $\omega_0$  eingesetzt. Daraufhin wurde ein Polynom ersten Grades an die analytische Phase über die gesamte Bandbreite des Lasers angepasst, um für den Koeffizient erster Ordnung  $a_1$  einen Mittelwert in einem großen Bereich zu bestimmen. So sollen die Koeffizienten höherer Ordnung lokal einen Einfluss haben. Anschließend wurde ein Fit mit festen Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  in einem Hundertstel der Bandbreite erstellt, um die Genauigkeit der Koeffizienten im entscheidenden Bereich nahe der zentralen Frequenz zu erhöhen. Mit dieser Methode wurden neue Dispersionswerte berechnet, die sich von denen aus Tabelle 3 und 4 unterscheiden. Allerdings wurden diese teilweise negativ und somit sogar schlechter.

Mathematica war nicht in der Lage die Koeffizienten zweiter und höherer Ordnung, die maßgebend für die Dispersionsberechnung sind, gegenüber den Koeffizienten niedriger Ordnungen, die den Kurvenverlauf der Phase in erster Linie dominieren, präzise genug zu bestimmen. Aufgrund dieses Problems mit der Anpassung wird im Folgenden nur noch analytisch gerechnet.

## 4.4 Dispersion in Abhängigkeit der freien Parameter

In diesem Unterkapitel werden die Eigenschaften des Kompressors charakterisiert. Der Zusammenhang zwischen freien Parametern und Dispersion wird aufgezeigt und genutzt, um nach optimalen Parameter zur Kompensation der Dispersion der Faser in der Verstärkungsstufe zu suchen.

Um die Abhängigkeit der Dispersion von einem einzelnen freien Parameter zu erhalten, wird ein Grundsatz von Parametern gewählt, der zur Erstellung aller Graphen genutzt wird. Es wird nur der jeweils betrachtete Parameter variiert. Der betrachtete Intervall jeden Parameters wurde in der Strahlenverfolgung untersucht und so gewählt, dass keine chaotischen Strahlenverläufe, wie Verlauf durch das am Apexpunkt gespiegelte Prisma, welches aufgrund der unendlichen Länge der Liniengleichungen entsteht, zustande kommen. Da ein einzelner Grundsatz von Parametern genutzt wird, sind die Parameterintervalle die betrachtet werden können, ohne einen weiteren Parameter ändern zu müssen, um einen sinnvollen Strahlenverlauf zu garantieren, beschränkt.

Zur Berechnung der Abhängigkeit der Dispersion von freien Parametern, wird das Strahlenverfolgungsmodell aus Kapitel 4.1 genutzt. Die Phase wird durch (41) bestimmt und  $k$ -fach abgeleitet, um die Dispersion  $k$ -ter Ordnung zu erhalten. Alle freien Parameter sind im Ausdruck der Dispersion enthalten und können direkt variiert werden.

Im Folgenden wird für jeden freien Parameter die Gruppenverzögerungsdispersion, Dispersion dritter Ordnung und deren Verhältnis in Abhängigkeit des jeweiligen freien Parameters dargestellt. Dabei wird das Prismenmaterialien SF10 in der Modellierung genutzt.

### 4.4.1 SF10-Prisma

Der Brechungsindex  $n_P$  wird mit der Sellmeiergleichung (41) und den Koeffizienten in Tabelle 5 bestimmt. Der Satz der freien Ausgangsparameter ist ebenso in Tabelle 5 aufgelistet. Aus diesen Parametern resultiert der Strahlenverlauf in Abbildung 20 für die beiden Wellenlängen 1033 nm (blau) und 1047 nm (rot), welche die Grenzen der Bandbreite darstellen, und die zentrale Wellenlänge bei 1040 nm (schwarz).

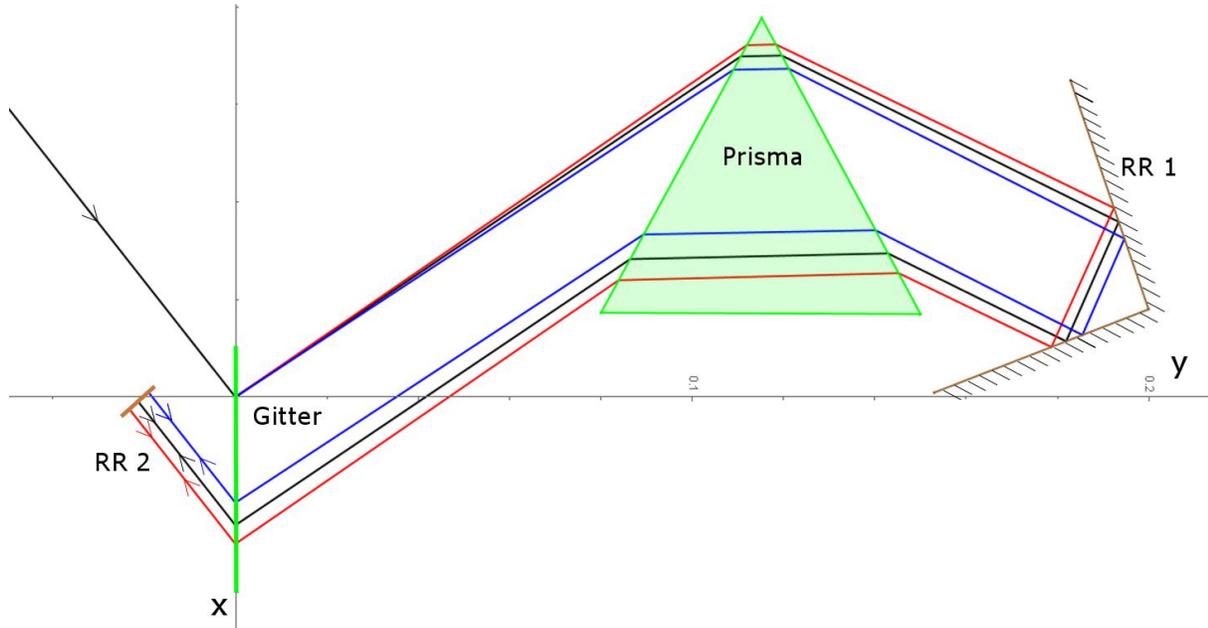


Abbildung 20: Strahlenverlauf der zentralen Wellenlänge  $\lambda_0=1040$  nm (schwarz), der Untergrenze der Bandbreite  $\lambda = 1033$  nm (blau) und der Obergrenze der Bandbreite  $\lambda = 1047$  nm (rot) im modellierten Kompressor mit einem SF10 Prisma für den Satz von Parametern in Tabelle 5. Die y-Achse verläuft horizontal und die x-Achse vertikal.

Tabelle 5: Ausgangssatz von Parametern und Sellmeierkoeffizienten des SF10-Prisma

Freie Parameter		SF10-Sellmeierkoeffizienten	
$g$ [Linien/mm]	1250	$B_1$	1.62153902
$\theta_{g,i}$ [°]	50	$B_2$	0.256287842
$l_{p-g}$ [m]	0.07	$B_3$	1.64447552
$l_1$ [m]	-0.09	$C_1$	$0.0122241457 \cdot 10^{-12}$
$\alpha$ [°]	60	$C_2$	$0.0595736775 \cdot 10^{-12}$
$\beta$ [°]	-30,2	$C_3$	$147.468793 \cdot 10^{-12}$
$\gamma$ [°]	-25		
$y_{RR}$ [m]	0.2		
$x_{RR}$ [m]	-0.018		

In dieser Anordnung erfährt die zentrale Wellenlänge eine Gruppenverzögerungsdispersion von  $GDD = -7,14 \cdot 10^{-2} \text{ ps}^2$  und eine Dispersion dritter Ordnung von  $TOD = -5,30 \cdot 10^{-2} \text{ ps}^3$ .

Im Anhang sind alle Graphen, welche Dispersion zweiter und dritter Ordnung in Abhängigkeit der freien Parameter abbilden, enthalten. Im Folgenden werden nur für ausgewählte Parameter die zugehörigen Graphen betrachtet. GDD und TOD haben für alle Parameter, die eine räumliche Translation des eines optischen Elementes steuern einen linearen Verlauf, siehe Abbildung 21 und 22. Für sinkendes  $l_{p-g}$  sinken TOD und GDD linear. Auf diese Weise kann man den Zielwert der Gruppenverzögerungsdispersion von  $GDD = -1,55 \text{ ps}^2$  erreichen. Allerdings sinkt dabei der der Dispersion dritter Ordnung ein wenig ab auf  $TOD = -5,31 \cdot 10^{-2} \text{ ps}^3$  und weicht damit weiter vom Zielwert  $TOD = -0,0025 \text{ ps}^3$  ab als der Ausgangswert für diese Anordnung. Ähnlich verhält es sich bei Variation eines Winkels. GDD und TOD verhalten sich gleich, sie sinken bzw. steigen beide gleichzeitig, siehe Abbildung 23 und 24. Aufgrund dieser Eigenschaft kann nur einer der beiden Dispersionszielwerte erreicht werden. Wobei der Wert der Dispersion dritter Ordnung in keinem der betrachteten Parameterintervallen stark genug gesenkt werden kann.

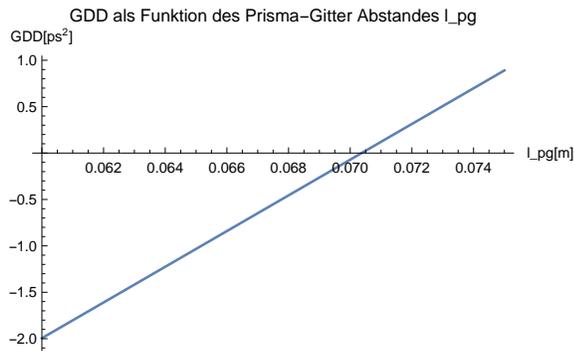


Abbildung 21

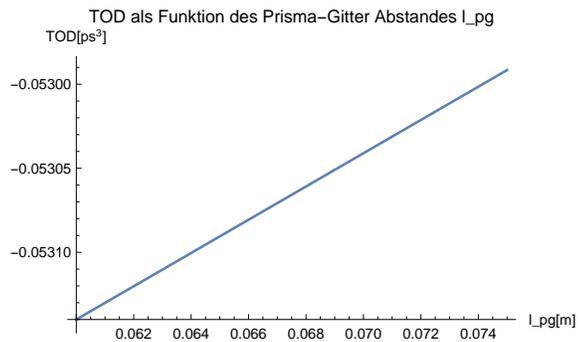


Abbildung 22

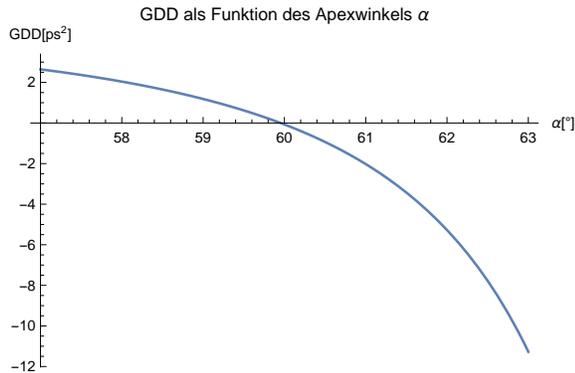


Abbildung 23

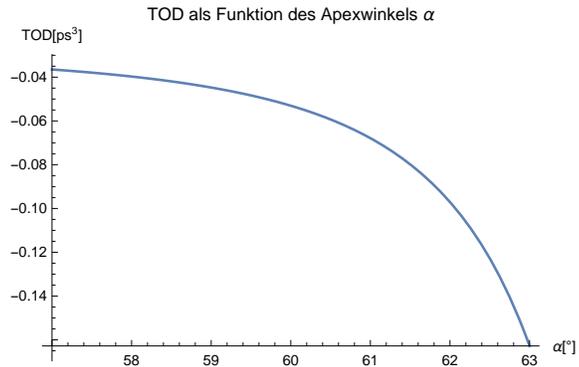


Abbildung 24

Nur bei sinkender Gitterkonstante  $g$  verhalten sich TOD und GDD im Intervall von  $\sim 1245$  Linien/mm bis  $\sim 1270$  Linien/mm so, dass sich beide Werte den Zielwerten annähern. Die Dispersion zweiter Ordnung sinkt und die Dispersion dritter Ordnung steigt an, siehe Abbildung 25 und 26. Allerdings hat der parabelförmige Kurvenverlauf der Dispersion dritter Ordnung innerhalb des betrachteten Parameterintervalls bei  $\sim 1245$  Linien/mm ein lokales Maximum, sodass bei niedrigeren Gitterkonstanten der Wert wieder abfällt und sich vom Zielwert entfernt.

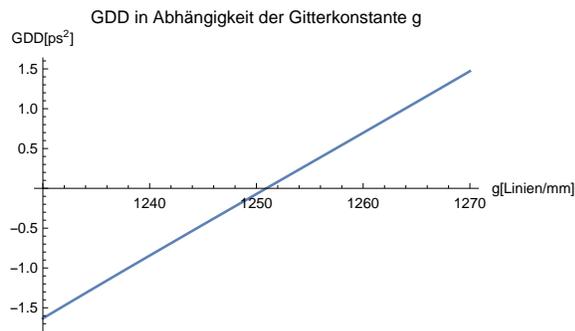


Abbildung 25

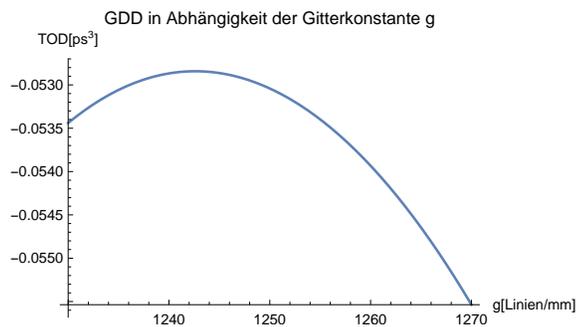


Abbildung 26

Daher kann für den Kompressor mit SF10 Prisma nur die Gruppenverzögerungsdispersion so angepasst werden, dass dieselbige der Verstärkungsstufe kompensiert werden kann. Allerdings stimmt zumindest das Vorzeichen der Dispersion dritter Ordnung, sodass auch das Verhältnis von TOD und GDD das richtige Vorzeichen aufweist.

## 5 Auswertung des Spektrogramms mit FROG-Algorithmus

Mit dem Aufbau aus 3.2 wurde das Spektrum der zweiten Harmonischen der ursprünglichen Laserfrequenz in Abhängigkeit der Verzögerung aufgenommen. Um die Verzögerung zu steuern, wurden Spannungen  $U$  von 1 V bis 50 V in 1 V- Schritten am Piezo angelegt. Allerdings wird nur der relevante Intervall in Abbildung 27 dargestellt. Zu diesen Spannungswerten korrespondieren die Werte auf der x-Achse. Allerdings war die Kamera nicht kalibriert, sodass statt einer Frequenz auf der y-Achse nur Bins von 0 bis 2048 angezeigt werden. Die Farbcodierung gibt die Intensität an, wobei die Intensität von weiß über orange zu blau abnimmt. Aufgrund des Mangels an Datenmenge und wegen der fehlenden Kalibration konnte dieses Spektrogramm nicht mithilfe des FROG-Codes der Rick Trebino Gruppe ausgewertet werden. Frequenz- und Zeitintervalle zwischen den für den Algorithmus genutzten Daten müssen Fouriertransformierte voneinander sein. Diese Bedingung konnte für die gesammelten Daten nicht erfüllt werden.

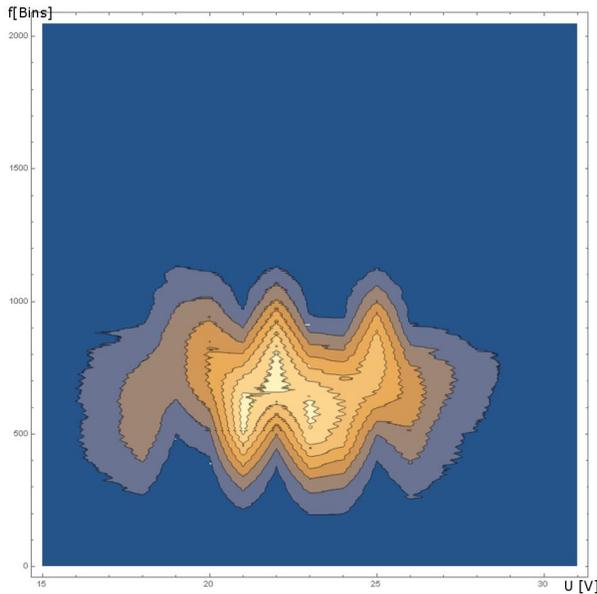


Abbildung 27: Spektrogramm des Faserlaserpulses vor der Verstärkung. Auf der x-Achse sind die an den Piezo angelegten Spannungswerte  $U$  abgebildet, welche zur zeitlichen Verzögerung korrespondieren. Die y-Achse zeigt die Position auf der Kamera in Bins und korrespondiert zur Frequenz. Die Intensität ist farblich dargestellt und nimmt von weiß über orange zu blau ab.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein Kompressor, bestehend aus einem Gitter, einem Prisma und zwei Retroreflektoren, mithilfe eines Strahlenverfolgungsmodells in Mathematica simuliert. Die Simulation sollte dazu dienen einen Aufbau und dessen zugehörige freie Parameter zu finden, um  $1,55 \text{ ps}^2$  Gruppenverzögerungsdispersion und  $0,0025 \text{ ps}^2$  Dispersion dritter Ordnung zu kompensieren. Diese Dispersion wird nämlich bei der Propagation des Laserstrahls durch eine Verstärkungsstufe, bestehend aus einer Ytterbium-dotierten Faser, welche durch einen 250 W Diodenlaser gepumpt wird, eingeführt. Dabei wurde einerseits eine komplett analytische Vorgehensweise gewählt, infolgedessen derer die beim Durchlauf des Kompressors erfarrene Phase direkt abgeleitet wurde. Andererseits wurde eine numerische Methode erstellt, welche an die ermittelte Phase ein Polynom dritter Ordnung anpasst und ableitet. Dieses Phasenpolynom ist weitaus trivialer als die analytische Phase, welche eine Vielzahl von komplizierten Frequenzabhängigkeiten aufweist. Es gelang das Strahlenverfolgungsmodell zu verifizieren, indem es auf weniger komplexe Anordnungen, bestehend aus Prismen- und Gitterpaaren sowie Gitter bzw. Prisma und einem Retroreflektor, angewandt wurde. Die aus der Modellierung erhaltenen Ergebnisse wurden mit Ergebnissen aus theoretischen Formeln zu den Gitter- und Prismenpaaraufbauten verglichen. Es konnte eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie für die rein analytische Berechnung mit Abweichungen von weniger als 1% festgestellt werden. Die Ergebnisse der numerischen Methode wiesen allerdings große Fehler auf, da bei der Bestimmung der Koeffizienten zweiter und dritter Ordnung die Präzision fehlte.

Mit der Simulation eines Aufbaus, dessen Kernstücke ein Gitter mit 1250 Linien/mm und ein SF10 Prisma bilden, gelang es  $-1,55 \text{ ps}^2$  Gruppenverzögerungsdispersion und  $\text{ps}^3$  Dispersion dritter Ordnung einzuführen. Damit wurde das Ziel nur teilweise erreicht, allerdings besitzt die Dispersion dritter Ordnung zumindest das notwendige negative Vorzeichen. Um die gewünschten Dispersionen zu kompensieren benötigt es weitere Modellierung von Aufbauten die andere Prismenmaterialien und Gitter mit anderen Gitterkonstanten beinhalten, sowie Suche nach geeigneten Parametern im Rahmen des jeweiligen Aufbaus. Für diesen Schritt wurde in Form des Mathematica Skripts die Grundlage geschaffen. Bei Eingabe eines geeigneten Parametersets können beliebige Gitter und Prismenmaterialien simuliert werden und auf passende Dispersionswerte geprüft werden. Durch die Visuali-

sierung des Strahlenverlaufs können unphysikalische Strahlenverläufe, die aufgrund der unendlichen Ausdehnung der genutzten Liniengleichungen auftreten, aufgezeigt und berichtigt werden. Außerdem kann durch die Charakterisierung anhand der Abhängigkeit der Dispersion von den freien Parametern auch nach einem Satz von geeigneten Parametern für die eigenen Zwecke gesucht werden.

## Literatur

- [1] M. S. Safronova, V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, U. I. Safronova, S. G. Porsev, and M. G. Kozlov, “Highly charged ions for atomic clocks, quantum information, and search for  $\alpha$  variation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 113, p. 030801, Jul 2014.
- [2] A. Derevianko, V. A. Dzuba, and V. V. Flambaum, “Highly charged ions as a basis of optical atomic clockwork of exceptional accuracy,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 180801, Oct 2012.
- [3] M. S. Safronova, V. A. Dzuba, V. V. Flambaum, U. I. Safronova, S. G. Porsev, and M. G. Kozlov, “Highly charged ag-like and in-like ions for the development of atomic clocks and the search for  $\alpha$  variation,” *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 042513, Oct 2014.
- [4] S. Schiller, “Hydrogenlike highly charged ions for tests of the time independence of fundamental constants,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 180801, Apr 2007.
- [5] T. L. Nicholson, S. L. Campbell, R. B. Hutson, G. E. Marti, B. J. Bloom, R. L. McNally, W. Zhang, M. D. Barrett, M. S. Safronova, G. F. Strouse, W. L. Tew, and J. Ye, “Systematic evaluation of an atomic clock at  $2 \times 10^{-18}$  total uncertainty,” *Nature Communications*, vol. 6, p. 6896, Apr. 2015.
- [6] A. Ong, J. C. Berengut, and V. V. Flambaum, *Optical Transitions in Highly Charged Ions for Detection of Variations in the Fine-Structure Constant*, pp. 293–314. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [7] H. Bekker, O. O. Versolato, A. Windberger, N. S. Oreshkina, R. Schupp, T. M. Baumann, Z. Harman, C. H. Keitel, P. O. Schmidt, J. Ullrich, and J. R. C. López-Urrutia, “Identifications of euv transitions of promethium-like pt, ir, os and re,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 48, no. 14, p. 144018, 2015.
- [8] L. Schmöger, O. O. Versolato, M. Schwarz, M. Kohnen, A. Windberger, B. Piest, S. Feuchtenbeiner, J. Pedregosa-Gutierrez, T. Leopold, P. Micke, A. K. Hansen, T. M. Baumann, M. Drewsen, J. Ullrich, P. O. Schmidt, and J. R. C. López-Urrutia, “Coulomb crystallization of highly charged ions,” *Science*, vol. 347, p. 1233, Mar. 2015.

- [9] “Wikipedia - laser.” <https://de.wikipedia.org/wiki/Laser#/media/File:Laserschema.svg>.
- [10] J.-C. Diels and W. Rudolph, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena: Fundamentals, Techniques and Applications on a Femtosecond Time Scale*. Academic Press, 1996.
- [11] “Rp photonics, passive mode locking.” [https://www.rp-photonics.com/img/passive\\_mode\\_locking\\_fast.png](https://www.rp-photonics.com/img/passive_mode_locking_fast.png).
- [12] C. Benko, *Extreme ultraviolet frequency combs for precision measurement and strong-field physics*. PhD thesis, Santa Clara University, 2010.
- [13] T. Udem, R. Holzwarth, and T. W. Hansch, “Optical frequency metrology,” *Nature*, vol. 416, pp. 233–237, Mar. 2002.
- [14] C. R. Ott, *Attosecond multidimensional interferometry of single and two correlated electrons in atoms*. PhD thesis, Combined Faculties of the Natural Sciences and Mathematics of the Ruperto-Carola-University of Heidelberg, 2012.
- [15] M. HEMMER, *FEW-CYCLE PULSES AMPLIFICATION FOR ATTOSECOND SCIENCE APPLICATIONS: MODELING AND EXPERIMENTS*. PhD thesis, M.S. Engineering Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille, 2005.
- [16] E. B. Treacy, “Optical pulse compression with diffraction gratings,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1969.
- [17] M. GmbH, *Orange Scientific Line Femtosecond Fiber Lasers User Manual*, 2014.
- [18] D. C. Yost, T. R. Schibli, and J. Ye, “Efficient output coupling of intracavity high-harmonic generation,” *Opt. Lett.*, vol. 33, pp. 1099–1101, May 2008.
- [19] M. L. Schmöger, T. Schwarz, O. Baumann, B. Versolato, T. Piest, J. Pfeifer, P. Ullrich, J. Schmidt, and C. López-Urrutia, “Deceleration, precooling, and multi-pass stopping of highly charged ions in be<sup>+</sup> coulomb crystals,” *Review of Scientific Instruments*, vol. 86, p. 103111, Oct. 2015.

- [20] D. J. Kane, "Principal components generalized projections: a review," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 25, June 2008.

# Appendix

## 6.1 Mathematica Skript zur Modellierung des Kompressors

# Compressor with SF10 prisms

In[97]:=

```
Quit[]
[beende K]

(* Beampath 1st wavelength:*)
Clear["Global`*"]
[lösche]

xa := 0;
ya := 0;
phiGr1out := ArcSin[-c * 2 * pi / (w1) * g + Sin[phiGr1in]];
[Arkussinus] [Sinus]

xb :=  $\frac{lprgr}{\cot[\phiGr1out] - \tan[\beta]}$ ;
yb := xb * Cot[phiGr1out];
[Kotangens]

phiPr1in := -phiGr1out - beta; (* ingoing angle has to be
positive to calculate correct refracted angle therefore -phiGr1out*)
phiPr1 := ArcSin[Sin[phiPr1in] / n1]
[Arkussinus] [Sinus]

phiPr1refr := 90 * pi / 180 + ArcSin[Sin[phiPr1in] / n1] + beta; (* relative to grating *)
[Arkussinus] [Sinus]

xapex := l1 * Cos[beta]
[Kosinus]

yapex := lprgr - l1 * Sin[-beta]; (* y coordinate of apex point *)
[Sinus]

xc :=  $\frac{-yapex + yb + xapex \tan[\alpha + \beta] - xb \tan[\phiPr1refr]}{\tan[\alpha + \beta] - \tan[\phiPr1refr]}$ ;
yc := yb + (xc - xb) * Tan[phiPr1refr];
[Tangente]

phiPr1refrin := alpha - ArcSin[Sin[phiPr1in] / n1];
[Arkussinus] [Sinus]

(* -(-beta) because refracted angle with respect to entrance
prism surface is wanted (phiPr1refr + (-beta) = ArcSin[Sin[phiPr1in]]);
[Arkussinus] [Sinus]

"- sign added, because ingoing angle has to be positiv
to calculate correct refracted angle *)

(* phiPr1refrout = arcsin(sin(phiPr1refrin) * n) n refractive index of prism material *)

phiPr1refrout := alpha + beta + pi / 2 - ArcSin[Sin[phiPr1refrin] * n1];
[Arkussinus] [Sinus]

(* angle of beam after coming out of prism relative to plane of grating not LOT *)
(* ybeamtorr[x_] = yc + (xc - x) * Tan[phiPr1refrout];
[Tangente]

porpagation of beam to rr after refraction of prism *)
(* If[ybeamtorr[xrrmid] < yrrmid, ] *)
[lösche]
```

⌊wenn

$$x_{\text{beamm1}} := \frac{y_c - y_{\text{rrmid}} + x_{\text{rrmid}} \tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right] - x_c \tan[\phi_{\text{pr1refrout}}]}{\tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right] - \tan[\phi_{\text{pr1refrout}}]} ;$$

$$y_{\text{beamm1}} := y_c + (x_{\text{beamm1}} - x_c) \cdot \tan[\phi_{\text{pr1refrout}}] ;$$

$$\phi_{\text{m1}} := (\pi - 2 * (135 * \pi / 180 - \phi_{\text{pr1refrout}} + \gamma))$$

$$x_{\text{beamm2}} := \left( -y_{\text{beamm1}} + y_{\text{rrmid}} + x_{\text{rrmid}} \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right] - x_{\text{beamm1}} \tan[\phi_{\text{m1}} - \phi_{\text{pr1refrout}}] \right) / \left( \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right] - \tan[\phi_{\text{m1}} - \phi_{\text{pr1refrout}}] \right) ;$$

$$y_{\text{beamm2}} := y_{\text{rrmid}} + (x_{\text{beamm2}} - x_{\text{rrmid}}) \cdot \tan[-45 * \pi / 180 + \gamma] ;$$

$$x_d := \left( -y_{\text{apex}} + y_{\text{beamm2}} + x_{\text{apex}} \tan[\alpha + \beta] - x_{\text{beamm2}} \tan[\phi_{\text{pr1refrout}}] \right) / \left( \tan[\alpha + \beta] - \tan[\phi_{\text{pr1refrout}}] \right) ;$$

$$y_d := y_{\text{apex}} + (x_d - x_{\text{apex}}) \cdot \tan[\alpha + \beta] ;$$

$$x_e := \frac{-l_{\text{prgr}} + y_d - x_d \tan[\phi_{\text{pr1refr}}]}{\tan[\beta] - \tan[\phi_{\text{pr1refr}}]} ;$$

$$y_e := l_{\text{prgr}} + x_e \cdot \tan[\beta] ;$$

$$x_f := \left( -y_e + x_e \cot[\phi_{\text{gr1out}}] \right) \tan[\phi_{\text{gr1out}}] ;$$

$$y_f := 0 ;$$

$$x_g := \left( x_f + y_{\text{rr2}} \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}] + x_{\text{rr2}} \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]^2 \right) / \left( 1 + \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]^2 \right) ;$$

$$y_g := (x_g - x_f) \cdot \tan[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}] ;$$

(\*  
**BEAMPATH of lowest  
 frequency within bandwidth**  
 \*)

```

λ2 := λ1 + 7 * 10-9;
w2 := 3 * 108 * 2 *  $\frac{\pi}{\lambda 2}$ 

n2 :=  $\left( 1 + B1 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C1} + B2 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C2} + B3 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C3} \right)^{\frac{1}{2}}$ 
xa2 = 0;
ya2 = 0;
φgr1out2 = ArcSin[-c * 2 π / (w2) * g + Sin[φgr1in]] ;
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 
xb2 :=  $\frac{lprgr}{\text{Cot}[\phi gr1out2] - \text{Tan}[(\beta)]}$  ;
            $\left[ \text{Kotangens} \right]$ 
yb2 := xb2 * Cot[φgr1out2] ;
            $\left[ \text{Kotangens} \right]$ 
φpr1in2 := -φgr1out2 - β ; (* ingoing angle has to be
  positive to calculate correct refracted angle therefore -φgr1out*)
φp1r2 := ArcSin[Sin[φpr1in2] / n2]
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 

φpr1refr2 := 90 * π / 180 + ArcSin[Sin[φpr1in2] / n2] + β ; (* relative to grating *)
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 

xc2 :=  $\frac{-yapex + yb2 + xapex \text{Tan}[\alpha + \beta] - xb2 \text{Tan}[\phi pr1refr2]}{\text{Tan}[\alpha + \beta] - \text{Tan}[\phi pr1refr2]}$  ;
yc2 := yb2 + (xc2 - xb2) * Tan[φpr1refr2] ;
            $\left[ \text{Tangente} \right]$ 
φpr1refrin2 := α - ArcSin[Sin[φpr1in2] / n2] ;
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 
(* -(-β) because refracted angle with respect to entrance
  prism surface is wanted (φpr1refr + (-β)=ArcSin[Sin[φpr1in]]);
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 
  "-" sign added, because ingoing angle has to be positiv
  to calculate correct refracted angle *)

(* φpr1refrout=arcsin(sin(φpr1refrin)*n) n refractive index of prism material *)

φpr1refrout2 := α + β + π / 2 - ArcSin[Sin[φpr1refrin2] * n2] ;
            $\left[ \text{Arkussinus} \right]$   $\left[ \text{Sinus} \right]$ 
(* angle of beam after coming out of prism relative to plane of grating not LOT *)
(* ybeamtorr[x_]=yc+(xc-x)*Tan[φpr1refrout] ;
            $\left[ \text{Tangente} \right]$ 
  propagation of beam to rr after refraction of prism *)
(* If[ybeamtorr[xrrmid]<yrrmid, ] *)
            $\left[ \text{wenn} \right]$ 

```

$$x_{beam12} := \left( y_{c2} - y_{rrmid} + x_{rrmid} \tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right] - x_{c2} \tan[\phi_{pr1refrout2}] \right) /$$

$$\left( \tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right] - \tan[\phi_{pr1refrout2}] \right);$$

$$y_{beam12} := y_{c2} + (x_{beam12} - x_{c2}) * \tan[\phi_{pr1refrout2}];$$

$$\phi_{m12} := (\pi - 2 * (135 * \pi / 180 - \phi_{pr1refrout2} + \gamma));$$

$$x_{beam22} := \left( -y_{beam12} + y_{rrmid} + x_{rrmid} \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right] - x_{beam12} \tan[\phi_{m12} - \phi_{pr1refrout2}] \right) /$$

$$\left( \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right] - \tan[\phi_{m12} - \phi_{pr1refrout2}] \right);$$

$$y_{beam22} := y_{rrmid} + (x_{beam22} - x_{rrmid}) * \tan[-45 * \pi / 180 + \gamma];$$

$$x_{d2} := \left( -y_{apex} + y_{beam22} + x_{apex} \tan[\alpha + \beta] - x_{beam22} \tan[\phi_{pr1refrout2}] \right) /$$

$$\left( \tan[\alpha + \beta] - \tan[\phi_{pr1refrout2}] \right);$$

$$y_{d2} := y_{apex} + (x_{d2} - x_{apex}) * \tan[\alpha + \beta];$$

$$x_{e2} := \frac{-l_{prgr} + y_{d2} - x_{d2} \tan[\phi_{pr1refr2}]}{\tan[\beta] - \tan[\phi_{pr1refr2}]};$$

$$y_{e2} := l_{prgr} + x_{e2} * \tan[\beta];$$

$$x_{f2} := \left( -y_{e2} + x_{e2} \cot[\phi_{gr1out2}] \right) \tan[\phi_{gr1out2}];$$

$$y_{f2} := 0;$$

$$x_{g2} := \left( x_{f2} + y_{rr2} \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{gr1in}] + x_{rr2} \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{gr1in}]^2 \right) /$$

$$\left( 1 + \cot[90 * \pi / 180 - \phi_{gr1in}]^2 \right)$$

$$y_{g2} := (x_{g2} - x_{f2}) * \tan[90 * \pi / 180 - \phi_{gr1in}]$$

## (\* BEAMPTATH of highest frequency withing bandwidth

\*)

$$\lambda_3 := \lambda_1 - 7 * 10^{-9};$$

$$w_3 := 3 * 10^8 * 2 \frac{\pi}{\lambda_3}$$

$$n_3 := \left( 1 + B_1 \frac{(c * 2 \pi / (w_3))^2}{(c * 2 \pi / (w_3))^2 - C_1} + B_2 \frac{(c * 2 \pi / (w_3))^2}{(c * 2 \pi / (w_3))^2 - C_2} + B_3 \frac{(c * 2 \pi / (w_3))^2}{(c * 2 \pi / (w_3))^2 - C_3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{a3} = 0;$$

$$y_{a3} = 0;$$

$$\phi_{gr1out3} = \text{ArcSin} \left[ -c * 2 \pi / (w_3) * g + \text{Sin}[\phi_{gr1in}] \right];$$

$$x_{b3} := \frac{l_{prgr}}{\text{Cot}[\phi_{gr1out3}] - \text{Tan}[(\beta)]};$$

$$y_{b3} := x_{b3} * \text{Cot}[\phi_{gr1out3}];$$

$\phi_{pr1in3} := -\phi_{gr1out3} - \beta$ ; (\* ingoing angle has to be positive to calculate correct refracted angle therefore  $-\phi_{gr1out}$ \*)

$$\phi_{p1r3} := \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi_{pr1in3}] / n_3]$$

$$\phi_{pr1refr3} := 90 * \pi / 180 + \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi_{pr1in3}] / n_3] + \beta; \quad (* \text{ relative to grating } *)$$

$$x_{c3} := \frac{-y_{apex} + y_{b3} + x_{apex} \text{Tan}[\alpha + \beta] - x_{b3} \text{Tan}[\phi_{pr1refr3}]}{\text{Tan}[\alpha + \beta] - \text{Tan}[\phi_{pr1refr3}]};$$

$$y_{c3} := y_{b3} + (x_{c3} - x_{b3}) * \text{Tan}[\phi_{pr1refr3}];$$

$$\phi_{pr1refrin3} := \alpha - \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi_{pr1in3}] / n_3];$$

(\*  $-(\beta)$  because refracted angle with respect to entrance prism surface is wanted ( $\phi_{pr1refr} + (-\beta) = \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi_{pr1in}]]$ );

"-" sign added, because ingoing angle has to be positive to calculate correct refracted angle \*)

(\*  $\phi_{pr1refrout} = \arcsin(\sin(\phi_{pr1refrin}) * n)$  n refractive index of prism material \*)

$$\phi_{pr1refrout3} := \alpha + \beta + \pi / 2 - \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi_{pr1refrin3}] * n_3];$$

(\* angle of beam after coming out of prism relative to plane of grating not LOT \*)

$$(* y_{beamtorr}[x_] = y_c + (x_c - x) * \text{Tan}[\phi_{pr1refrout}];$$

propagation of beam to rr after refraction of prism \*)

$$(* \text{If}[y_{beamtorr}[x_{rrmid}] < y_{rrmid}, ] *)$$

$$\text{xbeamm13} := \left( \text{yc3} - \text{yrrmid} + \text{xrrmid} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right]} - \text{xc3} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right) /$$

$$\left( \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right]} - \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right);$$

$$\text{ybeamm13} := \text{yc3} + \underset{\text{[Tangente]}}{(\text{xbeamm13} - \text{xc3}) * \text{Tan}[\phi_{\text{pr1refrout3}}]};$$

$$\phi_{\text{m13}} := (\pi - 2 * (135 * \pi / 180 - \phi_{\text{pr1refrout3}} + \gamma));$$

$$\text{xbeamm23} := \left( -\text{ybeamm13} + \text{yrrmid} + \text{xrrmid} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right]} - \text{xbeamm13} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{m13}} - \phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right) /$$

$$\left( \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right]} - \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{m13}} - \phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right);$$

$$\text{ybeamm23} := \text{yrrmid} + \underset{\text{[Tangente]}}{(\text{xbeamm23} - \text{xrrmid}) * \text{Tan}[-45 * \pi / 180 + \gamma]};$$

$$\text{xd3} := \left( -\text{yapex} + \text{ybeamm23} + \text{xapex} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\alpha + \beta]} - \text{xbeamm23} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right) /$$

$$\left( \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\alpha + \beta]} - \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refrout3}}]} \right);$$

$$\text{yd3} := \text{yapex} + \underset{\text{[Tangente]}}{(\text{xd3} - \text{xapex}) * \text{Tan}[\alpha + \beta]};$$

$$\text{xe3} := \frac{-\text{lprgr} + \text{yd3} - \text{xd3} \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refr3}}]}}{\underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\beta]} - \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{pr1refr3}}]}};$$

$$\text{ye3} := \text{lprgr} + \underset{\text{[Tangente]}}{\text{xe3} * \text{Tan}[\beta]};$$

$$\text{xf3} := \left( -\text{ye3} + \underset{\text{[Kotangens]}}{\text{xe3} \text{Cot}[\phi_{\text{gr1out3}}]} \right) \underset{\text{[Tangente]}}{\text{Tan}[\phi_{\text{gr1out3}}]};$$

$$\text{yf3} := 0;$$

$$\text{xg3} := \left( \text{xf3} + \underset{\text{[Kotangens]}}{\text{yrr2} \text{Cot}[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]} + \text{xrr2} \underset{\text{[Kotangens]}}{\text{Cot}[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]^2} \right) /$$

$$\left( 1 + \underset{\text{[Kotangens]}}{\text{Cot}[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]^2} \right)$$

$$\text{yg3} := \underset{\text{[Tangente]}}{(\text{xg3} - \text{xf3}) * \text{Tan}[90 * \pi / 180 - \phi_{\text{gr1in}}]}$$

phase =

$$\frac{2 * w1}{c} * \left( \sqrt{xb^2 + yb^2} + \sqrt{(xc - xb)^2 + (yc - yb)^2} * n1 + \sqrt{(xbeam1 - xc)^2 + (ybeam1 - yc)^2} + \right. \\ \left. \sqrt{(xbeam2 - xbeam1)^2 + (ybeam2 - ybeam1)^2} + \right. \\ \left. \sqrt{(xd - xbeam2)^2 + (yd - ybeam2)^2} + \sqrt{(xe - xd)^2 + (ye - yd)^2} * n1 + \right. \\ \left. \sqrt{(xf - xe)^2 + (yf - ye)^2} + \sqrt{(xg - xf)^2 + (yg - yf)^2} \right) - 4 \pi * \sqrt{xf^2 + yf^2} / g ;$$

GD =  $\partial_{w1}$  phase;

GDD =  $\partial_{w1}$  GD;

TOD =  $\partial_{w1}$  GDD;

TODoverGDD =  $\frac{TOD}{GDD}$ ;

(\*

GDD=D[phase, {w1, 2}];

[\[leite ab\]](#)

TOD=D[phase, {w1, 3}];

[\[leite ab\]](#)

TODoverGDD= $\frac{TOD}{GDD}$ ;

\*)

(\*

w1= $\frac{2*\pi*c}{\lambda_1}$ ;

B1=1.62153902; C1=0.0122241457\*10<sup>-12</sup>;

B2=0.256287842;

C2=0.0595736775\*10<sup>-12</sup>;

B3=1.64447552; C3=147.468793\*10<sup>-12</sup>;

(\* SF10 sellmeier coefficients\*)

n1=  $\left( 1+B1 \frac{(c*2\pi/(w1))^2}{(c*2\pi/(w1))^2-C1} + B2 \frac{(c*2\pi/(w1))^2}{(c*2\pi/(w1))^2-C2} + B3 \frac{(c*2\pi/(w1))^2}{(c*2\pi/(w1))^2-C3} \right)^{1/2}$  ;

(\* n refractive index of prism material, fused silica \*)

$\lambda_1=1040*10^{-9}$  ;

g= 1250000; (\* [1/m] lines per m ,grating constant \*)

c= 299792458;

lprgr = 0.07 ; (\* normal distance between point A (point of incidence of beam on grating) and prism, free parameter for distance pr-gr \*)

l1 = -0.09; (\* distance between apex point and (0,lprgr), free parameter for horizontal shift of prism relative to A(0,0) \*)

lengthpr= 0.07; (\* length of a side of the prism \*)

$\phi_{gr1n}=50*\pi/180$  ;(\* incident angle on first grating, free parameter\*)

$\alpha= +60*\pi/180$  ;(\* apex angle \*)

$\beta= -30.2*\pi/180$  ;(\* angle between prism and grating \*)

$\gamma= -25*\pi/180$ ;

```

(* inclination angle of retroreflector surface relative to grating *)
yrrmid= 0.2;
(* distance between grating and middle point of retroreflector in y-direction *)
xrrmid= -0.018;
(* distance between point A
(entrance of beam into setup (0,0)) and middle point of rr *)
lengthrr=0.05; (* length of a mirror of RR *)

xrr2= 0 ;
yrr2= -0.02;

(*
intervals:=50
yphase:=Table[phase, {w1,w2,w3,  $\frac{(w3-w2)}{intervals}$ }]
|Tabelle

xphase:= Table[w2+i* $\frac{(w3-w2)}{intervals}$ , {i,0,intervals}]
|Tabelle

xphaseinwavelength:=Map[f[w_]=2 $\pi$ *c/w,xphase]
|wende an

phasedata:= Thread[{xphase,yphase}];
|fädle auf
phasepolynomial=Fit[phasedata, {1,w,w2,w3,w4,w5},w];
|passe an
GDpoly= $\partial_w$ phasepolynomial ;
GDDpoly =  $\partial_w$ GDpoly ;
TODpoly =  $\partial_w$ GDDpoly ;
TODoverGDD= $\frac{TODpoly}{GDDpoly}$  ;

Plot[phasepolynomial, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red ,
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot
  AxesLabel  $\rightarrow$  {"w( $\frac{1}{s}$ )", "Phase (rad)"}, PlotLabel  $\rightarrow$  "Phase from polynomial fit"
|Achsenbeschriftung |Beschriftung der Graphik

Plot[GDpoly, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red , AxesLabel  $\rightarrow$  {"w( $\frac{1}{s}$ )", "GD (s)"},
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot |Achsenbeschriftung
  PlotLabel  $\rightarrow$  "GD from polynomial fit"
|Beschriftung der Graphik

Plot[GDDpoly, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red, PlotStyle  $\rightarrow$  Red,
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot |Darstellungsstil |rot
  AxesLabel  $\rightarrow$  {"w( $\frac{1}{s}$ )", "GDD (s2)"}, PlotLabel  $\rightarrow$  "GDD from polynomial fit"
|Achsenbeschriftung |Beschriftung der Graphik

Plot[TODpoly, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red, AxesLabel  $\rightarrow$  {"w( $\frac{1}{s}$ )", "TOD (s3)"},
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot |Achsenbeschriftung
  PlotLabel  $\rightarrow$  "TOD from polynomial fit"
|Beschriftung der Graphik

Plot[TODoverGDD, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red, AxesLabel  $\rightarrow$  {"w( $\frac{1}{s}$ )", " $\frac{TOD}{GDD}$  (s)"},
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot |Achsenbeschriftung
  PlotLabel  $\rightarrow$  "TOD over GDD ratio from polynomial fit"
|Beschriftung der Graphik

Plot[GDDpoly, {w,w2,w3}, PlotStyle  $\rightarrow$  Red, PlotStyle  $\rightarrow$  Red,
|stelle Funktion graphisch dar |Darstellungsstil |rot |Darstellungsstil |rot

```

```

[Stelle Funktion graphisch dar [Darstellungsstil [rot [Darstellungsstil [rot
  AxesLabel→ {"w( $\frac{1}{s}$ )", "GDD(s2)"}, PlotLabel → "GDD from polynomial fit"
  [Achsenbeschriftung [Beschriftung der Graphik

Plot[GDD, {w1,w2,w3}, PlotStyle → Red, PlotStyle → Red,
[stelle Funktion graphisch dar [Darstellungsstil [rot [Darstellungsstil [rot
  AxesLabel→ {"w( $\frac{1}{s}$ )", "GDD(s2)"}, PlotLabel → "GDD analytical"
  [Achsenbeschriftung [Beschriftung der Graphik

Plot[TODpoly, {w,w2,w3}, PlotStyle → Red, AxesLabel→ {"w( $\frac{1}{s}$ )", "TOD(s3)"},
[stelle Funktion graphisch dar [Darstellungsstil [rot [Achsenbeschriftung
  PlotLabel → "TOD from polynomial fit"
  [Beschriftung der Graphik

```

\*)

## Visualization of Beampaths

$$\text{In}[352]:= w1 = \frac{2 * \pi * c}{\lambda 1};$$

```

B1 = 1.62153902; C1 = 0.0122241457 * 10-12;
B2 = 0.256287842;
C2 = 0.0595736775 * 10-12;
B3 = 1.64447552; C3 = 147.468793 * 10-12;
(* SF10 sellmeier coefficients*)

```

$$n1 = \left( 1 + B1 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C1} + B2 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C2} + B3 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C3} \right)^{1/2};$$

```

(* n refractive index of prism material, fused silica *)

```

```

λ1 = 1040 * 10-9;

```

```

(* incident angle on first grating, free parameter*)

```

```

(* [1/m] lines per m ,grating constant *)

```

```

c = 299792458;

```

```

g = 1250000

```

```

lprgr = 0.07; (* normal distance between point

```

```

  A (point of incidence of beam on grating) and prism,
  free parameter for distance pr-gr *)

```

```

l1 = -0.09; (* distance between apex point and (0,lprgr),

```

```

  free parameter for horizontal shift of prism relative to A(0,0) *)

```

```

lengthpr = 0.07; (* length of a side of the prism *)

```

```

φgrlin = 50 * π / 180;

```

```

α = +60 * π / 180; (* apex angle *)

```

```

β = -30.2 * π / 180; (* angle between prism and grating *)

```

```

γ = -25 * π / 180;

```

```

(* inclination angle of retroreflector surface relative to grating *)

```

```

yrrmid = 0.2;

```

```

(* distance between grating and middle point of retroreflector in y-direction *)

```

```

xrrmid = -0.018;

```

```

(* distance between point A
(entrance of beam into setup (0,0) and middle point of rr *)
lengthrr = 0.05; (* length of a mirror of RR *)

xrr2 = 0;
yrr2 = -0.02;

m1 = Plot[yrrmid + (x - xrrmid) * Tan[45 π/180 + γ],
  stelle Funktion graphisch dar Tangente
  {x, xm1end, xrrmid}, PlotStyle → Brown];
  Darstellungsstil braun
ym1 := yrrmid + (x - xrrmid) * Tan[45 π/180 + γ]
  Tangente

xm1end :=

$$\left( xrrmid - \frac{\sqrt{2} \text{lengthrr}}{\sqrt{\cos[\gamma]^2 - 2 \cos[\gamma] \sin[\gamma] + \sin[\gamma]^2}} + xrrmid \tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right]^2 \right) / \left(1 + \tan\left[\frac{\pi}{4} + \gamma\right]^2\right)$$

ym1end := yrrmid + (xm1end - xrrmid) * Tan[45 π/180 + γ]
  Tangente

m1end := ListLinePlot[{{xm1end, ym1end}}, PlotStyle → Brown]
  listenbezogene Liniengraphik Darstellungsstil braun
m2 = Plot[yrrmid + (x - xrrmid) * Tan[-45 * π/180 + γ],
  stelle Funktion graphisch dar Tangente
  {x, xrrmid, xm2end}, PlotStyle → Brown];
  Darstellungsstil braun
ym2 := yrrmid + (x - xrrmid) * Tan[-45 * π/180 + γ]
  Tangente

xm2end :=

$$\left( xrrmid + \frac{\sqrt{2} \text{lengthrr}}{\sqrt{\cos[\gamma]^2 + 2 \cos[\gamma] \sin[\gamma] + \sin[\gamma]^2}} + xrrmid \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right]^2 \right) / \left(1 + \tan\left[\frac{\pi}{4} - \gamma\right]^2\right)$$

ym2end := yrrmid + (xm2end - xrrmid) * Tan[-45 * π/180 + γ]
  Tangente

m2end := ListLinePlot[{{xm2end, ym2end}}, PlotStyle → Brown]
  listenbezogene Liniengraphik Darstellungsstil braun

prsfout =
  Plot[yapex + (x - xapex) * Tan[α + β], {x, xapex, xprsfoutend}, PlotStyle → Green];
  stelle Funktion graphisch dar Tangente Darstellungsstil grün

xprsfoutend := xapex + lengthpr Cos[α + β]
  Kosinus
yprsfoutend := yapex + (xprsfoutend - xapex) * Tan[α + β]
  Tangente
prsfoutend := ListLinePlot[{{xprsfoutend, yprsfoutend}}, PlotStyle → Green]
  listenbezogene Liniengraphik Darstellungsstil grün

```

```

prsfbackside := ListLinePlot[
  [listenbezogene Liniengraphik]
  {{xprsfoutend, yprsfoutend}, {xprsfined, yprsfined}}, PlotStyle → Green]
  [Darstellungsstil grün]
(* ybeamm2toprsf= Plot[ybeamm2+(xbeamm2-x)*Tan[φpr1refrout], {x,0,xbeamm2}]; *)
  [stelle Funktion graphisch dar] [Tangente]
prsfined := Plot[lprgr - x * Tan[(-β)], {x, xapex, xprsfined}, PlotStyle → Green];
  [stelle Funktion gr... [Tangente] [Darstellungsstil grün]
xprsfined := 
$$\frac{1}{2(1 + \tan[(-\beta)]^2)} \left( 2xapex + 2lprgr \tan[(-\beta)] - \right.$$

  [Tangente]

$$\left. 2yapex \tan[(-\beta)] + \sqrt{\left( (-2xapex - 2lprgr \tan[(-\beta)] + 2yapex \tan[(-\beta)])^2 - \right.} \right.$$


$$\left. 4(-lengthpr^2 + lprgr^2 + xapex^2 - 2lprgr yapex + yapex^2)(1 + \tan[(-\beta)]^2) \right)$$

yprsfined := lprgr + xprsfined * Tan[β]
  [Tangente]
prsfined := ListLinePlot[{{xprsfined, yprsfined}}, PlotStyle → Green]
  [listenbezogene Liniengraphik] [Darstellungsstil grün]
reflectedbeam := Plot[
  [stelle Funktion graphisch dar]
  ybeamm1 + (x - xbeamm1) Tan[(φpr1refrout - 2 * φm1)], {x, -0.1, 0}, PlotStyle → Red]
  [Tangente] [Darstellungsstil rot]
RR = ListLinePlot[{{xrrmid, yrrmid}}, PlotStyle → Brown];
  [listenbezogene Liniengraphik] [Darstellungsstil braun]
(*vbeamtom2= Plot[
  [stelle Funktion graphisch dar]
  ybeamm1+(xbeamm1-x) Tan[(φpr1refrout-2* φm1)], {x,xbeamm1,xrrmid +0.05}]; *)
  [Tangente]
apex = ListLinePlot[{{xapex, yapex}}, PlotStyle → Green];
  [listenbezogene Liniengraphik] [Darstellungsstil grün]
grating := Plot[0, {x, -0.01, 0.04}, PlotStyle → Green]
  [stelle Funktion graphisch dar] [Darstellungsstil grün]
incbeam := Plot[x * Tan[90 * π / 180 - φgr1in], {x, -0.1, 0}, PlotStyle → Black]
  [stelle F... [Tangente] [Darstellungsstil schwarz]
beamftog :=
  Plot[(x - xf2) * Tan[90 * π / 180 - φgr1in], {x, -0.05, 0.05}, PlotStyle → Yellow]
  [stell... [Tangente] [Darstellungsstil gelb]
rr2 := Plot[(x - xrr2) * Tan[90 * π / 180 - φgr1in - 90 * π / 180] + yrr2,
  [stelle Funktion grap... [Tangente]
  {x, xg3, xg2}, PlotStyle → Brown]
  [Darstellungsstil braun]
beamline1 = ListLinePlot[{{xa, ya}, {xb, yb}, {xc, yc}, {xbeamm1, ybeamm1},
  [listenbezogene Liniengraphik]
  {xbeamm2, ybeamm2}, {xd, yd}, {xe, ye}, {xf, yf}, {xg, yg}}, PlotStyle → Black];
  [Darstellungsstil schwarz]
beamline2 = ListLinePlot[{{xa2, ya2}, {xb2, yb2}, {xc2, yc2},
  [listenbezogene Liniengraphik]
  {xbeamm12, ybeamm12}, {xbeamm22, ybeamm22}, {xd2, yd2},
  {xe2, ye2}, {xf2, yf2}, {xg2, yg2}}, PlotStyle → Red];
  [Darstellungsstil rot]
beamline3 = ListLinePlot[{{xa3, ya3}, {xb3, yb3}, {xc3, yc3},
  [listenbezogene Liniengraphik]

```

Listenbezogene Liniengraphik

```
{xbeamm13, ybeamm13}, {xbeamm23, ybeamm23}, {xd3, yd3},
{xe3, ye3}, {xf3, yf3}, {xg3, yg3}}, PlotStyle -> Blue];
```

Darstellungsstil blau

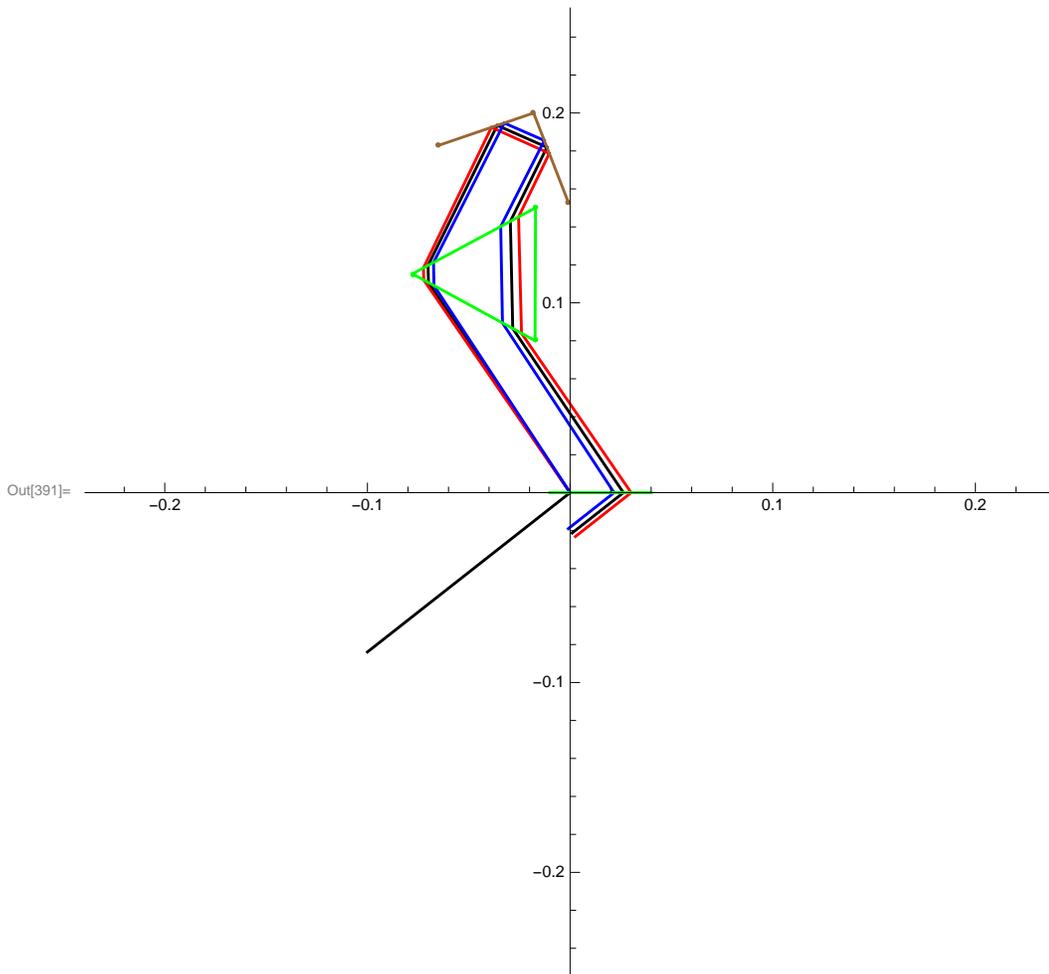
```
Show[beamline1, beamline2, beamline3, prsfin, prsfinend, prsfout,
zeige an
```

```
prsfbackside, prsfoutend, incbeam, grating, m2, m1, apex,
RR, m1end, m2end, PlotRange -> 0.23, AspectRatio -> 1]
```

Koordinatenbereich der... Seitenverhältnis

```
opticalpath = (sqrt(xb^2 + yb^2) + sqrt((xc - xb)^2 + (yc - yb)^2) * n1 +
sqrt((xbeamm1 - xc)^2 + (ybeamm1 - yc)^2) + sqrt((xbeamm2 - xbeamm1)^2 + (ybeamm2 - ybeamm1)^2) +
sqrt((xd - xbeamm2)^2 + (yd - ybeamm2)^2) + sqrt((xe - xd)^2 + (ye - yd)^2) * n1 +
sqrt((xf - xe)^2 + (yf - ye)^2) + sqrt((xg - xf)^2 + (yg - yf)^2))
```

```
throughprism = sqrt((xc - xb)^2 + (yc - yb)^2) * n1 + sqrt((xe - xd)^2 + (ye - yd)^2) * n1
```



```

In[86]:= GD =  $\partial_{w1}$  phase;
GDD =  $\partial_{w1}$  GD;
TOD =  $\partial_{w1}$  GDD;
TODoverGDD =  $\frac{TOD}{GDD}$ ;

(*
Plot[GDD, {w1,w2,w3}, AxesLabel -> {"w[Hz]", "GDD (s2)"}, PlotLabel -> "GDD analytisch"]
[stelle Funktion graphi... [Achsenbeschriftung [Beschriftung der Graphik
Plot[TOD, {w1,w2,w3}, AxesLabel -> {"w( $\frac{1}{s}$ )", "GDD (s2)"}, PlotLabel -> "TOD analytisch"]
[Achsenbeschriftung [Beschriftung der Graphik

*)
Out[101]= SF10_GDD_ana_g.pdf

```

$$w1 = \frac{2 * \pi * c}{\lambda 1};$$

```

B1 = 1.62153902; C1 = 0.0122241457 * 10-12;
B2 = 0.256287842;
C2 = 0.0595736775 * 10-12;
B3 = 1.64447552; C3 = 147.468793 * 10-12;
(* SF10 sellmeier coefficients*)

```

$$n1 = \left( 1 + B1 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C1} + B2 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C2} + B3 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C3} \right)^{1/2};$$

```

(* n refractive index of prism material, fused silica *)

```

```

 $\lambda 1 = 1040 * 10^{-9}$ ;

```

```

(* incident angle on first grating, free parameter*)

```

```

(* [1/m] lines per m ,grating constant *)

```

```

c = 299792458;

```

```

g = 1250000;

```

```

lprgr = 0.07; (* normal distance between point

```

```

A (point of incidence of beam on grating) and prism,

```

```

free parameter for distance pr-gr *)

```

```

l1 = -0.09; (* distance between apex point and (0,lprgr),

```

```

free parameter for horizontal shift of prism relative to A(0,0) *)

```

```

lengthpr = 0.07; (* length of a side of the prism *)

```

```

 $\phi_{gr1in} = 50 * \pi / 180$ ;

```

```

 $\alpha = +60 * \pi / 180$ ; (* apex angle *)

```

```

 $\beta = -30.2 * \pi / 180$ ; (* angle between prism and grating *)

```

```

 $\gamma = -25 * \pi / 180$ ;

```

```

(* inclination angle of retroreflector surface relative to grating *)

```

```

yrrmid = 0.2;

```

```

(* distance between grating and middle point of retroreflector in y-direction *)

```

```

xrrmid = -0.018;

```

```

(* distance between point A

```

```

(entrance of beam into setup (0,0)) and middle point of rr *)

```

```

lengthrr = 0.05; (* length of a mirror of RR *)

```

```

xrr2 = 0;
yrr2 = -0.02;

Clear[g]
[lösche]
g = z * 1000;
pgG = Plot[GDD * 1024, {z, 1230, 1270}, AxesLabel → {"g[Linien/mm]", "GDD[ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD in Abhängigkeit der Gitterkonstante g"]
[Beschriftung der Graphik]
pgT = Plot[TOD * 1036, {z, 1230, 1270}, AxesLabel → {"g[Linien/mm]", "TOD[ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD in Abhängigkeit der Gitterkonstante g"]
[Beschriftung der Graphik]
pgTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {z, 1230, 1270},
[stelle Funktion graphisch dar]
  AxesLabel → {"g[Linien/mm]", "TOD/GDD[fs]"},
[Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD/GDD in Abhängigkeit der Gitterkonstante g"]
[Beschriftung der Graphik]

g = 1250000;
Clear[l1]
[lösche]
pl1G = Plot[GDD * 1024, {l1, -0.085, -0.1}, AxesLabel → {"l_1[m]", "GDD[ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD in Abhängigkeit der horizontalen Prismaverschiebung l_1"]
[Beschriftung der Graphik]
pl1T = Plot[TOD * 1036, {l1, -0.085, -0.1}, AxesLabel → {"l_1[m]", "TOD[ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD in Abhängigkeit der horizontalen Prismaverschiebung l_1"]
[Beschriftung der Graphik]
pl1TG = Plot[TODoverGDD * 1015, {l1, -0.085, -0.1},
[stelle Funktion graphisch dar]
  AxesLabel → {"l_1[m]", "TOD/GDD[fs]"},
[Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD/GDD in Abhängigkeit der horizontalen Prismaverschiebung l_1"]
[Beschriftung der Graphik]

l1 = -0.09;

Clear[β]
[lösche]
β = epsilon * π / 180;
pbetaG = Plot[GDD * 1024, {epsilon, -22, -32}, AxesLabel → {"β[°]", "GDD[ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD als Funktion des Winkels zwischen Prisma und Gitter β"]
[Beschriftung der Graphik]
pbetaT = Plot[TOD * 1036, {epsilon, -22, -32}, AxesLabel → {"β[°]", "TOD[ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD als Funktion des Winkels zwischen Prisma und Gitter β"]
[Beschriftung der Graphik]
pbetaTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {epsilon, -22, -32},
[stelle Funktion graphisch dar]

```

```

    [Stelle Funktion graphisch dar]
    AxesLabel → {"β[°]", "TOD/GDD[fs]"},
    [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion des Winkels zwischen Prisma und Gitter"
    [Beschriftung der Graphik]
    β = -30.2 * π / 180;
    Clear[lprgr]
    [lösche]
    plpgG = Plot[GDD * 1024, {lprgr, 0.06, 0.075}, AxesLabel → {"l_pg[m]", "GDD[ps2]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "GDD als Funktion des Prisma-Gitter Abstandes l_pg"
    [Beschriftung der Graphik]
    plpgT = Plot[TOD * 1036, {lprgr, 0.06, 0.075}, AxesLabel → {"l_pg[m]", "TOD[ps3]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD als Funktion des Prisma-Gitter Abstandes l_pg"
    [Beschriftung der Graphik]
    plpgTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {lprgr, 0.06, 0.075},
    [stelle Funktion graphisch dar]
    AxesLabel → {"l_pg[m]", "TOD/GDD[fs]"},
    [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion des Prisma-Gitter Abstandes l_pg"
    [Beschriftung der Graphik]
    lprgr = 0.07;

    Clear[φgrlin]
    [lösche]
    φgrlin = epsilon * π / 180;
    pphiinG = Plot[GDD * 1024, {epsilon, 48.5, 53}, AxesLabel → {"θ'_g,i[°]", "GDD[ps2]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "GDD als Funktion des Einfallwinkels auf das Gitter θ'_g,i"
    [Beschriftung der Graphik]
    pphiinT = Plot[TOD * 1036, {epsilon, 48.5, 53}, AxesLabel → {"θ'_g,i[°]", "TOD[ps3]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD als Funktion des Einfallwinkels auf das Gitter θ'_g,i"
    [Beschriftung der Graphik]
    pphiinTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {epsilon, 48.5, 53},
    [stelle Funktion graphisch dar]
    AxesLabel → {"θ'_g,i[°]", "TOD/GDD[fs]"},
    [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion des Einfallwinkels auf das Gitter θ'_g,i"
    [Beschriftung der Graphik]
    φgrlin = 50 * π / 180;

    Clear[γ]
    [lösche]
    γ = epsilon * π / 180;
    pgaG = Plot[GDD * 1024, {epsilon, -44, -4}, AxesLabel → {"γ[°]", "GDD[ps2]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "GDD als Funktion des RR1 Winkels γ"
    [Beschriftung der Graphik]
    pgaT = Plot[TOD * 1036, {epsilon, -44, -4}, AxesLabel → {"γ[°]", "GDD[ps3]"},
    [stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
    PlotLabel → "TOD als Funktion des RR1 Winkels γ"
    [Beschriftung der Graphik]

```

```

[Beschriftung der Graphik]
pgaTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {epsilon, -44 * π / 180, -4 * π / 180},
[stelle Funktion graphisch dar]
  AxesLabel → {"γ [°]", "TOD/GDD [fs]"},
[Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion des RR1 Winkels γ"]
[Beschriftung der Graphik]
γ = -25 * π / 180;

Clear[xrrmid]
[lösche]

pxG = Plot[GDD * 1024, {xrrmid, -0.014, -0.026}, AxesLabel → {"x_RR [m]", "GDD [ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD als Funktion der horizontalen Verschiebung von RR1 x_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

pxT = Plot[TOD * 1036, {xrrmid, -0.014, -0.026}, AxesLabel → {"x_RR [m]", "TOD [ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD als Funktion der horizontalen Verschiebung von RR1 x_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

pxTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {xrrmid, -0.014, -0.026},
[stelle Funktion graphisch dar]
  AxesLabel → {"x_RR [m]", "TOD/GDD [fs]"},
[Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion der horizontalen Verschiebung von RR1 x_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

xrrmid = -0.018;
Clear[yrrmid]
[lösche]

pyG = Plot[GDD * 1024, {yrrmid, 0.19, 0.22}, AxesLabel → {"y_RR [m]", "GDD [ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD als Funktion der vertikalen Verschiebung von RR1 y_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

pyT = Plot[TOD * 1036, {yrrmid, 0.19, 0.22}, AxesLabel → {"y_RR [m]", "TOD [ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD als Funktion der vertikalen Verschiebung von RR1 y_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

pyTG = Plot[TODoverGDD * 1015, {yrrmid, 0.19, 0.22},
[stelle Funktion graphisch dar]
  AxesLabel → {"y_RR [m]", "TOD/GDD [fs]"},
[Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion der vertikalen Verschiebung von RR1 y_RR"]
[Beschriftung der Graphik]

Clear[α]
[lösche]

α = epsilon * π / 180;
palphaG = Plot[GDD * 1024, {epsilon, 57, 63}, AxesLabel → {"α [°]", "GDD [ps2]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "GDD als Funktion des Apexwinkels α"]
[Beschriftung der Graphik]

palphaT = Plot[TOD * 1036, {epsilon, 57, 63}, AxesLabel → {"α [°]", "TOD [ps3]"},
[stelle Funktion graphisch dar] [Achsenbeschriftung]
  PlotLabel → "TOD als Funktion des Apexwinkels α"]
[Beschriftung der Graphik]

```

Bestimmung der Graphik

`palphatG = Plot[TODoverGDD * 1015, {epsilon, 57, 63},`  
stelle Funktion graphisch dar

`AxisLabel → {"α [°]", "TOD/GDD[SF10]"},`  
Achsenbeschriftung

`PlotLabel → "TOD/GDD als Funktion des Apexwinkels α"]`  
Beschriftung der Graphik

`α = 60 * π / 180;`

`(Export["SF10_GDD_ana_g.pdf", pgG,`  
exportiere

`ImageSize → 350, "CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildgröße Bildauflösung

`Export["SF10_TOD_ana_g.pdf", pgT, ImageSize → 350,`  
exportiere Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TODGDD_ana_g.pdf", pgTG, ImageSize → 350,`  
exportiere Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_GDD_ana_l1.pdf", pl1G, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TOD_ana_l1.pdf", pl1T, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TODGDD_ana_l1.pdf", pl1TG, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_GDD_ana_x.pdf", pxG, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TOD_ana_x.pdf", pxT, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TODGDD_ana_x.pdf", pxTG, ImageSize → 350,`  
Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_GDD_ana_y.pdf", pyG, ImageSize → 350,`  
exportiere Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

`Export["SF10_TOD_ana_y.pdf", pyT, ImageSize → 350,`  
exportiere Bildgröße

`"CompressionLevel" → 0, ImageResolution → 250] ×`  
Bildauflösung

## 6.2 Mathematica Skript zur Modellierung des Prismenpaares

Quit[]

[beende Kernel

Clear["Global`\*"]

[lösche

$$xprinpp = -\frac{lprpp}{\cot[\beta pp + \phi inpp] + \tan[\beta pp]};$$

$$yprinpp = xprinpp * \tan[90 * \pi / 180 + \phi inpp + \beta pp];$$

$$\phi refr1pp = \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi inpp] / npp] + \beta pp + 90 * \pi / 180;$$

(\* relative to x-axis\*)

$$xproutpp = \frac{(-yapexpp + yprinpp + xapexpp \tan[\alpha + \beta pp] - xprinpp \tan[\phi refr1pp])}{(\tan[\alpha + \beta pp] - \tan[\phi refr1pp])};$$

$$yproutpp = yapexpp + (xproutpp - xapexpp) * \tan[\alpha + \beta pp];$$

$$\phi in2pp = \alpha - \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi inpp] / npp]; (* relative to prism lot*)$$

$$\phi refr2pplot = \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi in2pp] * npp];$$

$$\phi refr2pp = \alpha + \beta pp + 90 * \pi / 180 - \phi refr2pplot;$$

$$xpr2inpp = \frac{(-yapex2pp + yproutpp + xapex2pp \tan[\beta 2pp] - xproutpp \tan[\phi refr2pp])}{(\tan[\beta 2pp] - \tan[\phi refr2pp])};$$

$$ypr2inpp = yapex2pp + (xpr2inpp - xapex2pp) * \tan[\beta 2pp];$$

$$\phi in3pp = \phi refr2pplot - (\beta 2pp - (\alpha + \beta pp));$$

$$\phi refr3pp = \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi in3pp] / npp]; (* relative to lot*)$$

$$xpr2outpp =$$

$$\left( yapex2pp - ypr2inpp + xapex2pp \cot[\beta 2pp + \frac{\pi}{6}] - xpr2inpp \cot[\beta 2pp - \phi refr3pp] \right) /$$

$$\left( \cot[\beta 2pp + \frac{\pi}{6}] - \cot[\beta 2pp - \phi refr3pp] \right);$$

$$ypr2outpp = yapex2pp + (xpr2outpp - xapex2pp) * \tan[\beta 2pp - \alpha];$$

$$\phi in4pp = \alpha - \phi refr3pp;$$

$$\phi refr4pp = \text{ArcSin}[\text{Sin}[\phi in4pp] * npp];$$

(\*relative to lot, while  $\beta 2pp - \alpha + \phi refr4pp + 90 * \pi / 180$  is relative to x-axis \*)

$$xbeamendpp =$$

$$(xendpp - yendpp \cot[\beta 2pp - \alpha + \phi refr4pp] + ypr2outpp \cot[\beta 2pp - \alpha + \phi refr4pp] +$$

$$xpr2outpp \cot[\beta 2pp - \alpha + \phi refr4pp]^2) / (1 + \cot[\beta 2pp - \alpha + \phi refr4pp]^2);$$

$$y_{beamendpp} = y_{pr2outpp} + (x_{beamendpp} - x_{pr2outpp}) * \tan[\beta_{2pp} - \alpha + \phi_{refr4pp} + 90 * \pi / 180];$$

$$x_{apexpp} = l_{apexpp} * \cos[\beta_{pp}];$$

$$y_{apexpp} = l_{prpp} + l_{apexpp} * \sin[\beta_{pp}];$$

$$n_{pp} = \left( 1 + B1 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C1} + B2 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C2} + B3 \frac{(c * 2 \pi / (w1))^2}{(c * 2 \pi / (w1))^2 - C3} \right)^{1/2};$$

$$n_{ppwave} = \left( 1 + B1 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - C1} + B2 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - C2} + B3 \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1^2 - C3} \right)^{1/2};$$

$$x_{prinpp} = - \frac{l_{prpp}}{\cot[\beta_{pp} + \phi_{inpp}] + \tan[\beta_{pp}]};$$

$$y_{prinpp} = x_{prinpp} * \tan[90 * \pi / 180 + \phi_{inpp} + \beta_{pp}];$$

$$\phi_{refr1pp2} = \arcsin[\sin[\phi_{inpp}] / n_{pp2}] + \beta_{pp} + 90 * \pi / 180; \quad (* \text{ relative to x-axis})$$

$$x_{proutpp2} = (-y_{apexpp} + y_{prinpp} + x_{apexpp} \tan[\alpha + \beta_{pp}] - x_{prinpp} \tan[\phi_{refr1pp2}]) / (\tan[\alpha + \beta_{pp}] - \tan[\phi_{refr1pp2}]);$$

$$y_{proutpp2} = y_{apexpp} + (x_{proutpp2} - x_{apexpp}) * \tan[\alpha + \beta_{pp}];$$

$$\phi_{in2pp2} = \alpha - \arcsin[\sin[\phi_{inpp}] / n_{pp2}]; \quad (* \text{ relative to prism lot})$$

$$\phi_{refr2pplot2} = \arcsin[\sin[\phi_{in2pp2}] * n_{pp2}];$$

$$\phi_{refr2pp2} = \alpha + \beta_{pp} + 90 * \pi / 180 - \phi_{refr2pplot2};$$

$$x_{pr2inpp2} = (-y_{apex2pp} + y_{proutpp2} + x_{apex2pp} \tan[\beta_{2pp}] - x_{proutpp2} \tan[\phi_{refr2pp2}]) / (\tan[\beta_{2pp}] - \tan[\phi_{refr2pp2}]);$$

$$y_{pr2inpp2} = y_{apex2pp} + (x_{pr2inpp2} - x_{apex2pp}) * \tan[\beta_{2pp}];$$

$$\phi_{in3pp2} = \phi_{refr2pplot2} - (\beta_{2pp} - (\alpha + \beta_{pp}));$$

$$\phi_{refr3pp2} = \arcsin[\sin[\phi_{in3pp2}] / n_{pp2}]; \quad (* \text{ relative to lot})$$

$$x_{pr2outpp2} =$$

$$\left( y_{apex2pp} - y_{pr2inpp2} + x_{apex2pp} \cot[\beta_{2pp} + \frac{\pi}{6}] - x_{pr2inpp2} \cot[\beta_{2pp} - \phi_{refr3pp2}] \right) /$$

$$\left( \cot[\beta_{2pp} + \frac{\pi}{6}] - \cot[\beta_{2pp} - \phi_{refr3pp2}] \right);$$

$$y_{pr2outpp2} = y_{apex2pp} + (x_{pr2outpp2} - x_{apex2pp}) * \tan[\beta_{2pp} - \alpha];$$

$$\phi_{in4pp2} = \alpha - \phi_{refr3pp2};$$

$$\phi_{refr4pp2} = \arcsin[\sin[\phi_{in4pp2}] * n_{pp2}]; \quad (* \text{ relative to lot,})$$

L'ARUSS - L'ORBUS

while beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}} + 90 * \pi / 180$  is relative to x-axis \*)  
xbeamendpp2 =  
(xendpp - yendpp Cot [beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}}$ ] + ypr2outpp2 Cot [beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}}$ ] +  
Kotangens Kotangens  
xpr2outpp2 Cot [beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}}$ ] <sup>2</sup>) / (1 + Cot [beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}}$ ] <sup>2</sup>);  
ybeamendpp2 = ypr2outpp2 + (xbeamendpp2 - xpr2outpp2) \*  
Tan [beta2pp -  $\alpha + \phi_{\text{refr4pp}} + 90 * \pi / 180$ ];  
Tangente

xapexpp = lapexpp \* Cos [beta2pp];  
Kosinus  
yapexpp = lprpp + lapexpp \* Sin [beta2pp];  
Sinus

npp2 =  $\left( 1 + B1 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C1} + B2 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C2} + B3 \frac{(c * 2 \pi / (w2))^2}{(c * 2 \pi / (w2))^2 - C3} \right)^{1/2}$  ;

nppwave2 =  $\left( 1 + B1 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C1} + B2 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C2} + B3 \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C3} \right)^{1/2}$  ;

phasepp =  
 $w1 / c \left( \sqrt{xprinpp^2 + yprinpp^2} + \sqrt{(xproutpp - xprinpp)^2 + (yproutpp - yprinpp)^2} * npp + \right.$   
 $\sqrt{(xproutpp - xpr2inpp)^2 + (ypr2inpp - yproutpp)^2} +$   
 $\sqrt{(xpr2inpp - xpr2outpp)^2 + (ypr2inpp - ypr2outpp)^2} * npp +$   
 $\left. \sqrt{((xpr2outpp - xbeamendpp)^2 + (ypr2outpp - ybeamendpp)^2)} \right)$ ;

GDDbookfreq =  $-4 w1 / c * \sqrt{(xproutpp - xpr2inpp)^2 + (ypr2inpp - yproutpp)^2} * (\partial_{w1} npp)^2 +$   
 $\left( \sqrt{(xpr2inpp - xpr2outpp)^2 + (ypr2inpp - ypr2outpp)^2} + \right.$   
 $\left. \sqrt{(xproutpp - xprinpp)^2 + (yprinpp - yproutpp)^2} \right) * (2 * \partial_{w1} npp + w * \partial_{w1} (\partial_{w1} npp)) / c$ ;

GDDbookpp =  
 $-\lambda^3 / (2 \pi * c^2) *$   
 $\left( 4 * \left( \sqrt{((xproutpp - xpr2inpp)^2 + (ypr2inpp - yproutpp)^2)} \right) * (npp \text{firstderivative})^2 \right) -$   
 $\left( \sqrt{((xpr2inpp - xpr2outpp)^2 + (ypr2inpp - ypr2outpp)^2)} + \right.$   
 $\left. \sqrt{(xproutpp - xprinpp)^2 + (yprinpp - yproutpp)^2} \right) * npp \text{secondderivative}$  ;

TODbookpp =  $\frac{\lambda^4}{4 * \pi^2 * c^3} * \left( 12 * \left( \sqrt{(xproutpp - xpr2inpp)^2 + (ypr2inpp - yproutpp)^2} \right) * \right.$   
 $\left. \left( (npp \text{firstderivative})^2 * \left( 1 - \lambda * (npp \text{firstderivative}) * \left( \frac{1}{npp^3} - 2 * npp \right) \right) \right) + \right.$

$$\left. \lambda_1 * nppfirstderivative * nppsecondderivative \right) -$$

$$\left( \sqrt{\left( (xpr2inpp - xpr2outpp)^2 + (ypr2inpp - ypr2outpp)^2 \right)} + \right.$$

$$\left. \sqrt{\left( (xproutpp - xprinpp)^2 + (yprinpp - yproupp)^2 \right)} \right) *$$

$$\left( 3 * nppsecondderivative + \lambda_1 * nppthirdderivative \right);$$

GDpp = D[phasepp, {w1, 1}];

|leite ab

GDDpp = D[phasepp, {w1, 2}];

|leite ab

TODpp = D[phasepp, {w1, 3}];

|leite ab

nppfirstderivative = D[nppwave, {\lambda1, 1}];

|leite ab

nppsecondderivative = D[nppwave, {\lambda1, 2}];

|leite ab

nppthirdderivative = D[nppwave, {\lambda1, 3}];

|leite ab

$\lambda_1 = 1040 * 10^{-9};$

$\lambda_2 = \lambda_1 - 7 * 10^{-9};$

$\lambda_3 = \lambda_1 + 7 * 10^{-9};$

$w_1 = 2 * \pi * c / \lambda_1 + \Delta w;$

$\Delta w_{up} = \text{Abs} \left[ 2 * \pi * c / (\lambda_1) - 2 * \pi * c / (\lambda_2) \right];$

|Absolutwert

$\Delta w_{down} = -\text{Abs} \left[ 2 * \pi * c / (\lambda_1) - 2 * \pi * c / (\lambda_2) \right];$

|Absolutwert

$c = 299792458;$

$B_1 = 1.62153902; C_1 = 0.0122241457 * 10^{-12};$

$B_2 = 0.256287842;$

$C_2 = 0.0595736775 * 10^{-12};$

$B_3 = 1.64447552; C_3 = 147.468793 * 10^{-12};$

(\* SF10 sellmeier coefficients\*)

brewsterangle = ArcTan[npp];

|Arkustangens

mindeflection = ArcSin[npp \* Sin[90 \* \pi / 180 - (\pi - \alpha) / 2]];

|Arkussinus |Sinus

$\phi_{inpp} = \text{mindeflection};$  (\* inc angle on prism relative to prism lot \*)

$x_{apex2pp} = -0.065;$

$y_{apex2pp} = 0.15;$

$$\alpha = \pi - 2 \left( \text{ArcCos} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + npp^2}} \right] + 2 \pi \right);$$

|Arkuskosinus

$\beta_{pp} = -5 * \pi / 180;$

$\beta_{2pp} = \alpha + \beta_{pp};$  (\* $\alpha + \beta_{pp} - \text{ArcTan}[npp] + \phi_{refr2pp}$ lot\*) ;

|Arkustangens

└─Arkustangens

```
(* chosen so that beam is incident on 2nd prism at brewster angle *)
xendpp = xapex2pp - 0.02;
yendpp = yapex2pp + 0.07;
lengthprpp = 0.05;
lprpp = 0.045; (* height of prism 1*)
lapexpp = -0.12; (* distance of apex from y-axis*)
```

```
interval spp = 10;
```

```
(*
posstepfunction:=Function[{x}, Δwup/x2];
└─Funktion
```

```
negstepfunction:=Function[{x}, Δwdown/x2];
└─Funktion
```

```
stepsdetuning=Table[i, {i, 1, interval spp}];
└─Tabelle
```

```
positivedetuningsteps=Reverse[Map[posstepfunction, stepsdetuning]];
└─kehre um └─wende an
```

```
negativedetuningsteps=Map[negstepfunction, stepsdetuning];
└─wende an
```

```
(*yphasepp=Table[phasepp, {Δw, Δwdown, Δwup,  $\frac{\Delta wup - \Delta wdown}{interval\ spp}$ }]; *)
└─Tabelle
```

```
xphasepp=Join[negativedetuningsteps, {0}, positivedetuningsteps]
└─verknüpfe
```

```
yphasepp={};
```

```
For[i=1, i < ((2*interval spp)+2), i++,
└─For-Schleife
```

```
Δw=xphasepp[[i]]
```

```
AppendTo[yphasepp,
└─hänge an bei
```

```
N[phasepp]
└─numerischer Wert
```

```
]
```

```
yphasepp
*)
```

```
Δw = Δwup * x5;
```

```
xphasepp = Table[Δw, {x, -1, 1,  $\frac{1}{interval\ spp}$ }}];
└─Tabelle
```

```
yphasepp = Table[phasepp, {x, -1, 1,  $\frac{1}{interval\ spp}$ }}];
└─Tabelle
```

```
phasedatapp = Thread[{xphasepp, yphasepp}];
└─fädle auf
```

```
poly1 = a0 + w * a1;
```

```
poly2 = b0 + w * b1 + w2 * b2;
```

```
poly3 = c0 + w * c1 + w2 * c2 + w3 * c3;
```

```
coeffcientlpp = FindFit[phasedatapp, poly1, {a0, a1}, w, WorkingPrecision → 50];
└─ermittle Annäherung └─Arbeitspräzision
```

```

    [ermittle Anpassung]

$$\Delta w = \frac{1}{100} * \Delta w_{up} * x^5;$$

    [Arbeitspräzision]
xphasehigherordercoefficientspp = Table[ $\Delta w$ , {x, -1, 1,  $\frac{1}{\text{intervalspp}}$ }]];
    [Tabelle]

yphasehigherordercoefficientspp = Table[phasepp, {x, -1, 1,  $\frac{1}{\text{intervalspp}}$ }]];
    [Tabelle]

phasedatahigherordercoefficientspp =
  Thread[{xphasehigherordercoefficientspp, yphasehigherordercoefficientspp}];
    [fädle auf]
coefficient2pp = FindFit[phasedatapp, {poly2, a0 = 1.7176991273088867`*^6, a1 =
    [ermittle Anpassung]
    9.5126857325985704844943689620007003938925129692869990329208409544512`50.*^-10},
    {a0, a1, a2}, w, WorkingPrecision -> 50];
    [Arbeitspräzision]
(*phasedataangularpp= Thread[{xphasepp,yphaseangularpp}]; *)
    [fädle auf]

(*phasepolynomialpp=Fit[phasedatapp,{1.7176991273088867`*^6,w,w^2,w^3},w]; *)
    [passe an]

(*
GDpolypp=D[phasepolynomialpp,{w,1}];
    [leite ab]
GDDpolypp = D[phasepolynomialpp,{w,2}];
    [leite ab]
TODpolypp=D[phasepolynomialpp,{w,3}];
    [leite ab]
TODoverGDDpolypp=TODpolypp/GDDpolypp;

phasepolynomialpp
*)
(*
Plot[phasepp,{w1,w2,w3},PlotLabel->"analytical phase"]
    [stelle Funktion graphisch dar] [Beschriftung der Graphik]
  Plot[phasepolynomialpp,{w,w2,w3}]
    [stelle Funktion graphisch dar]
  GDplot=Plot[GDpp,{w1,w2,w3},PlotLabel->"analytical GD"]
    [stelle Funktion graphisch dar] [Beschriftung der Graphik]
  GDpolyplot=Plot[GDpolypp,{w,w2,w3}]
    [stelle Funktion graphisch dar]
  GDDplot=Plot[GDDpp,{w1,w2,w3},PlotLabel->"analytical GDD"]
    [stelle Funktion graphisch dar] [Beschriftung der Graphik]
  GDDpolyplot=Plot[GDDpolypp ,{w,w2,w3}]
    [stelle Funktion graphisch dar]
*)

w = 0;
 $\Delta w = 0;$ 
(*
N[GDDpp]
    [numerischer Wert]

```

```

numerischer Wert
N[TODpp] *)
numerischer Wert
N[GDDpolypp]
numerischer Wert
N[TODpolypp]
numerischer Wert
N[GDDbookpp]
numerischer Wert
N[TODbookpp]
numerischer Wert
N[GDDpp]
numerischer Wert
N[TODpp]
numerischer Wert
(*
phasevalues=Table[phasepp, {w1,w2,w3,  $\frac{(w3-w2)}{\text{intervalspp}}$ }]
Tabelle

phasepolyvalues=Table[phasepolynomialpp, {w,w2,w3,  $\frac{(w3-w2)}{\text{intervalspp}}$ }]
Tabelle

phaseplot=Plot[phasepolynomialpp, {w,1.81*1015,1.811*1015}]
stelle Funktion graphisch dar
polyphaseplot=Plot[phasepp, {w1,1.81*1015,1.811*1015}]
stelle Funktion graphisch dar
errorplot=Plot[phasepolynomialpp-phasepp[w1=w], {w,w2,w3}]
stelle Funktion graphisch dar
Show[phaseplot,polyphaseplot]
zeige an
Show[GDDplot,GDDpolyplot] *)
zeige an


$$\Delta w = \frac{1}{100} * \Delta w_{up} * x^5;$$

xphasehigherordercoefficientspp = Table[ $\Delta w$ , {x, -1, 1,  $\frac{1}{\text{intervalspp}}$ }]
Tabelle

yphasehigherordercoefficientspp = Table[phasepp, {x, -1, 1,  $\frac{1}{\text{intervalspp}}$ }]
Tabelle

phasedatahigherordercoefficientspp =
Thread[{xphasehigherordercoefficientspp, yphasehigherordercoefficientspp}];
fädle auf
coefficient2pp = FindFit[phasedatapp, {poly2, a0 = 1.7176991273088867`*^6, a1 =
ermittle Anpassung
9.5126857325985704844943689620007003938925129692869990329208409544512`50.*^-10},
{a0, a1, a2}, w, WorkingPrecision -> 50];
Arbeitspräzision

{a0 -> 1.7176991558578973414287680671328590029761904761905 * 106,
a1 -> 9.5126857325985704844943689620007003938925129692870 * 10-10}

```

```
ListPlot[phasedatapp]
```

[\[listenbezogene Graphik\]](#)

```
phasevalues = Table[phasepp, {w1, w2, w3,  $\frac{(w3 - w2)}{\text{intervalspp}}$ }]
```

[\[Tabelle\]](#)

```
N[phasevalues = Table[phasepp, {w1, w2, w3,  $\frac{(w3 - w2)}{\text{intervalspp}}$ }], 20]
```

[\[numerischer Wert\]](#) [\[Tabelle\]](#)

```
N[phasepolyvalues = Table[phasepolynomialpp, {w, w2, w3,  $\frac{(w3 - w2)}{\text{intervalspp}}$ }], 20]
```

[\[numerischer Wert\]](#) [\[Tabelle\]](#)

```
polyphaseplot = Plot[phasepolynomialpp, {w, Δwdown, Δwup}];
```

[\[stelle Funktion graphisch dar\]](#)

```
phaseplot = Plot[phasepp, {Δw, Δwdown, Δwup}, PlotStyle → Black];
```

[\[stelle Funktion graphisch dar\]](#)

[\[Darstellungsstil\]](#) [\[schwarz\]](#)

```
Show[phaseplot, polyphaseplot, PlotRange → All]
```

[\[zeige an\]](#)

[\[Koordinatenb...\]](#) [\[alle\]](#)

```
GDDplot = Plot[GDDpp, {w1, w2, w3}, PlotLabel → "analytical GDD"]
```

[\[stelle Funktion graphisch dar\]](#)

[\[Beschriftung der Graphik\]](#)

```
GDDpolyplot = Plot[GDDpolypp, {w, w2, w3}]
```

[\[stelle Funktion graphisch dar\]](#)

```
Show[GDDplot, GDDpolyplot, PlotRange → All]
```

[\[zeige an\]](#)

[\[Koordinatenb...\]](#) [\[alle\]](#)

## (\* Visualization of Beampath \*)

```
prsfoutpp = Plot[yapexpp + (x - xapexpp) * Tan[α + βpp],
```

[\[stelle Funktion graphisch dar\]](#)

[\[Tangente\]](#)

```
{x, xapexpp, xprsfoutendpp}, PlotStyle → Green];
```

[\[Darstellungsstil\]](#) [\[grün\]](#)

```
xprsfoutendpp := xapexpp + lengthprpp Cos[α + βpp]
```

[\[Kosinus\]](#)

```
yprsfoutendpp := yapexpp + (xprsfoutendpp - xapexpp) * Tan[α + βpp]
```

[\[Tangente\]](#)

```
prsfoutendpp := ListLinePlot[{{xprsfoutendpp, yprsfoutendpp}},
```

[\[listenbezogene Liniengraphik\]](#)

```
PlotMarkers → Automatic, PlotStyle → Green]
```

[\[Markierungen in...\]](#) [\[automatisch\]](#) [\[Darstellungsstil\]](#) [\[grün\]](#)

```
prsfbacksidepp := ListLinePlot[
```

[\[listenbezogene Liniengraphik\]](#)

```
{{xprsfoutendpp, yprsfoutendpp}, {xprsfinedpp, yprsfinedpp}}, PlotStyle → Green]
```

[\[Darstellungsstil\]](#) [\[grün\]](#)

### 6.3 SF10 Prisma und 1250 Linien/mm Gitter: Dispersion in Abhängigkeit freier Parameter

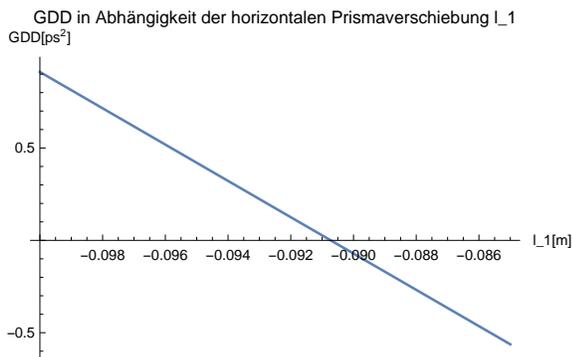


Abbildung 28

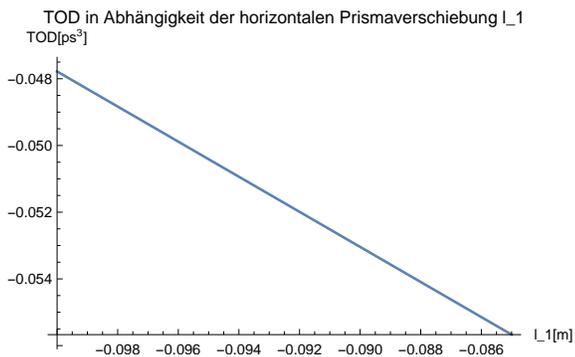


Abbildung 29

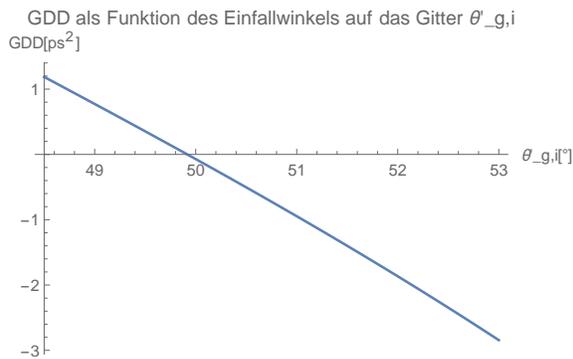


Abbildung 30

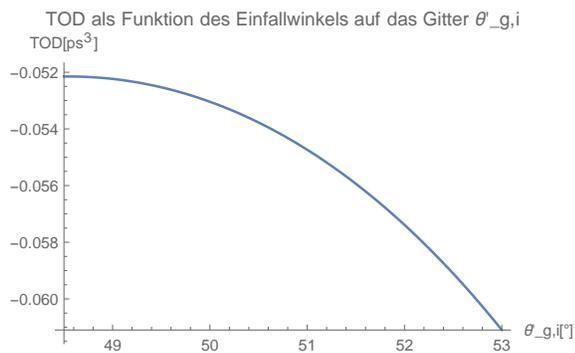


Abbildung 31

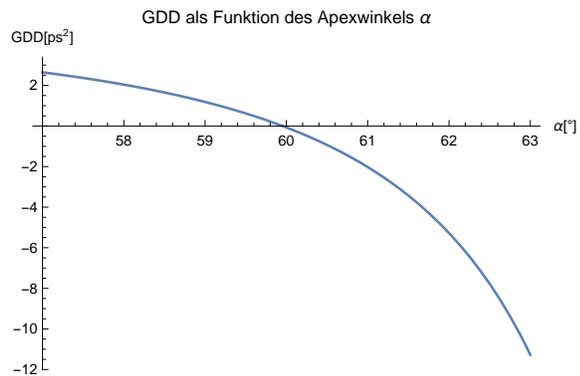


Abbildung 32

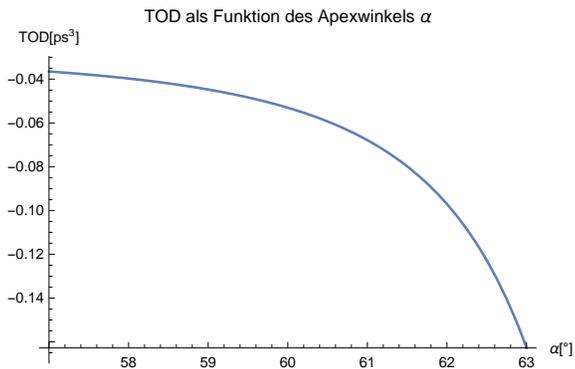


Abbildung 33

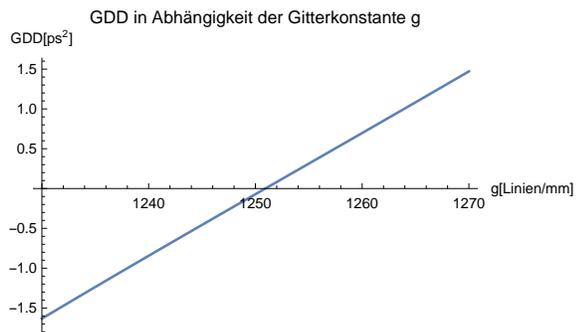


Abbildung 34

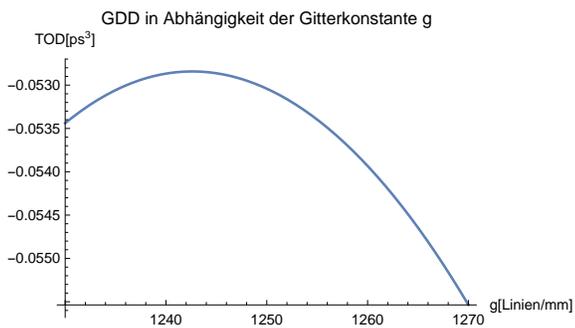


Abbildung 35

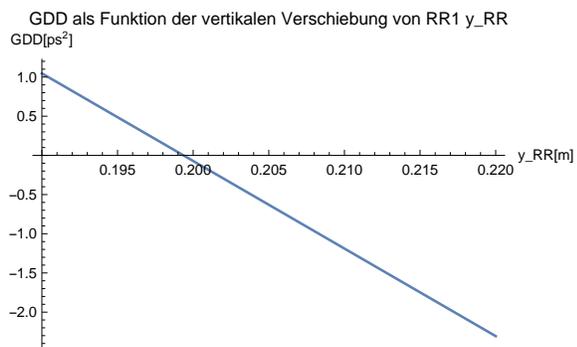


Abbildung 36

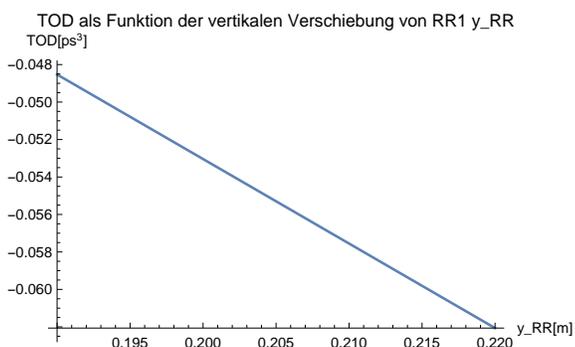


Abbildung 37

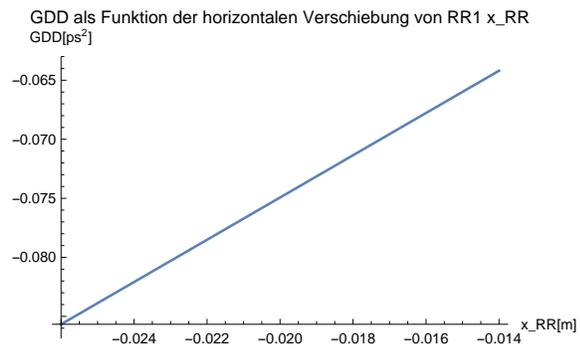


Abbildung 38

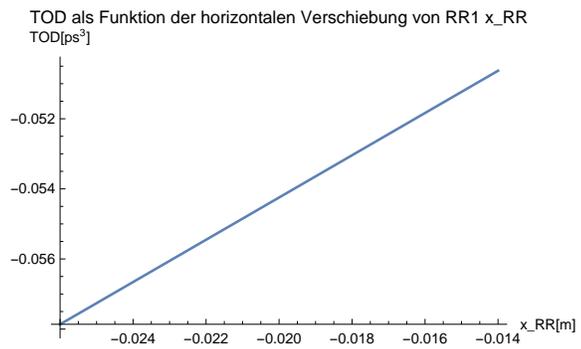


Abbildung 39

## Danksagung

Ich möchte mich bei allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Crespo am Max-Planck Institut für Kernphysik für die Unterstützung bei der Durchführung und dem Schreiben der Bachelorarbeit bedanken.

Mein besonderer Dank geht an...

**Priv.-Doz. Dr. José Ramón Crespo López-Urrutia**, der mir die Möglichkeit gegeben hat, in dieser Gruppe meine Bachelorarbeit zu erstellen. Zudem ist er stets für Rat und Vorschläge ansprechbar gewesen, die hilfreich und aufklärend waren.

**Andrii Borodin**, der bei Fragen, Vorschlägen und Problemen stets ansprechbar war und viele Stunden mit mir über das Mathematica Skript gegrübelt hat.

**Janko Nauta**, für die Beantwortung aller Fragen, die nach anderen Diskussionen offen geblieben sind.

Die weiteren Mitglieder der Gruppe, welche die Zeit am MPI-K, unter Anderem mit viel Kuchen am Kaffeetisch, versüßt und unterhaltsam gemacht haben. Außerdem möchte ich noch im Besonderen Madita und meinen Eltern für die mentale Unterstützung in dieser fordernden Zeit danken.