

Department of Physics and Astronomy
University of Heidelberg

Bachelor Thesis in Physics
submitted by

Jakob Stegmann

born in Leimen (Germany)

2017

Gravitationswellen von Kernkollaps-Supernovae

This Bachelor Thesis has been carried out by Jakob Stegmann at the
Max-Planck-Institut für Kernphysik Heidelberg
under the supervision of
Prof. Dr. Dr. h. c. Manfred Lindner

Abstract The very first direct detection of gravitational waves from a *black hole merger* opened up a new field of observation to astrophysics. In this context, previous studies also examined upcoming core-collapse supernovae in the Local Group of the Milky Way. Strong hints lead to the assumption that they are potential sources of gravitational waves which we could measure with present gravitational wave detectors on earth.

In this work, we review the current knowledge of the theory of core-collapse supernovae. Furthermore, we deliver a summary of the physical description of gravitational waves. Finally, we develop a simple model of a collapsing stellar core which is deformed by rotation into an oblate spheroid. At a distance of $r = 10$ kpc, we could measure linear polarized gravitation waves in order of magnitude $h_{\times} \sim 1 - 3 \cdot 10^{-21}$ on the equatorial plane. We show that the results are in agreement with typical gravitational wave signals from previous core-collapse simulations.

Abstrakt Der erste direkte Nachweis von Gravitationswellen zweier kollidierender Schwarzer Löcher eröffnete der Astrophysik ein neues Feld der Beobachtung. In diesem Zusammenhang untersuchten bisherige Arbeiten auch künftige Kernkollaps-Supernovae in der Lokalen Gruppe der Milchstraße. Es besteht Grund zur Annahmen, dass diese potentielle Quellen von Gravitationswellen sind, die mit unseren gegenwärtigen Gravitationswellendetektoren auf der Erde messbar wären.

In dieser Arbeit geben wir einen Überblick der derzeitigen Kenntnisse zur Theorie von Kernkollaps-Supernovae. Des Weiteren liefern wir eine Zusammenfassung der physikalischen Beschreibung von Gravitationswellen. Schließlich entwickeln wir ein simples Modell eines kollabierenden stellaren Kerns, der durch Rotation oblat sphäroidisch deformiert ist. In einer Entfernung $r = 10$ kpc würden wir in der Äquatorebene linear polarisierte Gravitationswellen der Größenordnung $h_{\times} \sim 1 - 3 \cdot 10^{-21}$ messen können. Wir zeigen Übereinstimmungen mit typischen Gravitationswellensignalen bisheriger Kernkollaps-Simulationen.

Inhaltsverzeichnis

1	Kernkollaps-Supernovae	1
1.1	Grundlegende Sternphysik	1
1.1.1	Hydrostatisches Gleichgewicht	2
1.1.2	Entartetes Elektronen-Gas	3
1.1.3	Chandrasekhar-Massenlimit	5
1.2	Späte Entwicklung massereicher Sterne	7
1.3	Gegenwärtiges Paradigma des Kernkollapses	8
1.3.1	Beginn des Kollapses	8
1.3.2	Neutrino-Einfang	11
1.3.3	Schock-Erzeugung und -Stagnation	13
1.3.4	Schock-Wiederbelebung	14
1.3.5	Explosion	18
1.4	Klassifizierung	18
1.5	Beobachtungsrate	21
2	Gravitationswellen	23
2.1	Einsteinsche Feldgleichungen	23
2.2	Linearisierung für schwache Gravitationsfelder	24
2.3	Einsteinsche Feldgleichungen für schwache Gravitationsfelder	26
2.4	Lösung der homogenen Wellengleichung im Vakuum	28
2.4.1	Transversal-spurfreie Eichung	28
2.5	Erzeugung von Gravitationswellen in der linearisierten Theorie	32
2.6	Interferometrische Detektoren	36
3	Gravitationswellen einer Kernkollaps-Supernova	40
3.1	Abschätzung der Größenordnung	40
3.2	Computersimulationen	41
3.3	Modellrechnung: Sphäroidischer Kernkollaps	43
3.4	Diskussion	52

Konventionen

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Gravitationskonstante	$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Reduziertes Plancksches Wirkungsquantum	$\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
Masse unserer Sonne	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Atomare Masseneinheit	$m_u = 1,661 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Zur Notation: Griechische Indizes laufen von 0 bis 3 und lateinische Indizes von 1 bis 3. 0 ist die Zeitkomponente des Vierervektors multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c . 1, 2 und 3 sind die räumlichen Komponenten. Es wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Partielle Ableitungen $\partial/\partial x_{\mu}$ und $\partial/\partial x^{\mu}$ eines Tensorfeldes $T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_n}$ werden als $T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_n},_{\mu}$ beziehungsweise $T^{\nu_1\nu_2\dots\nu_n,\mu}$ dargestellt. Ableitungen nach der Zeitkomponente werden häufig mit einem Punkt über der Größe gekennzeichnet. Die Komponenten der Minkowski-Metrik sind $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1, +1, +1)_{\mu\nu}$.

Besondere Einheiten sind $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$, $1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m}$ und $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ kg A}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

Das Subjektpronomen steht in der ersten Person Plural, wengleich der Autor diese Arbeit selbstständig verfasst hat.

Einleitung

Eine Kernkollaps-Supernova terminiert das Leben eines massereichen Sterns mit initialer Masse $M \gtrsim 8 M_{\odot}$. In seiner späten Entwicklung akkretiert der stellare Kern sukzessiv die Produkte nuklearen *Schalenbrennens*, bis er gravitativ instabil wird und kontrahiert. Wenn der stellare Kern dabei nukleare Dichten erreicht und inkompressibel wird, kehrt sich seine Implosion in Bruchteilen von Sekunden in eine Explosion um. Schon ein kleiner Anteil ($10^{50} - 10^{51}$ erg) der freigewordenen gravitativen Bindungsenergie reicht aus, um den Stern zu zerreißen. Ein solches Ereignis kann die absolute Leuchtkraft einer ganzen Galaxie überschreiten, wengleich der größte Anteil der Energie ($\sim 10^{53}$ erg) von Neutrinos fortgetragen wird [1].

Seitdem Baade und Zwicky im Jahr 1934 nach Beobachtungen von Supernovae diese als das Ende massereicher Sterne vorschlugen und ihren kompakten Überrest als Neutronenstern identifizieren wollten [2], ergaben weitere Beobachtungen und theoretische Arbeiten ein detaillierteres Bild des Explosionsmechanismus, das heutzutage von intensiven Computersimulationen unterstützt wird [3]. Gleichwohl existieren nach wie vor ungeklärte Fragen, die möglicherweise erst durch zukünftige Beobachtungen beantwortet werden können. Da aber die Mechanismen im stellaren Zentrum wegen der Intransparenz der außenliegenden Sternschichten optisch nicht beobachtet werden können, stellen Neutrinos und möglicherweise Gravitationswellen die einzigen direkten Botschafter aus dem stellaren Kern dar. Gravitationswellen werden von zeitlich variierenden Massenquadrupolmomenten erzeugt und könnten daher die Dynamik des stellaren Kerns unmittelbar abbilden. Unsere Absicht ist es, die hierbei involvierte Physik zu verstehen und Vorhersagen treffen zu können, die mit künftigen Beobachtungen verglichen werden können.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 1 werden die grundlegenden physikalischen Prinzipien angerissen, die für die späte Entwicklung eines Sterns relevant sind. Das gegenwärtige Paradigma des Kernkollapses wird erläutert und ein Überblick der spektralen Klassifizierung von Supernovae und der zu erwartenden Beobachtungsrate in der Lokalen Gruppe gegeben.

Kapitel 2 behandelt die Theorie der Gravitationswellen. Die Einsteinschen Feldgleichungen werden als Ausgangspunkt einer Linearisierung für schwache Gravitati-

onsfelder genommen, aus der sich eine inhomogene Wellengleichung ableitet. Deren Lösung wird im Kontext der Erzeugung, Propagation und Detektion von Gravitationswellen diskutiert.

Schließlich behandeln wir in Kapitel 3 Gravitationswellen, die von einer Kernkollaps-Supernova emittiert werden könnten. Wir liefern eine grobe Abschätzung der Größenordnung und entwickeln ein simples Modell eines sphäroidischen Kernkollapses, dessen Emission mit Resultaten bisheriger Computersimulationen verglichen wird. Schließlich folgt eine kritische Diskussion der Resultate.

Kapitel 1

Kernkollaps-Supernovae

1.1 Grundlegende Sternphysik

Ein Stern ist ein großer, heißer Gasball, welcher in der gravitativen Fragmentation einer Gaswolke im interstellaren Medium entsteht. Die Entwicklung eines Sterns wird durch das Ringen zwischen dem nach innen gerichteten Gravitationsdruck und nach außen gerichteter Drücke bestimmt, die je nach Entwicklungsstadium vom Gas-, Strahlungs- oder Entartungsdruck dominiert werden. Die längste Zeit seines Lebens, etwa $t_H \propto (M/M_\odot)^{-3} \cdot 10^{10} \text{ yr}$ [4], befindet sich ein regulärer Stern auf der Hauptreihe des Hertzsprung-Russel-Diagramms und im hydrostatischen Gleichgewicht. In dieser Zeit kompensieren exergene Fusionsprozesse von Wasserstoff zu Helium die Strahlungsverluste des Sterns und erhalten einen Zustand der Stabilität. Dieses sogenannte „nukleare Brennen“ des Wasserstoffs erfordert in hinreichend großen Raten eine kinetische Mindestenergie der Wasserstoffkerne von $E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_B T \approx 10^3 \text{ eV}$. Die hierfür notwendigen Temperaturen werden im heißen Zentrum des Sterns erreicht und lösen die Wasserstofffusion mittels *pp-Kette* beziehungsweise *CNO-Zyklus* aus [4].

Nach der Zeit t_H hat der Stern seinen zentralen Wasserstoffvorrat verbraucht und kann die radiativen Verluste nicht länger ausgleichen. Der stellare Kern beginnt zu kontrahieren. Infolgedessen steigen zentrale Massendichte und Temperatur. Die Kerne massereicher Sterne können dann ein temporäres hydrostatisches Gleichgewicht durch die Fusion schwerer Elemente bis Eisen aufrecht erhalten. Wenn diese Energiequelle versiegt, kontrahieren auch die Kerne solcher Sterne.

In der Natur existieren für den stellaren Kern zwei essentielle Dichtelimits, die das späte Schicksal eines Sterns determinieren. *Erstens* liefert der Entartungsdruck der Elektronen eine obere Grenze für die zentrale Stabilität. Ein masseärmerer (Hauptreihen-)Stern ($M \lesssim 8 M_\odot$), dessen zentrale Dichte geringer und dessen Gravitationsdruck kleiner als der Entartungsdruck der Elektronen ist, erreicht einen

stabilen Endzustand als Weißer Zwerg. Der Gravitationsdruck eines schweren Sterns überschreitet den Entartungsdruck und löst einen Kernkollaps aus. Danach ist der Anstieg von zentraler Masse und Dichte während eines Kernkollaps *zweitens* mit dem Erreichen nuklearer Dichten wegen der repulsiven Kräfte des Nukleon-Wechselwirkungspotentials nach oben begrenzt. Diese konsequente Inkompressibilität ist notwendig für die Reflektion der kontraktiven Implosion in eine erfolgreiche Supernova-Explosion [5].

1.1.1 Hydrostatisches Gleichgewicht

Betrachten wir einen sphärisch symmetrischen Stern ohne Rotation. Eine dünne Kugelschale der Dicke dr , die sich am Radius r befindet, hat die Masse

$$dm(r) = 4\pi r^2 \rho dr. \quad (1.1)$$

Damit schließt die Kugel mit Radius r eine Gesamtmasse von

$$m(r) = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (1.2)$$

ein. Im Falle nicht-relativistischer Materie ist $\rho \simeq \rho_0$ (Ruhemassendichte). Im hydrostatischen Gleichgewicht gleichen sich qua Definition Gravitationsdruck und expansive Drücke in jedem Punkt aus. Ein infinitesimales Gaselement, das sich zwischen r und $r + dr$ befindet und eine Fläche dA orthogonal zum Radius abdeckt, hat die Masse $dm = \rho dA dr$. Die gravitative Anziehung zwischen dm und der eingeschlossenen Masse $m(r)$ ist die gleiche, wie wenn $m(r)$ im Zentrum konzentriert wäre. Gravitationskräfte außerhalb liegender Schichten gleichen sich aus. Ein hydrostatisches Gleichgewicht erfordert daher eine expansive Kraft $-[P(r + dr) - P(r)] dA$, die zum Druckgleichgewicht

$$-\frac{dP}{dr} dr dA = \frac{Gm(r)}{r^2} dm, \quad (1.3)$$

beziehungsweise

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho, \quad (1.4)$$

führt. Je nach Temperatur und Dichte wird der Druck P hauptsächlich vom

- Strahlungsdruck $P_{\text{Str}} \propto T^3$,
- Gasdruck $P_{\text{Gas}} = nk_{\text{B}}T \propto T$,

- Entartungsdruck $P_{nr} \propto \rho^{5/3}$ nicht-relativistischer Elektronen

oder

- Entartungsdruck $P_r \propto \rho^{4/3}$ relativistischer Elektronen

aufrecht erhalten [4]. Die unterschiedlichen Regime sind in Abbildung 1.1 dargestellt. Wenn der Kern eines Sterns am Ende seiner hydrostatischen Brennphase kontrahiert, erreicht er schließlich zentrale Temperaturen und Dichten, in denen der Entartungsdruck der Elektronen dominiert.

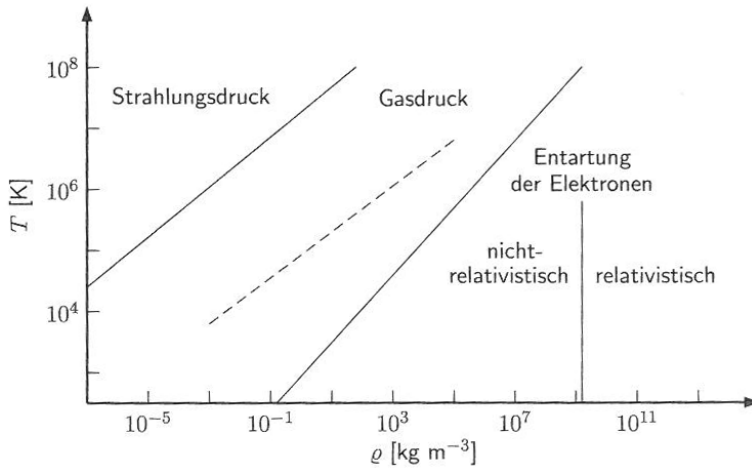


Abbildung 1.1: Regime im Temperatur-Dichte-Diagramm, in denen verschiedene Drücke gegen den Gravitationsdruck dominieren. Die gestrichelte Linie stellt den inneren Bereich unserer Sonne dar. Quelle: [4].

1.1.2 Entartetes Elektronen-Gas

Betrachten wir der Einfachheit halber ein idealisiertes Modell nicht miteinander wechselwirkender Elektronen. In der ionisierten Sternmaterie können die Elektronen als freies Elektronengas genähert werden, in welchem die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Energiezustände der Fermi-Dirac-Statistik genügen:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}. \quad (1.5)$$

Für Elektronen gilt die Heisenbergsche Unschärferelation $\Delta p_x \cdot \Delta x \gtrsim \hbar$. Nimmt nun die zentrale Massendichte zu, werden die Elektronen auf ein kleineres Raumgebiet der Größe l eingeschränkt. Damit wachsen der Fermi-Impuls

$$p_F = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 \gtrsim 3 \frac{\hbar^2}{l^2}, \quad (1.6)$$

die Fermi-Energie

$$E_F := \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (1.7)$$

und die Zustandsdichte der Elektronen:

$$n_e = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (1.8)$$

Wenn die Fermi-Energie E_F viel größer ist als die thermische Energie $E_{\text{therm}} \approx k_B T$, besitzen nahezu alle Energiezustände bis E_F die gleiche Besetzungswahrscheinlichkeit. Ein solches Elektronengas heißt *entartet* [6]. Da wir die Elektronen als ideales Gas betrachten, lässt sich hiermit ein Gasdruck, der sogenannte Entartungsdruck, assoziieren [5]:

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{2}{3h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4}} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \phi(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Hierbei sind $x := p_F/m_e c$ ein dimensionsloser Relativitätsparameter und $\lambda_e = \hbar/m_e c$ die Compton-Wellenlänge des Elektrons. Das Integral wird mit der Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left(x\sqrt{1+x^2} \left(\frac{2x^2}{3} - 1 \right) + \sinh^{-1}(x) \right) \quad (1.10)$$

gelöst [5]. Die Funktion $\phi(x)$ vereinfacht sich erheblich in den Grenzfällen nicht-relativistischer ($x \ll 1$) und relativistischer ($x \gg 1$) Elektronen [5]:

1. Nicht-relativistische Elektronen ($x \ll 1$):

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{15\pi^2} \left(x^5 - \frac{5}{14}x^7 + \frac{5}{24}x^9 \dots \right) \approx \frac{x^5}{15\pi^2}, \quad (1.11)$$

2. Relativistische Elektronen ($x \gg 1$):

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{12\pi^2} \left(x^4 - x^2 + \frac{3}{2} \ln(2x) \dots \right) \approx \frac{x^4}{12\pi^2}, \quad (1.12)$$

Wenden wir uns nun einem stellarem Kern zu. In Regimen, in denen der Entartungsdruck der Elektronen dominiert, trägt vor allem die baryonische Materie, das heißt die Ionen des stellaren Plasmas, wegen ihrer größeren Ruhemasse zur Dichte

ρ bei.* Für eine mittlere Ruhemasse $m_B \approx m_u$ der Baryonen und Υ_e als mittlere Anzahl der Elektronen pro Baryon gilt mit Gleichung (1.8) [5]:

$$\rho = \frac{n_e m_B}{\Upsilon_e} = \frac{x^3}{3\pi^2 \lambda_e^3} \frac{m_B}{\Upsilon_e}. \quad (1.13)$$

Offenbar ist $\rho \propto x^3/\Upsilon_e$ beziehungsweise $x \propto (\rho\Upsilon_e)^{1/3}$. Damit genügt der Entartungsdruck der Elektronen nach (1.9), (1.11) und (1.12) der sogenannten *polytropen Zustandsgleichung*:

$$\boxed{P_e = K\rho^\Gamma}. \quad (1.14)$$

In den beiden Grenzfällen gilt dabei für ρ_0 und die Konstanten K und Γ (Adiabatindex):

1. Nicht-relativistische Elektronen ($x \ll 1$):

$$\rho \ll 10^6 \text{ g cm}^{-3}, \quad \Gamma = \frac{5}{3}, \quad K = 1,0036 \cdot 10^{13} \Upsilon_e^{5/3} \text{ cgs}. \quad (1.15)$$

2. Relativistische Elektronen ($x \gg 1$):

$$\rho \gg 10^6 \text{ g cm}^{-3}, \quad \Gamma = \frac{4}{3}, \quad K = 1,2435 \cdot 10^{15} \Upsilon_e^{4/3} \text{ cgs}. \quad (1.16)$$

Die Dichte $\rho \approx 10^6 \text{ g cm}^{-3} = 10^9 \text{ kg m}^{-3}$ markiert damit die vertikale Trennlinie in Abbildung 1.1.

1.1.3 Chandrasekhar-Massenlimit

Wenn der Entartungsdruck der Elektronen im stellaren Kern ausreicht, um den Gravitationsdruck auszugleichen, erhält der Stern sein hydrostatisches Gleichgewicht. Das lautet dann nach (1.1), (1.4) und der polytropen Zustandsgleichung (1.14):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho. \quad (1.17)$$

*Vernachlässige Energiedichte: $\rho \simeq \rho_0$ [5].

Die Substitutionen

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{n}, \quad \rho = \rho_c \Theta^n, \quad r = a\xi, \quad a = \left[\frac{(n+1)K\rho_c^{1/n-1}}{4\pi G} \right]^{1/2}, \quad (1.18)$$

wobei $\rho_c = \rho(r=0)$ die zentrale Dichte ist, überführen diese in dimensionsloser Form in die wohlbekannte *Lane-Emdem-Gleichung*:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} = -\Theta^n. \quad (1.19)$$

Numerische Integration liefert mit den Randbedingungen $\Theta(0) = 0$ und $\Theta'(0) = 0$ für $n < 5$ monoton fallende Lösungen, die eine Nullstelle $\xi = \xi_1$ aufweisen, welche physikalisch mit dem Radius des Kerns korrespondiert [5]:

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(1-n)/2n} \xi_1. \quad (1.20)$$

Damit wird die Gesamtmasse (1.2):

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \xi^2 \Theta^n d\Theta \\ &= -4\pi a^3 \rho_c \int_0^{\xi_1} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right) d\xi \\ &= 4\pi a^3 \rho_c \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)| \\ &= 4\pi \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{(3-n)/2n} \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Betrachten wir die Konstanten der numerischen Lösung für $n = 3$, das heißt $\Gamma = 4/3$ (relativistische Elektronen):

$$\xi_1 = 6,89685, \quad \xi_1^2 |\Theta'(\xi_1)|. \quad (1.22)$$

Hier verschwindet ρ_c in (1.21) und für die Gesamtmasse folgt mit (1.16):

$$\boxed{M = 1,457(2\Upsilon_e)^2 M_\odot.} \quad (1.23)$$

Dies stellt die maximale Masse eines stellaren Kerns dar, bei der ein Stern sein hydrostatisches Gleichgewicht durch Entartungsdruck der Elektronen aufrecht erhalten kann. Diese Grenze heißt Chandrasekhar-Massenlimit M_{Ch} . Wenn ein Stern dieses überschreitet, kollabiert er unter seinem Gravitationsdruck. Insbesondere können Weiße Zwerge keine größere Masse als M_{Ch} besitzen.

1.2 Späte Entwicklung massereicher Sterne

Nach etwa 10^7 Jahren hat ein massereicher Stern ($M \gtrsim 10 M_{\odot}$) seinen zentralen Wasserstoffvorrat zu Helium fusioniert [7]. Infolgedessen kann der Stern seine Strahlungsverluste nicht mehr ausgleichen und sein Kern beginnt zu kontrahieren. Gemäß Virial-Theorem geht mit einer Kontraktion des stellaren Kerns eine Erhöhung der zentralen Temperatur einher. Damit können höhere Fusionsprozesse gemäß Tabelle 1.1 zünden [7] und ein erneutes temporäres hydrostatisches Gleichgewicht aufrechterhalten.

Fusionsmaterial	Nukleosynthese	T [10^6 K]	ρ [g cm^{-3}]	Brenndauer
H	Wasserstoffbrennen	40	6	10 Mio. Jahre
He	Heliumbrennen	190	$1,1 \cdot 10^3$	1 Mio. Jahre
C	Kohlenstoffbrennen	740	$2,4 \cdot 10^5$	10.000 Jahre
Ne	Neonbrennen	1600	$7,4 \cdot 10^6$	10 Jahre
O	Sauerstoffbrennen	2100	$1,6 \cdot 10^7$	5 Jahre
Si	Siliziumbrennen	3400	$5,0 \cdot 10^7$	1 Woche

Tabelle 1.1: Die verschiedenen Fusionsprozesse und ihre Brenndauer in einem massereichen Stern mit $M = 18 M_{\odot}$ [7].

Die thermische Energie wird auch an die äußeren Schichten abgegeben und löst hier das sogenannte *Schalenbrennen* aus. Nachdem im Zentrum der gesamte Siliziumvorrat schließlich zu Eisen fusioniert ist und weil kein höherer exergener Fusionsprozess mehr existiert, hat der Stern das endgültige Ende seiner hydrostatischen Brennphase im Zentrum erreicht. Er hat dann den typischen Aufbau konzentrischer Schalen entwickelt, welche die Produkte seiner nuklearen Fusion enthalten (von außen nach innen: nicht fusionierter Wasserstoff, Helium, Kohlenstoff, Neon, Sauerstoff, Silizium). Diese zwiebelartige Struktur ist in Abbildung 1.2 schematisch dargestellt. Im Innern hat sich ein kompakter Eisen-Kern gebildet, der in seinen Eigenschaften einem heißen Weißen Zwerg ähnelt. Typischerweise ist der Eisen-Kern auf einen Durchmesser von ~ 3000 km kontrahiert und besitzt eine zentrale Massendichte von $\rho_0 \approx 10^9 \text{ g cm}^{-3}$ [1]. Dabei hat sich der Kern auf eine Zentraltemperatur von $T_c \approx 10^{10}$ K aufgeheizt, bei der die Entropie pro Nukleon um 0,7 bis 1,0 k_B liegt [1]. Das Elektron-Baryon-Verhältnis ist $\Upsilon_e \approx 0,45$ [1]. Außerhalb des Kerns

fällt die Dichte schnell ab, weshalb hier die dynamische Zeitskala

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \quad (1.24)$$

wesentlich größer als im Innern ist. Damit bleiben die äußeren Schichten des Sterns weitestgehend unbeeinflusst von der Dynamik des Kerns [8].

Die Masse des Kerns ist nahe dem Chandrasekhar-Massenlimit

$$M_{\text{Ch}} = 1,457(2\Upsilon_e)^2 M_{\odot}. \quad (1.25)$$

Wegen eines starken Temperaturgradienten wird die Wärme im Kern vor allem durch starke Konvektionsströme transportiert. Infolgedessen ist der stellare Kern in seiner Zusammensetzung relativ homogen [5].

Für massereiche Sterne mit $8 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10 M_{\odot}$ gelten ähnliche Bedingungen, doch entwickeln sie keinen vollen Eisen-, sondern einen kompakten ONeMg-Kern aus Sauerstoff, Neon und Magnesium [9].

Onion-shell structure of pre-collapse star

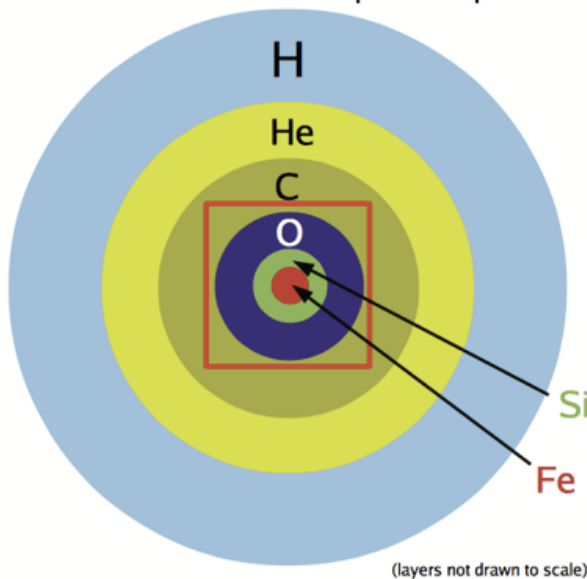


Abbildung 1.2: Zwiebelartige Struktur eines massereichen Sterns am Ende seiner hydrostatischen Brennphase. Das *Schalenbrennen* hinterlässt von innen nach außen immer leichtere Produkte nuklearer Fusion. Im Innern bildet sich ein kompakter Eisen-Kern. Quelle: [1].

1.3 Gegenwärtiges Paradigma des Kernkollapses

1.3.1 Beginn des Kollapses

Die Stabilität des stellaren ONeMg- oder Fe-Kerns ist äußerst empfindlich zur Entropie der Elektronen und deren Verhältnis Υ_e [10]. Mit gesteigener Zentraltemperatur

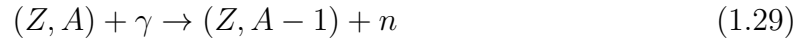
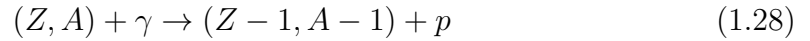
und -dichte können zwei physikalische Prozesse starten, welche die dynamische Instabilität des Kerns auslösen: In Sternen mit $M \gtrsim 10 M_\odot$ dominieren **partielle Photodissoziationsreaktionen**, wie zum Beispiel:



Die Energie des Gammaphotons muss hierfür mindestens

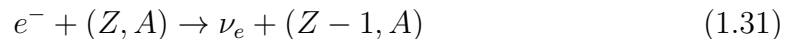
$$Q = c^2(13m_\alpha + 4m_n - m_{\text{Fe}}) = 124,4 \text{ MeV} \quad (1.27)$$

betragen. Im Allgemeinen werden beliebige schwere Kerne im stellaren Zentrum auf diese Weise endotherm in freie Protonen oder Neutronen dissoziiert:



Infolge des Energieverbrauchs sinkt der thermische Druck entgegen der Gravitation.

In weniger massereichen Sternen mit $8 M_\odot \lesssim M \lesssim 10 M_\odot$ dominieren **inverse Betaprozesse (Elektronen-Einfänge)**, die zur sukzessiven Neutronisation des stellaren Kerns führen [5] [11]. Denn in der heißen Kernmaterie ist die Energie der relativistischen Elektronen hinreichend groß ($\sim \text{MeV}$), um die Coulomb-Barriere freier Protonen oder schwerer Kerne überwinden zu können [9]:



Dabei steigt der Anteil freier Neutronen und neutronenreicher Kerne im stellaren Zentrum (Neutronisation). Gleichzeitig sinkt der Anteil der Elektronen Υ_e , und die hierbei produzierten Elektron-Neutrinos ν_e verlassen den Kern ungehindert. Insgesamt findet also eine *Deleptonisierung* des Kerns statt.

Die beiden Prozesse, Photodissoziation und inverser Betaprozess, reduzieren den thermischen Druck beziehungsweise den Entartungsdruck der Elektronen. Infolgedessen überschreitet der Kern effektiv das Chandrasekhar-Massenlimit, wird dynamisch instabil und kollabiert unter seinem Gravitationsdruck (Abbildung 1.3, oben links).

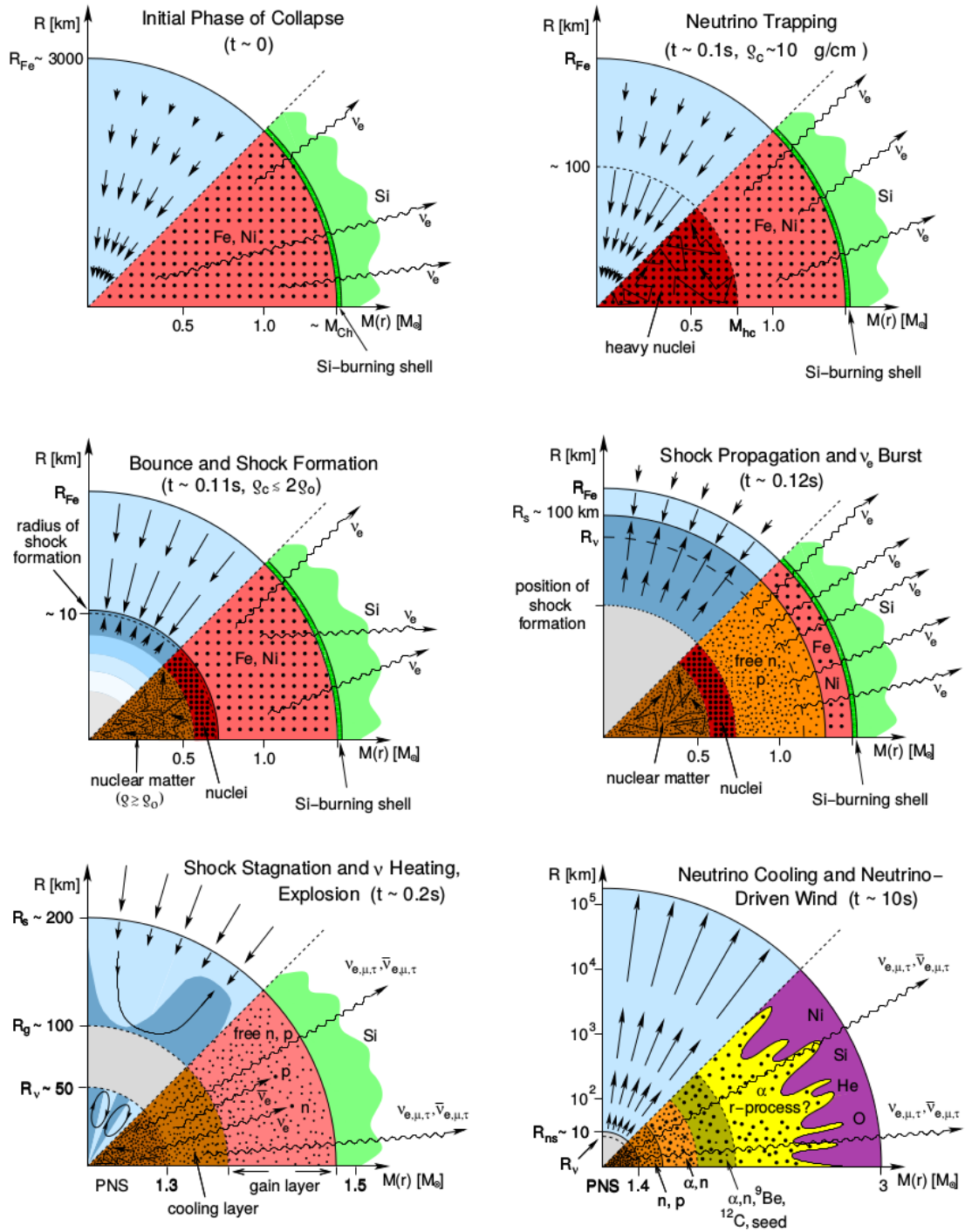


Abbildung 1.3: Gegenwärtiges Paradigma einer Kernkollaps-Supernova im *Neutrino-Mechanismus*. Der obere Kreissektor eines jeden Zeitpunktes illustriert die Dynamik mit Pfeilen, welche die Geschwindigkeit anzeigen. Im unteren Kreissektor wird der nukleare Aufbau und die wesentlichen schwachen Prozesse dargestellt. R_{Fe} , R_S , R_g , R_{NS} und R_ν kennzeichnen auf der Ordinate die Radii des Eisenkerns, der Schockwelle, den *gain*-Radius und die Radii des Neutronensterns beziehungsweise der *Neutrinosphäre*. Quelle: [10].

1.3.2 Neutrino-Einfang

Elektron-Neutrinos werden während des Kollapses in großer Zahl durch die Neutronisationsprozesse (1.30) und (1.31) erzeugt. Die Neutrinos propagieren ungehindert durch das stellare Material, bis dieses auf zentrale Dichten von $\sim 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$ kollabiert ist und die mittlere freie Weglänge so klein wird, dass Neutrinos nur noch diffusiv entweichen können [9]. Die hierfür wichtigsten Streu- und Absorptionsprozesse sind [1] [5]:

1. Streuung an freien Nukleonen,

$$\nu + n \rightarrow \nu + n, \quad (1.32)$$

$$\nu + p \rightarrow \nu + p, \quad (1.33)$$

2. Kohärente Streuung an schweren Kernen ($A > 1$),

$$\nu + (Z, A) \rightarrow \nu + (Z, A), \quad (1.34)$$

3. Beta-Prozess,

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-, \quad (1.35)$$

4. Streuung an Elektronen,

$$e^- + \nu \rightarrow e^- + \nu. \quad (1.36)$$

Die kohärente Streuung an schweren Kernen (1.34) ist bei den im stellaren Kern herrschenden Dichten dominant [5]. Die Bewegung der Neutrinos wird signifikant durch Streuung beeinflusst, wenn ihre diffusive Zeitskala

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{\lambda_{\text{koh}} N_{\text{Str}}}{c} \quad (1.37)$$

und die dynamische Zeitskala (1.24) des Kollapses vergleichbar groß werden, wobei λ_{koh} die mittlere freie Weglänge des Neutrinos (bezüglich kohärenter Streuung an schweren Kernen) und $N_{\text{Str}} \gg 1$ die typische Anzahl an Streuungen bis zum Ausbruch aus dem stellaren Kern darstellen. Für letztere gilt bei der ziellosen „Zick-

Zack-Bewegung“ des gestreuten Neutrinos:

$$\lambda_{\text{koh}} N_{\text{Str}} \sim R \Rightarrow \tau_{\text{diff}} \sim \frac{R^2}{c\lambda_{\text{koh}}}, \quad (1.38)$$

wobei R die Ausdehnung des dichten, stellaren Kerns ist. Das Inverse der mittleren freien Weglänge hängt vom Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{kor}}(E_\nu)$ im Kernmaterial und dessen Massendichte ab. Für einen Kern aus reinem ^{56}Fe würde dann etwa gelten [5]:

$$\tau_{\text{diff}} \sim 0,08 \left(\frac{\rho}{10^{12} \text{ g cm}^{-3}} \right) \text{ s}. \quad (1.39)$$

Der Vergleich mit (1.24),

$$\tau_{\text{dyn}} \sim 4 \cdot 10^{-3} \left(\frac{\rho}{10^{12} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \text{ s}, \quad (1.40)$$

führt auf

$$\tau_{\text{diff}} \sim \tau_{\text{dyn}} \Rightarrow \rho = 1,4 \cdot 10^{11} \text{ g cm}^{-3}. \quad (1.41)$$

Ab einer Dichte von $\rho_{\text{trap}} \sim 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$ sind die Neutrinos dann im stellaren Kern effektiv „gefangen“ (Abbildung 1.3 oben rechts).

Dieses Phänomen müsste in der zeitlichen Leuchtkraftentwicklung $L_{\nu_e}(t)$ der Elektron-Neutrinos beobachtbar sein. Wallace et al. [12] simulierten diese für galaktische Kernkollaps-Supernovae unterschiedlicher Massen (Abbildung 1.4). Alle Modelle zeigen einen anfänglichen Anstieg der Leuchtkraftentwicklung auf $L_{\nu_e} \sim 10^{52} - 10^{53} \text{ erg s}^{-1}$. Dieser Anstieg wird durch die Neutrino-Produktion der inversen Beta-Prozesse verursacht, die zur zunehmenden Neutronisation und zum Beginn des Kernkollapses führen (Abschnitt 1.3.1). Anschließend zeigen die Ergebnisse tatsächlich ein lokales Minimum in der Leuchtkraft, das mit dem Neutrino-Einfang assoziiert werden kann, ehe die Leuchtkraft einen starken *Neutrino-Blitz* entwickelt (siehe Abschnitt 1.3.3).

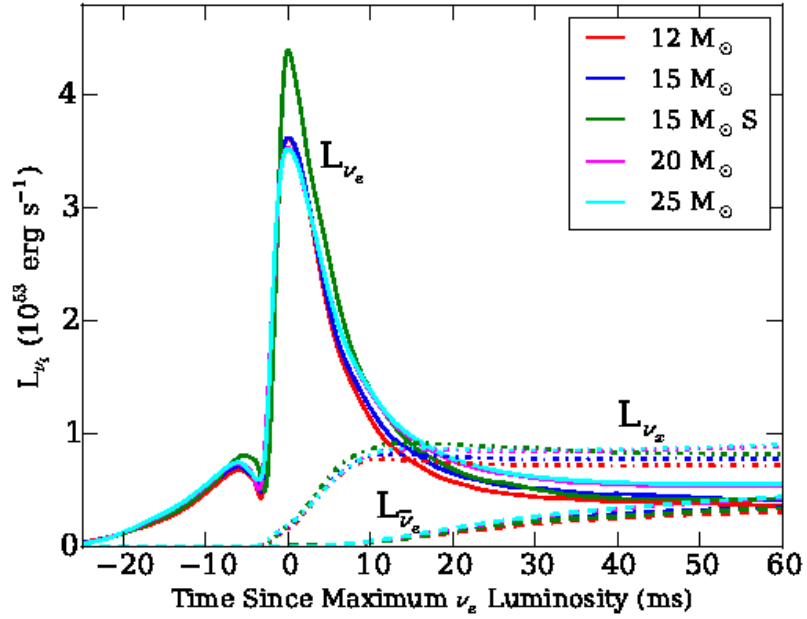


Abbildung 1.4: Zeitliche Entwicklung der Leuchtkraft von Elektron-Neutrinos und -Antineutrinos L_{ν_e} beziehungsweise $L_{\bar{\nu}_e}$ und anderer Flavours L_{ν_x} auf Grundlage der Simulationen von Wallace und Burrows [12]. Das Maximum von L_{ν_e} liegt während des *Neutrino-Blitzes* in allen Modellen mit initialen Sternmassen $12 - 25 M_{\odot}$ etwa 20 Größenordnungen über der Strahlungsleuchtkraft $L_{\odot} \approx 3,8 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$ unserer Sonne. „S“ referenziert auf die Zustandsgleichung nach Shen [13] [14], sonst nach Lattimer und Swesty [15]. Quelle: [12].

1.3.3 Schock-Erzeugung und -Stagnation

Trotz Neutrino-Einfangs kann der Kollaps nicht gestoppt werden, bis der Kern nukleare Dichten ($\rho_0 \approx 2,7 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$) erreicht und der repulsive Anteil des Nukleon-Wechselwirkungspotentials eine weitere Verdichtung schlagartig verhindert [1]. Der Phasenübergang zu homogener nuklearer Materie führt zu einer plötzlichen Versteifung der Zustandsgleichung und erlaubt einen stabilen Gleichgewichtszustand gegen die Gravitation. Ein Proto-Neutronenstern beginnt sich zu bilden, in dem Υ_e wegen des initialen Verlustes von Elektron-Neutrinos auf Werte zwischen 0,25 und 0,27 gesunken ist und dessen Masse infolgedessen unter $\sim 0,5 M_{\odot}$ gefallen ist [9]. Im Kollaps überschießt der innere Kern den Gleichgewichtszustand und einfallende Materie prallt mit voller Wucht zurück in die immer noch supersonisch kollabierende Umgebung (Abbildung 1.3 mittig links). Eine Schockwelle bildet sich, die in Radius und Masse nach außen propagiert. Während sich diese Schockwelle durch den stellaren Kernbereich fortbewegt, dissipiert die kinetische Energie des einfallenden Materials in thermische Energie, heizt das stellare Plasma stark auf und erzeugt in großer Zahl hochenergetische, thermische Gammaquanten. Diese zersetzen die

Eisennuklide der Kernmaterie durch Photodissoziation (1.28) und (1.29) in freie Neutronen und Protonen. Dies geschieht, solange der Radius der Schockwelle kleiner ist als der „Dissoziationsradius“ R_{diss} von Eisen, an dem die Bindungsenergie der Nukleonen etwa gleich der kinetischen Energie im freien Fall im Gravitationspotential der eingeschlossenen Masse M ist [9]:

$$R_{\text{diss}} = \frac{GMm_u}{8,8 \text{ MeV}} \gtrsim 160 \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \text{ km.} \quad (1.42)$$

Gleichzeitig produzieren Elektronen-Einfänge der freien Protonen viele neue Elektron-Neutrinos in der *post-Schock*-Region. Wenn die Schockwelle Kernregionen geringerer Dichten erreicht hat, können die gefangenen Elektron-Neutrinos frei durch die Sternmaterie propagieren und erzeugen einen starken *Neutrino-Blitz* (Abbildung 1.3, mittig rechts), der über wenige ms das Maximum einiger $10^{53} - 10^{54} \text{ erg s}^{-1}$ an Neutrino-Leuchtkraft erzeugt (Abbildung 1.4).

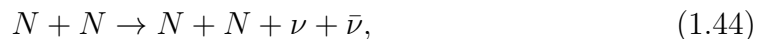
Photodissoziationen und der Verlust der Elektron-Neutrinos führen zum raschen Energieverlust der Schockwelle. Sie verliert pro $0,1 M_\odot$ durchdrungener Masse etwa $1,7 \cdot 10^{51} \text{ erg}$ und kommt innerhalb weniger ms nach $0,5 M_\odot$ schließlich zum Stillstand [9] [16]. Dann hat die Schockwelle nur einen Radius $R_S = 100 - 200 \text{ km}$ erreicht und befindet sich noch tief im Innern des stellaren Kerns [1].

1.3.4 Schock-Wiederbelebung

Frühe Theorien von Kernkollaps-Supernovae favorisierten das Konzept einer *prompten Explosion*, in der die Energie der Schockwelle ausreicht, um den Stern zu zerreißen [17]. Jedoch deuten aktuelle Arbeiten, die von den Ergebnissen aufwendiger Computersimulationen gestützt werden, darauf hin, dass die Schockwelle, wie in Abschnitt 1.3.3 beschrieben, zum Stillstand kommt und sich in eine *Akkretionsfront* verwandelt, durch die hindurch Materie auf den Proto-Neutronenstern fällt [3] [9] [11] (Abbildung 1.3, unten links). Dadurch wächst die Masse des Proto-Neutronensterns um $0,1 - 0,3 M_\odot \text{ s}^{-1}$ [1]. Er kontrahiert nach und nach und kühlt langsam aus durch Emission von Neutrinos und Antineutrinos aller Flavors, die durch thermale Prozesse, wie Elektron-Positron-Annihilation



und Nukleon-Nukleon-Bremsstrahlung



produziert werden und durch die optisch dicken Schichten des stellaren Kerns diffundieren, bis sie den Kern bei geringeren Dichten, der sogenannten *Neutrinosphäre* R_ν , frei verlassen können [3] [9]. Daraus resultiert ein Anstieg der Neutrino- und Antineutrino-Leuchtkraft aller Flavours (Abbildung 1.4). Konvektionsströme im Proto-Neutronenstern können die Leuchtkraft verstärken [3].

Damit die Supernova-Explosion schließlich doch ausgelöst werden kann, muss die angehaltene Schockwelle wiederbelebt werden. Unterschiedliche Mechanismen, die hierfür vorgeschlagen wurden, sind Gegenstand der gegenwärtigen wissenschaftlichen Diskussion.

Der vielversprechendste Ansatz ist der des **Neutrino-Mechanismus**: Vom Beginn des Kernkollapses an bis zum finalen Zustand als Neutronenstern kontrahiert Masse der Größenordnung M_{Ch} von einem Radius ~ 1500 km auf $R_{\text{NS}} = 10 - 20$ km. Die dabei frei werdende gravitative Bindungsenergie ist enorm:

$$E_b \sim -\frac{3}{5} \frac{GM_{\text{NS}}^2}{R_{\text{NS}}} \approx 3,6 \cdot 10^{53} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1,5 M_\odot} \right)^2 \left(\frac{10 \text{ km}}{R_{\text{NS}}} \right) \text{ erg.} \quad (1.45)$$

Dies entspricht einem Energie-Massen-Äquivalent von $\sim 0,15 M_\odot c^2$! Ein Teil dieser Energie wird in kinetische Rotationsenergie und thermische Energie umgewandelt. Astronomische Beobachtungen zeigen, dass die eigentliche Explosionsenergie nur einen Bruchteil von $10^{50} - 10^{51}$ erg beträgt [3]. Über 99% der frei werdenden Bindungsenergie tragen jedoch die Neutrinos und Antineutrinos aller Flavours fort. Es ist daher naheliegend, anzunehmen, dass Neutrinos eine essentielle Rolle in der Schock-Wiederbelebung zukommen könnte. Im Neutrino-Mechanismus geben vor allem Elektron-Neutrinos beziehungsweise -Antineutrinos einen Teil ihrer Energie in der *post-Schock*-Region über ν_e - und $\bar{\nu}_e$ -Einfänge freier Nukleonen ab (Abbildung 1.6):



Diese Prozesse heizen die *post-Schock*-Region auf und erhöhen den Druck hinter der angehaltenen Schockwelle, sodass diese eventuell wieder expandiert und schließlich die Supernova-Explosion auslöst [10]. Der Erfolg hängt von der Konkurrenz von Neutrino-Kühlung zwischen *Neutrinosphäre* bei R_ν und dem sogenannten *gain*-Radius R_g und Neutrino-Heizung zwischen R_g und der Schockwelle bei R_S ab. Der *gain*-Radius R_g ist als radiale Position definiert, an der die Neutrino-Heizraten pro

Nukleon und -Kühlrate gleich groß werden [18]. Die optische Dicke für Elektron-Neutrinos und -Antineutrinos zwischen *gain*-Radius und dem Radius R_S der angehaltenen Schockwelle ist etwa [19]:

$$\tau_e \approx 0,026 \left(\frac{k_B T_\nu}{4 \text{ MeV}} \right)^2 \left(\frac{\dot{M}}{0,1 M_\odot \text{ s}^{-1}} \right) \left(\frac{R_S}{200 \text{ km}} \right)^{3/2} \left(\frac{R_g}{100 \text{ km}} \right)^{-2} \left(\frac{M_{\text{NS}}}{1,5 M_\odot} \right)^{-1/2}. \quad (1.48)$$

Bei typischen Akkretionsraten von $\dot{M} = 0,1 - 0,3 M_\odot \text{ s}^{-1}$ und spektralen Neutrino-Temperaturen $k_B T_\nu = 4 - 6 \text{ MeV}$ ist die optische Dicke $\tau_e = 0,05 - 0,1$ [1]. Das bedeutet, dass etwa 5 – 10 % der Elektron-Neutrinos und -Antineutrinos absorbiert werden (Lambert-Beersches Gesetz).

Dennoch versagt der Neutrino-Mechanismus in eindimensionalen, sphärisch symmetrischen Simulationen, ist aber sehr vielversprechend in multidimensionalen Simulationen [3]. Hier treten starke hydrodynamische Instabilitäten auf, welche die Sphärizität brechen und große Asymmetrien verursachen können (Abbildung 1.5).

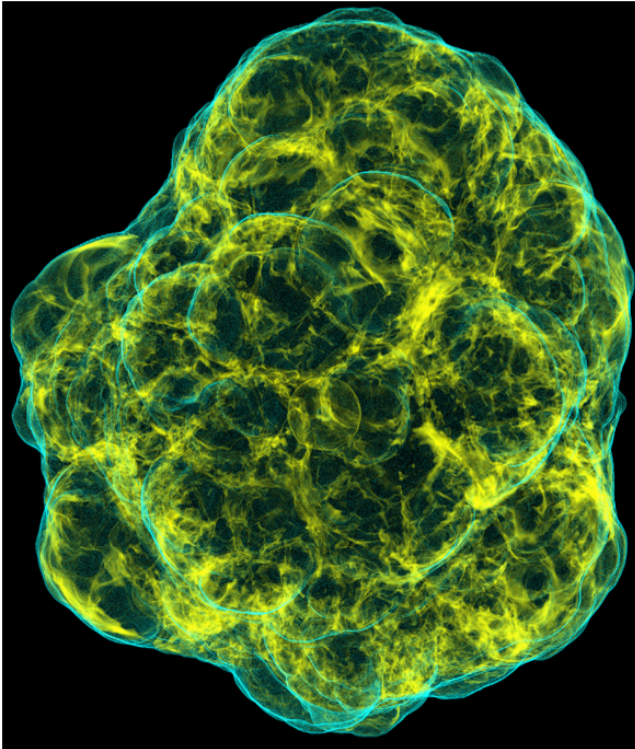


Abbildung 1.5: Asymmetrien in der Simulation einer Kernkollaps-Supernova im *Neutrino-Mechanismus* beim Beginn der Explosion nach [20]. Bereiche hoher spezifischer Entropie sind farblich visualisiert. Damit ist die Front der Schockwelle mit dahinter liegenden heißen, expandierenden Blasen sichtbar. Der Maßstab ist $600 \times 400 \text{ km}$. Quelle: [3].

Auf der einen Seite kann *Rayleigh-Taylor-Instabilität* zu pilzförmigen Strukturen führen, in denen sich das aufgeheizte, spezifisch leichtere Material mit kühlerem Material durchmischt. Vormalig in Richtung Zentrum stürzende Schichten können damit zu mächtigen Aufwärtsbewegungen mit Geschwindigkeiten über 10^4 km/s gezwungen werden [11]. Des Weiteren können starke *Akkretionsstoßinstabilitäten* auftreten, in denen sich kleine Störungen der Akkretionsfront zu starken bipolaren, hantelförmigen Pulsationen entwickeln können, die ähnlich einer *Schwipp-Schwapp-*

Bewegung große Asphärizitäten verursachen können [11]. Beide Instabilitätsprozesse verlängern die Zeit, in der sich das Material in der Heizregion zwischen R_g und R_s befindet, und erhöhen damit die Neutrino-Heizeffizienz [3]. Im Allgemeinen erhöhen sie den Druck hinter der Schockwelle und können die Schock-Wiederbelebung unterstützen. Darüber hinaus würde die Entwicklung solch starker Asymmetrien zum einen das asphärische Aussehen von Supernova-Überresten erklären können. Zum anderen beobachtet man teils extreme Geschwindigkeiten über 1000 km/s, mit denen Neutronensterne durchs interstellare Medium fliegen (Abbildung 1.8). Infolge asymmetrischer Instabilitäten könnten diese während der Supernova-Explosion aus dem Zentrum geschleudert worden sein (*Neutronenstern-Kick*) [3].

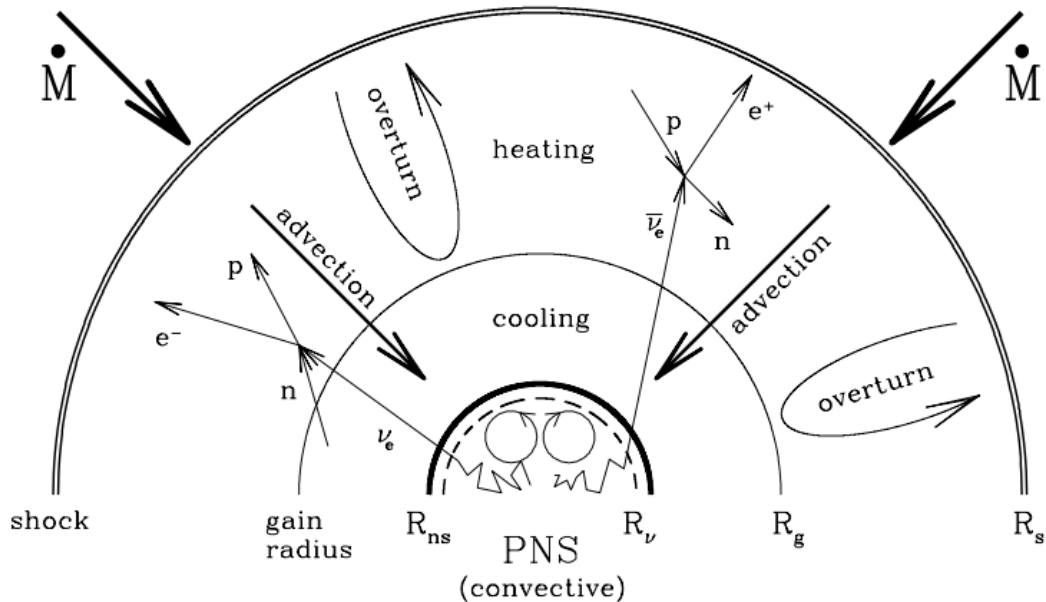


Abbildung 1.6: Zum *Neutrino-Mechanismus*, während die Schockwelle zum Stillstand gekommen ist und sich in eine *Akkretionsfront* verwandelt. Die radialen Beschriftungen sind analog zu Abbildung 1.3. Die Elektron-Neutrinos und -Antineutrinos des Proto-Neutronensterns können einen Teil ihrer Energie in der *post-Schock*-Region abgeben und separieren damit das stellare Kernmaterial in eine Kühl- und Heizregion, zwischen denen sich Material blasenartig austauscht. Währenddessen kann der Proto-Neutronenstern Masse akkretieren. Quelle: [18].

Alternativ wird zum Beispiel für schnell rotierende Proto-Neutronensterne mit Umlaufzeiten von ~ 1 ms ein **magnetohydrodynamischer Mechanismus** vorgeschlagen. Demnach führt während des Kollapses die Entwicklung extremer differentieller Rotation zu starken magnetischen Feldern der Größenordnung $B \sim 10^{15} - 10^{16}$ G, die den Stern durch bipolare Jets entlang der Rotationsachse explodieren lassen [19].

1.3.5 Explosion

Einmal wiederbelebt propagiert die Schockwelle kontinuierlich nach außen an die Sternoberfläche. Es kann je nach Sternradius mehrere Stunden bis Tage dauern bis die Schockwelle aus dem Stern ausbricht und die Supernova-Explosion hell aufzuleuchten beginnt [11]. Daher hinkt das optische Signal dem Neutrino- und Gravitationswellensignal zeitlich hinterher.

Auf dem Weg durch die inneren Schalen des Sterns heizt die Schockwelle das Material auf und verursacht explosive Fusionen von Sauerstoff und Silizium zu Eisen-Gruppenelementen (Fe, Ni, Co) und Si, Ar und Ca. Insbesondere die radioaktive Zerfallskette $^{56}\text{Ni} \rightarrow ^{56}\text{Co} \rightarrow ^{56}\text{Fe}$ liefert über Jahre hinweg eine Energiequelle für die späte Leuchtkurve einer Supernova. Darüber hinaus ist die Menge an produziertem ^{56}Ni ein Indiz für die Explosionsenergie [21]. Die inneren Instabilitäten können sich während der Schockwellen-Propagation zu Asymmetrien auf größeren Skalen entwickeln, in denen die schweren Elemente der inneren Schalen zu größeren Radien befördert werden [19]. Belege für derartige klumpige Durchmischungen beobachtete man im Spektrum von SN1987A. Statt wie erwartet energiereiche Röntgen- und Gammastrahlung radioaktiver Zerfälle erst beobachten zu können, nachdem alle äußeren Sternschalen expandiert und transparent geworden sind, beobachtete man diese bereits wenige Monate nach Beginn der Explosion.

Der Proto-Neutronenstern beginnt nach einigen Sekunden über Neutrino-Emission zu kühlen. Ein Teil der Neutrinos kann von freien Protonen und Neutronen eingefangen werden, sodass diese radial beschleunigt werden. Dieser *neutrinogetriebene Wind* bläst Materie von der Oberfläche des Proto-Neutronensterns in kühlere Regionen, in denen die Nukleonen zu Alpha-Teilchen, Kohlenstoff, Eisen-Gruppenelementen und schließlich auch zu Elementen jenseits von Eisen rekombinieren (Abbildung 1.3, unten rechts).

1.4 Klassifizierung

Kernkollaps-Supernovae terminieren das Leben eines besonders massereichen Sterns ($M \gtrsim 8 M_{\odot}$). Da diese ihren inneren Wasserstoffvorrat in relativ kurzer Zeit verbrauchen ($\sim 10^7$ Jahre), beobachtet man Kernkollaps-Supernovae vor allem in Gebieten aktiver Sternentstehung. Insbesondere existieren keine Beobachtungen in elliptischen Galaxien, in denen kaum neue (massereiche) Sterne erzeugt werden, die in einer Explosion beobachtet werden könnten [16].

Neben der Kernkollaps-Supernova existiert noch ein anderer Typ von Supernovae, der sich in seinem fundamental verschiedenen Explosionsmechanismus un-

terscheidet. Dieser setzt ein Doppelsternsystem voraus, in dem ein kleiner Weißer Zwerg hinreichend viel Masse von seinem Kompagnion-Stern akkretieren kann, so dass er das Chandrasekhar-Massenlimit überschreitet. Wie im Falle der Kernkollaps-Supernovae kontrahiert der Weiße Zwerg infolgedessen. Da kleine Weiße Zwerge allerdings vor allem aus Kohlenstoff und Sauerstoff bestehen, die weit vom Maximum der nuklearen Bindungsenergie entfernt liegen, wird während der Kontraktion genügend Fusionsenergie freigesetzt, um den gesamten Weißen Zwerg in einer thermonuklearen Explosion zu verbrennen [16]. Deshalb findet man im Supernova-Überrest kein kompaktes Objekt, das die Explosion überlebt hätte. Thermonukleare Supernovae (Typ-Ia, siehe unten) eignen sich wegen ihrer charakteristischen Leuchtkurven als Standardkerzen für Entfernungsmessung auf kosmologischen Skalen.

Classification of Supernovae				
	Type Ia	Type Ib	Type Ic	Type II
Spectrum	No Hydrogen			Hydrogen
	Silicon	No Silicon		
Mechanism	Thermonuclear Explosion	Helium	No Helium	Core Collapse
		Strong Variations <small>(Shock Ionization/Recombination; Radioactive Decay at Late Times)</small>		
Lightcurve <small>(powered by)</small>	Generic <small>(Radioactive Decay)</small>			
Neutrinos	Insignificant	ca. 100 x Visible Energy		
Compact Remnant	None	Neutron Star, Black Hole (?)		

Abbildung 1.7: Klassifikationsschema von Supernovae gemäß ihrer spektralen Charakteristika. Die hiermit assoziierten Eigenschaften der Explosionen, Lichtkurven, Neutrinoproduktion und kompakten Überbleibsel sind im Schema ergänzt. Quelle: [22].

Aus historischen Gründen werden Supernovae nicht entsprechend ihres vermuteten Explosionsmechanismus klassifiziert, sondern gemäß ihrer spektralen Charakteristika. Dementsprechend können vier wesentliche Typen von Supernovae identifiziert werden, die in Abbildung 1.7 dargestellt werden. Im Folgenden wird hierzu ein Überblick gegeben, ohne auf die zahlreich existierenden Unterklassen einzugehen:

1. Typ-Ia-Supernovae werden mit thermonuklearen Explosion assoziiert. Sie erreichen für Supernovae die absolut höchsten Werte der Luminosität. In der Explosion wird nur rund $1,5 M_{\odot}$ Materie ausgeschleudert, die mit Expansionsgeschwindigkeiten von circa 10000 km/h schnell ausdünnt und infolgedessen transparent für Strahlung wird [11]. Typ-Ia-Supernovae haben ausgeprägte Silizium- und keine Wasserstoff-Linien. Da ein großer Anteil ($\sim 0,6 M_{\odot}$) ^{56}Ni produziert wird, das durch explosives Siliziumbrennen entsteht, ist die Lichtkurve durch dessen radioaktiven Zerfall zu ^{56}Co (Halbwertszeit $t_{1/2} = 6,1$ Tage) und schließlich zum stabilen ^{56}Fe ($t_{1/2} = 77,3$ Tage) charakteristisch

[16]. Andernfalls würde die Expansion des explodierten Weißen Zwergs adiabatisch abkühlen und die Luminosität wäre weniger spektakulär [22]. Dies ist ein Indiz für eine thermonukleare Explosion eines Weißen Zwergs aus Kohlenstoff und Sauerstoff.

2. Typ-II-Supernovae werden mit dem Kernkollaps-Mechanismus in Verbindung gebracht. Ihre Lichtkurve wird vor allem von der Ionisation und anschließenden Rekombination des Sternhüllenmaterials durch die auswärts propagierende Schockwelle bestimmt. Da sich dieses Material bereits bei großen Radii befindet, kühlt es wegen adiabatischer Expansion nicht allzu stark ab, ehe die optische Dicke hinreichend klein wird, so dass optische/IR Photonen diffundieren können. Daher steht noch genügend Energie der Schock-Welle zur Verfügung, die in Strahlungsenergie umgewandelt werden kann. Wie viel, hängt vom initialen Radius des Sterns ab. Typ-II-Supernovae enthalten prominente Wasserstoff-Linien, die darauf hinweisen, dass in der äußeren Hülle des Sterns genügend Wasserstoff vorhanden gewesen sein muss. Eine Kernkollaps-Supernova produziert nur etwa $0,07 M_{\odot}$ ^{56}Ni , dessen radioaktive Zerfälle den späten Verlauf der Lichtkurve bestimmen [22].
3. Typ-Ib-Supernovae zeigen hingegen keine Wasserstoff-, schwache oder keine Silizium- aber starke Helium-Linien. Der Vorläuferstern ist ein sogenannter *Wolf-Rayet-Stern*, der eine hohe Masse ($\sim 20 M_{\odot}$) besitzt und seine Wasserstoff-Hülle durch Sonnenwinde oder Wechselwirkung mit einem Kompagnion verloren hat. Infolgedessen explodiert er als Kernkollaps-Supernova *ohne* signifikantes Wasserstoffspektrum [11].
4. Typ-Ic-Supernovae unterscheiden sich von Typ-Ib-Supernovae durch die zusätzliche Absenz der Helium-Linien. Dementsprechend hat der Vorläuferstern auch seine Helium-Hülle verloren [11].

Neutronensterne werden durch direkte optische Beobachtung oder Beobachtung pulsarer Radioemission als kompakte Überbleibsel von Kernkollaps-Supernovae ausgemacht (zum Beispiel Pulsar im Krebs-Nebel, Abbildung 1.9). Wenn starke Asymmetrien während der Explosion stattfanden, muss dieser nicht notwendigerweise im Zentrum der abgestoßenen Hülle liegen, sondern kann wie im Fall des Gitternebel (Abbildung 1.8) mit hohen Geschwindigkeiten ins interstellare Medium geschleudert werden [23].

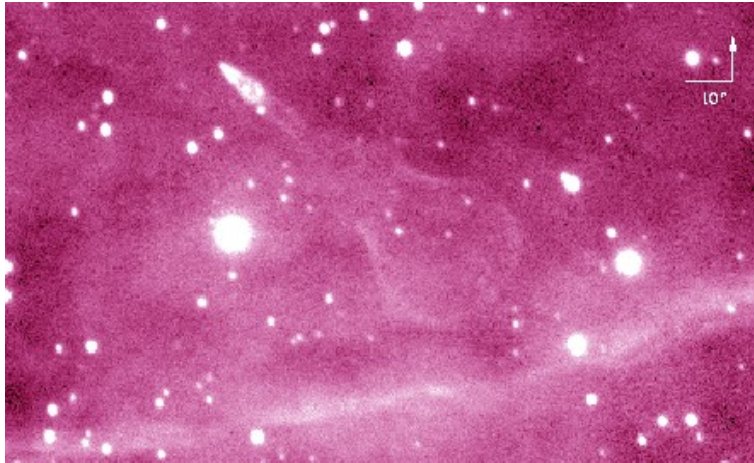


Abbildung 1.8: Aufnahme des Gittarennebels mit dem 5-m Hale Teleskop am Palomar Observatorium, August 1995. Der Nebel wurde von der Bugstoßwelle des Neutronensterns erzeugt, der sich mit etwa 1600 km/s durch das interstellare Medium bewegt. Quelle: Palomar Observatory.

1.5 Beobachtungsrate

Pro Sekunde explodieren etwa 5 bis 10 Supernovae im Universum, von denen mehrere pro Nacht durch automatische astronomische Suchsysteme entdeckt werden [3] [11]. Im letzten Jahrtausend beobachtete die Menschheit nur sechs Supernovae in der Milchstraße (MW) und in unserer Lokalen Gruppe eine in der Großen Magellanschen Wolke (LMC) [16]. Zu diesen zählen unter anderem SN1987A in ~ 50 kpc Entfernung (LMC, 1987 n. Chr., Typ-II) und die Supernova des Krebsnebels in ~ 2 kpc Entfernung (MW, 1006 n. Chr., Typ-II). Letzterer ist in Abbildung 1.9 zu sehen. Unterschiedlichen Schätzungen zur Folge machen die sechs beobachteten Supernovae nur etwa 20 % der galaktischen Supernovae des letzten Jahrtausend aus [16]. Die Mehrheit der Supernovae blieb vermutlich hinter interstellaren Gas- und Staubwolken verborgen oder war nur von der südlichen Hemisphäre der Erde zu beobachten, während dort noch keine astronomischen Beobachtungen durchgeführt wurden.

Wie in Abschnitt 1.4 erwähnt, werden Typ-Ia-Supernovae nicht mit dem Kernkollaps-Mechanismus assoziiert. Insbesondere wegen der Notwendigkeit eines Kompagnions sind diese etwa zehnmalseltener als Kernkollaps-Supernovae. In dieser Arbeit werden Supernovae diesen Typs nicht näher behandelt.

Abschätzungen der Supernova-Raten basieren beispielsweise auf dem Vergleich mit der Supernovahäufigkeit in milchstraßenähnlichen Galaxien, der Entstehungsrate massereicher Sterne [24] und der Suche nach radioaktiven Isotopen wie zum Beispiel ^{26}Al , die in Kernkollaps-Supernovae erzeugt werden [25].

In den Galaxien der Lokalen Gruppe der Milchstraße haben außer der Milchstraße nur die Große und Kleine Magellanische Wolke (LMC/SMC), die Andromedagalaxie (M31), der Dreiecksnebel (M33), die Starburstgalaxie IC 10 und die irregulären Galaxien IC 1613 und NGC 6822 signifikante Kernkollaps-Supernova-

Galaxie	Entfernung [kpc]	KKSN-Rate [(100 yr) ⁻¹]	Quelle
MW	0 – ~ 15	0.50–2.50	[26], [27], [28]
LMC	~ 50	0.10 – 0.50	[26], [28], [29]
SMC	~ 60	0.06 – 0.12	[26], [28], [29]
M31	~ 770	0.20 – 1.20	[26], [28], [30]
M33	~ 840	0.16 – 0.68	[26], [28], [31]
IC 10	~ 750	0.05 – 0.11	[32]
IC 1613	~ 770	~ 0.04	[33], [34]
NGC 6822	~ 529	~ 0.04	[28], [33]

Tabelle 1.2: Galaxien der Lokalen Gruppe mit signifikanten Kernkollaps-Supernova-Raten (KKSN-Rate) und ihre Entfernungen [16].

Raten [16]. Tabelle 1.2 fasst die Raten und Entfernungen dieser Galaxien zusammen.

Alle Schätzungen sind sich einig, dass etwa 2 – 3 Kernkollaps-Supernovae pro Jahrhundert in Entfernungen der Größenordnung ~ 10 kpc entstehen [11]. Seitdem im Jahr 2016 ein direkter Nachweis für Gravitationswellen geliefert wurde, können Astronomen künftig möglicherweise Kernkollaps-Supernovae beobachten, die uns sonst verborgen geblieben wären.

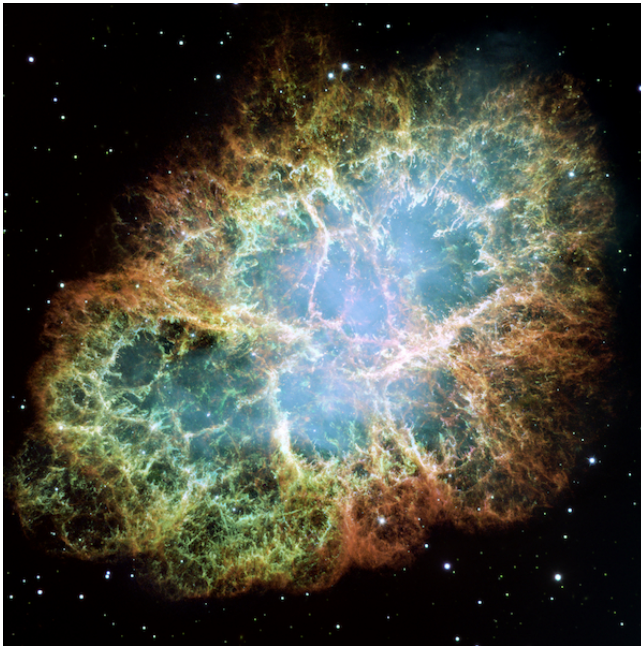


Abbildung 1.9: Aufnahme des Krebsnebels vom Hubble-Weltraumteleskop. Die Aufnahme ist aus 24 Einzelaufnahmen zusammengesetzt. Man sieht die Überreste eines in einer Kernkollaps-Supernova explodierten Sterns, die zum größten Teil ionisiertes Helium, Wasserstoff und zudem Kohlenstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Eisen, Neon und Schwefel enthalten. Diese Supernova wurde 1006 n. Chr. von japanischen und chinesischen Astronomen am Himmel beobachtet. Im Zentrum befindet sich ein Neutronenstern. Quelle: NASA, ESA.

Kapitel 2

Gravitationswellen

Dieses Kapitel liefert eine kompakte Zusammenfassung der Gravitationswellen in *linearisierter Theorie*. Hierfür leiten wir aus den Einsteinschen Feldgleichungen die inhomogene Wellengleichung her und nutzen ihre Eichfreiheiten aus, um die Erzeugung, Propagation und Detektion in einfacher Form berechnen zu können. Das Kapitel orientiert sich dabei weitestgehend an den ausführlichen Arbeiten [35] und [36].

2.1 Einsteinsche Feldgleichungen

Albert Einsteins Theorie der Gravitation, der *Allgemeinen Relativitätstheorie*, liegt das Modell der Raumzeit als eine kontinuierliche, glatte, vierdimensionale Mannigfaltigkeit, auf der eine Metrik definiert ist, zu Grunde. Deren Krümmung wird durch die Einsteinschen Feldgleichungen in eine fundamentale Beziehung zur Energie gesetzt:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Hierbei sind auf rechter Seite $T_{\mu\nu}$ die Komponenten des Energie-Impuls-Tensors. Die linke Seite repräsentiert die Krümmung der Raumzeit durch den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ und den Ricci-Skalar $R = R^\sigma{}_\sigma$. Der Ricci-Tensor ist die Kontraktion $R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} = R_{\mu\nu}$ des Riemannschen Krümmungstensors $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$, welcher über die Christoffel-Symbole $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ den Zusammenhang zur Metrik $g_{\mu\nu}$ herstellt:

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}\Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu}, \quad (2.2)$$

wobei:

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\mu\sigma,\beta} + g_{\sigma\beta,\mu} - g_{\beta\mu,\sigma}). \quad (2.3)$$

Gleichung (2.1) kann durch die Definition des Einstein-Tensors $G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R/2$ in die kompakte Schreibweise

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.4)$$

überführt werden. Man beachte, dass (2.4) aufgrund der Symmetrie von $T_{\mu\nu}$ einen Satz von zehn unabhängigen Gleichungen darstellt.

2.2 Linearisierung für schwache Gravitationsfelder

Nun betrachten wir die Effekte der Gravitation als kleine Störung $h_{\mu\nu}$ erster Ordnung der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

wobei

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.6)$$

Dieser Ansatz heißt *linearisierte Theorie der Allgemeinen Relativitätstheorie* und ist für schwache Gravitationsfelder ($\frac{GM}{c^2 R} \ll 1$) gerechtfertigt, in denen die Raumzeit bei großen Abständen von der felderzeugenden Quelle *asymptotisch flach* wird. Insbesondere die weiten Entfernungen astronomischer Quellen schaffen diese Voraussetzung auf der Erde [35].

Im Folgenden untersuchen wir zwei Transformationen zwischen Koordinatensystemen, in denen (2.5) und (2.6) gelten: die *Hintergrund-Lorentz-Transformationen* und die *Eich-Transformationen*.

Eine *Hintergrund-Lorentz-Transformation* definiert den Wechsel zweier Koordinatensysteme gemäß:

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta x^\beta, \quad (2.7)$$

wobei Λ^α_β einer globalen (das heißt von der Wahl der Koordinaten unabhängigen) Lorentz-Transformation identisch ist. Der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ transformiert dann wegen der Linearität der Lorentz-Transformationen gemäß:

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu g_{\mu\nu} \\ &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \\ &= \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu h_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mit der Transformation $\eta'_{\alpha\beta} = \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu \eta_{\mu\nu}$ der Minkowski-Metrik und der Definition $h'_{\alpha\beta} := \Lambda_\alpha^\mu \Lambda_\beta^\nu h_{\mu\nu}$ erhalten wir schließlich:

$$g'_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}. \quad (2.9)$$

Demgemäß transformiert $h_{\mu\nu}$ wie ein Tensor zweiter Stufe. Mit diesem Resultat können wir uns die Raumzeit in der *linearisierten Theorie* als flachen Minkowski-Raum vorstellen, der durch den Tensor $h_{\mu\nu}$ ergänzt wird.

Eich-Transformationen: Unter einer allgemeine Koordinatentransformation $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha(x)$, in der $x'^\alpha(x)$ einen beliebigen Diffeomorphismus darstellt, transformiert die Metrik gemäß:

$$g_{\alpha\beta} \rightarrow g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

Betrachten wir eine Koordinatentransformation der Form

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x) \quad (2.11)$$

und beschränken uns auf kleine Änderungen im Sinne der Restriktion $|\xi^\beta_{,\alpha}| \ll 1$. Dann gilt offenbar

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} (x'^\mu - \xi^\mu) = \delta^\mu_\alpha - \xi^\mu_{,\alpha} \quad (2.12)$$

und mit Gleichung (2.10) folgt für die transformierte Metrik $g'_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}$:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu} = (\delta^\mu_\alpha - \xi^\mu_{,\alpha})(\delta^\nu_\beta - \xi^\nu_{,\beta})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \quad (2.13)$$

Die Minkowski-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ ist natürlich unabhängig von der Wahl des Koordinaten-

systems (das heißt $\eta_{\alpha\beta} = \eta'_{\alpha\beta}$):

$$\eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta} = (\delta^\mu_\alpha - \xi^\mu_{,\alpha})(\delta^\nu_\beta - \xi^\nu_{,\beta})(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}). \quad (2.14)$$

In Näherung erster Ordnung folgt damit schließlich:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \xi_{\beta,\alpha} - \xi_{\alpha,\beta}, \quad (2.15)$$

wobei ξ_α definiert ist als:

$$\xi_\alpha := \eta_{\alpha\beta}\xi^\beta. \quad (2.16)$$

Die freie Wahl des Koordinatensystems der Einsteinschen Feldgleichungen bedeutet, dass wir einen beliebigen ξ_α wählen können. Wir werden diese Eichfreiheit von Gleichung (2.15) nutzen, um ein Koordinatensystem zu konstruieren, in dem sich die Einsteinschen Feldgleichungen erheblich vereinfachen.

2.3 Einsteinsche Feldgleichungen für schwache Gravitationsfelder

Wegen der Unabhängigkeit der Minkowski-Metrik von der Wahl des Koordinatensystems gilt insbesondere $\eta_{\alpha\beta,\mu} = 0$ und somit $g_{\alpha\beta,\mu} = h_{\alpha\beta,\mu}$. Es liegt daher nahe, den Riemannschen Krümmungstensor (2.2) in Abhängigkeit von $h_{\alpha\beta}$ auszudrücken, um schließlich eine vereinfachte Form der Einsteinschen Feldgleichungen innerhalb der *linearisierten Theorie* zu erhalten. Es ist leicht zu zeigen, dass nach Einsetzung von (2.5) in (2.3) für die erste Ordnung von $h_{\mu\nu}$ folgt:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu}). \quad (2.17)$$

Nun definieren wir

$$h^\mu{}_\beta := \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}, \quad (2.18)$$

$$h^{\mu\nu} := \eta^{\nu\beta}h^\mu{}_\beta, \quad (2.19)$$

die Spur

$$h := h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \quad (2.20)$$

und die Umkehrung

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h, \quad (2.21)$$

für die $\bar{h} := \bar{h}^\alpha{}_\alpha = -h$ gilt. Insbesondere gilt:

$$h^{\alpha\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h = \bar{h}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\bar{h}. \quad (2.22)$$

Durch Einsetzen in (2.17) erhält damit der Einstein-Tensor die Form:

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} + \mathcal{O}(h_{\alpha\beta}^2) \right], \quad (2.23)$$

wobei $\mathcal{O}(h_{\alpha\beta}^2)$ Terme quadratischer und höherer Ordnungen von $h_{\alpha\beta}$ darstellen, welche im Folgenden vernachlässigt werden. Als *linearisierte Feldgleichungen* ergeben sich daher nach (2.4):

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\mu,\alpha}{}^{,\mu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta} \quad (2.24)$$

($\square f := f^{,\mu}{}_{,\mu}$ ist der d'Alembert-Operator einer beliebigen Funktion f). Gleichung (2.24) würde sich in sogenannter *Lorentz-Eichung*

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0 \quad (2.25)$$

erheblich vereinfachen. Mittels *Eich-Transformation* (2.15) kann ein derartiges Koordinatensystem immer konstruiert werden. Hierfür drücken wir (2.15) durch $\bar{h}_{\alpha\beta}$ aus:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi^\rho{}_{,\rho}. \quad (2.26)$$

Insbesondere gilt für die Divergenz von $\bar{h}'_{\alpha\beta}$:

$$\bar{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} - \xi^{\alpha,\beta}{}_{,\beta}. \quad (2.27)$$

Die Transformierte ist also genau dann in *Lorentz-Eichung* $\bar{h}'^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, wenn:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = \xi^{\alpha,\beta}{}_{,\beta} \equiv \square\xi^\alpha. \quad (2.28)$$

Hierbei handelt es sich um eine inhomogene Wellengleichung der Form

$$f^\alpha = \square \xi^\alpha, \quad (2.29)$$

wobei wir die Divergenz mit einer Funktion $f^\alpha(x) \equiv \bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ identifizieren wollen. Im Allgemeinen kann deren Lösung ξ^α analog zur Elektrodynamik mit der Greenschen Methode gefunden werden. Die so gefundene Lösung ξ^α ist nicht eindeutig, sondern lässt additive Terme κ^α mit $\square \kappa^\alpha = 0$ zu. In der *Lorentz-Eichung* vereinfacht sich Gleichung (2.24) dann zu den *linearisierten Feldgleichungen*:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.30)$$

2.4 Lösung der homogenen Wellengleichung im Vakuum

Die *linearisierten Feldgleichungen* sind inhomogene Wellengleichungen, die denen der Elektrodynamik sehr ähnlich sind. Im homogenen Fall (Vakuum: $T_{\alpha\beta} = 0$) vereinfacht sich (2.30) zu:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.31)$$

Gleichung (2.31) wird durch den Exponentialansatz

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} \exp(ik_\lambda x^\lambda), \quad (2.32)$$

gelöst, wobei $k^\nu k_\nu = 0$ gilt. Das bedeutet, Gleichung (2.32) beschreibt ebene Wellen, die entlang von Null-Geodäten (mit Lichtgeschwindigkeit) propagieren. Diese heißen *Gravitationswellen*. Da das Universum größtenteils leer ist, kann der Außenraum einer felderzeugenden Quelle näherungsweise als Vakuum betrachtet und mit dem Ansatz (2.31) beschrieben werden.

2.4.1 Transversal-spurfreie Eichung

Die Lösung von Gleichung (2.29) ist nicht eindeutig, sondern lässt additive Terme κ^α mit

$$\square \kappa^\alpha = 0. \quad (2.33)$$

zu. Wir werden diese Freiheit der *Lorentz-Eichung* nutzen, um weitere vereinfachende Bedingungen an die homogene Lösung (2.32) und ihre sogenannte Polarisationsmatrix $A^{\alpha\beta}$ zu stellen.

Nach (2.33) gilt mit der Definition

$$\kappa_{\alpha\beta} := -\kappa_{\alpha,\beta} - \kappa_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\kappa^{\rho}_{,\rho} \quad (2.34)$$

auch $\square\kappa_{\alpha\beta} = 0$, da der d'Alembert-Operator und die partiellen Ableitungen kommutieren. Damit ist die Koordinatentransformation $x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \kappa^\alpha$ nach (2.26) einfach:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} := \bar{h}_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}. \quad (2.35)$$

Wegen $\square\kappa_{\alpha\beta} = 0$ wird demnach auch die Transformierte $\bar{h}'_{\alpha\beta}$ der Außenraumbedingung (2.31) genügen. Nun nutzen wir unsere Freiheit und wählen als erstes die nullte Komponente κ_0 so, dass die Spur $\bar{h}' = 0$ verschwindet. Dies ist offensichtlich der Fall, wenn gilt:

$$\kappa := \eta^{\alpha\beta}\kappa_{\alpha\beta} = 2\kappa^\alpha_{,\alpha} = -\bar{h}. \quad (2.36)$$

Die Ableitung von κ_0 nach der nullten (zeitlichen) Komponenten muss also

$$\kappa_{0,0} = \frac{1}{2}\bar{h} - \kappa_{1,1} - \kappa_{2,2} - \kappa_{3,3} \quad (2.37)$$

sein. Für ein derart gefundenes κ_0 gilt wegen verschwindender Spur $\bar{h}' = 0$ nach (2.21) $h'^{\alpha\beta} = \bar{h}'^{\alpha\beta}$. Im Folgenden kann daher $\bar{h}'^{\alpha\beta}$ durch $h'^{\alpha\beta}$ ersetzt werden.

Die räumlichen Komponenten κ_i wählen wir so, dass $h'^{0i} = 0$ gilt. Hierfür müssen diese der Gleichung

$$0 = h'_{0i} = h_{0i} - \kappa_{0,i} - \kappa_{i,0} + \eta_{0i}\kappa^{\rho}_{,\rho} \quad (2.38)$$

$$\Rightarrow h_{0i} = \kappa_{0,i} + \kappa_{i,0} - \kappa^{\rho}_{,\rho} \quad (2.39)$$

genügen. Für $h'^{\alpha\beta}$ gilt dann immer noch die *Lorentz-Eichung* (2.25), die in nullter Komponente ($\alpha = 0$)

$$h'_{00},{}^0 + h'_{0i},{}^i = 0 \quad (2.40)$$

liefert. Die Wahl, dass $h'^{0i} = 0$, korrespondiert also mit einem zeitlich konstanten h'_{00} :

$$h'^{00}{}_{,0} = 0. \quad (2.41)$$

Da aber die Komponenten $h'^{\alpha\beta}$ ebene Wellen darstellen, gilt für h'_{00} :

$$h'_{00}{}_{,0} = ik_0 h'_{00} = 0 \Rightarrow h'_{00} = 0. \quad (2.42)$$

Damit dies für beliebige Wellenvektoren mit $k_0 \neq 0$ gilt, muss also auch $h'_{00} = 0$ sein. Insgesamt gilt also $h'_{0\alpha} = 0$. Dann bleiben nur noch die räumlichen Komponenten h'_{ij} übrig, für welche in *Lorentz-Eichung* (2.25) $h'^{ij}{}_{,j} = 0$ gilt.

Auf diese Weise haben wir die *transversal-spurfreie Eichung* definiert, in der zusammengefasst die folgenden Bedingungen gelten:

$$\boxed{h'_{0\alpha} = 0, \quad h' = h'^i{}_i = 0, \quad h'^{ij}{}_{,j} = 0.} \quad (2.43)$$

Im Folgenden schreiben wir h_{ij}^{TT} anstelle von h'_{ij} , um die *transversal-spurfreie Eichung* der Gravitationswellen zu kennzeichnen (TT = *transverse-traceless*).

Betrachten wir nun für einen festen Wellenvektor \vec{k} die ebene Welle $h_{ij}^{\text{TT}} = A_{ij} \exp ik_\lambda x^\lambda$ oder die Superposition mehrerer ebener Wellen mit gleichem \vec{k} . Für die dritte Bedingung $h_{ij}^{\text{TT},j} = 0$ in (2.43) gilt entlang der Ausbreitungsrichtung $\hat{n} = \vec{k}/|\vec{k}|$:

$$h_{ij}^{\text{TT},j} = ik_j h_{ij}^{\text{TT}} = 0 \Rightarrow n^j h_{ij}^{\text{TT}} = 0. \quad (2.44)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei eine Ausbreitung in z -Richtung gegeben, das heißt $\hat{n} = (0, 0, 1)$ ist. Mit (2.44) folgt $h_{i3}^{\text{TT}} = 0$. Insgesamt gilt dann aufgrund der Symmetrie und Spurfreiheit von h_{ij}^{TT} für Ausbreitung in die z -Richtung:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \exp i(k_3 x^3 - k_0 x^0), \quad (2.45)$$

wobei h_+ und h_\times die verbliebenen zwei unabhängigen Elemente der Polarisationsmatrix sind.

h_{ij}^{TT} kann jedoch auch für beliebige Ausbreitungsrichtungen \hat{n} konstruiert werden. Hierfür definieren wir den Tensor

$$P_{ij}(\hat{n}) := \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (2.46)$$

Dieser ist offenbar ein symmetrischer ($P_{ij} = P_{ji}$) und transversaler ($n^i P_{ij} = 0$) Projektor ($P_{ik} P_{kj} = P_{ij}$) mit der Spur $P_{ii} = 2$. Des Weiteren definieren wir hiermit den sogenannten Lambda-Tensor als:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) &:= P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} \\ &\quad + \frac{1}{2} n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2} n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2} n_i n_j n_k n_l. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Der Lambda-Tensor $\Lambda_{ij,kl}$ ist spurfrei bezüglich der Indizes (i, j) und (k, l) :

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0. \quad (2.48)$$

Er ist ein Projektor im Sinne von:

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}. \quad (2.49)$$

Und er ist transversal in allen Indizes:

$$n^i \Lambda_{ij,kl} = n^j \Lambda_{ij,kl} = n^k \Lambda_{ij,kl} = n^l \Lambda_{ij,kl} = 0. \quad (2.50)$$

Sei nun ein $h_{\alpha\beta}$ eine Lösung des Außenraumproblems (2.31) in *Lorentz-Eichung* (2.25). Für die räumlichen Komponenten der zugehörigen transversal-spurfreien Eichung gilt dann:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) h_{kl}. \quad (2.51)$$

Tatsächlich gilt nämlich für die rechte Seite:

- $\Lambda_{ij,kl} h_{kl}$ ist transversal in allen Indizes aufgrund von (2.50).
- $\Lambda_{ij,kl} h_{kl}$ ist spurfrei in den Indizes (i, j) aufgrund von (2.48).
- h_{kl} genügt nach Voraussetzung $h^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$ und löst $\square h^{\alpha\beta} = 0$. Die *Lorentz-Eichung* ist für die einfache Form der Außenraumgleichung notwendig, da

andernfalls nicht verschwindende Terme der linken Seite von (2.24) auftreten könnten. Wegen der Linearität des d'Alembert-Operators folgt automatisch $\square h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} \square h_{kl} = 0$, sodass auch h_{ij}^{TT} das Außenraumproblem (2.31) löst.

Insbesondere impliziert die Eigenschaft (2.48), die Spurfreiheit des Lambda-Tensors, dass (2.51) auch für \bar{h}_{kl} gilt, denn es ist:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} - \frac{1}{2} \Lambda_{ij,kl} \eta_{kl} \bar{h}. \quad (2.52)$$

Und mit (2.48) folgt:

$$h_{ij}^{\text{TT}} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl}. \quad (2.53)$$

2.5 Erzeugung von Gravitationswellen in der linearisierten Theorie

Die Bewegung einer felderzeugenden Quelle kann Gravitationswellen produzieren. In der *linearisierten Theorie* beschränken wir uns auf schwache Felder. Für ein selbstgravitierendes System bedeutet dies zum Beispiel, dass die inneren Geschwindigkeiten typischerweise klein sind ($v \ll c$).

Allgemein ist der Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen beliebiger Massenbewegung die inhomogene lineare Wellengleichung (2.30):

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.54)$$

$\bar{h}_{\alpha\beta}$ sei bereits in der *Lorentz-Eichung* $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$. Gleichung (2.54) ist mit der Greenschen Methode lösbar. Hierfür sei $G(x)$ eine Green's Funktion, welche eine Lösung der Gleichung

$$\square_x G(x - x') = \delta^4(x - x'). \quad (2.55)$$

darstellt. Dann ist die entsprechende Lösung von Gleichung (2.54) durch

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int G(x - x') T_{\mu\nu}(x') d^4 x'. \quad (2.56)$$

gegeben. In transversal-spurfreier Eichung gilt nach (2.53) außerhalb der Quelle:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(x) = \Lambda_{ij,kl} \bar{h}_{kl} = -\frac{16\pi G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\vec{n}}) \int G(x-x') T_{kl}(x') d^4x', \quad (2.57)$$

wobei $\hat{\vec{n}} = \hat{\vec{x}}$. Beachte, dass \bar{h}_{kl} und somit auch der Integrand nur noch die räumlichen Komponenten T_{kl} des Energie-Impuls-Tensors enthält. Natürlich hängt die Green's Funktion von den gegebenen Randbedingungen ab. Für das gegebene Problem einer strahlenden Quelle ist, analog zur Elektrodynamik, die retardierte Green's Funktion eine sinnvolle Lösung:

$$G(x-x') = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta(x_{\text{ret}}^0 - x'^0), \quad (2.58)$$

wobei $x'^0 = ct'$, $x_{\text{ret}}^0 = ct_{\text{ret}}$ und $t_{\text{ret}} = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$. Durch Einsetzen von (2.58) wird Gleichung (2.57) zu:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\vec{n}}) \int \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} T_{kl}(t_{\text{ret}}, \vec{x}') d^3x'. \quad (2.59)$$

Dabei hat die Delta-Funktion in (2.57) die nullte Komponente des Arguments von T_{kl} im Integrand spezifiziert.

Wenn wir nun $|\vec{x}| = r$ als den Abstand der Quelle zum Beobachter (Detektor auf der Erde) und d als typisches Radius der Quelle bezeichnen, können wir $f(\vec{x}') \equiv |\vec{x} - \vec{x}'|$ für $r \gg d$ in eine Taylorreihe um $\vec{x}' = 0$ entwickeln:

$$f(\vec{x}') = |\vec{x} - \vec{x}'| = r - \hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}' + \mathcal{O}(x'^2), \quad (2.60)$$

wobei wegen $r \gg d$ die Näherung $r \approx |\vec{x} - \vec{x}'|$ angenommen wurde und $\mathcal{O}(x'^2)$ im Folgenden vernachlässigt wird. Im Limit $r \gg d$ gilt aber auch $r \gg \hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'$, weshalb wir letzteren Term im Nenner vernachlässigen können. In nullter Ordnung ist dann h_{ij}^{TT} gegeben durch:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{\vec{n}}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'}{c}, \vec{x}' \right). \quad (2.61)$$

Wir drücken T_{kl} mittels seiner Fourier-Transformierten \tilde{T}_{kl} aus:

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'}{c}, \vec{x}' \right) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{T}_{kl}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega(t-r/c)} e^{i\vec{x}' \cdot (\vec{k} - \hat{\vec{n}}\omega/c)}. \quad (2.62)$$

In unserer Betrachtung nicht-relativistischer Geschwindigkeiten $v \ll c$ werden die Frequenzen der Gravitationswellen in der Größenordnung der typischen Frequenz $\omega_0 \sim v/d$ der Massenbewegung innerhalb der Quelle sein. Insbesondere wird für die Wellenlänge λ gelten:

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega_0} \sim 2\pi d \frac{c}{v} \gg d \Rightarrow \lambda \gg d. \quad (2.63)$$

Die Gravitationswellenlänge ist demnach viel größer als die typische Ausdehnung der Quelle. Daher werden interne Massenbewegungen im Detail vernachlässigbar sein und nur Multipolmomente kleiner Ordnung die Emission der Gravitationswellen dominieren.

Im nicht-relativistischen Fall wird $\tilde{T}_{kl}(\omega, \vec{k})$ in einem Frequenzbereich um die typische Frequenz ω_0 mit $\omega_0 d \ll c$ liegen. Gleichzeitig ist $T_{kl} = 0$ für $|\vec{x}'| > d$. Damit gilt für die dominierenden Frequenzen:

$$\frac{\omega}{c} \vec{x}' \cdot \hat{\vec{n}} \lesssim \frac{\omega_0 d}{c} \ll 1. \quad (2.64)$$

Deshalb kann der zweite Exponentialfaktor in (2.62) in eine Taylorentwicklung um $\vec{x}' = 0$ entwickelt werden:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{x}' \cdot (\vec{k} - \hat{\vec{n}}\omega/c)} &= e^{i\vec{x}' \cdot \vec{k}} \cdot e^{-i\vec{x}' \cdot \hat{\vec{n}}\omega/c} \\ &= e^{i\vec{x}' \cdot \vec{k}} \cdot \left[1 - i\frac{\omega}{c} \sum_{k=1}^3 n^k x'^k - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \frac{\omega^2}{2c^2} n_k n_l x'^k x'^l \right]. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Damit entwickelt sich T_{kl} aus (2.62) zu:

$$\begin{aligned} T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\hat{\vec{n}} \cdot \vec{x}'}{c}, \vec{x}' \right) &\approx T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{x'^i n^i}{c} T_{kl,0} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{x'^i x'^j n^i n^j}{c} T_{kl,00} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right). \end{aligned} \quad (2.66)$$

Mit der Definition der ersten Momenta des Energie-Impuls-Tensors

$$S^{ij}(t) := \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}), \quad (2.67)$$

$$S^{ij;k}(t) := \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k, \quad (2.68)$$

$$S^{ij;kl}(t) := \int d^3x T^{ij}(t, \vec{x}) x^k x^l, \quad (2.69)$$

wobei in der Notation die Semikola Indizes des Energie-Impuls-Tensors von den Vektorindizes trennen, ergibt sich auf Grundlage von (2.61) für h_{ij}^{TT} :

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl;m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl;mp} \right]_{\text{@}(t-r/c)}. \quad (2.70)$$

In Bezug zu S^{kl} enthält jede höhere Ordnung (2.68) und (2.69) je einen weiteren Faktor $x^m \sim \mathcal{O}(d)$. Gleichzeitig bringt jede zeitliche Ableitung in (2.70) je einen Faktor $\sim \mathcal{O}(\omega_0)$. $\dot{S}^{kl;m}/c$ und $\ddot{S}^{kl;mp}/c^2$ sind daher um $\mathcal{O}(\omega_0 d/c) \sim \mathcal{O}(v/c)$ beziehungsweise $\mathcal{O}(v^2/c^2)$ kleiner als S^{ij} . Im Limit $v \ll c$ werden höhere Ordnungen daher stark unterdrückt sein! Wir vernachlässigen daher alle höheren Ordnungen und beschränken uns auf S^{kl} . Um S^{kl} physikalisch interpretieren zu können, definieren die ersten Momenta von T^{00} :

$$M := \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}), \quad (2.71)$$

$$M^i := \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i, \quad (2.72)$$

$$M^{ij} := \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, \vec{x}) x^i x^j \quad (2.73)$$

und die ersten Momenta der Impulsdichte T^{0i} :

$$P^i := \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}), \quad (2.74)$$

$$P^{i;j} := \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}(t, \vec{x}) x^j. \quad (2.75)$$

Betrachten wir ein geschlossenes Volumen V mit Rand ∂V , das größer als die Quelle sei. Mit $\dot{M} = \partial M / \partial t = cM_{,0}$ und $T_{\alpha\beta} = 0$ auf ∂V folgt:

$$c\dot{M} = \int_V d^3x T^{00}_{,0} = - \int_V d^3x T^{0i}_{,i} = - \int_{\partial V} dS^i T^{0i} = 0. \quad (2.76)$$

Die Gesamtmasse (2.71) der Quelle bleibt innerhalb der linearisierten Näherung erhalten! Analog folgt:

$$c\dot{M}^i = \int_V d^3x x^i T^{00}_{,0} = - \int_V d^3x x^i T^{0j}_{,j} = - \int_V d^3x \delta_j^i T^{0j} = cP^i. \quad (2.77)$$

Es kann außerdem gezeigt werden [35], dass $\dot{M}^{ij} = P^{i;j} + P^{j;i}$ und $\dot{P}^{i;j} = S^{ij}$. Da T^{ij} symmetrisch ist, ist dies auch S^{ij} . Damit können wir die Momenta des Energie-

Impuls-Tensors mit denen von T^{00} verknüpfen:

$$\ddot{M}^{ij} = \dot{P}^{i;j} + \dot{P}^{j;i} = S^{ij} + S^{ji} = 2S^{ij}. \quad (2.78)$$

Durch Einsetzung in (2.70) folgt dann in der Näherung nullter Ordnung für h_{ij}^{TT} :

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t - r/c). \quad (2.79)$$

Der Lambda-Tensor wirkt nur auf den spurfreien Teil von \ddot{M}^{kl} :

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl} = \Lambda_{ij,kl} \left(\ddot{M}^{kl} - \frac{1}{3} \delta^{kl} \ddot{M}^i_i \right). \quad (2.80)$$

Mit der Massendichte $\rho = T^{00}/c^2$ können wir daher ein spurfreies Massenquadrupolmoment

$$Q^{ij} := \int d^3x \rho(t, \vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} |\vec{x}|^2 \right) \quad (2.81)$$

definieren, sodass wir insgesamt erhalten:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}^{kl}(t - r/c). \quad (2.82)$$

Gravitationswellen werden also in führender Ordnung durch die zweite zeitliche Ableitung des Massenquadrupolmoments erzeugt! Aus der Berechnung des Massenquadrupolmoments astronomische Objekte können wir deren Emission von Gravitationswellen herleiten und deren Wirkung in einem Detektor messen.

2.6 Interferometrische Detektoren

Wenn eine elektromagnetische Welle ein elektrisch geladenes Teilchen trifft, verursacht dies eine Beschleunigung, die orthogonal zur Ausbreitungsrichtung der Welle ist. Analog verursacht eine Gravitationswelle eine orthogonale Beschleunigung auf freie Teilchen. Freie Teilchen werden in der *Allgemeinen Relativitätstheorie* mit lokalen Inertialsystemen assoziiert. Daher erfahren die lokalen Inertialsysteme selbst eine Beschleunigung, die von ihrem Ort in der Raumzeit abhängt. Zwar kann man diese innerhalb *eines* lokalen Inertialsystems nicht messen (Äquivalenzprinzip), aber wir können die unterschiedlichen Beschleunigungen zwischen *zwei* lokalen Inertial-

systemen beobachten [5].

Konkret betrachten wir ein freies Testteilchen, in dessen lokalem Inertialsystem bei $\vec{\xi}$ ein zweites freies Testteilchen liege. In diesem System liefert die Deviationsgleichung ihrer beiden Geodäten [36]:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = -R^i{}_{0j0} \xi^j. \quad (2.83)$$

Da der Riemann-Tensor eine Eich-invariante Größe darstellt, hängen seine Komponenten nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Wir können daher in die *transversal-spurfreie Eichung* übergehen und ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, die Gravitationswelle propagiere entlang der z -Richtung. Die Gravitationswelle besitzt dann zwei voneinander unabhängige Polarisierungen und nach (2.17) und (2.43) folgt direkt:

$$R^1{}_{010} = -\frac{1}{2} h_{11,00}^{\text{TT}}, \quad (2.84)$$

$$R^2{}_{010} = -\frac{1}{2} h_{12,00}^{\text{TT}}, \quad (2.85)$$

$$R^2{}_{020} = -\frac{1}{2} h_{22,00}^{\text{TT}} = \frac{1}{2} h_{11,00}^{\text{TT}}. \quad (2.86)$$

Alle anderen Komponenten verschwinden. Für zwei freie Teilchen, die anfangs mit ϵ_x in x -Richtung getrennt sind, gilt dann nach (2.83):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{11}^{\text{TT}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^2 = \frac{1}{2} \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12}^{\text{TT}}. \quad (2.87)$$

Analog folgt für eine initiale Separation in y -Richtung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12}^{\text{TT}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^2 = -\frac{1}{2} \epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{11}^{\text{TT}}. \quad (2.88)$$

Abbildung 2.1 illustriert allgemein die hieraus resultierende Beschleunigung auf freie Teilchen.

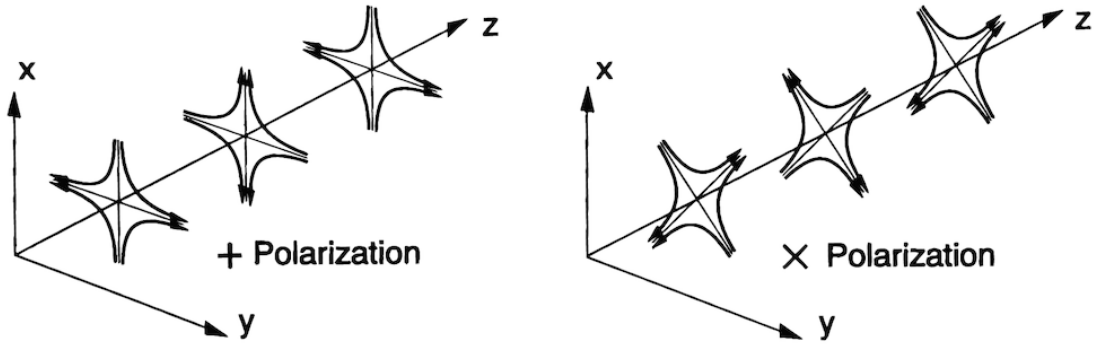


Abbildung 2.1: Die Beschleunigungen freier Teilchen, die mit den Polarisationen einer Gravitationswelle in z -Richtung assoziiert werden können. Quelle: [22].

Es existieren verschiedene experimentelle Methoden, um Gravitationswellen anhand ihrer Wirkung auf freie Teilchen zu messen. In diesem Abschnitt erläutern wir nur das grundlegende Konzept interferometrischer Detektoren, wie Advanced LIGO (USA), VIRGO (Italien) und GEO600 (Deutschland), da diese im von Kernkollaps-Supernovae erwarteten Frequenzbereich sensitiv sind.

Interferometrische Detektoren ähneln einem Michelson-Morley-Interferometer. Der Lichtstrahl eines Lasers wird mit einem Strahlteiler in zwei gleich lange, rechtwinklige Interferometerarme gesendet und an deren Enden an einem Spiegel reflektiert. Die Spiegel sind im Abstand ϵ zum Strahlteiler als Pendel aufgehängt. Die Masse der Spiegel ist dabei so groß, dass die Pendelfrequenz ω viel kleiner ist als die Frequenz ω_0 der Gravitationswelle. Dadurch bewegen sich die beiden Spiegel als seien sie freie Teilchen. Eine Differenz der Armlängen kann anschließend im Interferenzsignal beider Arme gemessen werden. Passiert nun eine Gravitationswelle die Detektorebene senkrecht, verursacht sie maximale, gegenphasige Änderungen der beiden Armlängen. Dies resultiert in periodisch wechselnder konstruktiver und destruktiver Interferenz. Da nach (2.87) und (2.88) $\ddot{\xi}^i \propto \epsilon$ gilt, steigt die Sensitivität des Detektors mit größeren Armlängen. Daher bestehen zum Beispiel die beiden Observatorien von Advanced LIGO aus jeweils vier Kilometer langen Interferometerarmen, in denen die Strahlen mittels *Fabry-Pérot-Interferometrie* circa 280 mal zwischen einem weiteren Spiegel reflektiert werden ehe sie interferieren (Abbildung 2.2). Damit sind die Arme effektiv etwa 1120 km lang [37].

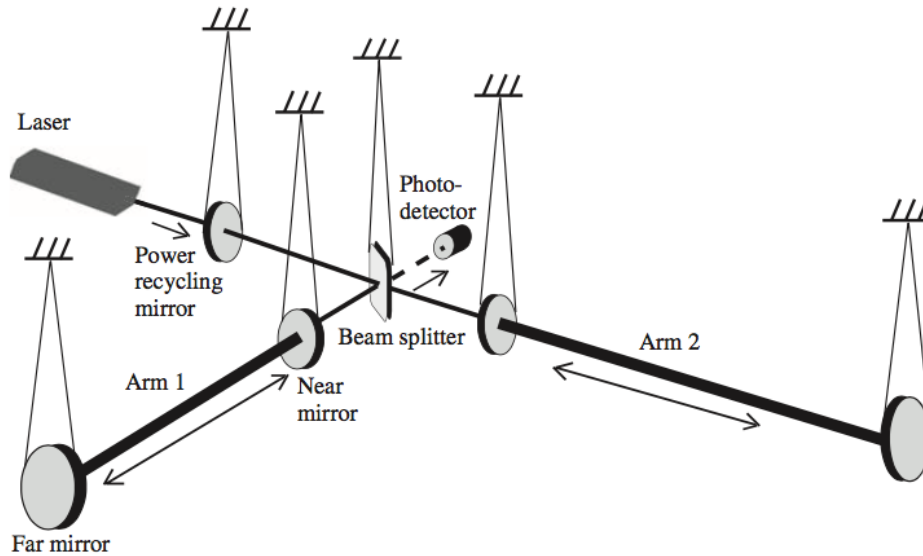


Abbildung 2.2: Schema des experimentellen Aufbaus von Advanced LIGO (nicht maßstabsgetreu). Quelle: [36].

Eine große Herausforderung besteht in der genauen Kenntnis und Isolation der Störquellen, wie zum Beispiel dem seismischen Hintergrund. Die groben sensitiven Frequenzbereiche der oben genannten Detektoren sind mit den zu erwartenden Signalen von Kernkollaps-Supernovae nach [38] in Abbildung 2.3 dargestellt. Das Ereignis GW150914 zweier sich umkreisenden und schließlich kollidierenden Schwarzen Löcher erbrachte im Februar 2016 den ersten direkten Nachweis von Gravitationswellen [39].

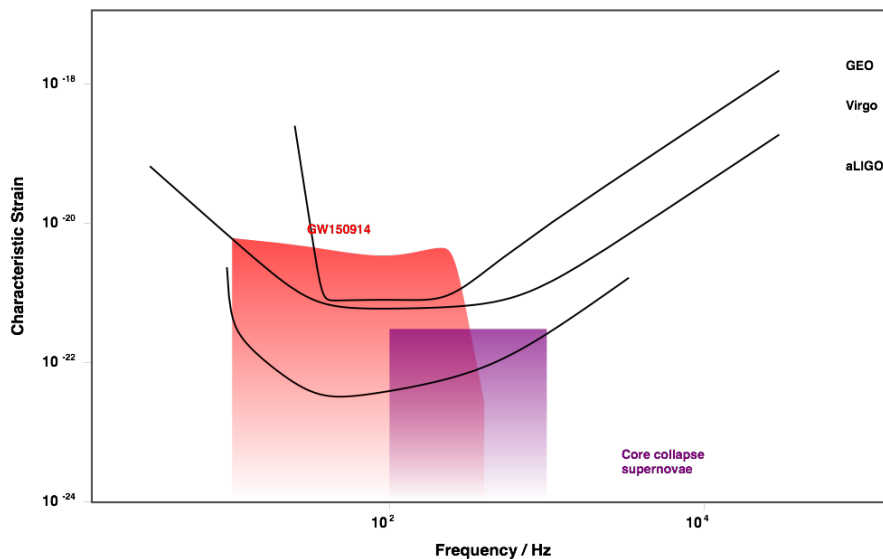


Abbildung 2.3: Sensitive Frequenzbereiche von Advanced LIGO (aLIGO), VIRGO und GEO600 (GEO). Quelle: [38].

Kapitel 3

Gravitationswellen einer Kernkollaps-Supernova

3.1 Abschätzung der Größenordnung

Eine Kernkollaps-Supernova ist Schauplatz enormer Massenbewegungen. Masse der Größenordnung $\sim M_{\odot}$ erreicht während des Kernkollapses relativistische Geschwindigkeit $\sim 0,1c$. Zwar zeigen wir in Abschnitt 3.3, dass sphärisch symmetrische Konfigurationen prinzipiell zu keiner Emission von Gravitationswellen führen können, aber in Abschnitt 1.3 wurde diskutiert, dass der Kernkollaps starke Asymmetrien entwickeln kann. Dies zeigen etwa Untersuchungen der Überreste von Kernkollaps-Supernovae (wie zum Beispiel CasA [40]) als auch theoretische Computersimulationen [41]. Als eine Folge wird die Produktion von Gravitationswellen hauptsächlich vom rotierendem Kollaps und Rückprall des stellaren Materials, nicht-achsensymmetrischer Instabilität, Konvektionen und *Akkretionsstoßinstabilitäten* und von Pulsationen des Proto-Neutronensterns erwartet [42], [43]. Als solche stellen sie eine direkte Botschaft aus dem innersten Zentrum der Explosion dar, das wegen der hohen Opazität des stellaren Materials nicht optisch beobachtet werden kann.

Zunächst motivieren wir die Diskussion mit einer einfachen Abschätzung der zu erwartenden Größenordnung eines Gravitationswellensignals typischer Massenbewegungen. Nach den Gleichungen (2.81) und (2.82) gilt in transversal-spurfreier Eichung:

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{Q}^{kl}(t - r/c), \quad (3.1)$$

mit

$$Q^{ij} := \int d^3x \rho(t, \vec{x}) (x^i x^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} |\vec{x}|^2). \quad (3.2)$$

Die Komponenten des Massenquadrupolmoments sind von der Größenordnung $Q^{ij} \sim MR^2$, wenn M die Masse und R die charakteristische Ausdehnung der potentiellen Quelle für Gravitationswellen sind. Damit ist $\ddot{Q}^{ij} \sim MR^2/\tau_{\text{dyn}}^2$, wobei

$$\tau_{\text{dyn}} \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (3.3)$$

nach (1.24) die Größenordnung der dynamischen Zeitskala ist [44], [22]. Da $|\hat{n}| = 1$ in (2.47) ist, lässt der Lamda-Tensor die Größenordnung von \ddot{Q}^{ij} unverändert und es folgt daher:

$$|h_{ij}^{\text{TT}}| \sim \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} \frac{MR^2}{\tau_{\text{dyn}}^2}. \quad (3.4)$$

Für eine Kernkollaps-Supernova mit $M \sim M_{\odot}$ (Kernmasse), $R \sim 10^6$ m (Kernradius) und Erdentfernung $r \sim 10^4$ pc (vgl. SN1987A oder Durchmesser der Milchstraße) würden sich $\tau_{\text{dyn}} \sim 10^{-2}$ s und $|h_{ij}^{\text{TT}}| \sim 10^{-21}$ ergeben.

3.2 Computersimulationen

In Abschnitt 1.3 haben wir gesehen, dass Kernkollaps-Supernovae durch physikalische Vorgänge ausgelöst werden, die tief im Innern des Sterns stattfinden. Wegen der optischen Intransparenz der außenliegenden Schichten des Sterns können jedoch nur Neutrino- und Gravitationswellensignale die Mechanismen im Zentrum kohärent abbilden. Da nur etwa 2 – 3 Kernkollaps-Supernovae pro Jahrhundert in der Lokalen Gruppe explodieren (siehe Abschnitt 1.5), sind zwei Dutzend Neutrinos von SN1987A die bisher einzigen gemessenen Signale dieser Art [45]. Seitdem hat sich die Sensitivität der Neutrino-Detektoren verbessert und Gravitationswellendetektoren sind erstmals in Betrieb genommen worden. Bis hiermit die nächste Kernkollaps-Supernova beobachtet wird, sind Computersimulationen explodierender Sterne ein Mittel der Astrophysik, Vorhersagen zu treffen, die mit einer künftigen Beobachtung verglichen werden können [3]. Derartige Simulationen müssen der Komplexität der involvierten Physik gerecht werden, indem sie idealerweise Gravitation, Hydrodynamik, nukleare Reaktionen und Neutrino-Effekte in relativistischer und multidimensionaler Weise einbeziehen.

Die Gravitationssignale in den meisten Simulationen rotierender Sterne, deren künstlich ausgelöster Kernkollaps eine Supernova erzeugt, besitzen die gleiche typische Morphologie [46]. Sie zeigen einen Anstieg des Signals während des Kernkollaps, einen großen Negativpuls beim Rückstoß und schließlich eine *ring-down*-Phase, in welcher der Proto-Neutronenstern seine verbleibende Energie vom Rückstoß hydrodynamisch dissipiert [46]. Hierfür exemplarisch zeigt Abbildung 3.1 ein Signal aus den Simulationsdaten von Dimmelmeier et. al [47].

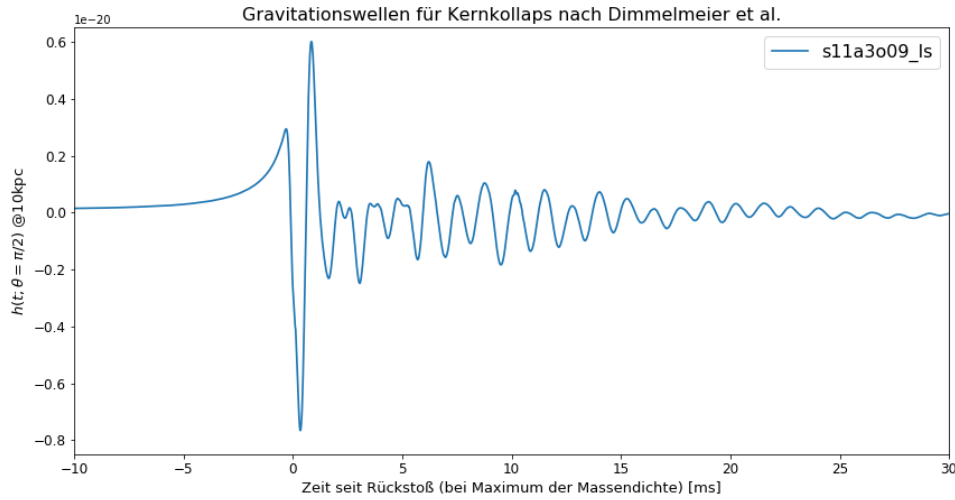


Abbildung 3.1: Simuliertes Gravitationswellensignal von *s11a3o9_ls* nach Dimmelmeier et. al [47]. Quelle: [47].

Der Simulation liegt das zweidimensionale achsensymmetrische Modell *s11a3o9_ls* eines Sterns mit

- Initialer Masse $M_{\text{prog}} = 11 M_{\odot}$ („s11“),
- Kernmasse $M_i = 1,36 M_{\odot}$,
- Kernradius $R_i = 1,58 \cdot 10^6 \text{ m}$,
- zentraler initialer Rotation $\Omega_{c,i} = 8,99 \text{ rad s}^{-1}$ („o9“)
- und Differentialität der Rotation $A = 0,5 \cdot 10^6 \text{ m}$ („a3“).

zu Grunde. Die Differentialität ist definiert über

$$\Omega := \Omega_{c,i} \frac{A^2}{A^2 + r^2 \sin^2(\theta)}, \quad (3.5)$$

wobei $r \sin(\theta)$ der Abstand zur Rotationsachse ist. Der Wert von A entspricht hier einer verhältnismäßig stärkeren Differentialität des Rotationsprofils [47]. Die verwendete Zustandsgleichung folgt Lattimer und Swesty („ ls “) [15].

3.3 Modellrechnung: Sphäroidischer Kernkollaps

Ein stellarer Kern mit initialer Rotation rotiert aufgrund der Drehimpulserhaltung während seines gravitativen Kollapses immer schneller. Dadurch kann er Umlaufzeit bis $\lesssim 5$ ms erreichen [48]. Zentrifugale Kräfte deformieren den Kern zu einem oblaten Rotationsellipsoid (Sphäroid) [46] [49].

Im Rahmen dieser Arbeit möchten wir ein simples Modell eines solchen gravitativen sphäroidischen Kollapses entwickeln und dessen Emission von Gravitationswellen abschätzen. Dafür nehmen wir vereinfachend an, das Sphäroid sei ein starrer Körper, besitze insbesondere eine zeitlich konstante Masse mit homogener Dichte und sei bereits zu Beginn in der oblaten Deformation seiner finalen Rotationsgeschwindigkeit (das heißt kurz vor dem Rückstoß). Damit vernachlässigen wir, dass der Kern während seines Kollapses eigentlich immer schneller rotieren und infolgedessen immer stärker deformiert werden würde.

In elliptischen Koordinaten ist die Oberfläche des Kerns allgemein gegeben durch:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} X s \sin(\theta) \cos(\phi) \\ Y s \sin(\theta) \sin(\phi) \\ Z s \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

wobei $\theta \in (0, \pi]$ und $\phi \in (0, 2\pi]$ sind. Hierbei sind X , Y und Z die kleiner werdenden Halbachsen in Einheiten der Länge und $s \in (0, 1]$ ein dimensionsloser Skalierungsparameter. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit rotiere das Sphäroid um die z -Achse. Die zugehörige Rotationsmatrix ist:

$$R^{(z)}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

wobei $\alpha \equiv \alpha(t) = \Omega t$ der zeitabhängige Rotationswinkel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω sei. Die Oberflächenkoordinaten des Sphäroids sind dann:

$$R^{(z)}(\alpha) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} X s \cos(\alpha) \sin(\theta) \cos(\phi) + Y s \sin(\alpha) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -X s \sin(\alpha) \sin(\theta) \cos(\phi) + Y s \cos(\alpha) \sin(\theta) \sin(\phi) \\ Z s \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Im Falle einer solchen Rotation wirken Zentrifugalkräfte entlang der Halbachsen X und Y , die das Sphäroid in seine oblate Form $X = Y \neq Z$ bringen. Unter der Annahme einer homogenen Massendichte

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi X^2 Z s^3}. \quad (3.9)$$

werden die diagonalen Quadrupolmomente dann nach (2.81) zu:

$$Q^{11} = \int \left(x^1 x^1 - \frac{1}{3} |\vec{x}|^2 \right) \frac{3M}{4\pi s} \sin \theta d\theta d\phi ds = \frac{1}{6} M (X^2 - Z^2), \quad (3.10)$$

$$Q^{22} = \int \left(x^2 x^2 - \frac{1}{3} |\vec{x}|^2 \right) \frac{3M}{4\pi s} \sin \theta d\theta d\phi ds = \frac{1}{6} M (X^2 - Z^2), \quad (3.11)$$

$$Q^{33} = \int \left(x^3 x^3 - \frac{1}{3} |\vec{x}|^2 \right) \frac{3M}{4\pi s} \sin \theta d\theta d\phi ds = \frac{1}{3} M (Z^2 - X^2), \quad (3.12)$$

wobei s von 0 (Zentrum) bis 1 (Rand) integriert wurde. Alle anderen Komponenten verschwinden aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Sphäroids:

$$Q^{12} = Q^{21} = Q^{13} = Q^{31} = Q^{32} = Q^{23} = 0. \quad (3.13)$$

Offensichtlich hängen die Komponenten Q^{ij} nicht direkt von der Winkelgeschwindigkeit Ω ab, sondern nur indirekt, da sie die Stärke der oblaten Deformation ($X \neq Z$) determiniert (siehe Gleichung (3.25)). Bei gegebener Differenz $X^2 - Z^2$ ist der Quadrupoltensor unabhängig von der Rotationsgeschwindigkeit. Insgesamt gilt damit für ihn:

$$Q^{ij} = \frac{1}{6} M \begin{pmatrix} X^2 - Z^2 & 0 & 0 \\ 0 & X^2 - Z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(Z^2 - X^2) \end{pmatrix}^{ij}. \quad (3.14)$$

Wie zu erwarten verschwindet die Spur ($Q^{11} + Q^{22} + Q^{33} = 0$). Insbesondere würden in sphärisch symmetrischer Konfiguration ($X = Y = Z$) alle Komponenten Q^{ij} des Massenquadrupolmoments verschwinden. Zweifache Ableitung nach der Zeit ergibt:

$$\ddot{Q}^{ij} = \frac{1}{3} M \begin{pmatrix} \dot{X}^2 - \dot{Z}^2 + X\ddot{X} - Z\ddot{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{X}^2 - \dot{Z}^2 + X\ddot{X} - Z\ddot{Z} & 0 \\ 0 & 0 & 2(\dot{Z}^2 - \dot{X}^2 + Z\ddot{Z} - X\ddot{X}) \end{pmatrix}^{ij}. \quad (3.15)$$

Damit ist \ddot{Q}^{ij} zwar bereits in symmetrisch-spurfreier Form. Der Lambda-Tensor in (2.82) hängt jedoch im Allgemeinen von der Ausbreitungsrichtung \hat{n} ab, das heißt von der Richtung, in welcher der Detektor auf der Erde vom Koordinatenursprung im Zentrum des sphäroidischen stellaren Kerns aus liegt.

Im Allgemeinen erhalten wir dann h_{ij}^{TT} nach (2.82) durch explizite Ausführung der Kontraktion des Lambda-Tensors (2.47) mit (3.15) und können hieraus die Polarisationen h_{\times} und h_{+} bestimmen. Es ist leicht einzusehen, dass der Lambda-Tensor mit seinen vier Indizes keine einfache Art der Berechnung liefert.

Stattdessen wählen wir einen instruktiveren Lösungsansatz nach [35]. Hierfür konstruieren wir ein Koordinatensystem (x', y', z') , dessen z' -Achse identisch mit der Ausbreitungsrichtung (in Richtung Erde) sei: $\hat{n}' = (0, 0, 1)$. In diesem speziellen Fall vereinfacht sich die Kontraktion des Lambda-Tensors erheblich. Wenn \ddot{Q}'^{ij} die Komponenten des Quadrupoltensors \ddot{Q}^{ij} im Koordinatensystem (x', y', z') sind, ergibt die Kontraktion:

$$\Lambda_{ij,kl}\ddot{Q}'^{ij} = \begin{pmatrix} (\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22})/2 & \ddot{Q}'_{12} & 0 \\ \ddot{Q}'_{21} & -(\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{ij}. \quad (3.16)$$

In dieser Ausbreitung in die z' -Richtung können die Polarisationen h_{\times} und h_{+} nach (2.45) und (2.82) besonders einfach abgelesen werden:

$$h_{\times} = \frac{2G}{r c^4} \ddot{Q}'_{12}, \quad (3.17)$$

$$h_{+} = \frac{1G}{r c^4} (\ddot{Q}'_{11} - \ddot{Q}'_{22}). \quad (3.18)$$

Der Wechsel von \ddot{Q}^{ij} nach \ddot{Q}'^{ij} kann durch das Produkt P der Rotationsmatrizen $R^{(z)}(\phi)$ und $R^{(x)}(\theta)$ um die z - beziehungsweise x -Achse des (x, y, z) -Koordinatensystem beschrieben werden. ϕ und θ beschreiben nun die Winkel, um die beim Wechsel um die z -Achse beziehungsweise x -Achse gedreht wird:

$$P = R^{(z)}(\phi) \cdot R^{(x)}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Dann ist nämlich $Q^{ij} = P^{ik} P^{jl} Q'^{kl}$ beziehungsweise $Q'^{ij} = (P^T Q P)^{ij}$, wobei P^T die transponierte Matrix von P darstellt. Durch Einsetzen in (3.17) und (3.18) folgt

schließlich:

$$\begin{aligned}
h_{\times}(t; \theta, \phi) = & \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [\ddot{Q}^{11}(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) \cos^2(\theta)) \\
& + \ddot{Q}^{22}(\sin^2(\phi) - \cos^2(\phi) \cos^2(\theta)) \\
& - \ddot{Q}^{33} \sin^2(\theta) \\
& - \ddot{Q}^{12} \sin(2\phi)(1 + \cos^2(\theta)) \\
& + \ddot{Q}^{13} \sin(\phi) \sin(2\theta) \\
& + \ddot{Q}^{23} \cos(\phi) \sin(2\theta)], \tag{3.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{+}(t; \theta, \phi) = & \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} [(\ddot{Q}^{11} - \ddot{Q}^{22}) \sin(2\phi) \cos(\theta) \\
& + 2\ddot{Q}^{12} \cos(2\phi) \cos(\theta) \\
& - 2\ddot{Q}^{13} \cos(\phi) \sin(\theta) \\
& + 2\ddot{Q}^{23} \sin(\phi) \sin(\theta)]. \tag{3.21}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun zu unserem Modell eines kollabierenden Sphäroids zurückkehren und die Komponenten von (3.15) in (3.20) und (3.21) einsetzen erhalten wir:

$$h_{\times}(t; \theta, \phi) = \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} M \sin^2(\theta) (\dot{X}^2 - \dot{Z}^2 + X\ddot{X} - Z\ddot{Z}), \tag{3.22}$$

$$h_{+}(t; \theta, \phi) = 0. \tag{3.23}$$

Die Gravitationswelle ist linear polarisiert! Zudem gilt $h_{\times} \propto \sin^2(\theta)$, weshalb entlang der Rotationsachse ($\theta = 0$ und π) keine Emission stattfindet, wohingegen die Ausbreitung parallel zur x - y -Ebene ($\theta = \pi/2$) maximal ist. Im folgenden gehen wir daher immer von der idealen Orientierung der Quelle zum Detektor aus, das heißt die Rotationsachse des Proto-Neutronensterns stehe senkrecht auf der Verbindungslinie zum Detektor auf der Erde.

Berechnungen von Saenz und Shapiro [49], in denen eine *polytrope Zustandsgleichung* für den Kollaps nicht-relativistischer, entarteter Neutronen implementiert wurde, stimmen mit (3.22) und (3.23) überein und ergeben lediglich einen Korrekturfaktor von $1/5$. Als oblates Sphäroid mit homogener Dichte ρ und konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω stellt unser Ellipsoid ein klassisches Maclaurin-Sphäroid dar, dessen Exzentrizität

$$e = 1 - \frac{Z^2}{X^2} \tag{3.24}$$

mit Ω in folgender Weise verknüpft ist [5] [50]:

$$\frac{\Omega^2}{\pi G \rho} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e^3} (3-2e^2) \sin^{-1}(e) - \frac{6}{e^2} (1-e^2). \quad (3.25)$$

Da wir vereinfachend angenommen haben, dass sich während des gesamten Kollapses die oblate Deformation nicht ändert, sondern dem finalen Zustand entspricht, ist $e = \text{const.}$ und e berechnet sich mittels Winkelgeschwindigkeit Ω und finaler Dichte ρ . Mit (3.24) ergibt sich dann für (3.22):

$$\begin{aligned} h_{\times}(t; \theta = \pi/2) &= \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} M \left(\frac{\dot{Z}^2}{1-e} - \dot{Z}^2 + \frac{c\ddot{Z}}{1-e} - Z\ddot{Z} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{G}{c^4} M \frac{e}{1-e} \left(\dot{Z}^2 + Z\ddot{Z} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wir suchen daher eine Bewegungsgleichung für $Z(t)$, mit der wir $\dot{Z}(t)$, $\ddot{Z}(t)$ und schließlich $h_{\times}(t)$ berechnen können. Für das Gravitationspotential Φ eines Sphäroids gilt nach [5]:

$$\Phi = -\pi G \rho [A - A_1 x^2 - A_2 y^2 - A_3 z^2], \quad (3.27)$$

wobei

$$A_1 = A_2 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e) - \frac{1-e^2}{e^2}, \quad (3.28)$$

$$A_3 = \frac{2}{e^2} - 2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3} \arcsin(e), \quad (3.29)$$

$$A = 2X^2 \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \arcsin(e) \quad (3.30)$$

und

$$X^2 = \frac{Z^2}{1-e^2}. \quad (3.31)$$

sind. Nach Voraussetzung ist die Masse M während des Kollapses konstant. Mit der Dichte

$$\rho = \frac{3M(1-e^2)}{4\pi Z^3} \quad (3.32)$$

ist der Gradient des Gravitationspotentials:

$$\nabla\Phi = \frac{3MG(1-e^2)}{2Z^3}(A_1x, A_2y, A_3z). \quad (3.33)$$

Wir verfolgen den gravitativen Kollaps des Sphäroids mit einer Testmasse auf seiner Oberfläche bei $\vec{x}(t) = (0, 0, Z(t))$. Die Testmasse ruhe zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{x} = (0, 0, Z_0)$, wenn $Z_0 \equiv Z(t = 0)$ die initiale Position der Halbachse Z ist. Aus Symmetriegründen fällt die Testmasse entlang der Rotationsachse. Dessen Newtonsche Bewegungsgleichung ist damit die folgende gewöhnliche nicht-lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -\frac{k}{Z^2}, \quad (3.34)$$

wobei $k \equiv 3MGA_3(1-e^2)/2$ ist. Die Anfangsbedingungen sind:

$$\begin{cases} Z(t = 0) = Z_0 \\ \dot{Z}(t = 0) = 0 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Gleichung (3.34) kann in eine Differentialgleichung erster Ordnung überführt werden:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = \dot{Z} \frac{d\dot{Z}}{dZ} = -\frac{k}{Z^2} \quad (3.36)$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{Z}=0}^{\dot{Z}} \dot{Z}' d\dot{Z}' = -k \int_{Z_0}^Z \frac{dZ'}{Z'^2} \quad (3.37)$$

$$\Rightarrow \dot{Z} = \pm \sqrt{\frac{2k}{Z} - \frac{2k}{Z_0}} \quad (3.38)$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{Z}}{Z_0} = \pm \frac{\sqrt{2k}}{Z_0^{3/2}} \sqrt{\frac{Z_0}{Z} - 1}. \quad (3.39)$$

Für den Kollaps ist offenbar „-“ physikalisch sinnvoll. Zur Lösung von (3.39) machen wir uns zunutze, dass $0 \leq Z/Z_0 \leq 1$ gilt und substituieren:

$$\cos^2(u) := \frac{Z}{Z_0}, \quad (3.40)$$

wobei

$$\frac{\dot{Z}}{Z_0} = \frac{d}{dt} \cos^2(u) = -2 \cos(u) \sin(u) \dot{u} \quad (3.41)$$

und

$$\frac{Z_0}{Z} - 1 = \frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)} \quad (3.42)$$

folgt. Damit wird Gleichung (3.39) zu:

$$-2 \cos(u) \sin(u) \dot{u} = -\frac{\sqrt{2k}}{Z_0^{3/2}} \sqrt{\frac{\sin^2(u)}{\cos^2(u)}} \quad (3.43)$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2(u) \dot{u} = \frac{d}{dt} \left(u + \frac{1}{2} \sin(2u) \right) = \frac{\sqrt{2k}}{Z_0^{3/2}}. \quad (3.44)$$

Integration liefert:

$$\int_{u'=0}^u d \left(u' + \frac{1}{2} \sin(2u') \right) = \int_0^t \frac{\sqrt{2k}}{Z_0^{3/2}} dt \quad (3.45)$$

$$\Rightarrow u + \frac{1}{2} \sin(2u) = \frac{\sqrt{2k}}{Z_0^{3/2}} t. \quad (3.46)$$

Resubstituierung ergibt schließlich eine Funktion $t(Z)$:

$$t(Z) = \frac{Z_0^{3/2}}{\sqrt{2k}} \left[\sqrt{\frac{Z}{Z_0}} \sqrt{1 - \frac{Z}{Z_0}} + \arccos \left(\sqrt{\frac{Z}{Z_0}} \right) \right]. \quad (3.47)$$

Es ist offensichtlich nicht einfach, Gleichung (3.47) nach $Z(t)$ aufzulösen. Stattdessen schränken wir zunächst den Wertebereich von Z/Z_0 auf $Z_b/Z_0 \leq Z/Z_0 \leq 1$ ein. Beim Radius Z_b werde qua Definition die nukleare Dichte $\rho_0 \approx 2.7 \cdot 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ erreicht und ein Kollaps auf kleinere Radii wäre physikalisch nicht sinnvoll:

$$Z_b := \left(\frac{3M(1 - e^2)}{4\pi\rho_0} \right)^{1/3}. \quad (3.48)$$

Damit lösen wir Gleichung (3.47) numerisch, indem wir $N = 10^5 \gg 1$ Werte für Z/Z_0 mit $Z_b/Z_0 \leq Z/Z_0 \leq 1$ einsetzen. Exemplarisch verwenden wir für die übrigen Konstanten die Modellparameter von *s11o9* in der Simulation von Dimmelmeier et al. [47] aus Abschnitt 3.2, das heißt:

- $M \equiv M_i = 1,36 M_\odot$,
- $Z_0 \equiv R_i = 1,58 \cdot 10^6 \text{ m}$,
- $\Omega \equiv \Omega_{c,i} = 8,99 \text{ rad s}^{-1}$

- beziehungsweise $e = 0,00164$ (nach Gleichung (3.25)).

Der Rückstoß-Radius Z_b ist hierfür etwa 13,4 km und entspricht erwartungsgemäß dem Radius eines typischen Neutronensterns. Wegen $N \gg 1$ liegen die Wertepaare $(t(Z), Z)$ hinreichend dicht nebeneinander, um sie ohne signifikanten Verlust an Genauigkeit in einem Z - t -Diagramm in Abbildung 3.2 mit Geraden verbinden zu können. Es ist ein Kollaps des Sphäroids zu sehen, der nach $t \approx 0,16$ s bei Z_b endet. Wie zu erwarten entspricht dies etwa der hierfür berechneten Größenordnung $\tau_{\text{dyn}} \sim 0,15$ s der dynamischen Zeitskala nach Gleichung (3.3).

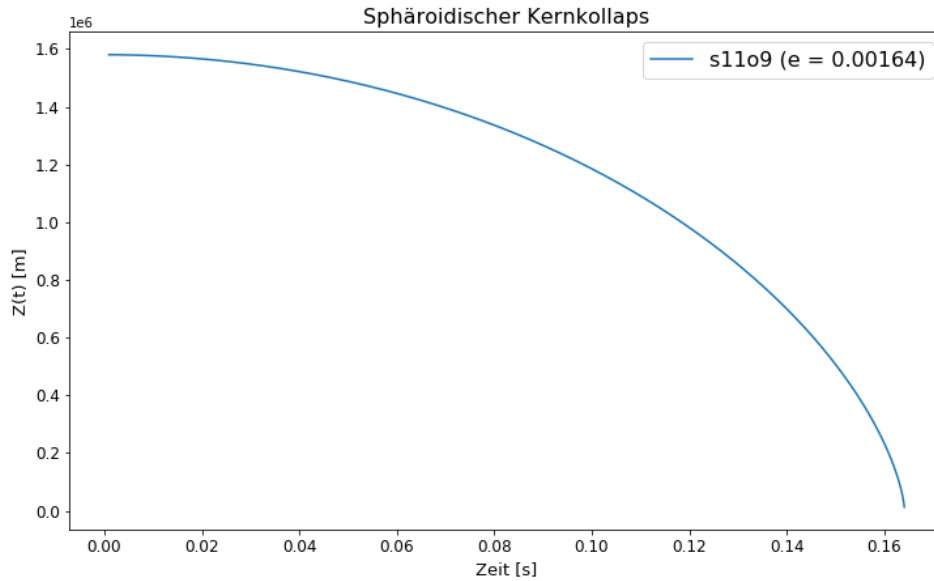


Abbildung 3.2: Kernkollaps von *s11o9*. Modellparameter: $Z_0 = 1,58 \cdot 10^6$ m, $M = 1,36 M_\odot$ und $\Omega = 8,99 \text{ rads}^{-1}$ beziehungsweise $e = 0,00164$.

Unser Interesse gilt natürlich der Emission von Gravitationswellen. Wegen $N \gg 1$ nähern wir die Wertepaare (t, \dot{Z}) und (t, \ddot{Z}) mit den jeweiligen Differenzenquotienten zweier aufeinanderfolgenden Werte für Z beziehungsweise \dot{Z} . Dieses numerische Verfahren liefert für einen ganzen Satz verschiedener Rotationen von *s11* gemäß Tabelle 3.1 in einer Entfernung von 10 kpc die Gravitationswellensignale in Abbildung 3.3.

Modell	Rotation $\Omega \equiv \Omega_{c,i}$ [rad s ⁻¹]	Exzentrizität e
<i>s11o5</i>	4,21	0,00077
<i>s11o7</i>	5,95	0,00108
<i>s11o9</i>	8,99	0,00164
<i>s11o12</i>	10,65	0,00194
<i>s11o13</i>	11,30	0,00206
<i>s11o15</i>	13,31	0,00242

Tabelle 3.1: Rotationsmodelle analog zu Dimmelmeier et al. [47].

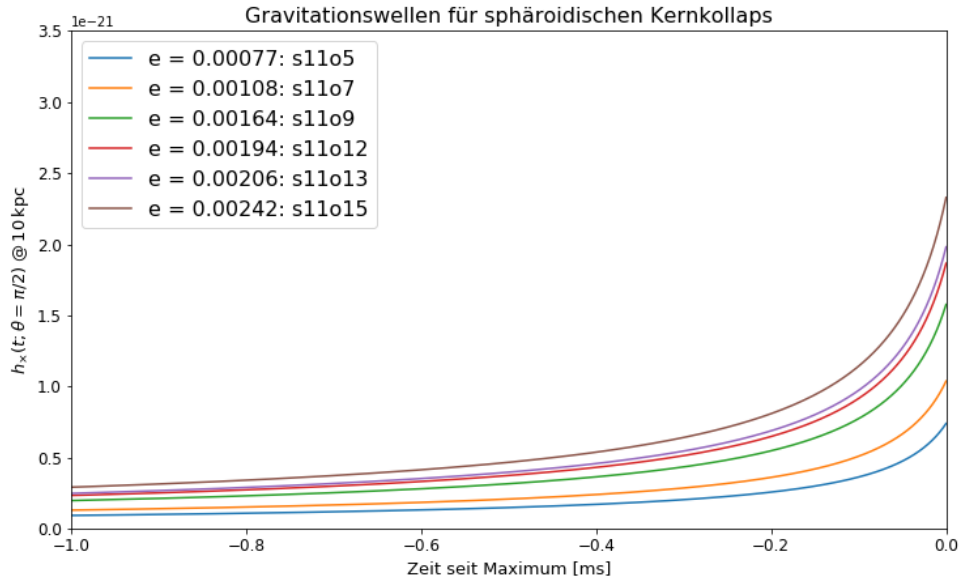


Abbildung 3.3: Gravitationswellen beim Kernkollaps von *s11* für verschiedene Rotationen/Exzentrizitäten auf Grundlage des sphäroidischen Kernkollaps-Modells. Die Maxima korrespondieren mit dem Erreichen der Rückstoß-Radii. Da alle Modelle diesen in nahezu gleicher Zeit erreichen, sind die Signal diesbezüglich synchronisiert worden. Entfernung: $r = 10$ kpc.

Man beachte, dass die Abszissen in den Abbildungen 3.2 und 3.3 unterschiedliche Zeitintervalle darstellen. Die Gravitationswellen in Abbildung 3.3 steigt erst während der letzten Millisekunde der Kollapse in Abbildung 3.2 signifikant an. Je größer dabei die Exzentrizität ist, desto stärker ist die Gravitationswelle. Beim Rückstoß-Radius Z_b werden die Maxima in Abbildung 3.3 bei $t = 0$ von etwa $h_x \sim 1 - 3 \cdot 10^{-21}$ erreicht. Zum Vergleich zeigt Abbildung 3.4 die zu erwartenden Gravitationswellen nach Dimmelmeier et al. [47]. Es werden ähnliche Größenordnungen erreicht, aber ein signifikanter Anstieg findet bereits ~ 10 ms vor dem Rückstoß statt. Wir werden weitere Gemeinsamkeiten und Unterschieden detaillierter in Abschnitt 3.4 diskutieren.

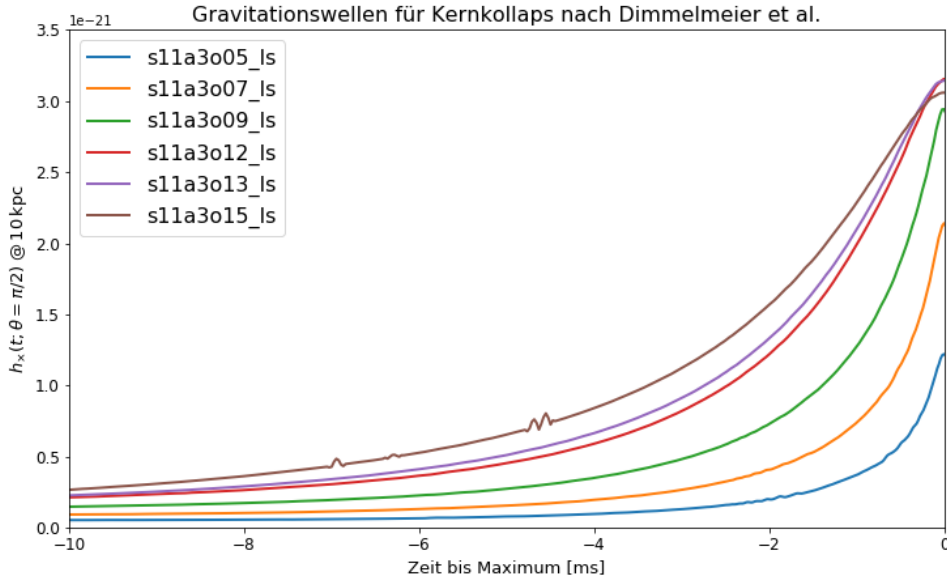


Abbildung 3.4: Gravitationswellen beim Kernkollaps von *s11a3_ls* für verschiedene Rotationen/Exzentrizitäten nach Dimmelmeier et al. [47]. Entfernung: $r = 10$ kpc.

3.4 Diskussion

Ein Vergleich der Gravitationswellen des sphäroidischen Kernkollaps-Modells und der typischen Simulation von Dimmelmeier et al. [47] zeigt eine Reihe von Gemeinsamkeiten und Unterschiede, die wir im Folgenden diskutieren möchten:

- Die Gravitationswellen beider Simulationen sind linear polarisiert. Die Komponente h_+ verschwindet im Ausdruck (2.45). (Man beachte, dass in der Literatur oft unterschiedliche Konventionen bezüglich der Bezeichnung der beiden Polarisierungen existieren.) Diese Charakteristik resultiert aus den gemeinsamen Symmetrieeigenschaften beider Modelle. Wegen der Achsensymmetrie um die z -Achse ist $\ddot{Q}^{11} = \ddot{Q}^{22}$. Da weiter alle Komponenten des Quadrupolmoments, die nicht auf der Diagonale liegen, verschwinden (3.13), bleibt auch kein nicht-verschwindender Beitrag in (3.21) und es folgt $h_+ = 0$. Für die Separation zweier freier Testmassen in einem Detektor bleiben damit in Gleichung (2.87) und (2.88) nur noch die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^1 = \frac{1}{2} \epsilon_y \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12}^{\text{TT}}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^2 = \frac{1}{2} \epsilon_x \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{12}^{\text{TT}} \quad (3.49)$$

übrig, wobei ϵ_x und ϵ_y die initialen Separationen in x - beziehungsweise y -Richtung sind.

Tatsächlich zeigen höherdimensionale Simulationen wie beispielsweise [51] oder [52], in denen prinzipiell nicht-achsensymmetrische Störungen zugelassen sind, dass diese in signifikanter Weise erst ~ 10 ms *nach* dem Rückstoß auftreten [48]. Erst dann erwarten wir nicht-linear polarisierte Emission. Der Kernkollaps kann daher in der Tat als nahezu achsensymmetrisch betrachtet werden, der infolgedessen nur linear polarisierte Gravitationswellen emittiert.

- Die Achsensymmetrie beider Kernkollaps-Simulationen führt außerdem dazu, dass die Emission von Gravitationswellen parallel zur äquatorialen Ebene maximal ist und keine Emission entlang der Rotationsachse stattfindet. Es besteht eine $\sin^2(\theta)$ -Abhängigkeit zum Polarwinkel $\theta \in (0, \pi]$. Anschaulich können wir uns das damit erklären, dass ein Beobachter auf der Rotationsachse das Sphäroid als zweidimensionale Projektion einer sphärisch symmetrischen Konfiguration sieht, die keine Gravitationswellen emittieren kann (siehe Abschnitt 3.3). Ein Beobachter auf der äquatorialen Ebene bemerkt hingegen die Asphärizität des Sphäroids.
- Entgegen der Erwartung wachsen die Gravitationswellen im Modell nach Dimmelmeier et. al. signifikant schon während der letzten ~ 10 ms des Kernkollapses an, aber in unserem Sphäroid-Modell erst in der letzten ~ 1 ms. Da wir hier die finale sphäroidische Deformation schon zu Beginn des Kollapses implementiert hatten und diese sich im Modell nach Dimmelmeier et al. erst während des Kollapses entwickelt, hätte man eine umgekehrte Tendenz erwarten können. Möglicherweise sind hier andere Effekte verantwortlich, die in unserem simplen Modell nicht berücksichtigt wurden.
- Für die verwendeten Modellparameter sind die Maxima der Simulation von Dimmelmeier et al. beim Rückstoß größer als in unserem Modell. Dies kann an der Differentialität der Rotation in der Simulation von Dimmelmeier et al. liegen. Diese führe nach [46] zu einer größeren oblaten Deformation des Kerns. Da unser Modell mit radial konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert, das heißt, gar keine Differentialität enthält, sind demnach die Deformation und infolgedessen das Gravitationswellensignal kleiner. Die Größenordnung ist aber mit $\sim 1 - 3 \cdot 10^{-21}$ bei 10 kpc dieselbe und wäre mit gegenwärtigen interferometrischen Detektoren beobachtbar [47].

In Abbildung 3.5 sind die Gravitationswellen-Maxima weiterer Modelle mit anderen Modellparametern während des Kernkollapses gegen die initiale Zentralrotation $\Omega_{c,i}$ beziehungsweise konstante Rotation Ω für die Simulationen von Dimmelmeier et al. (links) und unser Sphäroid-Modell (rechts) aufgetragen. Hiermit lassen sich Aussagen über die Abhängigkeit von Masse und Rotation treffen:

- Für Kerne geringer bis mittlerer Rotation gilt: Je größer die Masse, desto stärker das Signal. Dies gilt in unserem idealisierten Modell auch für hohe Winkelgeschwindigkeiten. Für die Simulation von Dimmelmeier et. al sind dann die berücksichtigten Zentrifugalkräfte groß genug, dass der Kernkollaps schon bei subnuklearen Dichten endet und infolgedessen ein schwächeres Signal emittiert [47]. Dies führt auch zu einer Verbreiterung und Verringerung des Rückstoß-Pulses [47]. Man könnte erwarten, dass eine Implementierung zentrifugaler Kräfte als additiven Term in der Differentialgleichung (3.34) in unserem Modell eine ähnliche Tendenz erzeugt.

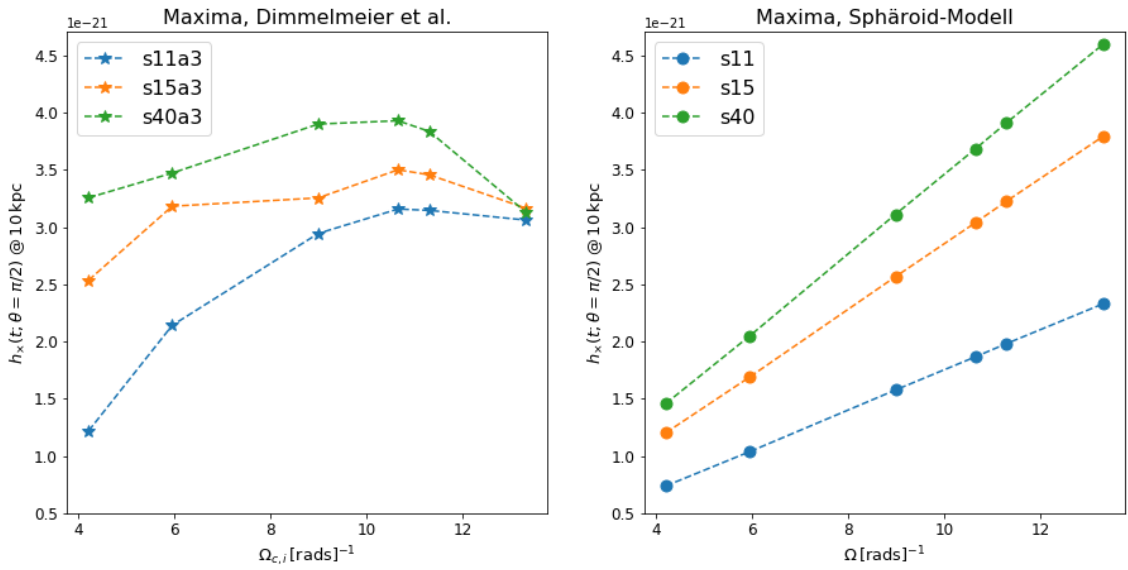


Abbildung 3.5: Maxima der Gravitationswellen beim Kernkollaps von s11 ($M_i = 1,36 M_\odot$), s15 ($M_i = 1,81 M_\odot$) und s40 ($M_i = 2,03 M_\odot$) in Abhängigkeit von der initialen Zentralrotation $\Omega_{c,i}$ beziehungsweise konstanten Rotation Ω für die Simulationen von Dimmelmeier et al. (links) [47] und unser Sphäroid-Modell (rechts). Entfernung: $r = 10$ kpc.

- Da in unserem Modell sowohl höhere Winkelgeschwindigkeiten als auch größere Massen stets zu einem stärkeren Signal führen würden, könnte man auch das Signal nach dem Rückstoß analysieren, um die finale Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen. Da der stellare Kern in dieser Phase nicht weiter kollabieren kann, wird er vermutlich zunächst mit zeitlich konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren. Wenn diese groß genug ist, könnten *Balken-Instabilitäten* auftreten [53]. Störungen im stellaren Kern führen dabei zu radialem Materietransport in die eine und wegen Impulserhaltung auch in die entgegengesetzte Richtung. Effektiv würde ein „Balken“ der Länge l und Masse m geformt, der mit der finalen Winkelgeschwindigkeit Ω des Kerns rotiert und Gravitationswellen folgender

Größenordnung emittiert [53]:

$$h_{\text{Balken}} = \sqrt{\frac{32}{45} \frac{G}{c^4} \frac{ml^2 \Omega^2}{r}}. \quad (3.50)$$

Möglicherweise ist es möglich das Signal dieser oder anderer Instabilitäten zu extrahieren und hieraus die Winkelgeschwindigkeit Ω zu bestimmen.

Wir betonen abschließend, dass der exemplarische Vergleich zur Simulation von Dimmelmeier et al. beliebig ist. Zwar teilt diese eine typische Morphologie des Gravitationswellensignal mit anderen Simulationen, ein genaues Bild werden wir aber erst nach einer tatsächlichen Beobachtung haben können.

Wir sehen, dass sich trotz der Simplizität unseres Modells typische gemeinsame Charakteristika des Gravitationswellensignal ablesen lassen können. Für ein realistischeres Modell könnte man als nächsten Schritt ein radiales Dichte- und Rotationsprofil implementieren und die Exzentrizität erst während des Kollapses gemäß Drehimpulserhaltung wachsen lassen. Insbesondere separiert sich der stellare Kern in einen inneren, subsonisch kollabierenden Bereich mit nahezu radial konstanter Winkelgeschwindigkeit und in einen äußeren, supersonisch kollabierenden Bereich mit starker Differentialität [43]. Dies ließe sich im Rotationsprofil berücksichtigen.

Danksagung

Der Autor bedankt sich vielmals bei den Herren Prof. Dr. Dr. h. c. Manfred Lindner und Dr. Rasmus Sloth Lundkvist für die ausführliche Betreuung und Unterstützung, die ihm bei dieser Arbeit sehr geholfen haben. Des Weiteren bedankt er sich beim Max-Planck-Institut für Kernphysik Heidelberg für die Möglichkeit nicht nur die Bachelor-Arbeit, sondern auch ein vorangehendes Projektpraktikum durchführt haben zu dürfen.

Schließlich bedankt er sich bei seiner Familie und seinen Freunden für die Unterstützung, die er während seines Studiums in Heidelberg erfahren hat.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 31. Juli 2017,

Literaturverzeichnis

- [1] H.-T. Janka, F. Hanke, L. Hüdepohl, A. Marek, B. Müller und M. Obergaulinger, *Core-collapse supernovae: Reflections and directions*, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2012** (Dez., 2012) 01A309 [1211.1378].
- [2] W. Baade und F. Zwicky, *Remarks on super-novae and cosmic rays*, *Phys. Rev.* **46** (Juli, 1934) 76–77.
- [3] C. D. Ott, *Massive computation for understanding core-collapse supernova explosions*, 1608.08069.
- [4] A. Weigert, H. J. Wendker und L. Wisotzki, *Astronomie und Astrophysik*. Wiley-VCH Verlag, 5th ed., September, 2009.
- [5] S. L. Shapiro und S. A. Teukolsky, *Black holes, white dwarfs, and neutron stars*. Wiley, New York, 1983.
- [6] W. Demtröder, *Experimentalphysik 3*. Springer Spektrum, 5th ed., 2016.
- [7] W. Demtröder, *Experimentalphysik 4*. Springer Spektrum, 5th ed., 2017.
- [8] K. Kotake, K. Sato und K. Takahashi, *Explosion mechanism, neutrino burst, and gravitational wave in core-collapse supernovae*, *Rept. Prog. Phys.* **69** (2006) 971–1144 [astro-ph/0509456].
- [9] H.-T. Janka, *Neutrino-driven Explosions*. 2017.
- [10] H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martinez-Pinedo und B. Müller, *Theory of Core-Collapse Supernovae*, *Phys. Rept.* **442** (2007) 38–74 [astro-ph/0612072].
- [11] H.-T. Janka, *Supernovae und kosmische Gammablitz*. Astrophysik aktuell. Springer Berlin Heidelberg, 1st ed., 2011.
- [12] J. Wallace, A. Burrows und J. C. Dolence, *Detecting the Supernova Breakout Burst in Terrestrial Neutrino Detectors*, *Astrophys. J.* **817** (2016), no. 2 182 [1510.01338].

- [13] H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu und K. Sumiyoshi, *Relativistic equation of state of nuclear matter for supernova explosion*, *Prog. Theor. Phys.* **100** (1998) 1013 [[nuc1-th/9806095](#)].
- [14] H. Shen, H. Toki, K. Oyamatsu und K. Sumiyoshi, *Relativistic equation of state of nuclear matter for supernova and neutron star*, *Nucl. Phys.* **A637** (1998) 435–450 [[nuc1-th/9805035](#)].
- [15] J. M. Lattimer und F. D. Swesty, *A Generalized equation of state for hot, dense matter*, *Nucl. Phys.* **A535** (1991) 331–376.
- [16] C. D. Ott, *Stellar Iron Core Collapse in 3+1 General Relativity and The Gravitational Wave Signature of Core-Collapse Supernovae*. PhD thesis, Potsdam U., 2006.
- [17] H. A. Bethe, *Supernova mechanisms*, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 801–866.
- [18] H. T. Janka, *Conditions for shock revival by neutrino heating in core collapse supernovae*, *Astron. Astrophys.* (2000) [[astro-ph/0008432](#)]. [*Astron. Astrophys.*368,527(2001)].
- [19] H.-T. Janka, *Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **62** (2012) 407–451 [[1206.2503](#)].
- [20] C. D. Ott, E. Abdikamalov, P. Mösta, R. Haas, S. Drasco, E. P. O’Connor, C. Reisswig, C. A. Meakin und E. Schnetter, *General-Relativistic Simulations of Three-Dimensional Core-Collapse Supernovae*, *Astrophys. J.* **768** (2013) 115 [[1210.6674](#)].
- [21] Y. Suwa, N. Tominaga und K. Maeda, *Importance of ^{56}Ni production on diagnosing explosion mechanism of core-collapse supernova*, [1704.04780](#).
- [22] C. D. Ott, *Gravitational Waves from Core-Collapse Supernovae*, Master’s thesis, Faculty of Physics and Astronomy, University of Heidelberg, 2003.
- [23] S. Chatterjee und J. M. Cordes, *Bow shocks from neutron stars: scaling laws and hst observations of the guitar nebula*, *Astrophys. J.* **575** (2002) 407 [[astro-ph/0201062](#)].
- [24] B. C. Reed, *New estimates of the solar-neighborhood massive-stars birthrate and the Galactic supernova rate*, *Astron. J.* **130** (2005) 1652–1657 [[astro-ph/0506708](#)].
- [25] R. Diehl *et. al.*, *Radioactive Al-26 and massive stars in the galaxy*, *Nature* **439** (2006) 45–47 [[astro-ph/0601015](#)].

- [26] S. V. Bergh und G. A. Tammann, *Galactic and extragalactic supernova rates*, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **29** (1991) 363–407.
- [27] E. Cappellaro, R. Evans und M. Turatto, *A new determination of supernova rates and a comparison with indicators for galactic star formation*, *Astron. Astrophys.* **351** (1999) 459 [astro-ph/9904225].
- [28] G. A. Tammann, W. Loeffler und A. Schroder, *The Galactic supernova rate*, *Astrophys. J. Suppl.* **92** (1994) 487–493.
- [29] R. C. Kennicutt, Jr. und P. W. Hodge, *H II regions and star formation in the Magellanic Clouds*, *Astrophys. J.* **306** (1986) 130–141.
- [30] E. M. Berkhuijsen, *Supernova rate and the number of supernova remnants in M31, M33 and the Galaxy*, *Astronomy and Astrophysics* **140** (1984) 431–440.
- [31] S. M. Gordon, R. P. Kirshner, K. S. Long, W. P. Blair, N. Duric und R. C. Smith, *A New Optical Sample of Supernova Remnants in M33*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **117** (1998) 89–133.
- [32] H. A. Thronson, D. A. Hunter, S. Casey und D. A. Harper, *Submillimeter continuum emission from galaxies - Star formation and the interstellar medium in the local group dwarf IC 10*, *Astrophys. J.* **355** (1990) 94–101.
- [33] F. X. Timmes und S. E. Woosley, *Gamma-Ray Line Signals from ^{26}Al and ^{60}Fe in the Galaxies of the Local Group*, *Astrophys. J. Lett.* **481** (1997) 81–84.
- [34] S. van den Bergh und R. D. McClure, *Rediscussion of extragalactic supernova rates derived from Evans's 1980-1988 observations*, *Astrophys. J.* **425** (1994) 205.
- [35] M. Maggiore, *Gravitational waves: theory and experiments*, vol. 1. Oxford University Press, Oxford, 1st ed., 2008.
- [36] B. Schutz, *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2nd ed., May, 2009.
- [37] **LIGO Scientific Collaboration** Collaboration, <https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo>, 2017. [Online; accessed 18-July-2017].
- [38] C. J. Moore, R. H. Cole und C. P. L. Berry, *Gravitational-wave sensitivity curves*, *Class. Quant. Grav.* **32** (2015), no. 1 015014 [1408.0740].

- [39] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et. al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), no. 6 061102 [1602.03837].
- [40] A. Wongwathanarat, H.-T. Janka, E. Müller, E. Pllumbi und S. Wanajo, *Production and Distribution of ^{44}Ti and ^{56}Ni in a Three-dimensional Supernova Model Resembling Cassiopeia A*, *Astrophys. J.* **842** (2017), no. 1 13 [1610.05643].
- [41] B. Müller, *Gravitational Waves from Core-Collapse Supernovae*, 1703.04633.
- [42] C. D. Ott, *The Gravitational Wave Signature of Core-Collapse Supernovae*, *Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 063001 [0809.0695].
- [43] J. Powell, S. E. Gossan, J. Logue und I. S. Heng, *Inferring the core-collapse supernova explosion mechanism with gravitational waves*, *Phys. Rev.* **D94** (2016), no. 12 123012 [1610.05573].
- [44] C. W. Misner, K. S. Thorne und J. A. Wheeler, *Gravitation*. Macmillan Education, 1973.
- [45] H. T. Janka, A. Marek und F. S. Kitaura, *Neutrino-driven explosions twenty years after SN1987A*, *AIP Conf. Proc.* **937** (2007) 144–154 [0706.3056].
- [46] E. Abdikamalov, S. Gossan, A. M. DeMaio und C. D. Ott, *Measuring the Angular Momentum Distribution in Core-Collapse Supernova Progenitors with Gravitational Waves*, *Phys. Rev.* **D90** (2014), no. 4 044001 [1311.3678].
- [47] H. Dimmelmeier, C. D. Ott, A. Marek und H.-T. Janka, *The Gravitational Wave Burst Signal from Core Collapse of Rotating Stars*, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 064056 [0806.4953].
- [48] J. Fuller, H. Klion, E. Abdikamalov und C. D. Ott, *Supernova Seismology: Gravitational Wave Signatures of Rapidly Rotating Core Collapse*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **450** (2015), no. 1 414–427 [1501.06951].
- [49] R. A. Saenz und S. L. Shapiro, *Gravitational Radiation from Stellar Collapse: Ellipsoidal Models*, *Astrophys. J.* **221** (1978) 286–303.
- [50] S. Chandrasekhar, *Ellipsoidal Figures of Equilibrium*. Mrs. Hepsa Ely Silliman Memorial Lectures. New Haven, 1969.
- [51] C. D. Ott, E. Abdikamalov, E. O’Connor, C. Reisswig, R. Haas, P. Kalmus, S. Drasco, A. Burrows und E. Schnetter, *Correlated Gravitational Wave and*

Neutrino Signals from General-Relativistic Rapidly Rotating Iron Core Collapse, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 024026 [1204.0512].

- [52] C. D. Ott, H. Dimmelmeier, A. Marek, H. T. Janka, I. Hawke, B. Zink und E. Schnetter, *3D Collapse of Rotating Stellar Iron Cores in General Relativity with Microphysics*, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 261101 [astro-ph/0609819].
- [53] C. L. Fryer, D. E. Holz und S. A. Hughes, *Gravitational wave emission from core collapse of massive stars*, *Astrophys. J.* **565** (2002) 430–446 [astro-ph/0106113].

