

STERL, A.

## Numerische Simulation dreidimensionaler MHD-Strömungen bei großen Hartmann-Zahlen

### 1. Problemstellung

In einem selbstgekühlten Flüssigmetall-Blanket für Fusionsreaktoren [1] werden durch die Wechselwirkung der Flüssigmetall-Strömung mit dem zum Plasmaeinschluß nötigen Magnetfeld große Kräfte auf die Strömung ausgeübt. Dadurch kommt es zu neuartigen Strömungsformen mit erhöhten Druckverlusten.

### 2. Gleichungssystem und Randbedingungen

Unter der Annahme, daß die Strömung inkompressibel und isotherm verläuft und daß das induzierte Magnetfeld gegen das äußere Feld  $B_0$  vernachlässigt werden kann, lauten die Bestimmungsgleichungen zur Beschreibung magnetohydrodynamischer Strömungen in dimensionsloser Form [2]

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \frac{1}{N} [\partial_t v + (v \cdot \nabla)v] = -\nabla p + j \times B_0 + \frac{1}{M^2} \Delta v, \quad (1), (2)$$

$$j = -\nabla \Phi + v \times B_0, \quad \Delta \Phi = B_0 \cdot \operatorname{rot} v. \quad (3), (4)$$

Dabei sind  $v$ ,  $j$ ,  $p$  und  $\Phi$  Geschwindigkeit, elektrische Stromdichte, Druck und elektrisches Potential, dimensionslos gemacht durch die mittlere Geschwindigkeit  $v_0$ ,  $\sigma v_0 B_0$ ,  $\rho_0 v_0^2 N$  und  $v_0 B_0$ .  $\sigma$  ist die spezifische Leitfähigkeit des Fluids und  $\rho_0$  seine Dichte. Als Längenmaßstab dient die halbe Kanalhöhe  $a$ .

Das Verhältnis der elektromagnetischen Kraft zur Reibungskraft wird durch das Quadrat der Hartmann-Zahl  $M = a B_0 (\sigma/\eta)^{1/2}$  ( $\eta$ : dynamische Viskosität), das zur Trägheitskraft durch den Interaktionsparameter  $N = \sigma a B_0^2 / (\rho_0 v_0)$  gemessen. Unter Blanket-Bedingungen sind beide sehr groß:  $M \sim 10^3 \dots 10^4$ ,  $N \sim 10^5$ . Trägheit und Reibung sind dadurch nur in sehr dünnen Schichten mit starken Geschwindigkeitsgradienten relevant, die numerisch aufgelöst werden müssen.

Während die Randbedingung für die Geschwindigkeit einfach durch das Verschwinden von  $v$  an der Wand gegeben ist, bereitet die Bedingung für  $\Phi$  Probleme, da in den Wänden die Maxwell-Gleichungen gelöst werden müssen. Ist jedoch die Wanddicke  $t_w \ll a$ , kann die Wand als unendlich dünn, aber mit endlicher Leitfähigkeit angesehen werden. Strom kann also in sie hineinfließen, in ihr aber nur zweidimensional abfließen. Es ergibt sich als Randbedingung [2]

$$\partial_n \Phi|_{\text{Wand}} = c \Delta_{||} \Phi|_{\text{Wand}}. \quad (5)$$

$c = \sigma_w t_w / (\sigma a)$  ist der Wandleitparameter,  $\sigma_w$  die spezifische Leitfähigkeit des Wandmaterials,  $\partial_n$  die Normalenableitung in die Wand und  $\Delta_{||}$  der zur Wand tangentialer Anteil des Laplace-Operators.

### 3. Algorithmus

Das Problem (1)–(5) wird mit der fractional-step Methode [3] gelöst. Dabei wird zunächst die Navier-Stokes-Gleichung (2) ohne den Druck-Term durch ein ADI-Verfahren um einen Zeitschritt  $\Delta t$  vorwärts integriert. Als Ergebnis erhält man ein divergenzbehaftetes Geschwindigkeitsfeld  $v'$ , das mit Hilfe des neuen Druckes  $p^{(n+1)}$  quellenfrei gemacht wird

$$\Delta p^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta t} \operatorname{div} v', \quad v^{(n+1)} = v' - \Delta t \cdot \nabla p^{(n+1)}. \quad (6), (7)$$

Die Lösung der Gleichungen (4) und (6) erfolgt mit dem schnellen Poissonlöser HS3CRT [4]. Die Randbedingung (5) muß dabei iterativ behandelt werden. Dazu wird eine Wandfunktion  $\Phi_W^{(k+1)}$  eingeführt, die gemäß

$$\Delta_{||} \Phi_W^{(k+1)} = \frac{1}{c} \partial_n \Phi^{(k)}|_{\text{Wand}} \quad (8)$$

aus dem gerade berechneten  $\Phi^{(k)}$  bestimmt wird und nach einer Unterrelaxation als Dirichlet-Randbedingung im  $(k+1)$ -ten Iterationsschritt dient.

4. Ergebnisse

Abb. 1 zeigt die Stromdichte und das Geschwindigkeitsprofil für eine eingelaufene MHD-Strömung in einem Rechteckkanal. In dem Gebiet konstanter Geschwindigkeit und homogenen Stromflusses nach rechts wird dem Druckgradienten nur durch die Lorentzkraft die Waage gehalten. Reibung wird erst in den Seitenbereichen wichtig, wo  $j$  parallel zu  $B_0$  fließt und damit  $j \times B_0$  verschwindet. Dadurch kommt es dort zu Übergeschwindigkeiten. Im Bereich der oberen und unteren Wand fließt der Strom zurück,  $j \times B_0$  wirkt hier in Strömungsrichtung. Starke Reibung verhindert, daß es zu Übergeschwindigkeiten kommt.

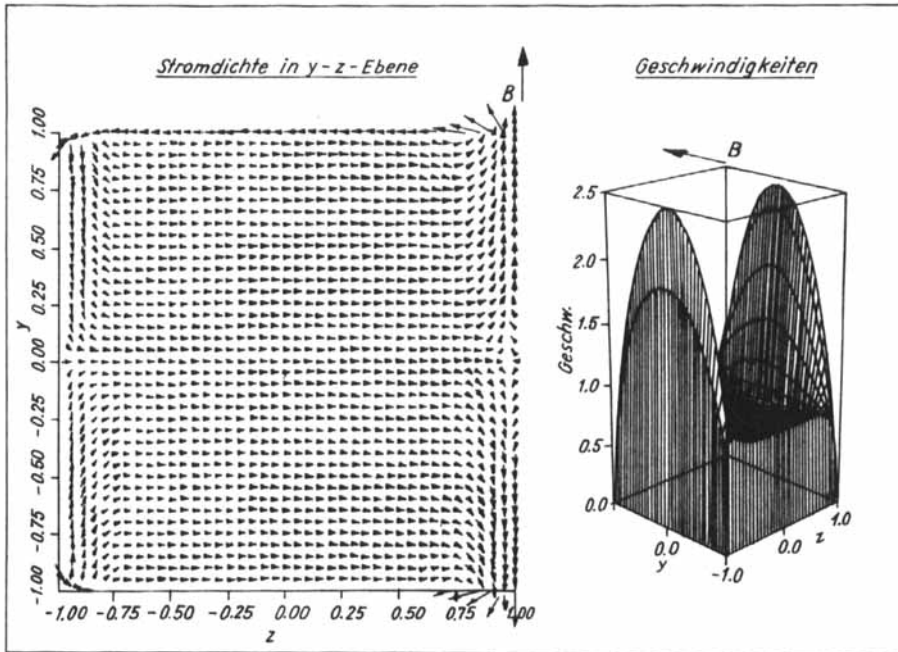


Abb. 1. Stromdichte (links) und Geschwindigkeitsprofil (rechts) für eine eingelaufene MHD-Strömung bei  $M = 10^2$ . Die obere und untere Wand sind leitend ( $c = 0,1$ ), die beiden Seitenwände nicht ( $c = 0$ )

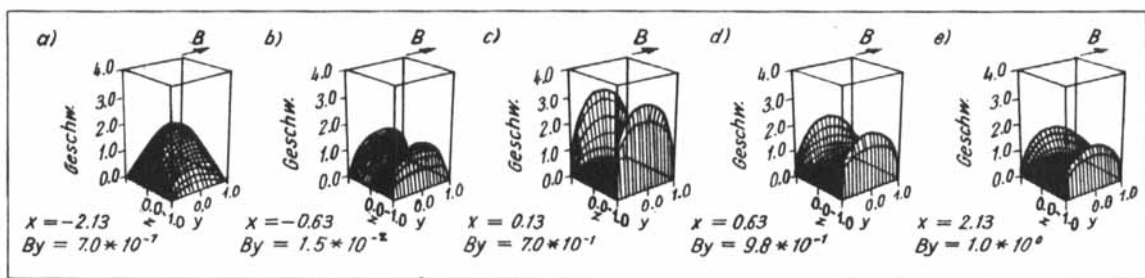


Abb. 2. Geschwindigkeitsprofile im Bereich eines durch Gl. (9) gegebenen Magnetfeldes ( $M = 70, N = 10^3, c = 0,1$ ). Der Übergang vom eingelaufenen hydrodynamischen (a) in den eingelaufenen magnetohydrodynamischen Zustand (e) erfolgt nichtmonoton über die Zwischenzustände b)–d)

In Abb. 2 sind an fünf Querschnitten die Profile der  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit beim Eintritt einer Strömung in ein durch

$$B = (0, B_y(x), 0), \quad B_y(x) = 1/(1 + e^{-x/x_0}), \quad x_0 = 0,15 \tag{9}$$

gegebenes Magnetfeld dargestellt (vgl. Abb. 3). Die Teilbilder b)–d) zeigen den Übergang von der eingelaufenen hydrodynamischen (a) zur eingelaufenen magnetohydrodynamischen (e) Strömung. Er erfolgt offenbar nichtmonoton. Ursache hierfür sind elektrische Ströme, die in der Ebene senkrecht zu  $B_0$  fließen, da durch den  $B$ -Feld-Anstieg axiale Potentialdifferenzen induziert werden. Abb. 3 zeigt, daß sie sich ober- und unterhalb des Übergangsbereichs schließen. Dort produzieren sie eine gegen die Strömung gerichtete Kraft, die in der Kanalmitte ihr Maximum hat und die Strömung dadurch in die Seitenbereiche drängt.

Die Dicke der Schichten mit den Übergeschwindigkeiten sinkt mit wachsendem  $M$ . Es konnten jedoch zweidimensionale Strömungen bis  $M = 10^3$  und dreidimensionale bis  $M = 10^2$  berechnet werden. Weitere Ergebnisse finden sich in [5].

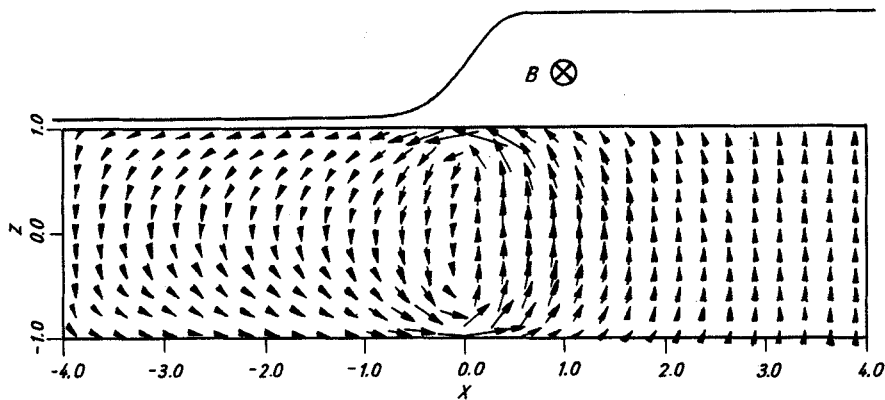


Abb. 3. Axialströme im Übergangsbereich in der  $xz$ -Ebene. Oben zur Orientierung der Magnetfeld-Verlauf

### Literatur

- 1 MALANG, S. et al.: Self-cooled liquid-metal blanket concept. *Fusion Technology*, **14** (1988) 3, 1343–1356.
- 2 WALKER, J. S.: Magneto-hydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls. Part I: Constant area and variable area ducts with strong uniform magnetic fields. *Journal de Mécanique* **20** (1981), 79–112.
- 3 KIM, J.; MOIN, P.: Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes-Equations. *J. Comp. Phys.* **59** (1985), 308–322.
- 4 SCHUMANN, U.; SWEET, R. A.: Fast Fourier Transforms for direct solution of Poisson's Equation with staggered boundary conditions. *J. Comp. Phys.* **75** (1988), 123–137.
- 5 STERL, A.: Numerische Simulation magneto-hydrodynamischer Flüssig-Metall-Strömungen in rechteckigen Röhren bei großen Hartmann-Zahlen. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-4504, 1989.

*Anschrift:* Dr. ANDREAS STERL, MPI für Meteorologie, Bundesstr. 55, D-2000 Hamburg 13, BRD