Ionisierungsspannung in einem Plasma

von

Arnulf Schlüter

I.P.P. 6/II

1. Ein üblicher Weg, die Frage nach der Erniedrigung der Ionisierungsspannung in einem Plasma anzugreifen, besteht in der Betrachtung des Einflusses der geladenen Teilchen auf die Zustandssumme der neutralen Atome:

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i} \qquad (1)$$

wobei

$\beta = \frac{1}{kT}$; g_i, E_i = Entartungsgrad und Energie des i-ten Zustands.

Bekanntlich divergiert diese Summe in der Nähe der Ionisationsgrenze infolge der Häufung der Zustände. Sie wird daher bei einem zu bestimmenden Werte von i abgebrochen und der entsprechende Wert von E_i als Verringerung der Ionisierungsspannung betrachtet. Das Problem reduziert sich dann auf die Bestimmung dieses Wertes von i[1]. Alle Betrachtungen dieser Art zeigen, daß für normale Plasmen dieses i einem so hoch angeregten Zustand des Atoms entspricht, daß die eigentlichen Quanteneffekte dort bereits unmerklich geworden sein müssen. Das heißt aber, daß das Abschneiden der Zustandssumme durch einen klassisch beschreibbaren Effekt zustande kommen muß.

---

[1] Vgl. hierzu G.Ecker und W.Weizel, Ann. Physik (6) 17, 126 (1956) und die dort zitierte Literatur

2. Wir betrachten daher die Theorie eines klassischen Plasmas und werden hierbei einen anderen Zugang zu demselben Problem finden und zwar von dem bekannten Paradoxon aus, daß es kein klassisches Plasma gibt.

Eine wesentliche Vereinfachung, die sich bei klassischer Behandlung ergibt, liegt in der vollständigen Entkopplung der Impulse voneinander und von den Lagekoordinaten. Alle Teilchen haben dann also unkorrelierte Geschwindigkeitsverteilungen nach Maxwell und wir brauchen nur die Korrelationen in den Lagekoordinaten zu betrachten. Damit entfällt auch jede Veranlassung, überhaupt zwischen „freien" und „gebundenen" Teilchen zu unterscheiden, oder auch nur diese Unterscheidung zu definieren.

Wir betrachten ein Plasma aus zwei entgegengesetzt geladenen Teilchensorten im thermischen Gleichgewicht und definieren

$$n_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

als die Wahrscheinlichkeit zugleich im Volumenelement $d\tau_1$ bei $\mathfrak{r}_1$ ein Teilchen der Ladung +e und zugleich im Volumenelement $d\tau_2$ bei $\mathfrak{r}_2$ ein Teilchen der Ladung -e anzutreffen. Ferner definieren wir die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten $n_{++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$, $n_{--}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$ und analog $n_{+++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3)$, $n_{++-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3)$ usw.

Bekanntlich sind alle diese Verteilungsfunktionen im vorausgesetzten thermischen Gleichgewicht von den Massen der beteiligten Teilchen unabhängig. Sie sind offenbar symmetrisch in den vorkommenden Koordinaten. Bei rein elektrostatischer Wechselwirkung und gleicher Dichte der negativen und positiven Teilchen gilt ferner

$$n_{++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) = n_{--}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)$$

und

$$n_{+++} = n_{---}\,, \quad n_{++-} = n_{--+}\,.$$

Ferner gelten zwischen ihnen die Yvon-Born-Green-Kirkwood-Gleichungen, die für ein Zweikomponentensystem allgemein lauten:

$$\frac{\partial n_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}{\partial \mathfrak{r}_1} + \beta \Big\{ n_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) \frac{\partial \phi_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}{\partial \mathfrak{r}_1}$$
$$+ \int n_{+-+}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) \frac{\partial \phi_{++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)}{\partial \mathfrak{r}_1}\, d^3\tau \qquad (2)$$
$$+ \int n_{+--}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) \frac{\partial \phi_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_3)}{\partial \mathfrak{r}_1}\, d^3\tau = 0,$$

entsprechend für $\frac{\partial n_{++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)}{\partial \mathfrak{r}_1}$.

Hierbei ist ϕ das zwischen den angegebenen Teilchen wirkende Potential. Diese Gleichungen werden zu einem geschlossenen System, wenn wir die Tripelkorrelation durch die Zweierkorrelation ausdrücken, wozu wir den folgenden Ansatz machen:

$$n_{+-+}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3)$$
$$= n_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)\, n_+(\mathfrak{r}_3) + n_{-+}(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3)\, n_+(\mathfrak{r}_1) \qquad (3)$$
$$+ n_{++}(\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_1)\, n_-(\mathfrak{r}_2) - 2 n_+(\mathfrak{r}_1)\, n_-(\mathfrak{r}_2)\, n_+(\mathfrak{r}_3)$$

und genau entsprechend für n_{+++}. Dabei ist n_+ die Dichte der positiven Teilchen und im betrachteten quasi-neutralen Plasma gleich der Dichte n_- der negativen Teilchen und vom Orte unabhängig, so daß wir einfach n schreiben können. Die Begründung dieses Ansatzes stellen wir einen Augenblick zurück. Definieren wir dann weiter die Differenz

$$D(r) = \frac{e}{n}\left(n_{+-}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2) - n_{++}(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2)\right), \quad r = |\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|$$

so ist $-D(r)$ die Ladungsdichte um ein herausgegriffenes positives Teilchen und zugleich $D(r)$ die Ladungsdichte um ein negatives Teilchen. Aus den Gleichungen (2) folgt ohne weitere Vernachlässigung unter Berücksichtigung der Symmetrien der Zweierkorrelation und des Coulomb'schen Potentials die Differentialgleichung

$$r^2 \Delta D(r) = \left(\frac{\lambda_T^2}{r^2} + \frac{r^2}{\lambda_D^2}\right) \cdot D(r) \qquad (4)$$

wobei für $D(r)$ die Normierungsbedingung

$$4\pi \int_0^\infty D(r)\, r^2 dr = e \qquad (5)$$

gelten muß, da sich in der Umgebung eines positiven, herausgegriffenen Teilchens gerade insgesamt die kompensierende Überschußladung -e befinden muß. In Gl.(4) treten die zwei charakteristischen Längen des Problems

$$\lambda_D = (8\pi \beta n e^2)^{-\frac{1}{2}} , \quad \lambda_T = \beta e^2$$

auf. λ_D ist die Debye-Länge des Plasmas, während λ_T die Entfernung angibt, in der die thermische Energie von der Grössenordnung der potentiellen Energie zwischen zwei Teilchen wird. In allen praktisch vorkommenden Plasmen gilt die Ungleichung $\lambda_T \ll \lambda_D$ und damit auch

$$\lambda_T \ll n^{-\frac{1}{3}} \ll \lambda_D \tag{6}$$

d.h. insbesondere, daß die Anzahl der Teilchen im Debye-Volumen $(4\pi/3)\lambda_D^3 n$ sehr groß ist. Für diesen Fall konnte die Gültigkeit des Ansatzes der Gleichung (3) durch eine Störungsentwicklung des vollständigen Satzes der Yvon-Gleichung nach dem kleinen Parameter $(n\lambda_D^3)^{-1}$ gezeigt werden. Ferner ist evident, daß der Ansatz sicher auch dann gut ist, wenn nur je zwei Teilchen einander sehr nahe kommen, wie das gerade in dem uns besonders interessierenden Fall, daß zwei entgegengesetzt geladene Teilchen nahe bei einander sind, zutrifft.

Für die Differentialgleichung (4) läßt sich leicht eine gute Näherungslösung in jedem der beiden Bereiche geben, die durch das geometrische Mittel zwischen den beiden charakteristischen Längen getrennt werden:

$$D(r) \sim \begin{cases} C \cdot \frac{1}{\lambda_T} \cdot \sinh \frac{\lambda_T}{r} & r^2 \ll \lambda_T \cdot \lambda_D \\ C \cdot \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) & r^2 \gg \lambda_T \cdot \lambda_D \end{cases} \tag{7}$$

Unter unserer Voraussetzung $\lambda_T \ll \lambda_D$ zeigte sich, daß in dem ganzen Intervall zwischen $\lambda_T \ll r \ll \lambda_D$ beide Näherungen sich wenig voneinander unterscheiden. C ist eine Normierungskonstante, die aus Gl. (5) bestimmt werden muß und sich für $\lambda_T = 0$ zu $e/4\pi\lambda_D^2$ ergibt. In demselben Grenzfall ist D(r) mit dem bekannten Debye'schen Ausdruck identisch, der die „kollektive" Wechselwirkung beschreibt; die erste Zeile von (7) gilt dagegen in dem Bereich, in dem die direkte Zweier-Wechselwirkung überwiegt und hat daher genau die Form einer Boltzmann-Verteilung (bzw. der Differenz der beiden Boltzmann-Verteilungen für gleiche und ungleiche Teilchen). Für $\lambda_T \neq 0$ ist D(r) nicht normierbar, da die Singularität bei r = 0 zu stark ist. Das war vorherzusehen, da es bedeutet, daß in einem klassischen Plasma alle geladenen Teilchen im thermischen Gleichgewicht "rekombinieren" müssen, weil der dabei entstehende Verlust an Phasenvolumen durch den unbegrenzt möglichen Gewinn an potentieller Energie überkompensiert werden kann.

Diese Schwierigkeit wird offensichtlich durch die Quantentheorie behoben, da der mögliche Energiegewinn durch die Ionisierungsspannung begrenzt ist. Wenn es nun eine Länge λ so gibt, daß sie groß gegen die Dimension des neutralen Atoms im Grundzustand ist und zugleich klein gegen den mittleren Abstand der Teilchen, dann können wir einerseits für alle Entfernungen grösser als λ die

Beschreibung durch die klassische Physik verwenden und andererseits für Entfernungen kleiner als λ die Wechselwirkung zweier Teilchen als ein reines Zweikörperproblem behandeln. Wegen unserer Ungleichungen (6) können wir λ dann auch immer so wählen, daß

$$\lambda_T \ll \lambda \ll \lambda_D . \qquad (8)$$

Schliesslich machen wir noch die Annahme, daß wir für alle thermodynamischen Grössen die Wechselwirkung der neutralen Atome, bei denen die beiden geladenen Teilchen weniger als λ voneinander entfernt sind, untereinander und mit den übrigen geladenen Teilchen vernachlässigen dürfen; d.h. wir können die Neutralen als ein ideales Gas betrachten, das sich mit dem Plasma ideal mischt. In die Beschreibung durch D(r) nehmen wir dann nur die Paare auf, die weiter als λ voneinander entfernt sind $(r > \lambda)$. Dann gilt praktisch über dem ganzen vorkommenden Bereich von r das Debye'sche Grenzgesetz und wir können die gesamte potentielle Energie des Plasmas nach

$$U^{el} = -4\pi N e \int_{\lambda}^{\infty} \frac{D(r)}{r} \cdot r^2 dr \; ; \; N = n \cdot V \qquad (9)$$

zu

$$U^{el} = -\frac{Ne^2}{\lambda_D} \; (\lambda_T \ll \lambda \ll \lambda_D !) \qquad (10)$$

(10)

ausrechnen. Daraus ~~nach~~ erhalten wir nach

$$\frac{\partial \beta F^{el}}{\partial \beta} = V^{el}, \quad F^{el} = F^{el}(\beta, N, V), \quad F^{el}(0, N, V) = 0 \tag{11}$$

den Beitrag der elektrischen Wechselwirkung zur Freien Energie

$$F^{el} = -\frac{2}{3}\,\frac{Ne^2}{\lambda_D}, \tag{12}$$

dann den elektrischen Beitrag zum Druck (oder zur Kohäsion des Plasmas):

$$p^{el} = -\frac{\partial F^{el}}{\partial V} = -\frac{1}{3}\,\frac{n e^2}{\lambda_D} \tag{13}$$

und schliesslich den Beitrag zum chemischen Potential

$$\mu^{el} = \frac{\partial F^{el}}{\partial N} = -\frac{e^2}{\lambda_D} \tag{14}$$

Die Güte der verwendeten Näherung in Abhängigkeit von der beschränkt willkürlichen Länge λ zeigt die Figur 1, in der die elektrostatische Energie in Einheiten des Debye'schen Wertes (Gl.(10)) aus numerisch gewonnenen Lösungen der Differentialgleichung (6) als Funktion von λ / λ_D für verschiedene Werte von λ_T / λ_D als Parameter aufgezeichnet ist.

4. Die Erniedrigung der Ionisierungsspannung kann nun leicht berechnet werden; ohne Berücksichtigung der elektrostatischen Wechselwirkungen folgt die Saha-Gleichung direkt aus der allgemeinen Gleichung für ein "chemisches" Gleichgewicht

$$\mu_{At} = \mu_i + \mu_e + \chi \qquad (15)$$

wobei $\mu_{At}; \mu_i; \mu_e$ die chemischen Potentiale der entsprechenden Teilchen bedeuten, die dann nach den Regeln für ideale Gase auszurechnen sind, wobei μ_{At} die Zustandssumme des neutralen Atoms (und eventuell μ_i die Zustandssumme des Ions) enthält und ferner χ den Unterschied im Nullpunkt der Energie, also die (unveränderte) Ionisierungsspannung bedeutet. Nach den vorhergehenden Ausführungen treten nun folgende Änderungen ein: Die auf der linken Seite vorkommende Zustandssumme ist bei Zuständen zu begrenzen, deren klassischer Radius λ entspricht, und auf der rechten Seite ist die elektrostatische Korrektur zum chemischen Potential hinzuzufügen, die als eine Erniedrigung der Ionisierungsspannung um den relativ kleinen Betrag e^2/λ_D beschrieben werden kann. Dabei ist natürlich zu beachten, daß diese Erniedrigung von Temperatur und Dichte abhängt.

5. Das erhaltene Ergebnis bedeutet, daß für einen weiten Bereich das Debye'sche Grenzgesetz die richtige Erniedrigung der Ionisierungsspannung liefert. Die mit der Formel (15) berechnete Zahl der Neutralen umfasst dann alle Paare deren Partner näher als λ beieinander sind, während alle anderen Teilchen bei den Dichten der Geladenen mitgerechnet werden. Das Ergebnis besagt zunächst gar nichts über die Zahl der beobachtbaren diskreten Terme im Spektrum der Neutralen, da zu deren Bestimmung dynamische Überlegungen ausserhalb des Bereichs der statistischen Mechanik angestellt werden müssen.

Diese Untersuchung ist durch Diskussion mit den Herren Wulff und Klüber angeregt worden. Für die Durchführung der numerischen Rechnungen danke ich Frau G. Hain.

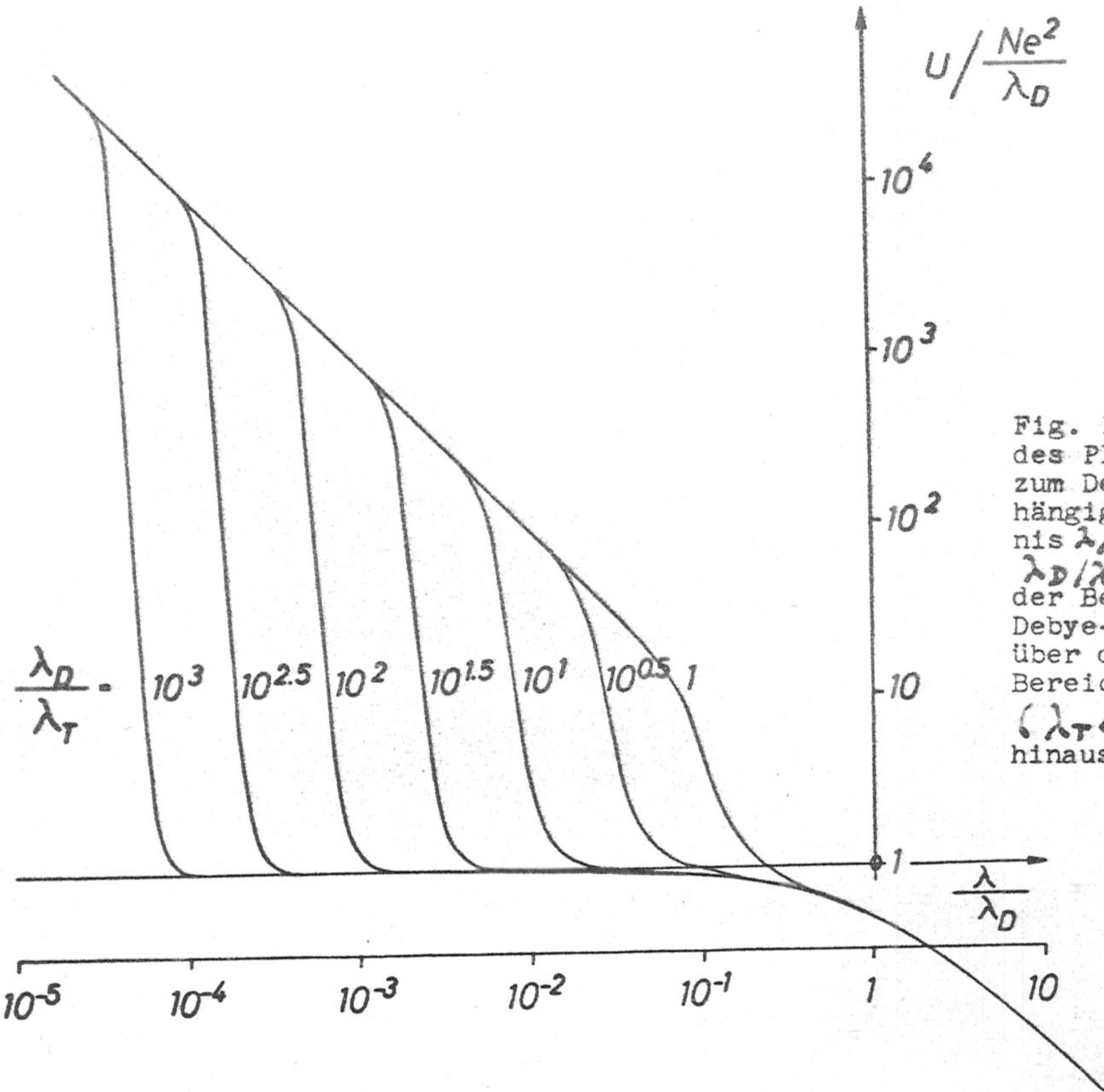

Fig. 1: Potentielle Energie des Plasmas im Verhältnis zum Debye'schen Werte in Abhängigkeit von dem Verhältnis λ/λ_D für verschiedene λ_D/λ_T. Man beachte, daß der Bereich, in dem die Debye-Näherung gut ist, weit über den an sich zulässigen Bereich von λ $(\lambda_T \ll \lambda \ll (8\pi \lambda_T \lambda_D^2)^{1/3})$ hinausgeht.

$$8\pi \lambda_T \lambda_D^2 = n^{-1}$$