

# INSTITUT FÜR PLASMAPHYSIK

GARCHING BEI MÜNCHEN

Allgemeine 13-Momenten-Näherung  
zur Fokker-Planck-Gleichung  
eines Plasmas

von  
Friedrich Hertweck

I.P.P. 6/1

*Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.*

## Inhaltsangabe

|  | Seite |
|--|-------|
| Einführung   | 1     |
| 1. Die Momentengleichungen   | 3     |
| 2. Allgemeine Form der Stoßmomente   | 10    |
| 3. Entwicklung der Verteilungsfunktion nach<br>Hermiteischen Polynomen                   | 22    |
| 4. Berechnung der Hilfsfunktionen und (bzw.<br>und )                                     | 30    |
| 5. Berechnung der Hilfsfunktionen und  | 34    |
| 6. Lineare Näherung der Stoßmomente und Transport-<br>erscheinungen. Onsager Relationen. | 42    |
| 7. "Run-away"-Elektronen   | 51    |
| Anhang I   | 60    |
| Anhang II  | 64    |
| Anhang III   | 68    |

Das Ziel dieser Arbeit ist, aus der Boltzmann-Gleichung für ein Zwei-Komponenten-Plasma das zugehörige System der Momentengleichungen herzuleiten, und zwar unter Verwendung der Fokker-Planck-Näherung für das Stossintegral. Diese Näherung ist gültig unter der Voraussetzung, daß sich innerhalb einer Debye-Kugel sehr viele Teilchen befinden, was in praktisch interessierenden Fällen meistens zutrifft.

Die Theorie der Momentengleichungen ist zuerst von H. Grad behandelt worden, jedoch ohne Einbeziehung geladener Teilchen.

In vorliegender Arbeit werden die Momentengleichungen für das Plasma abgeleitet, wobei die Diffusionsgeschwindigkeit (d.h. die Differenz der mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Komponenten) und die Druckerisotropie beliebig sein sollen. Letztere Verallgemeinerung bedingt eine Entwicklung der Verteilungsfunktion  $f(u_0)$  nach Orthogonalpolynomen über einer Gewichtsfunktion vom Typ  $g(u_0) = \exp[-\alpha_1 u_1^2 - \alpha_2 u_2^2 - \alpha_3 u_3^2]$ , wobei  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  positive, voneinander unabhängige Konstanten sind (Abschnitt 3).

Die Stossintegrale lassen sich dann durch die Lösungen der Potentialgleichungen  $\Delta \varphi_0(u_0) = -4\pi g(u_0)$  und  $\Delta \Delta \varphi_1(u_0) = -8\pi g(u_0)$  ausdrücken. In Anhang III wird gezeigt, wie sich diese Lösungen durch bestimmte, einfache Integrale darstellen lassen. Es wird hier die von Grad diskutierte 13-Momenten-Näherung benutzt, in welcher jede Gas-Komponente beschrieben wird durch die Dichte  $\rho$ , die mittlere Geschwindigkeit der Komponente  $v_\alpha$ , den Drucktensor  $p_{\alpha\beta}$  und den Wärmestrom  $s_\alpha$ . Eine wesentliche Einschränkung ist

dabei die Voraussetzung, daß die auftretenden Wärmeströme  $s_\alpha$  klein sind, d.h.  $|s_\alpha| \ll \frac{5}{2} p \sqrt{p/\rho_e}$ . Wenn die mittleren Geschwindigkeiten der einzelnen Komponenten beliebig sein sollen, darf man nicht die übliche Definition der thermischen Energie einer Komponente (bezogen auf die Massengeschwindigkeit des Gesamtsystems) benutzen, sondern muß die mittlere Geschwindigkeit dieser Komponente als Referenzgeschwindigkeit nehmen.

Für kleine Diffusionsgeschwindigkeit und Druckanisotropie gehen die hier abgeleiteten Momentengleichungen über in die von I. Kolodner behandelte lineare Näherung. In Abschnitt 6 wird gezeigt, daß für die aus dieser Näherung folgenden Transportkoeffizienten die Onsager-Relationen gelten.

Schliesslich wird noch das zeitliche Verhalten eines homogenen Plasmas unter dem Einfluß eines konstanten Feldes betrachtet (Abschnitt 7). Die Momentengleichungen reduzieren sich in diesem Fall auf ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit der Zeit als unabhängiger Variablen. Für einen speziellen Wert der elektrischen Feldstärke existiert eine von Dreicer berechnete numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (partiell Differentialgleichungssystem mit der Zeit und zwei Geschwindigkeitskomponenten als unabhängigen Variablen), mit der die Lösungen der Momentengleichungen verglichen werden.

### 1. Die Momentengleichungen.

In diesem Abschnitt soll die Herleitung der Momentengleichungen kurz skizziert werden<sup>1)</sup>.

Die Boltzmann-Gleichung für ein aus geladenen Teilchen der Sorten  $r$  bestehendes Gas lautet (mit Benutzung der Summationskonvention):

$$\frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} + u_{\mu}^{(r)} \frac{\partial f^{(r)}}{\partial x_{\mu}} + [\varepsilon_{\mu}^{(r)}(\varphi, t) + \omega_{\mu\nu}^{(r)}(\varphi, t) \cdot u_{\nu}^{(r)}] \frac{\partial f^{(r)}}{\partial u_{\mu}^{(r)}} = \left( \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \right)_{st} \quad (1)$$

Es bedeuten hier:  $t$  die Zeit,  $\varphi$  den Ortsvektor mit den Komponenten  $x_{\mu}$ ,  $u_{\mu}^{(r)}$  die Geschwindigkeitskomponenten eines Teilchens der Sorte  $r$  im Laborsystem,  $\varepsilon_{\mu}^{(r)}(\varphi, t) = \frac{e^{(r)}}{m^{(r)}} E_{\mu}(\varphi, t)$  die durch ein elektrisches Feld  $E_{\mu}(\varphi, t)$  auf ein Teilchen der Sorte  $r$  mit der Masse  $m^{(r)}$  und der Ladung  $e^{(r)}$  ausgeübte Beschleunigung und  $\omega_{\mu\nu}^{(r)}(\varphi, t) = e^{(r)} B_{\mu\nu}(\varphi, t) / m^{(r)} c$  die Gyrofrequenz für die Teilchensorte  $r$ .  $\varepsilon_{\mu}^{(r)}$  und  $\omega_{\mu\nu}^{(r)}$  können, wie angedeutet, von Ort und Zeit abhängen.

$f^{(r)}(\vec{u}^{(r)}, \varphi, t)$  ist die Verteilungsfunktion der Teilchensorte  $r$ . Der Term auf der rechten Seite von Gl.(1),  $\left( \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \right)_{st}$ , beschreibt die zeitliche Änderung der Verteilungsfunktion durch Stösse.

$E_{\mu}(\varphi, t)$  und  $B_{\mu\nu}(\varphi, t)$  enthalten ausser den äusseren Feldern auch noch "innere", welche durch Ladungstrennung und elektrische Ströme innerhalb des Gases hervorgerufen werden. Die Frage der Berechnung dieser inneren Felder soll in dieser Arbeit nicht angeschnitten werden.

<sup>1)</sup> Vgl. z.B. Chapman-Cowling, Mathematical Theory of Non-Uniform Gases, S.322 ff., Cambridge 1953

Es seien also  $E_\mu(\varphi, t)$  und  $B_{\mu\nu}(\varphi, t)$  die am Ort  $\varphi$  zur Zeit  $t$  herrschenden Felder, wie auch immer sie zustande gekommen sein mögen.

Man definiert die Momente der Funktion  $f^{(r)}(\tilde{u}^{(r)}, \varphi, t)$  wie folgt:

$$n^{(r)}(\varphi, t) = \int f^{(r)}(\tilde{u}^{(r)}, \varphi, t) d\tilde{u}^{(r)}$$

$$n^{(r)} v_\mu^{(r)}(\varphi, t) = \int u_\mu^{(r)} f^{(r)}(\tilde{u}^{(r)}, \varphi, t) d\tilde{u}^{(r)}$$

$$p_{\alpha\beta}^{(r)}(\varphi, t) = m^{(r)} \int w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)} f^{(r)} d\tilde{u}^{(r)}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}(\varphi, t) = m^{(r)} \int w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)} w_\gamma^{(r)} d\tilde{u}^{(r)}$$

$$q_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{*(r)}(\varphi, t) = m^{(r)} \int w_{\alpha_1}^{(r)} w_{\alpha_2}^{(r)} \dots w_{\alpha_n}^{(r)} f^{(r)} d\tilde{u}^{(r)}$$

$$\text{wobei } w_\alpha^{(r)} = u_\alpha^{(r)} - v_\alpha^{(r)}(\varphi, t).$$

Diese Momente haben folgende physikalische Bedeutung:

$n^{(r)}(\varphi, t)$  ist die Teilchendichte der Gaskomponente  $r$  im Ortsraum und  $v_\alpha^{(r)}(\varphi, t)$  ist die mittlere Geschwindigkeit der Teilchensorte  $r$ . Das Moment zweiter Ordnung  $p_{\alpha\beta}^{(r)}$  ist der Drucktensor, das Moment dritter Ordnung  $q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}$  der Drucktransporttensor der Teilchensorte  $r$ . Kontrahiert man den Drucktransporttensor, so erhält man die Vektorkomponenten des Wärmestroms  $S_\alpha^{(r)} = \frac{1}{2} q_{\alpha\mu\mu}^{(r)}$ . Für die höheren Momente lassen sich keine anschaulichen Interpretationen angeben. Die Momente sind offenbar (in allen Indices)

symmetrische Tensoren.

Die Momentengleichungen erhält man nun, indem man Gl.(1) mit den Funktionen  $1, u_\alpha^{(r)}, w_\alpha^{(r)} w_\beta^{(r)}, \dots$  multipliziert und über den Geschwindigkeitsraum integriert. Setzt man über die Funktion  $f^{(r)}(u^{(r)}, \varphi, t)$  voraus, daß die Integration über den Geschwindigkeitsraum vertauschbar ist mit den Differentiationen nach Ort und Zeit und daß  $f(u^{(r)})$  hinreichend schnell verschwindet für  $|u^{(r)}| \rightarrow \infty$ , so folgt durch Integration von Gl.(1) die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n^{(r)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (n^{(r)} v_\mu^{(r)}) = 0.$$

Das Integral über den Stoßterm verschwindet, wenn bei Stößen die Teilchenzahl erhalten bleibt. Dies soll vorausgesetzt werden, d.h. Ionisationsprozesse u.ä. werden nicht betrachtet.

Multipliziert man Gl.(1) mit  $u_\alpha^{(r)}$  und integriert dann, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial v_\alpha^{(r)}}{\partial t} + v_\mu^{(r)} \frac{\partial v_\alpha^{(r)}}{\partial x_\mu} + \frac{1}{f^{(r)}} \frac{\partial p_{\alpha\mu}^{(r)}}{\partial x_\mu} - \varepsilon_\alpha^{(r)} - \omega_{\alpha\mu}^{(r)} v_\nu^{(r)} = \frac{1}{n^{(r)}} \int w_\alpha^{(r)} \left( \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \right)_{st} d u^{(r)}.$$

Das Integral über den Stoßterm liefert hier einen Beitrag, nämlich den Impulsaustausch der Komponente  $r$  mit den anderen Komponenten. Der Anteil, der von den Stößen mit gleichartigen Teilchen herrührt, muß natürlich verschwinden. Auch bei den Momenten höherer Ordnung verschwinden die Integrale über  $\left( \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \right)_{st}$  nicht. Es soll deshalb das "Stoßmoment" definiert werden durch die Gleichung

$$\gamma_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_N}^{(r)}(\varrho, t) = m^{(r)} \int \omega_{\alpha_1}^{(r)} \omega_{\alpha_2}^{(r)} \dots \omega_{\alpha_N}^{(r)} \left( \frac{\partial f^{(r)}}{\partial t} \right)_{st} d\omega^{(r)}. \quad (3)$$

Damit ergibt sich dann für die Momentengleichungen zweiter und dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\alpha\beta}^{(r)}}{\partial t} + v_{\mu}^{(r)} \frac{\partial p_{\alpha\beta}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial q_{\alpha\beta\mu}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial v_{\mu}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} p_{\alpha\beta}^{(r)} + \\ + \left\{ \left[ \frac{\partial v_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} p_{\beta\mu}^{(r)} + \omega_{\mu\alpha}^{(r)} p_{\beta\mu}^{(r)} \right] + [\alpha, \beta \text{ vertauscht}] \right\} = \gamma_{\alpha\beta}^{(r)} \end{aligned} \quad (4)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}}{\partial t} + v_{\mu}^{(r)} \frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial q_{\alpha\beta\gamma\mu}^{*(r)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial v_{\mu}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} q_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} + \left\{ \left[ \frac{\partial v_{\alpha}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} q_{\mu\beta\gamma}^{(r)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega_{\mu\alpha}^{(r)} q_{\beta\gamma\mu}^{(r)} + \frac{p_{\beta\gamma}^{(r)}}{g^{(r)}} \left( \gamma_{\alpha}^{(r)} - \frac{\partial p_{\alpha\mu}^{(r)}}{\partial x_{\mu}} \right) \right] + [\beta; \alpha, \gamma] + [\gamma; \alpha, \beta] \right\} = \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(r)} \end{aligned} \quad (5)$$

$q_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$  ist das Moment vierter Ordnung,  $g^{(r)} = m^{(r)} n^{(r)}(\varrho, t)$ .  $[\beta; \alpha, \gamma]$  bezeichnet den Ausdruck, der aus der ersten eckigen Klammer durch Permutation der Indices entsteht;  $\alpha$  und  $\gamma$  treten symmetrisch auf.

Für die allgemeine Momentengleichung N-ter Ordnung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{\alpha}^{(N)}}{\partial t} + v_{\mu} \frac{\partial q_{\alpha}^{(N)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial q_{\mu\alpha}^{(N+1)}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x_{\mu}} q_{\alpha}^{(N)} + \\ + \sum_{k=1}^N \left[ \left( \frac{\partial v_{\alpha_k}}{\partial x_{\mu}} + \omega_{\mu\alpha_k} \right) q_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_N \mu}^{(N)} + \right. \\ \left. + \frac{q_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+1} \dots \alpha_N}^{(N-1)}}{g} \cdot \left( \gamma_{\alpha_k}^{(1)} - \frac{\partial p_{\alpha_k \mu}^{(2)}}{\partial x_{\mu}} \right) \right] = \gamma_{\alpha}^{(N)} \end{aligned} \quad (6)$$

Der Teilchensorten-Index ist in dieser Gleichung weggelassen. Das Moment N-ter Ordnung ist durch  $q_{\alpha}^{(N)}$  abgekürzt. Der obere, eingeklammerte Index bezeichnet die Ordnung des Momentes, während  $\alpha$  für die N verschiedenen Indices  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  steht. Diese Indices sind bei der Summation über  $k$  als verschieden zu betrachten, auch wenn sie zufällig numerisch gleich sind. So ist z.B. (für  $N = 3$ )  $\sum_{k=1}^3 \omega_{\mu\alpha_k} q_{\alpha\mu}^{(3)} = \omega_{\mu\alpha} q_{\beta\gamma\mu} + \omega_{\mu\beta} q_{\alpha\gamma\mu} + \omega_{\mu\gamma} q_{\beta\alpha\mu}$ . Ist  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , so erhält man  $3 \omega_{\mu 1} q_{\mu 11}$ .

Das Auftreten von  $\gamma_{\alpha}^{(1)}$  und  $\rho_{\alpha\mu}^{(2)}$  in dieser Gleichung, in der sonst nur die Momente der Ordnung  $(N-1)$ ,  $N$  und  $(N+1)$  vorkommen, rührt her von der Substitution der Bewegungsgleichung in dieser Gleichung.

Man erhält ein abzählbar unendliches System von Momentengleichungen, welches an die Stelle der Boltzmann-Gleichung tritt. In der Praxis muß man dieses System irgendwie abbrechen. Diese Frage wird in Abschnitt 3 diskutiert.

In dieser Arbeit wird im folgenden ein Zwei-Komponenten-System mit einfach geladenen Ionen und Elektronen untersucht werden. Um die Teilchensorten-Indices  $i$  und  $e$  nach Möglichkeit zu eliminieren, sollen folgende Abkürzungen benutzt werden:

$$f^{(e)} = f_e$$

$$f^{(i)} = f_i$$

$$n^{(e)} = n_e$$

$$n^{(i)} = n_i$$

$$v_{\alpha}^{(e)} = v_{\alpha e}$$

$$v_{\alpha}^{(i)} = v_{\alpha i}$$

$$p_{\alpha\beta}^{(e)} = p_{\alpha\beta e}$$

$$p_{\alpha\beta}^{(i)} = p_{\alpha\beta i}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} = q_{\alpha\beta\gamma}$$

$$q_{\alpha\beta\gamma}^{(i)} = Q_{\alpha\beta\gamma}$$

$$E_{\alpha}^{(e)} = -E_{\alpha}$$

$$E_{\alpha}^{(i)} = \frac{m_e}{m_i} E_{\alpha} = E_{\alpha}$$

$$\omega_{\alpha\nu}^{(e)} = -\omega_{\alpha\nu}$$

$$\omega_{\alpha\nu}^{(i)} = \frac{m_e}{m_i} \omega_{\alpha\nu} = \Omega_{\alpha\nu}$$

Anstelle der Geschwindigkeiten  $v_{\alpha}$  und  $V_{\alpha}$  kann man die neuen Geschwindigkeiten  $d_{\alpha}$  und  $U_{\alpha}$  einführen:

$$d_{\alpha} = V_{\alpha} - v_{\alpha} \quad (\text{Diffusionsgeschwindigkeit})$$

$$U_{\alpha} = \frac{m_e v_{\alpha} + m_i V_{\alpha}}{m_e + m_i} \quad (\text{Massengeschwindigkeit})$$

Wenn  $n = N$ , ist die Diffusionsgeschwindigkeit  $d_{\alpha}$  proportional zum elektrischen Strom  $j_{\alpha}$ . Sonst gilt bei einfach geladenen Ionen

$$j_{\alpha} = e n d_{\alpha} + (N-n) [U_{\alpha} + d_{\alpha} m_e / (m_i - m_e)]$$

Substituiert man  $v_{\alpha}$  und  $V_{\alpha}$  in den Bewegungsgleichungen durch  $d_{\alpha}$  und  $U_{\alpha}$ , so erhält man für die Bewegungs- und die Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial U_{\alpha}}{\partial t} + U_{\mu} \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \frac{m_i m_e}{m_o^2} d_{\mu} \frac{\partial d_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \frac{m_e}{m_o \rho_e} \frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}} + \frac{m_i}{m_o \rho_i} \frac{\partial P_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{m_e}{m_o} \omega_{\alpha\nu} d_{\nu} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{\alpha}}{\partial t} + U_{\mu} \frac{\partial d_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + d_{\mu} \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} - \frac{m_i - m_e}{m_o} d_{\mu} \frac{\partial d_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} - \frac{m_o}{m_i} (\varepsilon_{\alpha} + \omega_{\alpha\nu} U_{\nu}) + \\ + \frac{m_i - m_e}{m_i} \omega_{\alpha\nu} d_{\nu} + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial P_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_{\mu}} = - \frac{m_o}{m_i \rho_e} \gamma_{\alpha}^{(e)} \end{aligned}$$

Hierbei ist  $m_0 = m_e + m_i$ .

Setzt man in diesen Gleichungen für die Drucke  $p_{\alpha\beta} = p \cdot \delta_{\alpha\beta}$  und  $P_{\alpha\beta} = P \cdot \delta_{\alpha\beta}$  und in der Diffusionsgleichung die rechte Seite gleich  $-d_\alpha / \tau_{st}$ , wo  $1/\tau_{st}$  die Stoßfrequenz der Elektronen bedeutet, so erhält man die von Schlüter<sup>2)</sup> aufgestellten Plasmagleichungen.

---

<sup>2)</sup>A.Schlüter, Z.f.Naturforschung 5a, 72 (1950)

2. Allgemeine Form der Stoßmomente.

Die Aufgabe dieses Abschnittes ist es, die allgemeine Form der Stoßmomente für das Zweikomponenten-Plasma zu finden. Es wird dabei der von Rosenbluth, McDonald und Judd<sup>3)</sup> abgeleitete Ausdruck für  $\left(\frac{\partial f^{(r)}}{\partial t}\right)_{st}$  zugrunde gelegt. Diese Autoren betrachten den Fall eines Plasmas, bei dem innerhalb des Debyeschen Abschirmradius viele Teilchen vorhanden sind. Unter der Annahme, daß eine Testpartikel nur Zweierstöße mit Teilchen innerhalb der Debye-Kugel erleidet, wobei sie dann im Mittel nur sehr kleine Ablenkungen erfährt, kann man die in der Fokker-Planck-Gleichung auftretenden Ausdrücke  $\langle \Delta u_\alpha \rangle$  und  $\langle \Delta u_\alpha \Delta u_\beta \rangle$ , d.h. die mittlere zeitliche Änderung der Geschwindigkeit und des dyadischen Produktes der Geschwindigkeit, berechnen und erhält die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma_r} \left(\frac{\partial f^{(r)}}{\partial t}\right)_{st} = -\frac{\partial}{\partial u_\mu^{(r)}} \left( f^{(r)} \frac{\partial \Psi^{(r)}(\ddot{u}^{(r)})}{\partial u_\mu^{(r)}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_\mu^{(r)} \partial u_\nu^{(r)}} \left( f^{(r)} \frac{\partial^2 \Psi^0(\ddot{u}^{(r)})}{\partial u_\mu^{(r)} \partial u_\nu^{(r)}} \right) \quad (1)$$

wobei die Funktionen  $\Psi^{(r)}(\ddot{u})$  und  $\Psi^0(\ddot{u}^{(r)})$  durch die Integrale

$$\Psi^{(r)}(\ddot{u}) = \sum_s \frac{m^{(r)} + m^{(s)}}{m^{(s)}} \int \frac{f^{(s)}(\ddot{u}') d\ddot{u}'}{|\ddot{u} - \ddot{u}'|} \quad (2)$$

und

$$\Psi^0(\ddot{u}) = \sum_s \int |\ddot{u} - \ddot{u}'| f^{(s)}(\ddot{u}') d\ddot{u}'$$

definiert sind. Ferner ist

<sup>3)</sup> Rosenbluth, McDonald und Judd, Phys.Rev. 107, 1 (1957)

$$\Gamma_r = \frac{4\pi e^4 \ln \Lambda}{(m^{(r)})^2} = \frac{\Gamma_0}{(m^{(r)})^2} \quad (3)$$

wobei  $\ln \Lambda \gg 1$  angenommen wird.

$\Lambda \equiv h/p_0 = 1.24 \cdot 10^4 (T^3/n)^{1/2}$  ist das Verhältnis von Debye-Radius  $h \equiv (kT/4\pi n e^2)^{1/2} = 6.9 \cdot (T/n)^{1/2}$  zum Stoßparameter  $p_0 = e^2/3kT$  für  $(\pi/2)$ -Ablenkung. Numerische Werte finden sich z.B. bei Spitzer<sup>4)</sup>.

Da dieser Debye-Radius  $h$  nur gilt, wenn kein Magnetfeld vorhanden ist, muß man für die Gültigkeit dieser Fokker-Planck-Gleichung bei Anwesenheit von Magnetfeldern annehmen, daß  $h \ll r_{gyro}$ , wo  $r_{gyro}$  den Gyrationen-Radius der Elektronen bedeutet. Man erhält mit  $r_{gyro} = m_e v_{\perp} c / eH$ , wenn man  $v_{\perp} = \sqrt{2kT/m_e}$  setzt,

$$\frac{h}{r_{gyro}} = \frac{H}{c (8\pi n m_e)^{1/2}} = 220 \frac{H}{n^{1/2}}.$$

Da hier nur der Spezialfall eines Zwei-Komponenten-Systems mit Ionen und Elektronen betrachtet wird, treten in Gl.(2) nur zwei Verteilungsfunktionen,  $f^{(i)}(\vec{n}^{(i)}, \varphi, t)$  und  $f^{(e)}(\vec{n}^{(e)}, \varphi, t)$  auf. (Die Abhängigkeit von Ort und Zeit wird nicht immer explizit angegeben.) Wir schreiben

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\vec{n}^{(i)}, \varphi, t) &= F(n_0; \varphi, t) \\ f^{(e)}(\vec{n}^{(e)}, \varphi, t) &= f(n_0; \varphi, t) \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>4)</sup> L. Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York, 1956. S.73

wobei für die Pekuliargeschwindigkeiten  $\dot{n}_0$  und  $\ddot{n}_0$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{n}_0 &= \dot{n}^{(i)} - \dot{w}(\varphi, t) \\ \ddot{n}_0 &= \ddot{n}^{(e)} - \ddot{w}(\varphi, t)\end{aligned}\tag{5}$$

gelten. Diese Darstellung der Verteilungsfunktion gilt ohne Einschränkung der Allgemeinheit. Sie ist hier vorteilhaft, da die Momente und Stoßmomente durch die Pekuliargeschwindigkeiten ausgedrückt werden. Anstelle der Funktionen  $\Psi^{(r)}(\ddot{n})$  und  $\Psi^0(\ddot{n})$  kann man folgende Funktionen einführen:

$$\begin{aligned}h(\ddot{n}) &= \int \frac{f(\ddot{n}' - \dot{w})}{|\ddot{n} - \ddot{n}'|} d\ddot{n}' \\ H(\ddot{n}) &= \int \frac{F(\ddot{n}' - \dot{w})}{|\ddot{n} - \ddot{n}'|} d\ddot{n}' \\ g(\ddot{n}) &= \int |\ddot{n} - \ddot{n}'| \cdot f(\ddot{n}' - \dot{w}) d\ddot{n}' \\ G(\ddot{n}) &= \int |\ddot{n} - \ddot{n}'| \cdot F(\ddot{n}' - \dot{w}) d\ddot{n}'\end{aligned}\tag{6}$$

Damit folgt für das Stoßglied der Elektronenkomponente

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_e} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} &= - 2 \frac{\partial}{\partial u_\mu^{(e)}} \left[ f^{(e)}(\ddot{n}^{(e)}) \frac{\partial h(\ddot{n}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_\mu^{(e)} \partial u_\nu^{(e)}} \left[ f^{(e)}(\ddot{n}^{(e)}) \frac{\partial^2 g(\ddot{n}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)} \partial u_\nu^{(e)}} \right] + \\ &- \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{\partial}{\partial u_\mu^{(e)}} \left[ f^{(e)}(\ddot{n}^{(e)}) \frac{\partial H(\ddot{n}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)}} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u_\mu^{(e)} \partial u_\nu^{(e)}} \left[ f^{(e)}(\ddot{n}^{(e)}) \frac{\partial^2 G(\ddot{n}^{(e)})}{\partial u_\mu^{(e)} \partial u_\nu^{(e)}} \right].\end{aligned}\tag{7}$$

Eine entsprechende Formel gilt für die Ionen, die man aus dieser erhält, wenn man den Index e durch den Index i ersetzt und die klein geschriebenen Funktionen durch die groß geschriebenen ersetzt und umgekehrt, also  $h$  durch  $H$ ,  $H$  durch  $h$ , usw.

Die Stoßmomente erhält man aus Gl.(7), wenn man sie mit  $m_e v_\alpha$ ,  $m_e v_\alpha v_\beta$ , ... multipliziert und über  $n_0$  integriert. Es ist deshalb zweckmässig, Gl.(7) auf Pekuliargeschwindigkeiten zu transformieren. Die Ableitungen nach  $u_\mu^{(e)}$  in Gl.(7) kann man, auf Grund der Definitionsgleichungen (5), durch Ableitungen nach  $v_\mu$  ersetzen; das entsprechende gilt für  $u_\mu^{(i)}$ .

Die vier Funktionen  $h(\check{v})$ , ...,  $G(\check{v})$  kommen in den Stoßgliedern an den beiden Stellen  $\check{v} = \check{v}^{(e)}$  und  $\check{v} = \check{v}^{(i)}$  vor. Man erhält

$$h(\check{v}^{(e)}) = h(n_0) = \int \frac{f(n_0')}{|n_0 - n_0'|} dn_0'$$

und

$$h(\check{v}^{(i)}) = h(n_0 + \vartheta) = \int \frac{f(n_0') dn_0'}{|n_0 - n_0' + \vartheta|}$$

Der Nenner  $|\check{v}^{(i)} - \check{v}^{(e)}|$  ist mit Hilfe von  $\vartheta = n_0 - n_0$  auf folgende Weise umgeformt:  $|\check{v}^{(i)} - \check{v}^{(e)}| = |(\check{v}^{(i)} - n_0) + (n_0 - n_0) - (\check{v}^{(e)} - n_0)|$

Ferner wird

$$H(\check{v}^{(e)}) = H(n_0 - \vartheta) = \int \frac{F(n_0) dn_0}{|n_0 - \vartheta - n_0|}$$

$$H(\check{v}^{(i)}) = H(n_0) = \int \frac{F(n_0') dn_0'}{|n_0 - n_0'|}$$

$$g(\dot{w}^{(e)}) = g(n_0) = \int |n_0 - n_0'| f(n_0') dn_0'$$

$$g(\dot{w}^{(i)}) = g(n_0 + \vartheta) = \int |n_0 + \vartheta - n_0| f(n_0) dn_0$$

$$G(\dot{w}^{(e)}) = G(n_0 - \vartheta) = \int |n_0 - \vartheta - n_0| F(n_0) dn_0$$

$$G(\dot{w}^{(i)}) = G(n_0) = \int |n_0 - n_0'| F(n_0') dn_0'$$

Damit folgt für das Stoßglied der Elektronen-Komponente

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_e} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} &= -2 \frac{\partial}{\partial w_\mu} \left[ f(n_0) \frac{\partial h(n_0)}{\partial w_\mu} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_\mu \partial w_\nu} \left[ f(n_0) \frac{\partial^2 g(n_0)}{\partial w_\mu \partial w_\nu} \right] + \\ &+ \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{\partial}{\partial w_\mu} \left[ f(n_0) \frac{\partial H(n_0 - \vartheta)}{\partial d_\mu} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w_\mu \partial w_\nu} \left[ f(n_0) \frac{\partial^2 G(n_0 - \vartheta)}{\partial d_\mu \partial d_\nu} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Für die Ionen-Komponente erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_i} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{st} &= -2 \frac{\partial}{\partial W_\mu} \left[ F(n_0) \frac{\partial H(n_0)}{\partial W_\mu} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial W_\mu \partial W_\nu} \left[ F(n_0) \frac{\partial^2 G(n_0)}{\partial W_\mu \partial W_\nu} \right] + \\ &- \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial W_\mu} \left[ F(n_0) \frac{\partial h(n_0 + \vartheta)}{\partial d_\mu} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial W_\mu \partial W_\nu} \left[ F(n_0) \frac{\partial^2 g(n_0 + \vartheta)}{\partial d_\mu \partial d_\nu} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Ableitungen nach  $w_\mu$  bzw.  $W_\mu$  der Funktionen, die von  $n_0 - \vartheta$  bzw.  $n_0 + \vartheta$  abhängen, sind in diesen beiden Gleichungen durch Ableitungen nach  $d_\mu$  ersetzt worden. Man kann dies tun, wenn die  $d_i \neq 0$  sind. Sind eines oder mehrere der  $d_i = 0$ , so muß man erst die Ableitungen bilden und darf erst dann diese  $d_i = 0$  setzen. Es bedeutet dies also keine Einschränkung der Allgemeinheit.

Es sollen jetzt die Stoßmomente berechnet werden. Da in den Stoßtermen alle Größen Ableitungen nach den Geschwindigkeiten sind, folgt unmittelbar, daß das Stoßmoment nullter Ordnung verschwindet. Beim Stoßmoment erster Ordnung muß die

Summe aller Terme, welche von Stößen zwischen gleichartigen Teilchen herrühren, Null ergeben. Es lässt sich leicht nachprüfen, daß dies der Fall ist. Das Stoßmoment erster Ordnung enthält also nur Terme, die die Wechselwirkung mit der anderen Komponente beschreiben. Für die Elektronenkomponente erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_e} \int \omega_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} d n_0 &= \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \int \omega_\alpha \frac{\partial}{\partial \omega_\mu} \left[ f(n_0) \frac{\partial H(n_0 - \mathcal{J})}{\partial d_\mu} \right] d n_0 + \\ &+ \frac{1}{2} \int \omega_\alpha \frac{\partial^2}{\partial \omega_\mu \partial \omega_\nu} \left[ f(n_0) \frac{\partial^2 G(n_0 - \mathcal{J})}{\partial d_\mu \partial d_\nu} \right] d n_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Man kann voraussetzen, daß  $f(n_0)$  für  $|n_0| \rightarrow \infty$  mindestens exponentiell verschwindet. Durch partielle Integration folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma_e} \int \omega_\alpha \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{st} d n_0 &= - \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \int f(n_0) \frac{\partial}{\partial d_\alpha} H(n_0 - \mathcal{J}) d n_0 \\ &= - \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \int f(n_0) \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \int \frac{F(n_0) d n_0}{|n_0 - \mathcal{J} - n_0|} d n_0 \end{aligned} \quad (11)$$

(Das zweite Integral in Gl.(10) verschwindet nach zweimaliger partieller Integration.) Die Ableitung nach  $d_\alpha$  kann man mit der Integration über  $n_0$  vertauschen, so daß man für das Stoßmoment erster Ordnung der Elektronenkomponente den Ausdruck

$$\gamma_\alpha^{(e)} = - \Gamma_0 \cdot \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \iint \frac{f(n_0) F(n_0)}{|n_0 - n_0 - \mathcal{J}|} d n_0 d n_0 \quad (12)$$

erhält. Im Gesamtsystem Elektronen plus Ionen darf sich der mittlere Teilchenimpuls durch Stöße nicht ändern.

Es muß also die Beziehung

$$\gamma_{\alpha}^{(e)} + \gamma_{\alpha}^{(i)} = 0$$

gelten. Das ist auch der Fall, wie man leicht nachprüfen kann.

Das Stoßmoment zweiter Ordnung enthält auch Terme, welche die Wechselwirkung zwischen gleichartigen Teilchen beschreiben. Nach ähnlichen Umformungen wie bei der Berechnung von  $\gamma_{\alpha}^{(e)}$  erhält man für diesen Anteil

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(e,e)} = \frac{\Gamma_0}{m_e} \iint \frac{f(n_0) f(n_0')}{|n_0 - n_0'|} \left[ \delta_{\alpha\beta} - 3 \frac{(w_{\alpha} - w_{\alpha}') (w_{\beta} - w_{\beta}')}{|n_0 - n_0'|^2} \right] dn_0 dn_0'$$

Für die Ionen erhält man eine entsprechende Formel. Die Spur  $\gamma_{\alpha\alpha}^{(e,e)}$  dieses Tensors, welche die Änderung der mittleren thermischen Energie  $\frac{1}{2} m_e \langle n_0^2 \rangle$  der Elektronen durch Stöße untereinander beschreibt, verschwindet, wie dies auch sein muß. Der Anteil  $\gamma_{\alpha\beta}^{(e,i)}$  des Stoßmomentes zweiter Ordnung der Elektronen, welcher von den Stößen mit den Ionen herrührt, ist

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^{(e,i)} = & -\Gamma_0 \cdot \left( \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_e} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial d_{\alpha}} \int w_{\beta} f(n_0) H(n_0 - d) dn_0 + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial d_{\beta}} \int w_{\alpha} f(n_0) H(n_0 - d) dn_0 \right] + \\ & + \frac{\Gamma_0}{m_e} \frac{\partial^2}{\partial d_{\alpha} \partial d_{\beta}} \int f(n_0) G(n_0 - d) dn_0. \end{aligned}$$

Das Ionen-Elektronen-Stoßmoment zweiter Ordnung wird

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^{(i,e)} = & \frac{\Gamma_0}{m_e} \left[ \frac{\partial}{\partial d_{\alpha}} \int W_{\beta} F(n_0) h(n_0 + d) dn_0 + \frac{\partial}{\partial d_{\beta}} \int W_{\alpha} F(n_0) h(n_0 + d) dn_0 \right] + \\ & + \frac{\Gamma_0}{m_i} \frac{\partial^2}{\partial d_{\alpha} \partial d_{\beta}} \int F(n_0) g(n_0 + d) dn_0. \end{aligned}$$

Für die Stoßmomente dritter Ordnung findet man nach etwas längerer Rechnung

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(e,e)} &= \frac{\Gamma_0}{m_e} \iint \frac{f(n_0) f(n_0')}{|n_0 - n_0'|} [\omega_\alpha \delta_{\beta\gamma} + \omega_\beta \delta_{\alpha\gamma} + \omega_\gamma \delta_{\alpha\beta}] dn_0 dn_0' + \\ &- 3 \frac{\Gamma_0}{m_e} \iint \frac{f(n_0) f(n_0')}{|n_0 - n_0'|} [\omega_\alpha (\omega_\beta - \omega_\beta') (\omega_\gamma - \omega_\gamma') + \dots] dn_0 dn_0' \end{aligned}$$

und eine entsprechende Formel für die Ionen. (Die Punkte stehen für die beiden anderen Permutationen.) Ferner ist

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(e,i)} &= - \Gamma_0 \cdot \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \int \omega_\beta \omega_\gamma f(n_0) H(n_0 - \mathcal{D}) dn_0 + \dots \right] + \\ &+ \frac{\Gamma_0}{m_e} \left[ \frac{\partial^2}{\partial d_\beta \partial d_\gamma} \int \omega_\alpha f(n_0) G(n_0 - \mathcal{D}) dn_0 + \dots \right] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta\gamma}^{(i,e)} &= \Gamma_0 \cdot \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \int \omega_\beta \omega_\gamma F(n_0) h(n_0 + \mathcal{D}) dn_0 + \dots \right] + \\ &+ \frac{\Gamma_0}{m_i} \left[ \frac{\partial^2}{\partial d_\beta \partial d_\gamma} \int \omega_\alpha F(n_0) g(n_0 + \mathcal{D}) dn_0 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Es ist zweckmässig, für die in den Stoßmomenten auftretenden Integrale folgende Hilfsfunktionen zu definieren

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta\dots} = \iint \omega_\alpha \omega_\beta \dots \frac{f(n_0) f(n_0')}{|n_0 - n_0'|} dn_0 dn_0' \quad (13)$$

$$\theta_{\alpha\beta\dots}^{\mathcal{D}} = \iint \omega_\alpha \omega_\beta \dots \frac{(\omega_\beta - \omega_\beta') (\omega_\gamma - \omega_\gamma')}{|n_0 - n_0'|^3} f(n_0) f(n_0') dn_0 dn_0'$$

und entsprechend für die Ionenkomponente

$$\Phi_{\alpha\beta\dots} \quad \text{und} \quad \Theta_{\alpha\beta\dots}^{r\delta} \quad (14)$$

Ferner

$$\chi_{\alpha\beta\dots}^{r\delta\dots}(\vartheta) = \iint w_\alpha w_\beta \dots W_r W_\delta \dots \frac{f(m_0) F(n_0)}{|m_0 - n_0 - \vartheta|} d m_0 d n_0 \quad (15)$$

und

$$\psi_{\alpha\beta\dots}^{r\delta\dots} = \iint w_\alpha w_\beta \dots W_r W_\delta \dots |m_0 - n_0 - \vartheta| f(m_0) F(n_0) d m_0 d n_0 \quad (16)$$

Beachtet man, daß  $\int f(m_0) H(m_0 - \vartheta) d m_0 = \int F(n_0) h(n_0 + \vartheta) d n_0$   
 und  $\int f(m_0) G(m_0 - \vartheta) d m_0 = \int F(n_0) g(n_0 + \vartheta) d n_0$ , so erhält  
 man für die Stoßmomente folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \gamma_\alpha^{(e)} &= -\Gamma_0 \cdot \left( \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_i} \right) \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \chi(\vartheta) \\ \gamma_\alpha^{(i)} &= -\gamma_\alpha^{(e)} \\ \gamma_{\alpha\beta}^{(e)} &= \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \vartheta \delta_{\alpha\beta} - 3\theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\beta} - \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \left( \frac{\partial \chi_\beta}{\partial d_\alpha} + \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial d_\beta} \right) \right\} \\ \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} &= \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ \Phi \delta_{\alpha\beta} - 3\Theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\beta} + \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \left( \frac{\partial \chi_\beta}{\partial d_\alpha} + \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial d_\beta} \right) \right\} \quad (17) \\ \gamma_{\alpha\beta r}^{(e)} &= \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ [\vartheta_\alpha \delta_{\beta r} - 3\theta_\alpha^{\beta r} + \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial d_\beta \partial d_r} - \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \frac{\partial \chi_{\beta r}}{\partial d_\alpha}] + \right. \\ &\quad \left. + [\beta; \alpha, r] + [r; \alpha, \beta] \right\} \\ \gamma_{\alpha\beta r}^{(i)} &= \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ [\Phi_\alpha \delta_{\beta r} - 3\Theta_\alpha^{\beta r} + \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial d_\beta \partial d_r} + \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \frac{\partial \chi_{\beta r}}{\partial d_\alpha}] + \right. \\ &\quad \left. + [\beta; \alpha, r] + [r; \alpha, \beta] \right\}. \end{aligned}$$

$[\beta; \alpha, \gamma]$  bezeichnet wieder den Ausdruck, den man erhält, wenn man in der ersten eckigen Klammer die Indices permutiert, wobei statt  $\beta, \gamma$  die Indices  $\alpha, \beta$  symmetrisch auftreten.

Bildet man die Spuren der beiden Tensoren  $\gamma_{\alpha\beta}^{(e)}$  und  $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}$ , so folgt:

$$\gamma_{\alpha\alpha}^{(e)} = \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\alpha} - 2 \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial d_\alpha} \right\} \quad (18)$$

und

$$\gamma_{\alpha\alpha}^{(i)} = \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\alpha} + 2 \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial d_\alpha} \right\} \quad (19)$$

Wendet man den Laplaceoperator  $\partial^2 / \partial d_\alpha \partial d_\alpha$  auf  $\psi(\vartheta)$  an, so erhält man  $2\chi$ . Ferner läßt sich die Differenz  $(\partial \chi^\alpha / \partial d_\alpha) - (\partial \chi_\alpha / \partial d_\alpha)$  auf folgende Weise ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial d_\alpha} - \frac{\partial \chi_\alpha}{\partial d_\alpha} &= \frac{\partial}{\partial d_\alpha} \int \frac{(w_\alpha - \bar{w}_\alpha + d_\alpha) - d_\alpha}{|n_0 - n_0 + \vartheta|} f(n_0) F(n_0) dn_0 d\bar{n}_0 \\ &= -\chi - d_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial d_\alpha} \end{aligned} \quad (20)$$

Setzt man dies in die Summe der Gl.(18) und (19) ein, so folgt:

$$\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\alpha}^{(e)} + \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\alpha}^{(i)} = d_\alpha \gamma_\alpha^{(e)}(\vartheta) \quad (21)$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet die Änderung der thermischen Energie beider Komponenten durch Stösse.  $\gamma_{\alpha}^{(e)}$  ist die Impulsübertragung von einer Komponente des Plasmas zur anderen. Da  $\mathcal{D}$  für  $n = N$  proportional zum elektrischen Strom  $\dot{j}$  ist, bedeutet in diesem Fall die rechte Seite die dem Plasma durch Ohmsche Verluste zugeführte Wärme. An späterer Stelle dieser Arbeit wird gezeigt, daß  $\gamma_{\alpha}^{(e)}(\mathcal{D}) \sim \mathcal{D}$ , für kleine Diffusionsgeschwindigkeiten  $\mathcal{D}$ . Die thermische Gesamtenergie des Systems ändert sich infolge von Stössen also nur dann, wenn Ströme fliessen.

Anders ist die Situation jedoch, wenn man nach der Änderung der thermischen Energie nur einer Komponente, etwa der Elektronen, fragt. Zunächst kann man in Gl.(18) die Funktion  $\partial X_{\alpha} / \partial d_{\alpha}$  mit Hilfe von Gl.(20) eliminieren und erhält

$$\frac{1}{2} \gamma_{\alpha\alpha}^{(e)} = - \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) d_{\alpha} \frac{\partial X}{\partial d_{\alpha}} + \left[ \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right) \frac{\partial X^{\alpha}}{\partial d_{\alpha}} + \frac{m_e}{m_i} X \right] \right\} \quad (22)$$

Die eckige Klammer hat die Grössenordnung  $m_e/m_i$  gegenüber dem ersten Term in der geschweiften Klammer. Bei  $(m_e/m_i)$  ist das offensichtlich, für  $\partial X^{\alpha} / \partial d_{\alpha}$  wird dies an späterer Stelle gezeigt (Abschn. 5). Wenn  $\mathcal{D} = 0$ , erhält man also eine um  $m_i/m_e$  mal langsamere Energieübertragung von einer Komponente des Plasmas an die andere, als für den Fall  $\mathcal{D} \neq 0$  oder im Vergleich zur Impulsübertragung.

In Fällen, in denen Ströme im Plasma auftreten, wird man die eckige Klammer in Gl.(22) vernachlässigen können. Das gilt jedoch nicht für die Ionenkomponente, da bei dieser auch das Stromglied von der Ordnung  $\Gamma_0/m_i$  ist. Es ist zweckmässig, die anderen Stossmomente 2. Ordnung in eine zu Gl.(22) analoge Form zu bringen. Man erhält

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta}^{(e)} = & \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \varphi \delta_{\alpha\beta} - 3 \theta^{\alpha\beta} + 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\beta} - 2 \delta_{\alpha\beta} \chi - d_\beta \frac{\partial \chi}{\partial d_\alpha} - d_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial d_\beta} \right\} \\ & + \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\beta} - 2 \delta_{\alpha\beta} \chi - d_\beta \frac{\partial \chi}{\partial d_\alpha} - d_\alpha \frac{\partial \chi}{\partial d_\beta} - \frac{m_i}{m_e} \left( \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial d_\beta} + \frac{\partial \chi^\beta}{\partial d_\alpha} \right) + O\left(\frac{m_e}{m_i}\right) \right\} \end{aligned}$$

und

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ \Phi \delta_{\alpha\beta} - 3 \Theta^{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d_\alpha \partial d_\beta} + \frac{m_i}{m_e} \left( \frac{\partial \chi^\alpha}{\partial d_\beta} + \frac{\partial \chi^\beta}{\partial d_\alpha} \right) + O\left(\frac{m_e}{m_i}\right) \right\}$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man die in den Stoßmomenten auftretenden Funktionen  $\varphi, \theta, \Phi, \Theta, \chi$  und  $\psi$  durch  $\mathcal{V}$  und die Momente  $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta\gamma}$ , usw. ausdrücken kann. Da die Verteilungsfunktionen  $f(u_0)$  und  $F(\mathcal{W})$  quadratisch in den Integralen auftreten und die Geschwindigkeiten auch im Nenner stehen, scheint es hoffnungslos zu sein, direkt die Abhängigkeit der Stoßmomente von den Momenten angeben zu können. Eine Möglichkeit jedoch ist der Umweg über die Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion nach Hermiteschen Polynomen. Die Theorie dieser Entwicklung ist für ein Ein-Komponenten-System ausführlich von H. Grad diskutiert worden<sup>5)</sup>.

<sup>5)</sup> H. Grad, Comm. Pure and Appl. Math., 2, 331 (1949)

### 3. Entwicklung der Verteilungsfunktion nach Hermiteschen Polynomen.

Die Verteilungsfunktion  $f(m_0, \varrho, t)$  soll durch folgende Reihe dargestellt werden:

$$f(m_0, \varrho, t) \cong c(\varrho, t) e^{-\frac{b_{\nu\mu}(\varrho, t)}{2} w_\nu w_\mu} [a^*(\varrho, t) + a_{\nu}^*(\varrho, t) P_{\nu}^{(1)}(m_0) + a_{\nu\mu}^* P_{\nu\mu}^{(2)} + \dots]$$

Die  $P^{(N)}(m_0)$ ,  $N = 0, 1, 2, \dots$ , sind die über der Gewichtsfunktion

$$f_0(m_0, \varrho, t) = c(\varrho, t) e^{-\frac{b_{\nu\mu}(\varrho, t)}{2} w_\nu w_\mu}$$

aufgebauten Orthogonalpolynome der Ordnung  $N$ .  $b_{\nu\mu}$  und  $a_{\nu\mu}^*, a_{\nu\mu\alpha}^*, \dots$  sind in allen Indices symmetrische Tensoren. Die quadratische Form  $b_{\nu\mu} w_\nu w_\mu$  stellt Scharen von ähnlichen Ellipsoiden dar. Diese Verallgemeinerung der kugelsymmetrischen Gewichtsfunktion ist schon von A. Schlüter diskutiert worden. Die Parameter  $c$  und  $b_{\nu\mu}$  sollen so bestimmt werden, daß die Gewichtsfunktion  $f_0(m_0)$  die gleichen Momente der Ordnung null, eins und zwei hat, wie die Verteilungsfunktion  $f(m_0)$  selbst, also

$$\int f_0 d m_0 = n(\varrho, t)$$

$$\int w_\alpha f_0 d m_0 = 0 \tag{1}$$

$$m \int w_\alpha w_\beta f_0 d m_0 = p_{\alpha\beta}$$

Wegen der Symmetrie der  $b_{ij}$  kann man die quadratische Form  $b_{\nu\mu} \omega_\nu \omega_\mu$  durch eine Orthogonaltransformation auf Diagonalform bringen. Es sei

$$\omega_\mu = \sum_{i=1}^3 \Omega_{\mu i} \bar{\omega}_i$$

diese Orthogonaltransformation, deren Koeffizientenmatrix  $\Omega_{\mu i}$  von Ort und Zeit abhängt. Da  $\text{Det}(\Omega_{\mu i})=1$  ist, folgt  $d\omega = d\bar{\omega}$ . Damit erhält man für die Gewichtsfunktion

$$f_0(\omega) d\omega = c(\varphi, t) e^{-\frac{1}{2} \bar{b}_i^2 \bar{\omega}_i^2} d\bar{\omega} \quad (2)$$

Hier sind  $\bar{b}_1^2, \bar{b}_2^2, \bar{b}_3^2$  die drei Diagonalelemente des Tensors  $b_{\mu\nu}$  nach der Transformation. Es gilt

$$b_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^3 \Omega_{\alpha i} \Omega_{\beta i} \bar{b}_i^2 \equiv \Omega_{\alpha i} \Omega_{\beta i} \bar{b}_i^2 \quad *)$$

Aus den Bedingungen Gl.(1) folgt dann

$$c(\varphi, t) = \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \quad (3)$$

$$p_{\alpha\beta} = g \Omega_{\alpha i} \Omega_{\beta i} \frac{1}{\bar{b}_i^2}$$

Multipliziert man die zweite dieser Gleichungen mit  $b_{\lambda\alpha}$  und kontrahiert über  $\alpha$ , so folgt

$$b_{\lambda\alpha} p_{\alpha\beta} = g \delta_{\lambda\beta} \quad (4)$$

\*) Die Summenzeichen bei Summation über die lateinischen Indices werden wir weglassen. Es ist zu beachten, daß der Summationsindex auch öfter als zwei Mal auftreten kann.

$b_{\alpha\beta}$  ist also das Reziproke des Tensors  $p_{\alpha\beta}$ , multipliziert mit  $\rho$ .

Führt man statt der Geschwindigkeit  $\bar{m}0$  die dimensionslose Geschwindigkeit  $\zeta = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} = \{\bar{b}_1 \bar{v}_1, \bar{b}_2 \bar{v}_2, \bar{b}_3 \bar{v}_3\}$  ein, so erhält man aus Gl.(2) für die Gewichtsfunktion

$$f_0(m_0) dm_0 = \frac{n(\varrho, t)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \zeta^2} d\zeta \quad (5)$$

Hier und im folgenden bedeute  $\zeta^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$ ;  $\zeta$  bezeichne also den Vektor und nicht dessen Betrag. Die zu dieser Gewichtsfunktion gehörenden Orthogonalfunktionen sind bekanntlich die Hermiteschen Polynome. (Über deren Verallgemeinerung auf N Dimensionen vgl. H. Grad, "Note on N-Dimensional Hermite Polynomials"<sup>6)</sup>). Die in dieser Arbeit benötigten Formeln sind in Anhang I zusammengestellt. Für die Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion ergibt sich

$$f(m_0, \varrho, t) dm_0 \cong \frac{n(\varrho, t)}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \zeta^2} [a + a_i \mathcal{H}_i^{(1)}(\zeta) + a_{ij} \mathcal{H}_{ij}^{(2)}(\zeta) + a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)} + \dots] d\zeta$$

wo  $\mathcal{H}_{ij\dots}^{(N)}(\zeta)$  das Hermitesche Polynom vom Grade N ist. Die  $a$ ,  $a_i$ , ... sind die von Ort und Zeit abhängenden Fourierkoeffizienten der Verteilungsfunktion  $f(m_0, \varrho, t)$ .

Der Koeffizient der Ordnung N lässt sich durch eine Linearkombination von Momenten der Ordnungen  $N' \leq N$  darstellen.

<sup>6)</sup> H. Grad, Comm. on Pure and Appl. Math. 2, 325 (1949)

Da die Gewichtsfunktion  $f_0(m_0, \varphi, t)$  die Gl.(1) erfüllt, sind die Fourierkoeffizienten der drei niedrigsten Ordnungen,  $a$ ,  $a_i$  und  $a_{ij}$ , eindeutig bestimmt. Man findet  $a = 1$ ,  $a_i = 0$ ,  $a_{ij} = 0$ . Man erhält dann

$$f(m_0, \varphi, t) dm_0 \approx \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} [1 + a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)}(\xi) + \dots] d\xi \quad (6)$$

Es ist schon früher gesagt worden, daß man das unendliche System von Momentengleichungen abbrechen muß, wenn man konkrete Fälle behandeln will. Die konsequenteste Art abzuberechnen scheint zu sein, daß man in der Orthogonalentwicklung Gl.(6) die Entwicklungskoeffizienten ab irgend einer Ordnung  $N$  streicht. Man kann dann das in der  $N$ -ten Momentengleichung vorkommende Moment der Ordnung  $N + 1$  durch die  $N$  ersten Entwicklungskoeffizienten ausdrücken, d.h. durch die  $N$  niedrigsten Momente. Hier sollen die Entwicklungskoeffizienten 4. und höherer Ordnung gestrichen werden. Eine weitere Vereinfachung erhält man, wenn man

$$a_{ijk} = \frac{1}{3} (a_i \delta_{jk} + a_j \delta_{ik} + a_k \delta_{ij}) \quad (7)$$

setzt. Man erhält damit die von H. Grad eingeführte "13-Momenten-Näherung". In dieser Näherung wird der Drucktransporttensor durch die drei Komponenten des Wärmestroms ausgedrückt. Im Hauptachsensystem sind diese proportional

zu  $a_i$ . Wenn man Gl.(7) z.B. über  $j, k$  kontrahiert, so folgt

$$a_{ikk} = \frac{5}{3} a_i$$

Dies gilt für beliebige Vertauschungen der Indices. Die  $a_i$  werden so bestimmt, daß die Näherung Gl.(7) bei Kontraktion das gleiche Ergebnis liefert wie der volle Drucktransporttensor.

Da die Koeffizienten erster Ordnung immer null sind, können die in Gl.(7) auftretenden  $a_i$  nicht mit diesen verwechselt werden. Setzt man Gl.(7) in Gl.(6) ein, so erhält man als Näherung der Verteilungsfunktion

$$f(u_0; \varphi, t) d u_0 = \frac{n}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{z^2}{2}} [1 + a_i z_i (z^2 - 5)] dz \quad (8)$$

Für das Moment dritter Ordnung folgt dann unter Benutzung von Gl.(I.3)

$$\begin{aligned} q_{\alpha\beta\gamma} &= m \int u_\alpha u_\beta u_\gamma f(u_0) d u_0 \\ &= \rho \frac{\alpha_{\alpha i} \alpha_{\beta j} \alpha_{\gamma k}}{b_i b_j b_k} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int z_i z_j z_k e^{-\frac{z^2}{2}} [1 + a_e z_e (z^2 - 5)] dz \quad (9) \\ &= q_\alpha p_{\beta\gamma} + q_\beta p_{\alpha\gamma} + q_\gamma p_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

wobei

$$q_\alpha = \alpha_{\alpha i} \frac{2a_i}{b_i} \quad (10)$$

Der Vektor  $q_\alpha$  hat die Dimension einer Geschwindigkeit.

Sie gibt an, wie schnell thermische Energie durch Diffusion transportiert wird. Durch Kontraktion von  $q_{\alpha\beta\gamma}$  über zwei Indices erhält man für den Wärmestromvektor

$$s_\alpha = \frac{1}{2} q_{\alpha\beta\beta} = \frac{3}{2} p q_\alpha + p_{\alpha\mu} q_\mu \quad (11)$$

Hierbei ist  $\mathfrak{p} = p_{\alpha\beta}$  die Spur des Drucktensors. In der Momentengleichung N-ter Ordnung tritt auch noch das Moment (N+1)-ter Ordnung auf. Da die Verteilungsfunktion hier in dritter Ordnung approximiert wird, benötigt man in der Momentengleichung dritter Ordnung das Moment vierter Ordnung  $q_{\alpha\beta\gamma\delta}^*$ , welches sich durch die Momente zweiter Ordnung ausdrücken lässt. Man findet

$$q_{\alpha\beta\gamma\delta}^* = \frac{1}{\rho} (p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma} p_{\beta\delta} + p_{\alpha\delta} p_{\beta\gamma}) \quad (12)$$

Durch den speziellen Ansatz Gl.(8) ist über alle Momente der Verteilungsfunktion verfügt worden, jedoch sind nur 13 Momente linear unabhängig. Es gibt offenbar eine ganze Klasse von Funktionen, welche die Momente bis einschliesslich 4. Ordnung mit der Näherungsfunktion Gl.(8) gemeinsam haben, nämlich alle Funktionen, die sich nur in den höheren Momenten von dieser Näherungsfunktion unterscheiden. Nach A. Schlüter kann man auch Gl.(12) postulieren und auf diese Weise das System der Momentengleichungen abbrechen; es muß dann aber das Stoßglied  $(\partial f / \partial t)_{st}$  durch die mitgeführten Momente allein (hier also bis 3. Ordnung) ausdrückbar sein. Das ist z.B. möglich bei dem einfachen Ansatz  $(\frac{\partial f}{\partial t})_{st} \sim (f_{\text{maxwell}} - f)$ . Gl.(12) wird auch von Kaeppler<sup>7)</sup> benutzt.

<sup>7)</sup> Kaeppler, Z.f.Naturforschung 14a, 1056 (1959)

Die Entwicklung der Verteilungsfunktion über einer Gewichtsfunktion von elliptischer Symmetrie hat den Vorteil, daß eine beliebig grosse Anisotropie im Druck schon durch die Gewichtsfunktion selbst beschreibbar ist. Ein weiterer Vorteil ist, daß in der "13-Momenten-Approximation" bei elliptischer Gewichtsfunktion nur der eine Koeffizient  $a_i$  auftritt, um Abweichungen von der Gewichtsfunktion zu beschreiben. Erst wenn Wärmeströme auftreten, erhält man Abweichungen von dieser Gewichtsfunktion. Ein Nachteil sind die mathematischen Komplikationen, die auftreten können, insbesondere dann, wenn die Lage der Hauptachsenrichtungen des Drucktensors nicht unmittelbar ersichtlich ist, oder wenn sich deren Lage für Ionen und Elektronen unterscheidet. Jedenfalls ist die Berechnung der Stoßmomente in diesem Fall schwieriger als bei Entwicklung über einer kugelsymmetrischen Gewichtsfunktion.

Für die Ionenverteilung erhält man ähnliche Formeln, z.B.

$$F(n_0, v, t) d n_0 = \frac{N}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} Z^2} [1 + A_i Z_i (Z^2 - 5)] dZ \quad (13)$$

wobei  $Z_1 = \bar{B}_1 \bar{W}_1$ , usw.  $\bar{B}_i^2 \bar{W}_i^2$  ist die quadratische Form  $B_{\mu\nu} W_\nu W_\mu$  im Hauptachsensystem,  $\bar{B}_{\mu i}$  sei die Transformationsmatrix für die Ionen. In vielen Fällen wird  $\bar{B}_{\mu i} = \bar{B}_{\mu e}$  sein, insbesondere wenn die Anisotropie im Druck durch elektro-magnetische Felder hervorgerufen wird, die ja in gleicher Weise auf Ionen und Elektronen wirken.

Setzt man  $S_{\alpha\mu}^* = \frac{1}{2} q_{\alpha\beta\gamma\mu}^* = \frac{1}{\rho_e} \left( \frac{3}{2} p_{\alpha\mu} + p_{\alpha\beta} p_{\beta\mu} \right)$ ,  
so erhält man für die Momentengleichung dritter Ordnung in  
kontrahierter Form, d.h. also für die Wärmestromgleichung:

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial t} + v_\mu \frac{\partial s_\alpha}{\partial x_\mu} + \frac{\partial s_{\alpha\mu}^*}{\partial x_\mu} + \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} s_\alpha + \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\mu} s_\mu + \omega_{\mu\alpha} s_\mu - \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_e} \frac{\partial p_{\alpha\mu}}{\partial x_\mu} +$$

$$- \frac{p_{\alpha\nu}}{\rho_e} \frac{\partial p_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} + q_\alpha \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} p_{\mu\nu} + p_{\alpha\mu} q_\nu \left( \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} \right) = \gamma_\alpha \quad (14)$$

$M_\alpha^{(e)}$  ist definiert durch

$$M_\alpha^{(e)} = \frac{1}{2} \left( \gamma_{\alpha\mu\mu}^{(e)} - 3 \frac{p}{\rho_e} \gamma_\alpha^{(e)} - 2 \frac{p_{\alpha\mu}}{\rho_e} \gamma_\mu^{(e)} \right)$$

$$= \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \varphi_\alpha - 3 \theta_\mu^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \psi_\alpha + \partial_\alpha \partial_\mu \psi_\mu + \right.$$

$$\left. - \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \chi_{\mu\mu} + \partial_\mu \chi_{\alpha\mu} - \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_e} \partial_\alpha \chi - \frac{p_{\alpha\mu}}{\rho_e} \partial_\mu \chi \right] \right\} \quad (15)$$

Es bedeutet hier  $\partial_\alpha = \partial / \partial d_\alpha$ . Bei der Ableitung dieser  
Gleichung ist die aus Gl.(2.13) folgende Beziehung  $\theta_\alpha^{\mu\mu} = \varphi_\alpha$   
benutzt worden. Eine entsprechende Gleichung gilt für die  
Ionen:

$$M_\alpha^{(i)} = \frac{\Gamma_0}{m_i} \left\{ \Phi_\alpha - 3 \Theta_\mu^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\mu \psi^\alpha + \partial_\alpha \partial_\mu \psi^\mu + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \chi^{\mu\mu} + \partial_\mu \chi^{\alpha\mu} - \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_i} \partial_\alpha \chi - \frac{p_{\alpha\mu}}{\rho_i} \partial_\mu \chi \right] \right\}. \quad (15a)$$

4. Berechnung der Hilfsfunktionen  $\varphi$  und  $\theta$  (bzw.  $\Phi$  und  $\Theta$ ).

In diesem Abschnitt sollen die durch Gl.(2.13) definierten Hilfsfunktionen berechnet, d.h. explizit durch die Momente ausgedrückt werden. In der 13-Momenten-Näherung treten die Funktionen  $\varphi$ ,  $\varphi_\alpha$ ,  $\theta^{\alpha\beta}$ ,  $\theta_\alpha^{\mu\mu}$  und  $\theta_\mu^{\alpha\mu}$  auf. Die entsprechenden Funktionen für die Ionen ergeben sich sofort, wenn man die Momente der Elektronenkomponente durch die der Ionenkomponente ersetzt. Es sollen zunächst  $\varphi$  und  $\varphi_\alpha$  berechnet werden. Man kann  $\varphi_\alpha$  in symmetrischer Form darstellen, indem man im Integral statt  $w_\alpha$  den Ausdruck  $(w_\alpha + w'_\alpha)/2$  einsetzt. Transformiert man dann noch in das Hauptachsensystem, so folgt

$$\varphi_\alpha = n_{\alpha i} \frac{1}{b_i} \cdot \frac{1}{2} \iint \frac{(z_i + z'_i) f(z) f(z') dz dz'}{\left[ \left( \frac{z_1 - z'_1}{b_1} \right)^2 + \left( \frac{z_2 - z'_2}{b_2} \right)^2 + \left( \frac{z_3 - z'_3}{b_3} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (1)$$

Es liegt nahe, die Substitution

$$\xi_i = \frac{z_i - z'_i}{\sqrt{2}}, \quad \eta_i = \frac{z_i + z'_i}{\sqrt{2}}$$

durchzuführen. Für das Volumenelement erhält man dann  $dz dz' = d\xi d\eta$ . Das Integrationsgebiet ist wieder der ganze Raum.  $z^2 + z'^2$  geht über in  $\xi^2 + \eta^2$ . Damit erhält man

$$f(z) f(z') dz dz' = \frac{n^2}{(2\pi)^3} e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} \left[ 1 + a_i \frac{\eta_i + \xi_i}{\sqrt{2}} \left( \frac{(\eta + \xi)^2}{2} - 5 \right) \right] \times \left[ 1 + a_j \frac{\eta_j - \xi_j}{\sqrt{2}} \left( \frac{(\eta - \xi)^2}{2} - 5 \right) \right] d\xi d\eta \quad (2)$$

Vernachlässigt man Glieder, die quadratisch in  $a_i$  sind (diese Annahme darf man machen, da die "Wärmestromapproximation" nur dann gilt, wenn für die Norm des Vektors  $a_i$

gilt  $\|a\| \ll 1$ ), so folgt für das Produkt der eckigen Klammern

$$Q(\xi, \eta) = 1 + \frac{a_i}{\sqrt{2}} \eta_i (\eta^2 - 5) + \frac{a_i}{\sqrt{2}} \eta_i (\xi^2 - 5) + \sqrt{2} a_i \xi_i \xi_j \eta_j \quad (3)$$

Es ergibt sich also aus Gl.(1)

$$\varphi_\alpha = \frac{n^2}{\sqrt{2}} \Omega_{\alpha i} \frac{1}{b_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{\eta_i e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)} Q(\xi, \eta)}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}} d\xi d\eta \quad (4)$$

wobei  $\beta_1 = 2/\bar{b}_1^2$  usw. Offenbar erhält man  $\varphi$ , indem man auf der rechten Seite von Gl.(4) statt  $\eta_i$  und  $\Omega_{\alpha i}/\sqrt{2} \bar{b}_i$  jeweils 1 einsetzt. Die Integration über  $\eta$  läßt sich leicht ausführen (vgl. Gl.(I.5)), und man erhält:

$$\varphi = \frac{n^2}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}}$$

und

$$\varphi_\alpha = \frac{n^2}{2} \Omega_{\alpha i} \frac{a_i}{b_i} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{[\xi^2 - 5 + 2\xi_i^2] e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}}$$

Die hier auftretenden Integrale über  $\xi$  werden in Anhang II berechnet. Man erhält

$$\varphi = \frac{2n^2}{\sqrt{\pi\beta}} I \quad (5)$$

und

$$\varphi_\alpha = \frac{2n^2}{\sqrt{\pi\beta}} \left[ -\frac{3}{4} I q_\alpha + \frac{1}{2} I_{\alpha\mu} q_\mu \right] \quad (6)$$

Die Grössen  $\beta$ ,  $I$  und  $I_{\alpha\beta}$  sind erklärt durch

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{ds}{D(\tau, s)}$$

$$I_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha i} \alpha_{\beta i} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+\tau_i s^2} \frac{ds}{D(\tau, s)}$$

$$\beta = \frac{1}{3} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \quad \tau_i = \frac{\beta_i}{\beta} - 1, \dots$$

$$D = \sqrt{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2)(1+\tau_3 s^2)}$$

In den Stoßmomenten treten weiterhin die Funktionen  $\theta^{\alpha\beta}$  und  $\theta_{\mu}^{\alpha\mu}$  auf. Es ist

$$\begin{aligned} \theta^{\alpha\beta} &= \alpha_{\alpha i} \alpha_{\beta j} \frac{1}{b_i b_j} \iint \frac{(\zeta_i - \zeta'_i)(\zeta_j - \zeta'_j)}{|\bar{n}_0 - \bar{n}_0'|^3} f f' d\bar{n}_0 d\bar{n}_0' \\ &= n^2 \alpha_{\alpha i} \alpha_{\beta i} \beta_i \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi_i^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

In dem letzten Ausdruck ist die Integration über  $\eta$  durchgeführt; ferner ist berücksichtigt, daß  $\xi_i \xi_j$  im Zähler ein  $\delta$ -Symbol ergibt. Das Integral über  $\xi$  wird ebenfalls in Anhang II berechnet, (Gl.(II.5)). Man erhält

$$\theta^{\alpha\beta} = \frac{2n^2}{\sqrt{\pi\beta}} [\delta_{\alpha\beta} I - I_{\alpha\beta}] \quad (7)$$

Schliesslich erhält man

$$\begin{aligned} \theta_{\mu}^{\alpha\mu} &= \frac{1}{2} \alpha_{\alpha i} \frac{1}{b_i} \iint (\zeta_i - \zeta'_i) \frac{[\frac{1}{b_i} (\zeta_1 + \zeta_2)(\zeta_1 - \zeta'_1) + \dots]}{|\bar{n}_0 - \bar{n}_0'|} f f' d\bar{n}_0 d\bar{n}_0' \\ &= \frac{n^2}{2} \alpha_{\alpha i} \frac{1}{b_i} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{3/2}} \xi_i \xi_j \beta_j \times \\ &\quad \times [a_j (\xi^2 - 5) + 2 a_k \xi_k \xi_j] d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

Nach der in Anhang II angegebenen Rechnung wird schliesslich

$$\theta_{\mu}^{\alpha\mu} = \frac{2n^2}{\sqrt{\pi\beta}} \left[ -\frac{3}{4} I q_{\alpha} + \frac{5}{4} I_{\alpha\mu} q_{\mu} \right] \quad (9)$$

5. Die Berechnung der Hilfsfunktionen  $\chi$  und  $\psi$ .

In diesem Abschnitt werden die Hilfsfunktionen berechnet, die in den Stoßmomenten bis einschliesslich dritter Ordnung vorkommen. Zunächst ist

$$\chi = \iint \frac{f(m_0) F(n_0)}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} dm_0 dn_0 \quad (1)$$

Setzt man Gl.(3.8) und Gl.(3.13) ein, so erhält man, unter Berücksichtigung von Gl.(I.6)

$$\chi = \frac{nN}{(2\pi)^3} \iint \frac{[1 - a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Delta_{\xi}] e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \cdot [1 - A_i \frac{\partial}{\partial z_i} \Delta_z] e^{-\frac{1}{2}z^2}}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} d\xi dz \quad (2)$$

Durch partielle Integration lassen sich die Ableitungen nach  $\xi_i$  und  $z_i$  in solche nach  $d_i$  verwandeln und vor das Integral ziehen. Insbesondere gilt

$$a_i \int \frac{\frac{\partial}{\partial \xi_i} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} = \mathcal{Q}_{\alpha i} \frac{a_i}{b_i} \frac{\partial}{\partial d_{\alpha}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} \quad (3a)$$

und

$$A_i \int \frac{\frac{\partial}{\partial z_i} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} = -\mathcal{B}_{\alpha i} \frac{A_i}{B_i} \frac{\partial}{\partial d_{\alpha}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} \quad (3b)$$

Mit Hilfe der Relationen Gl.(3.3) und Gl.(3.10) folgt dann

$$\chi = \frac{nN}{(2\pi)^3} \left[ 1 - \frac{1}{2} q_{\mu} \partial_{\mu} \frac{p_{\nu\lambda}}{p_c} \partial_{\nu} \partial_{\lambda} \right] \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} Q_x \partial_x \frac{P_{\sigma\tau}}{p_i} \partial_{\sigma} \partial_{\tau} \right] \iint \frac{e^{-\frac{1}{2}(\xi^2 + z^2)} d\xi dz}{|m_0 - n_0 - \mathcal{D}|} \quad (4)$$

Die  $q_\mu$  sind von der Größenordnung  $q_\mu \sim (p/\rho_e)^{1/2} \cdot \|a\|$  während man für  $Q_\mu$  erhält  $Q_\mu \sim (P/\rho_i)^{1/2} \|A\|$ ;  $\|a\|$  und  $\|A\|$  seien die Normen der Vektoren  $a_i$  und  $A_i$ . Unter der Annahme, daß  $\|a\| \sim \|A\|$  und  $P \sim p$ , ist der Term mit  $Q_\mu$  von der Ordnung  $(m_e/m_i)^{3/2}$  gegen den Term mit  $q_\mu$ . Man darf also unter noch weit schwächeren Voraussetzungen über die Größenordnungen von  $p$ ,  $P$ ,  $\|a\|$  und  $\|A\|$  den Term mit  $Q_\mu$  streichen.

Es bleibt jetzt noch das Integral in Gl.(4) zu berechnen. Zunächst soll gezeigt werden, daß man in der Näherung, in der man  $m_e/m_i$  gegen 1 vernachlässigen kann, die Ionenverteilungsfunktion als  $\delta$ -Funktion betrachten darf. Es sei für diesen Zweck angenommen, daß beide Verteilungen kugelsymmetrisch sind (das Ergebnis dieser Betrachtung gilt aber auch für die Funktionen von ellipsoidischer Symmetrie). Dann kann man für den Exponenten der Exponentialfunktion schreiben  $\zeta^2 + Z^2 = \bar{b}^2 w^2 + \bar{B}^2 W^2$ . Führt man  $w_i - W_i = \xi_i$  als neue Variable ein, so erhält man  $\bar{b}^2 w^2 + \bar{B}^2 W^2 = \bar{b}^2 \xi^2 + 2\bar{b}^2 \xi W + (\bar{b}^2 + \bar{B}^2) W^2$ . Hier ist offenbar  $\bar{b}^2/\bar{B}^2$  von der Ordnung  $m_e/m_i$ , so daß man  $\bar{b}^2$  in der Klammer vernachlässigen darf. Eine weitere Umformung ergibt für diesen Ausdruck  $\bar{b}^2 \xi^2 + \bar{B}^2 [W + \frac{\bar{b}^2}{\bar{B}^2} \xi]^2 - \frac{\bar{b}^2}{\bar{B}^2} \bar{b}^2 \xi^2$ . Der letzte Term ist wieder von der Ordnung  $m_e/m_i$  gegen den ersten, während die eckige Klammer, für jedes feste  $\xi$ , lediglich eine Verschiebung des Maximums der Gaussfunktion  $\exp[-\frac{1}{2}\bar{B}^2 W^2]$  ergibt. Die Integration über  $\mathcal{N}$  liefert also  $(2\pi)^{3/2}$ . Setzt man statt  $\xi$ , welches ja Integrationsvariable ist, wieder  $\mathcal{N}$  ein, so erhält man für das Integral in Gl.(4)

$$\dot{\chi} = \frac{nN}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta}{|n_0 - \mathcal{D}|} \quad (5)$$

Für die Funktion  $\dot{\psi}$  erhält man einen ganz ähnlichen Ausdruck wie Gl.(4) und an Stelle von Gl.(5) das Integral

$$\dot{\psi}(\mathcal{D}) = \frac{nN}{(2\pi)^{3/2}} \int |n_0 - \mathcal{D}| e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta. \quad (6)$$

Diese Integrale hängen offenbar mit den Lösungen der Potential- bzw. Bipotentialgleichung mit der Dichtefunktion  $\exp \left[ -\frac{1}{2} \bar{b}_\mu^2 \bar{w}_\mu^2 \right]$  zusammen. In Anhang III wird gezeigt, wie man diese Lösungen durch ein den elliptischen Integralen verwandtes Integral ausdrücken kann. Man erhält schliesslich für die Funktionen  $\dot{\chi}(\mathcal{D})$  und  $\dot{\psi}(\mathcal{D})$

$$\dot{\chi}(\mathcal{D}) = \frac{2nN}{\sqrt{\pi\beta}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{s^2}{\beta} \left[ \frac{\bar{d}_1^2}{1+\tau_1 s^2} + \frac{\bar{d}_2^2}{1+\tau_2 s^2} + \frac{\bar{d}_3^2}{1+\tau_3 s^2} \right]}}{\mathcal{D}(\tau, s)} ds \quad (7)$$

und

$$\dot{\psi}(\mathcal{D}) = -\frac{\beta}{2} \frac{2nN}{\sqrt{\pi\beta}} \int_0^1 \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right) \frac{e^{-\frac{s^2}{\beta} \left[ \frac{\bar{d}_1^2}{1+\tau_1 s^2} + \frac{\bar{d}_2^2}{1+\tau_2 s^2} + \frac{\bar{d}_3^2}{1+\tau_3 s^2} \right]}}{\mathcal{D}(\tau, s)} ds \quad (8)$$

Es ist zu beachten, daß die Funktionen  $\dot{\chi}$  und  $\dot{\psi}$  explizit von  $\bar{\mathcal{D}}$ , also den Komponenten der Diffusionsgeschwindigkeit im Hauptachsensystem des Elektronen-Drucktensors abhängen und nicht von  $\mathcal{D}$ . Wenn das Hauptachsensystem mit dem gewählten Koordinatensystem nicht zusammenfällt, muß man die Ableitungen nach  $d_\mu$  mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\mathcal{R}_{\mu i}$  berechnen.

Man kann den Ausdruck  $(p_{\mu\nu}/g_e) \partial_\mu \partial_\nu \overset{\circ}{\chi}$  noch vereinfachen. Aus Gl.(3a) folgt

$$\frac{p_{\mu\nu}}{g_e} \partial_\mu \partial_\nu \overset{\circ}{\chi} = \frac{nN}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\Delta_\zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta}{|m_0 - \vartheta|} = \frac{nN}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{(\zeta^2 - 3) e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}}{|m_0 - \vartheta|} d\zeta$$

Man kann nun  $\zeta^2 e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}$  durch  $-2(\partial/\partial\lambda) e^{-\frac{1}{2}\zeta^2\lambda}$  darstellen, wenn man nach der Differentiation den Grenzübergang  $\lambda \rightarrow 1$  macht. Man erhält also

$$\begin{aligned} \frac{p_{\mu\nu}}{g_e} \partial_\mu \partial_\nu \overset{\circ}{\chi} &= -3\overset{\circ}{\chi} - 2 \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left\{ \frac{\partial}{\partial\lambda} \frac{nN}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\zeta^2\lambda}}{|m_0 - \vartheta|} d\zeta \right\} \\ &= -3\overset{\circ}{\chi} - 2 \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left[ \frac{1}{\lambda} \overset{\circ}{\chi} (\vartheta\sqrt{\lambda}) \right] \\ &= -(\overset{\circ}{\chi} + d_\mu \partial_\mu \overset{\circ}{\chi}) \end{aligned}$$

Für  $\overset{\circ}{\psi}$  kann man auf gleiche Weise zeigen, daß

$$\frac{p_{\mu\nu}}{g_e} \partial_\mu \partial_\nu \overset{\circ}{\psi} = \overset{\circ}{\psi} - d_\mu \partial_\mu \overset{\circ}{\psi}$$

Man erhält damit aus Gl.(4)

$$\overset{\circ}{\chi} = \left[ 1 + q_\mu \partial_\mu + \frac{1}{2} d_\nu \partial_\nu q_\mu \partial_\mu \right] \overset{\circ}{\chi} \quad (9)$$

und für die entsprechende Formel für  $\psi$

$$\psi = \left[ 1 + \frac{1}{2} d_\nu \partial_\nu q_\mu \partial_\mu \right] \overset{\circ}{\psi} \quad (10)$$

Um  $\chi_\alpha$  zu erhalten, muß man in Gl.(1) den Integranden mit  $w_\alpha$  multiplizieren; da man wieder  $F(m_0)$  als  $\delta$ -Funktion auffassen kann, ist

$$\chi_\alpha = N \int \frac{w_\alpha f(m_0)}{|m_0 - \mathcal{D}|} d m_0$$

Schreibt man  $w_\alpha = d_\alpha - (d_\alpha - w_\alpha)$ , so erhält man

$$\chi_\alpha = d_\alpha \chi - \partial_\alpha \psi \quad (11)$$

Bei der Berechnung von  $\psi_\alpha$  kann man auf ähnliche Weise vorgehen. Mit Hilfe einer Hilfsfunktion

$$\hat{\psi} = N \int |m_0 - \mathcal{D}|^3 f(m_0) d m_0$$

welche die Relation  $\partial_\mu \partial_\mu \hat{\psi} = 12 \psi$  erfüllt, folgt

$$\psi_\alpha = d_\alpha \psi - \frac{1}{3} \partial_\alpha \hat{\psi} \quad (12)$$

Eine explizite Berechnung der Hilfsfunktion  $\hat{\psi}$  ist nicht nötig, da  $\psi_\alpha$  nur unter dem Differentiationszeichen vorkommt, so daß sich  $\hat{\psi}$  wieder auf  $\psi$  reduziert.

Für  $\chi_{\alpha\beta}$  ergibt sich nach ähnlichen Umformungen schliesslich

$$\chi_{\alpha\beta} = d_\alpha d_\beta \chi - d_\alpha \partial_\beta \psi - d_\beta \partial_\alpha \psi - \delta_{\alpha\beta} \psi + \frac{1}{3} \partial_\alpha \partial_\beta \hat{\psi}$$

Für die in  $\chi_\alpha^{(c)}$  auftretenden Terme erhält man damit:

$$\partial_\mu \partial_\mu \psi_\alpha = 2(d_\alpha \chi - \partial_\alpha \psi)$$

$$\partial_\alpha \partial_\mu \psi_\mu = d_\mu \partial_\mu \partial_\alpha \psi$$

$$\partial_\alpha \chi_{\mu\mu} = 2d_\alpha \chi + d_\mu d_\mu \partial_\alpha \chi - \partial_\alpha \psi - 2d_\mu \partial_\mu \partial_\alpha \psi$$

$$\partial_\mu \chi_{\alpha\mu} = 2d_\alpha \chi + d_\alpha d_\mu \partial_\mu \chi - d_\mu \partial_\mu \partial_\alpha \psi - \partial_\alpha \psi$$

Es bleiben noch die Funktionen  $\psi^\alpha$ ,  $\chi^\alpha$  und  $\chi^{\alpha\beta}$ .  
 Deren Berechnung ist etwas schwieriger als die der anderen Funktionen, da die Funktion  $F(\lambda_0)$  hier nicht ohne weiteres als  $\delta$ -Funktion betrachtet werden kann. Z.B. wäre dann  $\chi^\alpha = 0 + O(\frac{m_e}{m_i})$ .  $\chi^\alpha$  erscheint aber im Stoßmoment 2. Ordnung multipliziert mit  $m_i/m_e$ , so daß es gerade auf das Glied der Ordnung  $m_e/m_i$  ankommt. Das gleiche trifft für  $\chi^{\alpha\beta}$  im Stoßmoment 3. Ordnung zu. Nur  $\psi^\alpha$  kann vernachlässigt werden.

Es wird also

$$\chi^\alpha = \mathcal{L}_{\alpha i} \frac{1}{B_i} \iint \frac{Z_i F(Z) f(\zeta)}{|n_0 - n_0 - \mathcal{D}|} d\zeta dZ$$

Nach Gl.(I.7) erhält man hieraus

$$\chi^\alpha = \mathcal{L}_{\alpha i} \frac{1}{B_i} \left\{ \iint \frac{-\frac{\partial}{\partial z_i} F(Z) f(\zeta)}{|n_0 - n_0 - \mathcal{D}|} d\zeta dZ + \right. \\ \left. + A_i \iint \frac{\Delta_z e^{-\frac{1}{2}Z^2} f(\zeta)}{|n_0 - n_0 - \mathcal{D}|} d\zeta dZ + 2A_j \iint \frac{\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} e^{-\frac{1}{2}Z^2}}{|n_0 - n_0 - \mathcal{D}|} d\zeta dZ \right\}$$

Formt man die Integrale mit Hilfe der Relation Gl.(3b) um, so folgt

$$\chi^\alpha = \frac{P_{\alpha\mu}}{\rho_i} \partial_\mu \chi + \frac{1}{2} Q_\alpha \frac{P_{\mu\nu}}{\rho_i} \partial_\mu \partial_\nu \dot{\chi} + \frac{P_{\alpha\mu}}{\rho_i} Q_\nu \partial_\nu \partial_\mu \dot{\chi}$$

Im ersten Term kann man, statt des Integrals Gl.(1), die Funktion  $\chi$  in abgekürzter Form, d.h. mit Vernachlässigung der Ionentemperatur, so wie sie in Gl.(9) angegeben ist, einsetzen. In den beiden anderen Termen kann man  $\dot{\chi}$  einsetzen, da Glieder, die quadratisch in  $Q_\mu$  und  $q_\mu$  sind, vernachlässigt werden sollen.

Ferner ist

$$\chi^{\alpha\beta} = \mathcal{L}_{\alpha i} \mathcal{L}_{\beta j} \frac{1}{\bar{B}_i \bar{B}_j} \iint \frac{Z_i Z_j F(Z) dZ f(\epsilon) d\epsilon}{|n_0 - n_0 - \mathcal{J}|}$$

Setzt man Gl.(1.8) in das Integral ein, so kann man mit Hilfe der Formeln Gl.(3b) die Funktion  $\chi^{\alpha\beta}$  auf folgende Form bringen:

$$\chi^{\alpha\beta} = \frac{P_{\alpha\beta}}{\rho_i} \chi + Q_\alpha \frac{P_{\beta\mu}}{\rho_i} \partial_\mu \dot{\chi} + Q_\beta \frac{P_{\alpha\mu}}{\rho_i} \partial_\mu \dot{\chi} + \frac{P_{\alpha\beta}}{2 \rho_i} Q_\mu \partial_\mu \dot{\chi}$$

Auch hier sind Glieder der Ordnung  $m_e/m_i$  und  $Q_\alpha q_\beta$  weggelassen.

Setzt man alle berechneten Funktionen  $\chi_\alpha, \psi_\alpha$ , usw. in die Gl.(2.17) und Gl.(3.15) ein, so daß nur noch  $\chi$  und  $\psi$  auftreten, so erhält man für die Stoßmomente der Elektronenkomponente

$$\gamma_\alpha^{(e)} = - \frac{\Gamma_0}{m_e} \partial_\alpha \chi$$

$$\gamma_{\alpha\beta}^{(e)} = \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \vartheta \delta_{\alpha\beta} - 3 \theta^{\alpha\beta} + 3 \partial_\alpha \partial_\beta \psi - 2 \delta_{\alpha\beta} \chi - d_\alpha \partial_\beta \chi - d_\beta \partial_\alpha \chi \right\}$$

$$M_{\alpha}^{(e)} = \frac{\Gamma_0}{m_e} \left\{ \varphi_{\alpha} - 3 \theta_{\mu}^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \psi + 3 d_{\mu} \partial_{\mu} \partial_{\alpha} \psi - 2 d_{\alpha} \chi + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} d_{\mu} d_{\mu} \partial_{\alpha} \chi - d_{\alpha} d_{\mu} \partial_{\mu} \chi + \frac{3}{2} \frac{p}{\rho_e} \partial_{\alpha} \chi + \frac{p_{\alpha\mu}}{\rho_e} \partial_{\mu} \chi \right\}.$$

Ähnliche Formeln erhält man auch für die Ionen, doch wollen wir sie hier nicht explizit angeben, da sie im Folgenden nicht mehr gebraucht werden.

6. Lineare Näherung der Stoßmomente und Transporterscheinungen.

Onsager-Relationen.

In diesem Abschnitt sollen solche Lösungen der Momentengleichungen untersucht werden, bei denen die durch "äussere Einflüsse" bewirkten dissipativen Prozesse nur kleine Abweichungen vom thermodynamischen Gleichgewicht zur Folge haben. Unter "äusseren Einflüssen" sind hier elektrisches Feld und Temperaturgradient, welche durch geeignete Randbedingungen aufrecht erhalten werden, zu verstehen. Solche Strömungen in der Nähe des Gleichgewichts lassen sich bekanntlich durch die Navier-Stokes'schen Differentialgleichungen beschreiben. Diese Näherung ist dann gültig, wenn sich der Strömungszustand, so wie er durch die Momente beschrieben wird, auf einer freien Weglänge nur wenig ändert, bzw. wenn während einer Stoßzeit die Änderungen der Momente klein sind.

Es ist zweckmässig, für die folgenden Überlegungen die Entropie einzuführen. Ausserdem benötigt man die Gleichung für die Änderung der inneren Energie des Plasmas. Man erhält sie durch Kontraktion der Gleichungen für  $p_{\alpha\beta}$  bzw.  $P_{\alpha\beta}$ , Setzt man  $e = 3p/2$  für die thermische Energie (je Volumeneinheit), so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (v_\mu e + s_\mu) = -\frac{2}{3} e \frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} \Delta p_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\mu}^{(e)} \quad (1)$$

Hierbei ist  $\Delta p_{\mu\nu} = p_{\mu\nu} - p \delta_{\mu\nu}$ . Die Glieder auf der rechten Seite beschreiben die Änderung der inneren Energie durch Kompression, innere Reibung und Reibung an den Ionen. Eine entsprechende Gleichung gilt auch für die Ionen.

Die Entropie (je Volumeneinheit) eines idealen Gases ist gegeben durch

$$\eta(e, \rho) = \frac{3}{2} \frac{k}{m} \rho (\ln C + \ln e - \frac{5}{3} \ln \rho) \quad (2)$$

wobei  $e$  hier die innere Energie bedeutet.

Diese Formel gilt auch für das Plasma, wenn die innere Energie allein durch die thermische Energie  $3p/2$  gegeben ist, d.h. wenn man die Wechselwirkungsenergie der Teilchen vernachlässigen kann. Aus der Debye-Theorie folgt<sup>8)</sup>, daß sie von der Größenordnung  $1/\Lambda$  ist. Da die Fokker-Planck-Gleichung (2.1) nur in der Näherung  $\ln \Lambda \gg 1$  gilt, ist diese Vernachlässigung erlaubt.

Durch partielle Differentiation von  $\eta$  nach  $e$  und  $\rho$  folgt

$$\frac{\partial \eta}{\partial e} = \frac{3}{2} \frac{k}{m} \frac{\rho}{e} = \frac{n k}{p}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \rho} = \frac{\eta}{\rho} - \frac{5}{2} \frac{k}{m}$$

Damit erhält man für die zeitliche Änderung der Entropiedichte

<sup>8)</sup> Landau-Lifschitz, Statistical Physics, Chap.VII, London 1958

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial t} + \left( \frac{\eta}{p} - \frac{5}{2} \frac{R}{m} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

wobei in der zweiten Zeile die Temperatur eingeführt wurde durch die Beziehung  $p = n k T$ . Es muß an dieser Stelle betont werden, daß die Gl.(2) für die Entropie nur im Falle thermodynamischen Gleichgewichts gilt, so daß durch Gl.(3) nur solche instationären Zustände beschrieben werden, die hinreichend nahe am Gleichgewicht sind. Allgemeiner hat man statt der Entropie die Boltzmannsche H-Funktion einzuführen, welche im Gleichgewicht (bis auf einen konstanten Faktor) in die Entropie übergeht. (Vgl. H. Grad<sup>5)</sup>). Setzt man in Gl.(3) die Kontinuitäts- und die Energiegleichung ein, so folgt nach einigen Umformungen für die Elektronenkomponente

$$\frac{\partial \eta_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{s_\mu}{T} + v_\mu \eta_e \right) = s_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{1}{T_e} \right) + \frac{\gamma_{vv}^{(e)}}{2T_e} - \frac{\Delta p_{\mu\nu}}{T_e} \frac{\partial v_\nu}{\partial x_\mu} \quad (4)$$

Die Klammer auf der linken Seite ist offenbar als Entropiestrom zu interpretieren, mit einem Konvektionsanteil  $v_\mu \eta_e$  und dem Wärmestromanteil  $s_\mu / T_e$ . Auf der rechten Seite stehen Terme, welche eine Entropieerzeugung beschreiben, und zwar durch Wärmeleitung, durch Reibung an den Ionen (also durch Ohm'sche Verluste) und durch innere Reibung. Eine analoge Gleichung gilt für die Entropie  $\eta_i$  der Ionenkomponente; man erhält die Gleichung für die Gesamtentropie, wenn man beide Gleichungen addiert.

Meistens werden die in einem Plasma auftretenden elektrischen Ströme und Wärmeströme vorwiegend durch die Elektronen bestimmt, insbesondere dann, wenn diese Ströme klein sind. Es ist also sinnvoll, die Näherung zu betrachten, in der die Ionen ruhen, und die Stoßmomente nach kleinen Strömen zu entwickeln<sup>9)</sup>. Formal haben die Momentengleichungen dann für  $d_\alpha$  und  $s_\alpha$  stationäre Lösungen, während sich  $\partial p / \partial t \sim d_\mu d_\mu$  ergibt. Wenn die Ströme hinreichend klein sind, wird sich  $p$  während einer Stoßzeit nur sehr wenig ändern, so daß die Gleichungen für  $d_\alpha$  und  $s_\alpha$  die Transportkoeffizienten für den Grenzfall kleiner Ströme liefern.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß diese Transportkoeffizienten die Onsager-Relationen erfüllen. Wir gehen aus von den stationären Lösungen der Bewegungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsgleichung eines ruhenden Plasmas. Alle Größen der Ordnung  $\partial^2, \eta^2$  und  $\partial \cdot \eta$  werden vernachlässigt, also auch  $\Delta p_{\alpha\beta}$ . Man erhält:

$$\frac{1}{\beta_e} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (p + P) - \omega_{\alpha\mu} d_\mu = 0 \quad (5)$$

$$- \varepsilon_\alpha + \omega_{\alpha\mu} d_\mu - \frac{1}{\beta_e} \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} = - \frac{1}{\beta_e} \gamma_\alpha^{(e)} \quad (6)$$

$$- \omega_{\alpha\mu} s_\mu + \frac{5}{2} p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{p}{\beta} \right) = \eta_\alpha^{(e)} \quad (7)$$

<sup>9)</sup> Vgl. Kolodner, Moment Description of Gas Mixtures, AEC-Report NYO-7980

Wir setzen voraus, daß  $p = P$ , was immer dann zutrifft, wenn die durch Ohm'sche Verluste den Elektronen zugeführte Energie klein ist gegen die in der gleichen Zeit an die Ionen durch Stöße abgegebene Energie. Dann kann man in Gl.(6) den Druckgradienten mit Hilfe von Gl.(5) eliminieren und erhält

$$\rho_e E_\alpha - \frac{1}{2} \rho_e \omega_{\alpha\mu} d_\mu = \gamma_\alpha^{(e)} \quad (8)$$

Nach Gl.(2.21) kann man  $\frac{1}{2} \gamma_{\mu\mu}^{(e)} = d_\mu \gamma_\mu^{(e)} + O\left(\frac{m_e}{m_i}\right)$  setzen, so daß mit Gl.(8)  $\frac{1}{2} \gamma_{\mu\mu}^{(e)} = \rho_e d_\mu E_\mu$  folgt. Damit erhält man für die rechte Seite der Gl.(4)

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)_{\text{Erzeugung}} = s_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{T}\right) + d_\mu \frac{\rho_e E_\mu}{T} \quad (9)$$

In der irreversiblen Thermodynamik fasst man die Faktoren von  $s_\mu$  und  $d_\mu$  als Kräfte auf, welche die irreversible Zustandsänderung bewirken und macht für die Ströme  $s_\alpha$  und  $d_\alpha$  den Ansatz

$$\begin{aligned} d_\alpha &= L_{\alpha\mu}^{(11)} \frac{\rho_e E_\mu}{T} + L_{\alpha\mu}^{(12)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{T}\right) \\ s_\alpha &= L_{\alpha\mu}^{(21)} \frac{\rho_e E_\mu}{T} + L_{\alpha\mu}^{(22)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{1}{T}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Die Onsager-Relationen fordern zwischen den Koeffizienten die Beziehungen<sup>10)</sup>

<sup>10)</sup> Vgl. De Groot, Thermodynamics of Irreversible Processes, Chap. I und VIII, Amsterdam 1951

$$\begin{aligned}
 L_{\alpha\beta}^{(11)}(\mathcal{L}) &= L_{\beta\alpha}^{(11)}(-\mathcal{L}) \\
 L_{\alpha\beta}^{(22)}(\mathcal{L}) &= L_{\beta\alpha}^{(22)}(-\mathcal{L}) \\
 L_{\alpha\beta}^{(12)}(\mathcal{L}) &= L_{\beta\alpha}^{(21)}(-\mathcal{L})
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

$\mathcal{L}$  = Magnetfeld

Wie man leicht zeigen kann, müssen diese Relationen auch für die reziproke Matrix  $L^*$  gelten, welche die Kräfte als Linearkombination der Ströme ausdrückt. Um diese Matrix  $L^*$  zu finden, müssen wir zuerst die Stoßmomente  $\gamma_\alpha^{(e)}$  und  $\eta_\alpha^{(e)}$  nach  $d_\alpha$  und  $s_\alpha$  entwickeln, wobei quadratische Terme vernachlässigt werden. Man erhält nach entsprechenden Rechnungen:

$$\begin{aligned}
 \gamma_\alpha^{(e)} &= A \cdot \left( d_\alpha + \frac{3}{5p} s_\alpha \right) \\
 \eta_\alpha^{(e)} &= A \frac{p}{p} \left[ -\frac{3}{2} d_\alpha - \frac{2}{5} \left( \sqrt{2} + \frac{13}{4} \right) \frac{s_\alpha}{p} \right]
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

wobei

$$A = \frac{4 n^2 \Gamma_0}{3 m_e \sqrt{\pi} \beta^{3/2}}$$

Setzt man dies in Gl.(7) und Gl.(8) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{p_e \mathcal{E}_\alpha}{T} &= \left( \frac{A}{T} \delta_{\alpha\mu} + \frac{p_e}{2T} \omega_{\alpha\mu} \right) d_\mu + \frac{3A}{5pT} s_\alpha \\
 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{1}{T} \right) &= \frac{3A}{5pT} d_\alpha + \left[ \frac{4A}{25p^2T} \left( \sqrt{2} + \frac{13}{4} \right) \delta_{\alpha\mu} - \frac{2p \omega_{\alpha\mu}}{5p^2T} \right] s_\mu
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Da die  $\omega_{\alpha\mu}$  eine antisymmetrische Matrix darstellen, deren Elemente proportional zu den Magnetfeldkomponenten sind, sind offenbar die Relationen Gl.(11) erfüllt.

Durch Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Strömen  $d_\alpha$  und  $s_\alpha$  erhält man die übliche Form der Transportkoeffizienten. Es sei hier noch bemerkt, daß man in der Literatur häufig fehlerhafte Angaben der Transportkoeffizienten bei Vorhandensein von Magnetfeldern findet. Das rührt daher, daß der Druckgradient vernachlässigt wird. Die Bewegungsgleichung fordert aber im stationären Fall den durch Gl.(5) gegebenen Zusammenhang zwischen Druckgradient und Lorentzkraft.

Wenn Temperaturgradient und Magnetfeld Null sind, folgt aus Gl.(13) als Zusammenhang zwischen elektrischem Strom  $j$  und elektrischem Feld  $E$  die Beziehung

$$j = \sigma E$$

wobei

$$\sigma = 0.569 \sigma_L$$

$$\sigma_L = \frac{2 (2kT_e)^{3/2}}{\pi^{3/2} m_e^{1/2} e^2 \ln \Lambda}$$

$\sigma_L$  ist die Leitfähigkeit des Lorentzgases. (Beim Lorentzgas werden die Ionen gleichfalls als ruhend angenommen, zusätzlich wird aber noch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigt. Die Fokker-Planck-Gleichung

wird dann linear in der Verteilungsfunktion und lässt sich im entsprechenden stationären Fall exakt lösen.) Zum Vergleich geben wir die Werte der Leitfähigkeit von Cowling<sup>11)</sup> und Spitzer und Härm<sup>12)</sup>:

$$\sigma_{\text{Cowling}} = 0.578 \sigma_L$$

$$\sigma_{\text{Sp+H}} = 0.582 \sigma_L$$

Der Unterschied zu  $\sigma_{\text{Sp+H}}$  beträgt also etwa 2%. Der Gang der Rechnung bei Spitzer und Härm soll zum Vergleich kurz skizziert werden: Die Elektronenverteilung wurde approximiert durch

$$f_{\text{Sp+H}}(\vec{w}) = f_m(u) \cdot [1 + \cos \theta \cdot D(u)]$$

$f_m(u)$  ist die Maxwellverteilung,  $\theta$  der Winkel zwischen  $\vec{w}$  und elektrischem Feld  $\mathcal{E}$ . Setzt man  $f_{\text{Sp+H}}(\vec{w})$  in die Fokker-Planck-Gleichung (2.1) ein und linearisiert in  $D(u)$ , so erhält man eine Integro-Differentialgleichung für  $D(u)$ , deren Koeffizienten durch das Fehlerintegral  $\phi(u)$  ausdrückbar sind. Man erhält die Lösungen durch numerische Integration. Der Strom berechnet sich aus  $j = e \int u \cos \theta f_{\text{Sp+H}}(\vec{w}) d\vec{w}$ . Durch die Momentengleichungen wird also  $D(u)$  durch ein Polynom 3. Ordnung so approximiert, daß "im Mittel" die Integrodifferentialgleichung befriedigt wird. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind lineare Funktionen von  $d_1$  und  $q_1$ . Interessant ist noch der Vergleich mit dem

<sup>11)</sup> T.G. Cowling, Proc. Roy. Soc. (London) A183, 453 (1945)

<sup>12)</sup> Spitzer and Härm, Phys. Rev. 89, 977 (1953)

Lorentz-Gas, für welches  $D_L(u) = \text{const} \times u^4$ . Die Wechselwirkung der Elektronen vernachlässigt man in Gl.(12), indem man  $\sqrt{2}$  streicht. Man erhält dann

$$(\sigma_L)_{\text{Momenten gl.}} = 0,96 \sigma_L$$

## 7. "Run-away"-Elektronen

Wir untersuchen jetzt, wie sich ein homogenes Plasma unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes verhält, wenn dieses Feld nicht als klein angenommen wird. Während einer Stoßzeit wächst dann die thermische Energie der Elektronen so stark, daß die daraus resultierende Verkleinerung der Reibungskraft ein weiteres Anwachsen des Stromes zur Folge hat. Insbesondere treten dann auch sog. "Run-away"-Elektronen auf: Wenn ein Elektron im elektrischen Feld mehr Impuls (in Feldrichtung) gewinnt, als es durch Streuung an den Ionen verliert, kann es sehr schnell grosse Geschwindigkeiten (im Verhältnis zur thermischen Geschwindigkeit) erreichen. Das ist möglich, weil die Reibungskraft, die die Ionen auf die Elektronen ausüben, bei grossen Relativ-Geschwindigkeiten proportional zum reziproken Quadrat der Relativgeschwindigkeit ist.

Das Problem der "Run-away"-Elektronen wurde zuerst von Dreicer<sup>13)</sup> untersucht; er ging dabei auf zweierlei Weise vor: Näherungsweise beschrieb er die Elektronengeschwindigkeitsverteilung durch eine "verschobene Maxwellverteilung"

$$f(\dot{u}) \cong e^{-\frac{m_e (\dot{u} - \dot{u}_D)^2}{2kT}} \quad (1)$$

<sup>13)</sup> H. Dreicer, On the Theory of Run-away-Electrons;  
II. UN Conf. Peaceful Uses of Atomic Energy, 1958

Dieser Ansatz entspricht einer 5-Momenten-Näherung (Dichte  $\rho$ , isotroper Druck  $p$ , mittlere Geschwindigkeit  $\check{u}_0$ ). In der Schreibweise dieser Arbeit lautet die Differentialgleichung für diese Driftgeschwindigkeit

$$\frac{\partial d_\alpha}{\partial t} = \varepsilon_\alpha - \frac{1}{\rho_e} \gamma_\alpha^{(e)}(d, p) \quad (2)$$

Im Stoßmoment  $\gamma_\alpha^{(e)}$  ist der Druck isotrop und  $q_\alpha = 0$  zu setzen. Der Druck (bzw. die Temperatur) der Elektronen ergibt sich aus Gl.(6.1)

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} = d_\alpha \gamma_\alpha^{(e)}(d, p) \quad (3)$$

Dieses System von Differentialgleichungen ist von Dreicer für eine Reihe von  $\varepsilon$ -Werten numerisch gelöst worden.

Der zweite Weg, den Dreicer beschrift, war die numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, Gl.(2.1), mit deren Ergebnis man diese Näherungsmethoden vergleichen kann.

Es ist klar, daß die Methode der "verschobenen Maxwellverteilung" nur ungenaue Ergebnisse liefern kann, da es bei den Stromleitungsphänomenen wesentlich auf die dritten Momente der Verteilungsfunktion ankommt. Die Momentengleichungen lauten für ein homogenes Plasma und konstantes elektrisches Feld:

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \varepsilon_1 - \frac{1}{\rho_e} \gamma_1^{(e)}(d_1, s_1; p_{||}, p_{\perp})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\parallel}}{\partial t} &= \gamma_{11}^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}) \\ \frac{\partial p_{\perp}}{\partial t} &= \gamma_{22}^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}) \\ \frac{\partial s_1}{\partial t} &= \gamma_1^{(e)}(d_1, s_1; p_{\parallel}, p_{\perp}) \end{aligned} \quad (4)$$

$d_{\perp}$  und  $s_{\perp}$  sind Diffusions- und Wärmestrom in Richtung des elektrischen Feldes. Wegen der Symmetrie des Problems kann der Drucktensor nur die beiden Komponenten parallel und senkrecht zum elektrischen Feld haben, also

$$p_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} p_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & p_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & p_{\perp} \end{pmatrix} \quad (5)$$

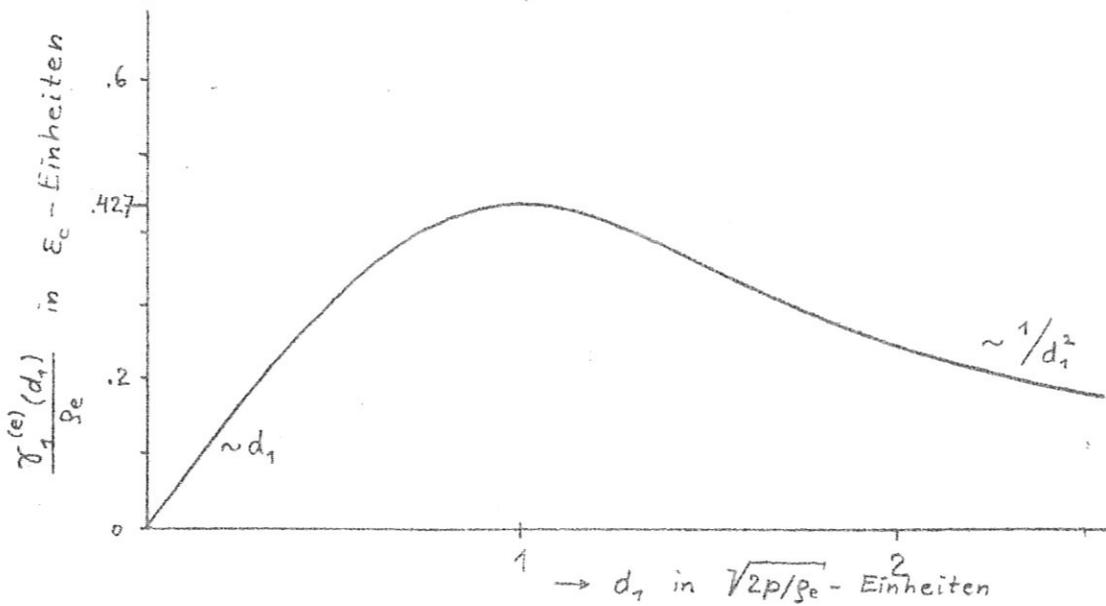
Wir wollen hier nicht die rechten Seiten des Differentialgleichungssystems (4) explizit angeben; man erhält sie leicht aus den in den vorherigen Abschnitten hergeleiteten Formeln. Die rechten Seiten enthalten die in Abschnitt 4 und 5 definierten Integrale (insgesamt 14 verschiedene) und gelten für beliebige Werte von  $d$ ,  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$ . Nur  $s$  muß klein sein, d.h.  $s \ll \frac{5}{2} p \sqrt{p/\rho_e}$ . Als Maßeinheit der elektrischen Feldstärke  $\epsilon_1 (= \frac{e}{m_e} E_1)$  wählen wir die von Dreicer benutzte "kritische Feldstärke"

$$\epsilon_c = 2\pi \frac{e^4}{m_e^3} \left( \frac{\rho_e^2}{p} \right)_0 \ln \Lambda_0 \quad (6)$$

Der Index Null bedeutet, daß die Anfangswerte zu nehmen sind. Die Bedeutung dieser kritischen Feldstärke  $\epsilon_c$  ergibt sich leicht aus dem Verlauf der Funktion  $\gamma_1^{(e)}(d, s; p_{\parallel}, p_{\perp})$

für  $s = 0$  und  $p_{||} = p_{\perp} = \text{const.}$  (Abb. 1). Für  $\varepsilon/\varepsilon_c > 0.427$  ist bei beliebigem  $d$  die elektrische Kraft  $m_e \varepsilon$  grösser als die Bremskraft  $\gamma_1^{(e)}/n$ .

Abb. 1



Wir geben jetzt die numerischen Lösungen für zwei Parameter an:

(1)  $\varepsilon/\varepsilon_c = 0.1$  (Abb. 2): Zeiteinheit der Abszisse ist

$$\tau = \frac{1}{\varepsilon_c} \left( \frac{2p}{g_e} \right)_0^{1/2} \text{ [sec]}$$

was praktisch gleich der mittleren Stoßzeit ist. Die gestrichelten Kurven sind Lösungen von Dreicer. Die Temperaturen sind in Einheiten der Anfangstemperatur aufgetragen, die Diffusionsgeschwindigkeit  $d$  in Einheiten der anfänglichen thermischen Geschwindigkeit  $\sqrt{2p/g_e}$ . Der Entwicklungskoeffizient  $a_1$  aus Gl.(3.8) bleibt dauernd  $< 0.09$

(2)  $\epsilon/\epsilon_c = 0.5$  (Abb. 3). Die Lösung von Dreicer für  $d$  und  $T$  deckt sich bis auf Zeichengenauigkeit mit den Kurven in Abb. 3a. Auch hier bleibt  $a_1$  dauernd  $< 0.09$

Für diesen Parameter-Wert hat Dreicer eine numerische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung Gl.(2.1) angegeben (für  $\tau = 0$  bis  $\tau = 6$ ). Man erhält eine gute Übereinstimmung in der Temperatur, während die Kurven für den Strom grössere Abweichungen zeigen. Nun sind aber bei Dreicer Teilchen- und Energieerhaltung wegen der Ungenauigkeit des Rechenverfahrens nicht genau erfüllt: Die Teilchenzahl wächst zwischen  $\tau = 0$  und  $\tau = 3$  um 30% und bleibt dann konstant. Die Energiebilanz zeigt zeitweise Abweichungen von 15% vom Sollwert. Ein fälschlich zu grosser Strom würde das Vorzeichen der Abweichung in der Energiebilanz erklären. Möglicherweise ist also die Übereinstimmung besser, als es hier den Anschein hat. Qualitativ ergibt sich eine gute Übereinstimmung in der Druckanisotropie (Abb.3c), insbesondere scheinen beide Kurven gleichzeitig ihr Maximum zu erreichen. Aus den von Dreicer angegebenen Höhenliniendiagrammen seiner Lösung sieht man, daß die Asymmetrie der Verteilungsfunktion zwischen  $\tau = 3$  und  $\tau = 5$  am grössten ist und bei  $\tau = 6$  wieder abnimmt. Das ist mit der Kurve für  $a_1$  in Abb. 3a vereinbar.

Abb 2a

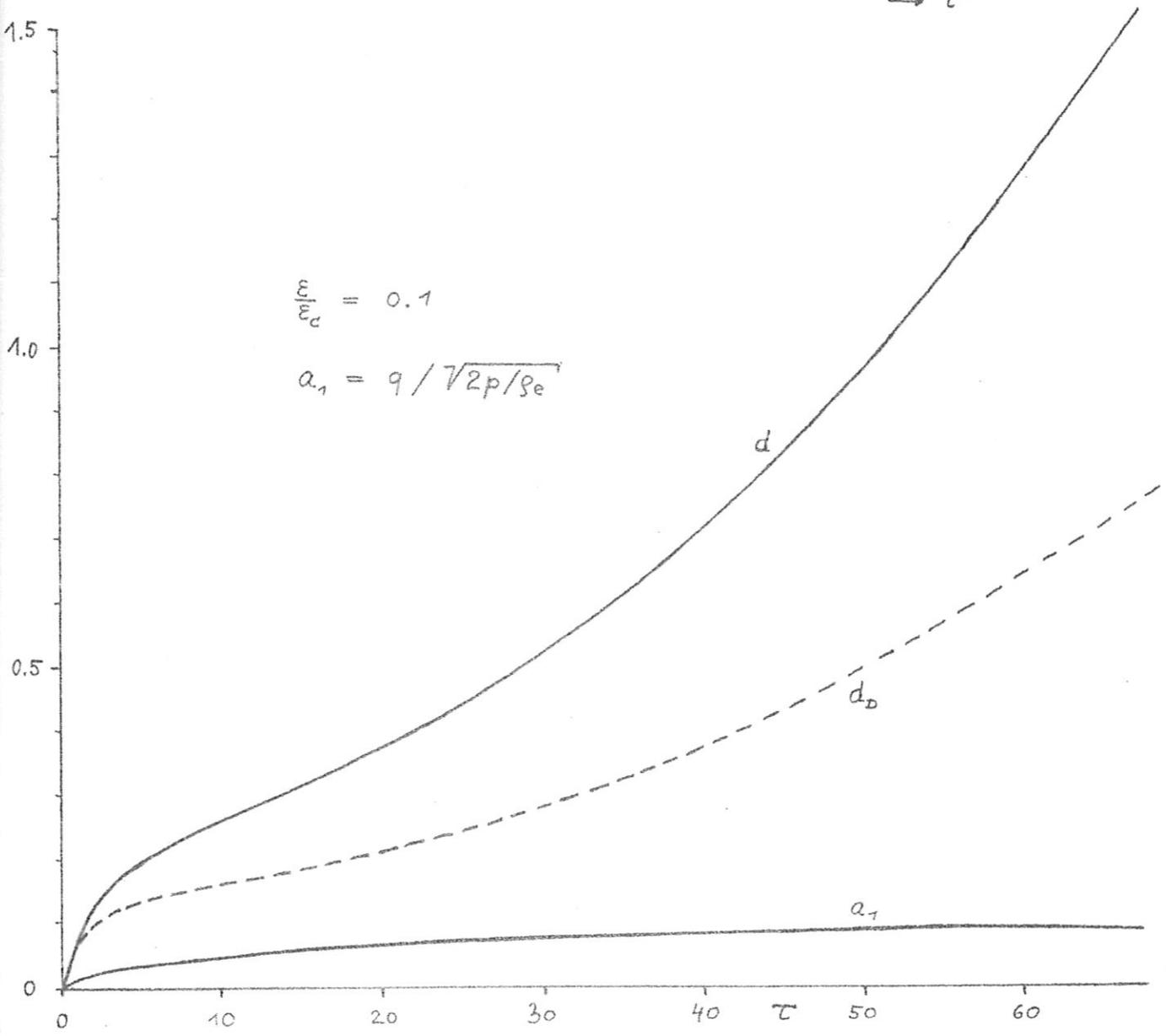
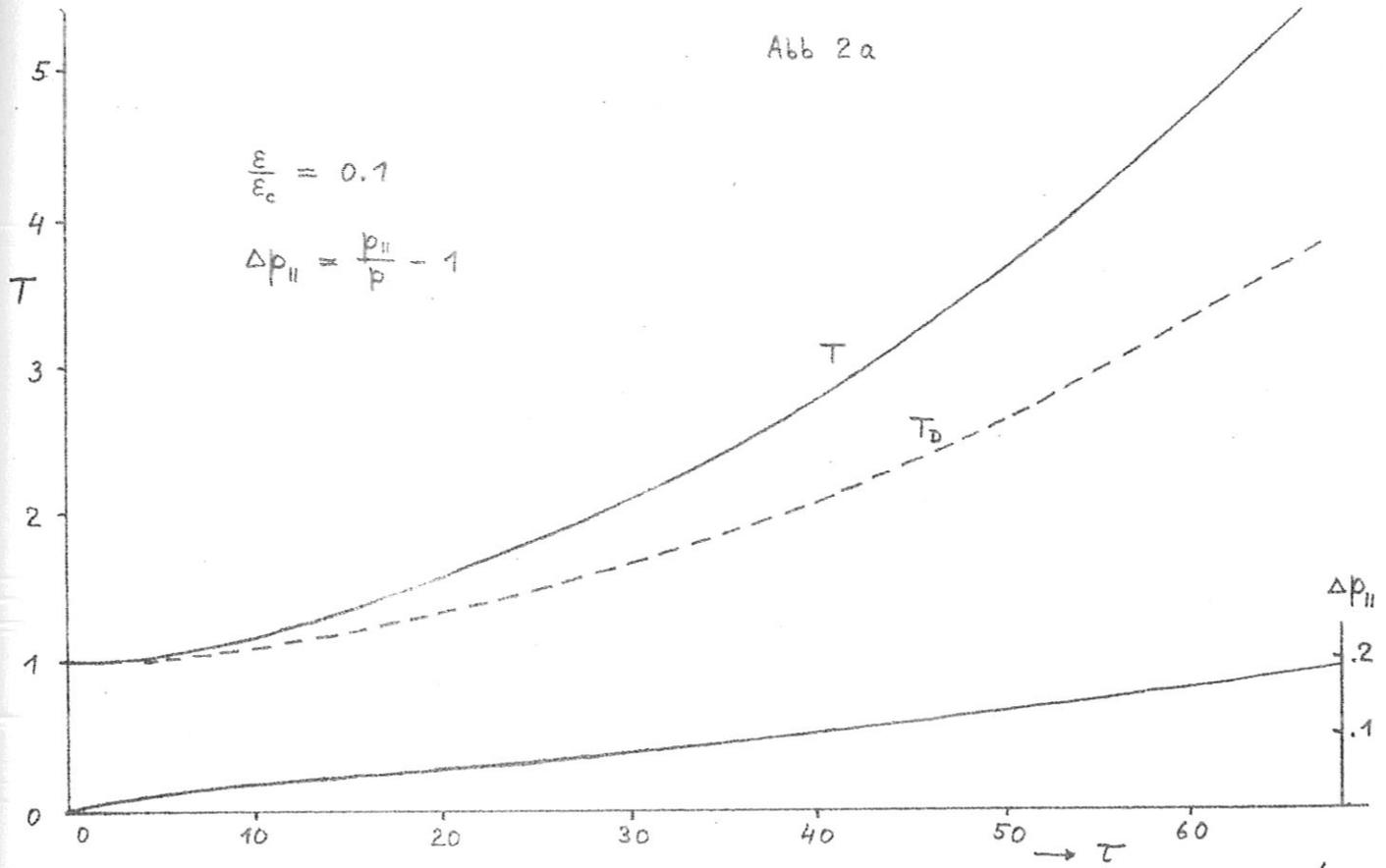


Abb. 3b

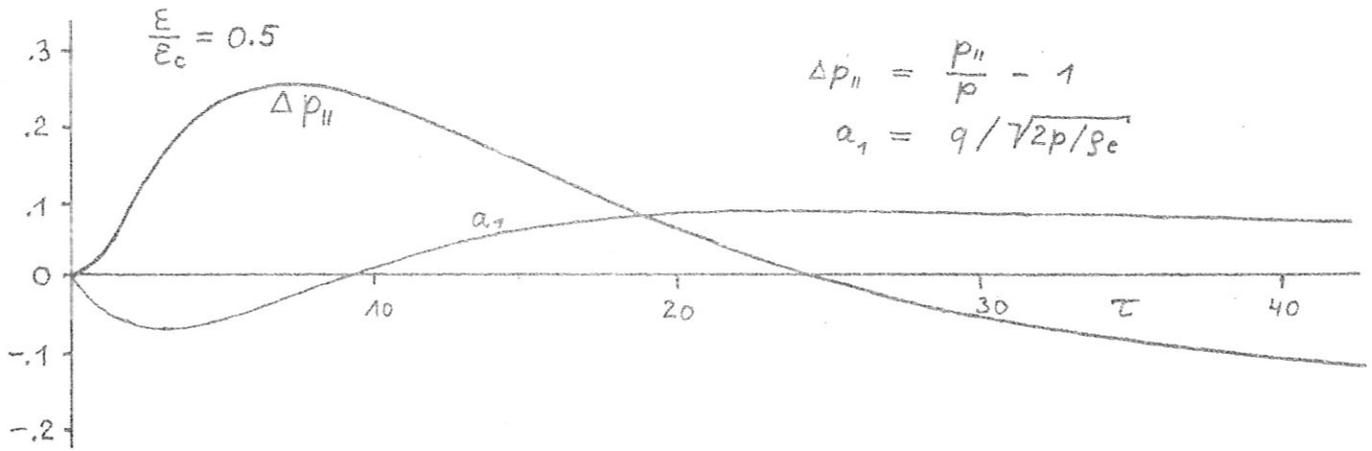


Abb. 3a

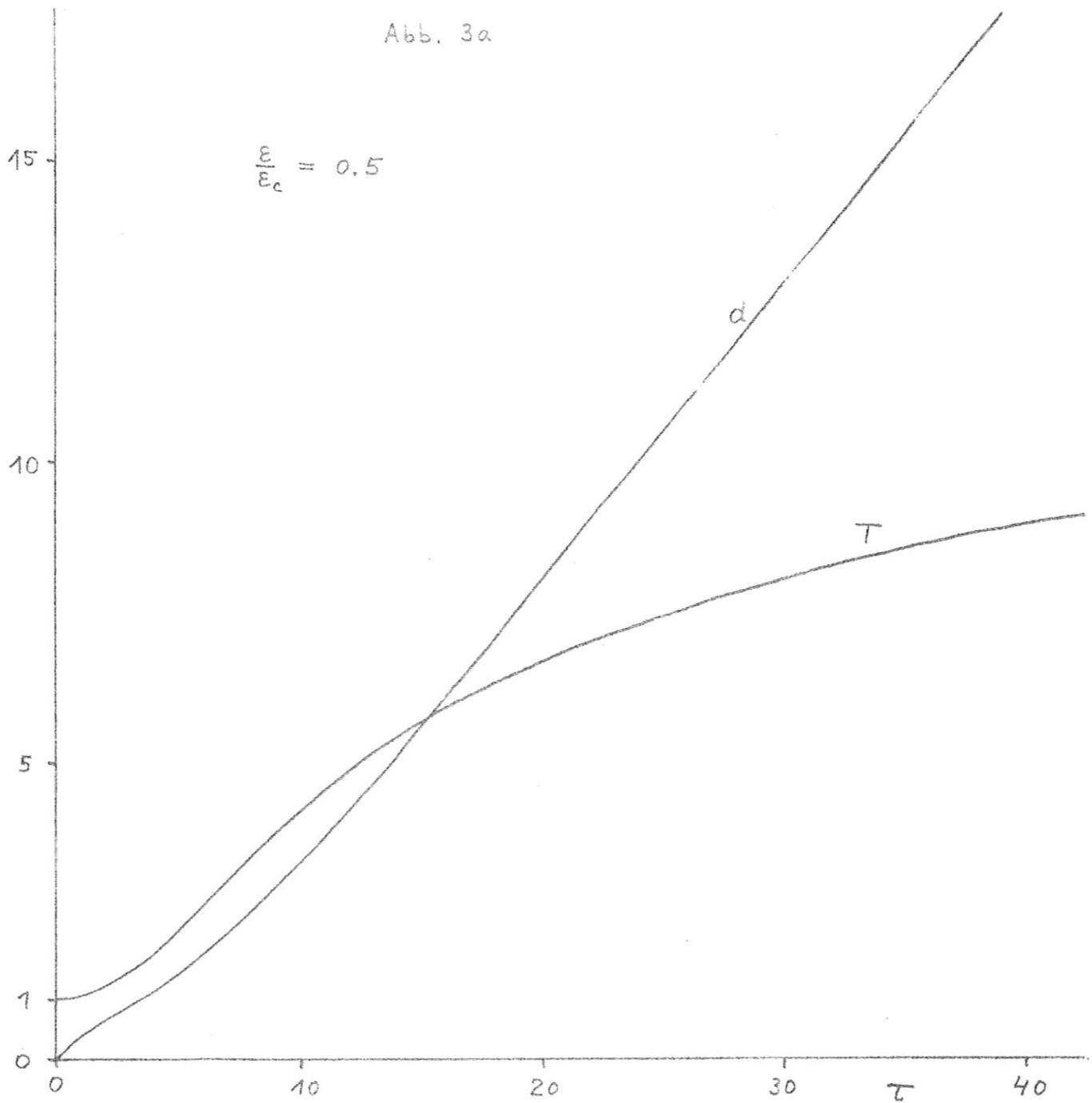


Abb. 3 d

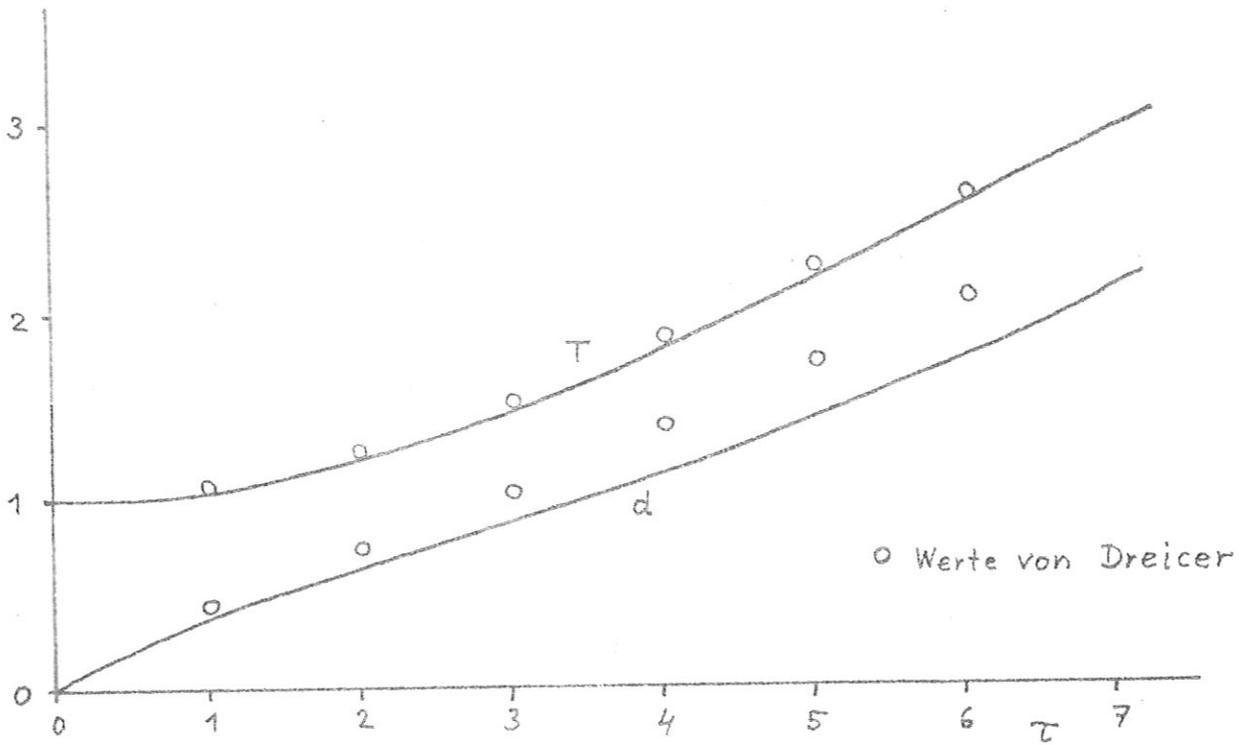
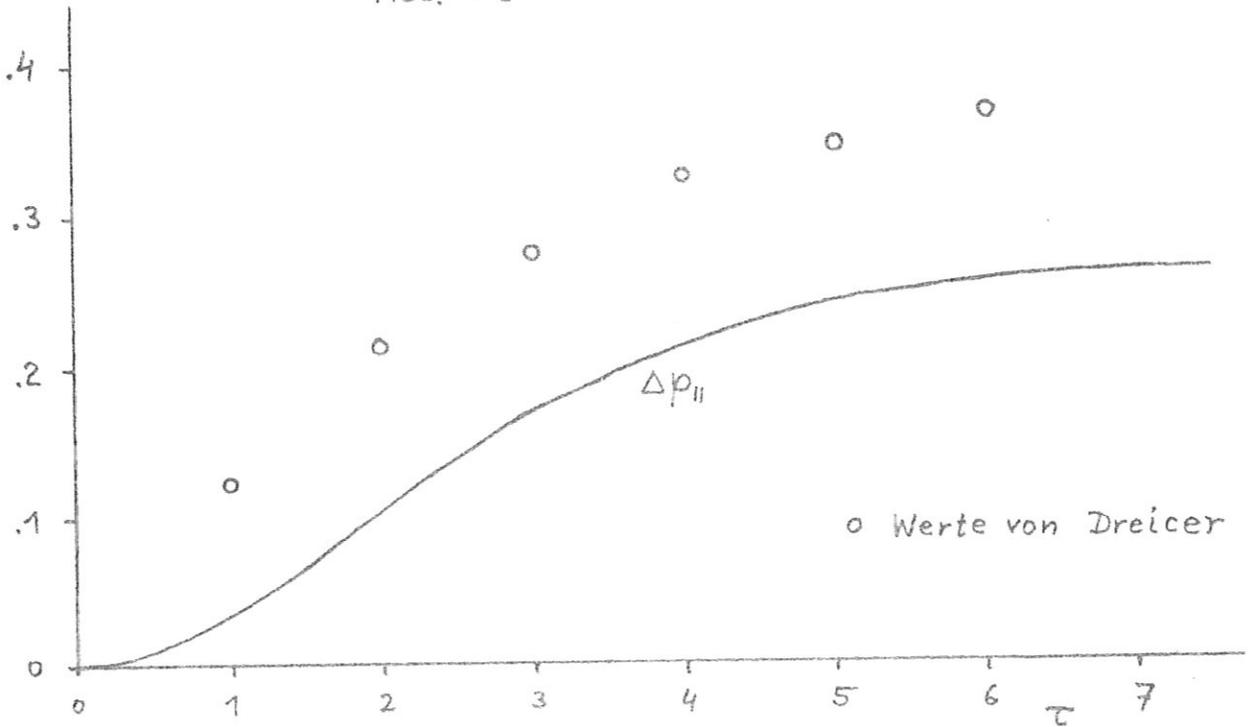


Abb. 3 c



Zusammenfassend kann man sagen, daß sich die wesentlichen Züge der zeitlichen Entwicklung der Elektronenverteilungsfunktion durch die 13-Momenten-Näherung wiedergeben lassen. Der Zeitaufwand für die Lösung der Momentengleichungen ist erheblich kleiner als für die Lösung der partiellen Differentialgleichung Gl.(2.1). Mit den von Dreicer angegebenen Werten folgt ein Faktor  $> 5000$ .

Die Anwendbarkeit dieser Momentengleichungen ist auf Fälle beschränkt, in denen der Entwicklungskoeffizient  $a_i$  in Gl.(3.8) nicht zu groß ist (das Quadrat war vernachlässigt worden); ferner sollen die Koeffizienten höherer Ordnung vernachlässigbar sein. Die erste Voraussetzung läßt sich an Hand der Lösungen leicht überprüfen (in den beiden gerechneten Beispielen ist sie mit hinreichender Genauigkeit erfüllt).

Keinen Einschränkungen unterworfen sind die Grösse der Diffusionsgeschwindigkeit  $d$ , gemessen an der thermischen Geschwindigkeit  $\sqrt{p/g_e}$  und die Anisotropie  $(p_{\alpha\beta} - p\delta_{\alpha\beta})/p$  des Drucktensors. Wenn diese Grössen klein sind, gehen die hier abgeleiteten Momentengleichungen über in die lineare Näherung von Kolodner.

Herrn Professor Dr. A. Schlüter möchte ich an dieser Stelle für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Diskussionen meinen herzlichen Dank aussprechen.

Anhang

=====

Anhang I

Es sollen hier die in vorliegender Arbeit benötigten Formeln und Funktionalgleichungen der verallgemeinerten Hermite'schen Polynome angegeben werden.

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \zeta^2}$$

ist die Gewichtsfunktion. Die Hermite'schen Polynome bis einschliesslich vierter Ordnung sind<sup>6)</sup>

$$\mathcal{H}^{(0)}(\zeta) = 1$$

$$\mathcal{H}_i^{(1)}(\zeta) = \zeta_i$$

$$\mathcal{H}_{ij}^{(2)}(\zeta) = \zeta_i \zeta_j - \delta_{ij}$$

$$\mathcal{H}_{ijk}^{(3)}(\zeta) = \zeta_i \zeta_j \zeta_k - (\zeta_i \delta_{jk} + \zeta_j \delta_{ik} + \zeta_k \delta_{ij}) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ijkl}^{(4)}(\zeta) = & \zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_l - (\zeta_i \zeta_j \delta_{kl} + \zeta_i \zeta_k \delta_{jl} + \\ & + \zeta_i \zeta_l \delta_{jk} + \zeta_j \zeta_k \delta_{il} + \zeta_j \zeta_l \delta_{ik} + \zeta_k \zeta_l \delta_{ij}) + \\ & + (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned}$$

Diese Polynome sind orthogonal zueinander nicht nur in Bezug auf die Kombination der Indices bei gleicher Ordnung. Selbstverständlich sind Permutationen der Indices miteinander äquivalent. Wenn man das Polynom 3. Ordnung mit dem durch Gl.(3.7) gegebenen Koeffizienten  $\alpha_{ijk}$  kontrahiert, so erhält man

<sup>6)</sup> H.Grad, Note on N-dimensional Hermite Polynomials, Comm.Pure and Appl.Math., 2, 325 (1949)

$$a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)} = a_i \zeta_i (\zeta^2 - 5) \quad (2)$$

Das bei der Berechnung des Momentes 3. Ordnung auftretende Integral lässt sich auf folgende Weise berechnen:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \zeta_m \zeta_n \zeta_e e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \cdot [1 + a_i \zeta_i (\zeta^2 - 5)] d\zeta = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int [\mathcal{H}_{mne}^{(3)} + (\delta_{mn} \mathcal{H}_e^{(1)} + \dots)] e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \cdot [1 + a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)}(\zeta)] d\zeta \\ & = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathcal{H}_{mne}^{(3)} a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta \quad (3) \\ & = a_{ijk} (\delta_{mi} \delta_{nj} \delta_{ek} + \delta_{mi} \delta_{nk} \delta_{ej} + \dots) \\ & = 2 (a_m \delta_{ne} + a_n \delta_{me} + a_e \delta_{mn}) \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile ist  $\zeta_m \zeta_n \zeta_e$  durch die Polynome dritter und erster Ordnung ausgedrückt, ferner ist statt  $a_i$  wieder  $a_{ijk}$  gesetzt. Die dritte Zeile folgt aus der Orthogonalität der Polynome, während die vierte Zeile das Ergebnis der Integration darstellt. In der Klammer stehen die sechs möglichen Permutationen der Indices. Setzt man jetzt wieder  $a_{ijk}$  gemäß Gl.(3.7) ein, so folgt schliesslich die letzte Zeile.

$\zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_e$  lässt sich durch Hermite'sche Polynome nullter, zweiter und vierter Ordnung ausdrücken. Man erhält aus Gl.(1)

$$\zeta_i \zeta_j \zeta_k \zeta_e = \mathcal{H}_{ijk e}^{(4)} + (\delta_{ij} \mathcal{H}_{ke}^{(2)} + \dots) + (\delta_{ij} \delta_{ke} + \delta_{ik} \delta_{je} + \delta_{ie} \delta_{jk}) \quad (4)$$

In der ersten Klammer stehen die sechs verschiedenen Permutationen der Indices. Bei der Bildung des vierten Momentes wird die Verteilungsfunktion, nach Multiplikation mit  $\xi_i \xi_j \xi_k \xi_l$ , integriert. Es bleibt wegen der Orthogonalität nur die letzte Klammer stehen.

Mit der Definition von  $Q(\xi; \eta)$  in Gl.(4.3) folgt

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int Q(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta = 1 \quad (5)$$

und

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \eta_i Q(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{2}\eta^2} d\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} [a_i (\xi^2 - 5) + 2a_j \xi_j \xi_i]$$

Die Hermite'schen Polynome lassen sich auch durch wiederholte Differentiation der Gewichtsfunktion gewinnen; es gilt die Formel

$$\mathcal{H}_{ij\dots k}^{(n)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = (-)^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \dots \frac{\partial}{\partial \xi_k} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Kontrahiert man diese Formel in dritter Ordnung mit  $a_{ijk}$ , welches gemäß Gl.(3.7) gegeben ist, so folgt:

$$a_{ijk} \mathcal{H}_{ijk}^{(3)} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = -a_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Delta_\xi e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (6)$$

wobei

$$\Delta_\xi = \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_3^2}$$

Auf ähnliche Weise werde  $\Delta_z$  definiert.

Wenn man Gl.(6) für die Ionen hinschreibt und nach  $Z_k$  differenziert, so erhält man nach einigen Umformungen

$$Z_k A_i Z_i (Z^2 - 5) e^{-\frac{1}{2} Z^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial Z_k} A_i \frac{\partial}{\partial Z_i} \Delta_z + A_k \Delta_z + 2 A_i \frac{\partial}{\partial Z_k} \frac{\partial}{\partial Z_i} \right] e^{-\frac{1}{2} Z^2} \quad (7)$$

Die Berechnung der Funktion  $Z_j Z_k [1 + A_i Z_i (Z^2 - 5)] e^{-\frac{1}{2} Z^2}$  ist langwieriger, man erhält schliesslich

$$\begin{aligned} Z_j Z_k F(Z) dZ = & (\delta_{jk} + \frac{\partial}{\partial Z_j} \frac{\partial}{\partial Z_k}) F(Z) dZ + \\ & - \frac{N}{(2\pi)^{3/2}} \left[ 2(A_j \frac{\partial}{\partial Z_k} + A_k \frac{\partial}{\partial Z_j} + \delta_{jk} A_i \frac{\partial}{\partial Z_i}) + \right. \\ & \left. + (A_j \frac{\partial}{\partial Z_k} + A_k \frac{\partial}{\partial Z_j}) \Delta_z + 4 A_i \frac{\partial}{\partial Z_i} \frac{\partial}{\partial Z_j} \frac{\partial}{\partial Z_k} \right] e^{-\frac{1}{2} Z^2} dZ \quad (8) \end{aligned}$$

Anhang II

Es ist das Integral

$$Y^{(r)}(m_1, m_2, m_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi_1^{m_1-1} \xi_2^{m_2-1} \xi_3^{m_3-1}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^r} e^{-\frac{1}{2} \xi^2} d\xi$$

zu berechnen. Eine in der Literatur bekannte Formel<sup>14)</sup> lässt sich durch einige Umformungen auf folgende Form bringen:

$$Y^{(r)}(m_1, m_2, m_3) = \frac{\Gamma(\frac{m_1}{2}) \Gamma(\frac{m_2}{2}) \Gamma(\frac{m_3}{2})}{(2\pi)^{3/2} \beta^r \Gamma(r)} 2^{\frac{m_1+m_2+m_3}{2}-r+1} \int_0^1 \frac{s^{2r-1} (1-s^2)^{\frac{m_1+m_2+m_3}{2}-r-1}}{(1+\tau_1 s^2)^{\frac{m_1}{2}} (1+\tau_2 s^2)^{\frac{m_2}{2}} (1+\tau_3 s^2)^{\frac{m_3}{2}}} ds$$

Diese Darstellung gilt, wenn  $m_1 + m_2 + m_3 > 2r$  und  $m_i, r > 0$ .

Es bedeuten

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{3} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ \tau_i &= \frac{\beta_i}{\beta} - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Ferner sei  $D(\tau, s) = \sqrt{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2)(1+\tau_3 s^2)}$

Spezialfälle:  $m_1 = m_2 = m_3 = 1; r = 1/2$ .

$$Y^{(1/2)}(1, 1, 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} I$$

mit

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{ds}{D(\tau, s)} \tag{2}$$

<sup>14)</sup> Ryshik-Gradstein,  $\Sigma$ - $\Pi$ - $\int$ -Tafeln, S.220, Berlin 1957

Der Fall

$m_1 = 3, m_2 = m_3 = 1$  und  $r = 1/2$ :

$$Y^{(1/2)}(3, 1, 1) = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+\tau_1 s^2} \frac{ds}{D(\tau, s)}$$

Hiermit lässt sich

$$I_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha i} \Omega_{\beta i} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+\tau_i s^2} \frac{ds}{D(\tau, s)} \quad (3)$$

definieren.

Das Integral

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}} &= Y^{(1/2)}(3, 1, 1) + Y^{(1/2)}(1, 3, 1) + Y^{(1/2)}(1, 1, 3) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_0^1 \left[ \frac{1}{1+\tau_1 s^2} + \frac{1}{1+\tau_2 s^2} + \frac{1}{1+\tau_3 s^2} \right] \frac{1-s^2}{D(\tau, s)} ds. \end{aligned}$$

Die eckige Klammer ergibt  $[ ] = 3 - s(\partial \ln D / \partial s)$ , wie man leicht nachprüfen kann; nach partieller Integration erhält man

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi}{[\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2 + \beta_3 \xi_3^2]^{1/2}} = 2 I \quad (4)$$

Der Fall  $m_1 = 3, m_2 = m_3 = 1, r = 3/2$ :

$$\beta_1 Y^{(3/2)}(3, 1, 1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\beta}} \frac{\beta_1}{\beta} \int_0^1 \frac{s^2 ds}{(1+\tau_1 s^2) D(\tau, s)} \equiv \beta_1 Y^{(3/2)}(1) \quad (5)$$

Man erhält durch einige Umformungen

$$\Omega_{\alpha i} \Omega_{\beta i} \beta_i Y^{(3/2)}(i) = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} [\delta_{\alpha\beta} I - I_{\alpha\beta}] \quad (6)$$

Das Integral

$$K_1 = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \dots]^{3/2}} \xi_1 \xi_e \beta_e [a_e(\xi^2 - 5) + 2a_i \xi_i \xi_e] d\xi$$

läßt sich auf folgende Form bringen

$$K_1 = a_1 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\beta_1 \xi_1^2 (\xi^2 - 5)}{[\beta_1 \xi_1^2 + \dots]^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi + 2a_1 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\xi_1^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{[\beta_1 \xi_1^2 + \dots]^{1/2}} d\xi$$

das erste Integral enthält die Bestandteile  $Y^{(3/2)}(3,3,1)$ ,  $Y^{(3/2)}(5,1,1)$  und  $Y^{(3/2)}(3,1,1)$ . Letzteres Integral ist in Gl.(5) angegeben, die anderen beiden sind:

$$Y^{(3/2)}(3,3,1) = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_0^1 \frac{s^2(1-s^2) ds}{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2) D(\tau, s)}$$

$$Y^{(3/2)}(5,1,1) = \frac{3}{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \int_0^1 \frac{s^2(1-s^2) ds}{(1+\tau_1 s^2) D(\tau, s)}$$

Fügt man alles zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{\beta_1 \xi_1^2 (\xi^2 - 5)}{[\beta_1 \xi_1^2 + \dots]^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} d\xi &= \frac{2}{\sqrt{2\pi\beta}} \frac{\beta_1}{\beta} \left\{ 2 \int_0^1 \frac{s^2(1-s^2) ds}{(1+\tau_1 s^2) D(\tau, s)} + \right. \\ &+ \int_0^1 \frac{s^2(1-s^2)}{1+\tau_1 s^2} \left( 3 - s \frac{\partial \ln D}{\partial s} \right) \frac{ds}{D(\tau, s)} - 5 \int_0^1 \frac{s^2 ds}{(1+\tau_1 s^2) D(\tau, s)} \left. \right\} \\ &= -3 \frac{2}{\sqrt{2\pi\beta}} \left[ \int_0^1 \frac{ds}{D(\tau, s)} - \int_0^1 \frac{(1-s^2) ds}{(1+\tau_1 s^2) D(\tau, s)} \right] \end{aligned}$$

Nach Gl.(3.10) kann man

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{2} \Omega_{\nu 1} q_\nu \quad (7)$$

setzen. Damit ergibt sich

$$\Omega_{\alpha i} \frac{K_i}{b_i} = \Omega_{\alpha i} \frac{a_i}{b_i} \frac{2}{\sqrt{2\pi\beta}} \left[ -3 \int_0^1 \frac{ds}{D(\tau, s)} + 5 \int_0^1 \frac{1-s^2}{1+\tau_i s^2} \frac{ds}{D(\tau, s)} \right]$$

Substituiert man hier Gl.(3) und Gl.(7), so folgt

$$\Omega_{\alpha i} \frac{K_i}{b_i} = \frac{2}{\sqrt{\pi\beta}} \left[ -\frac{3}{2} I q_\alpha + \frac{5}{2} I_{\alpha\mu} q_\mu \right] \quad (8)$$

Anhang III

Es seien gegeben die Differentialgleichungen

$$\Delta u(\varphi) = -4\pi e^{-\left(\frac{x_1^2}{\beta_1} + \frac{x_2^2}{\beta_2} + \frac{x_3^2}{\beta_3}\right)} \quad (1)$$

und

$$\Delta \Delta v(\varphi) = -8\pi e^{-\left(\frac{x_1^2}{\beta_1} + \frac{x_2^2}{\beta_2} + \frac{x_3^2}{\beta_3}\right)} \quad (2)$$

wobei  $\Delta$  den Laplace-Operator bezeichnet. Die Lösungen dieser Gleichungen sind darstellbar durch die Integrale

$$u(\varphi) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\xi_1^2}{\beta_1} + \frac{\xi_2^2}{\beta_2} + \frac{\xi_3^2}{\beta_3}\right)}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{3/2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3)$$

und

$$v(\varphi) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\left(\frac{\xi_1^2}{\beta_1} + \frac{\xi_2^2}{\beta_2} + \frac{\xi_3^2}{\beta_3}\right)}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{5/2}} d^3\xi \quad (4)$$

Die Lösung der Potentialgleichung für ein homogen geladenes Ellipsoid wurde bereits von Dirichlet<sup>15)</sup> angegeben. Man kann durch Differentiation dieser Lösung auch das Potential für eine Ellipsoid-Schale gewinnen und daraus durch Integration die Lösung für die hier auftretende Dichtefunktion  $\exp\left[-\left(\frac{x_1^2}{\beta_1} + \frac{x_2^2}{\beta_2} + \frac{x_3^2}{\beta_3}\right)\right]$ . Man erhält schliesslich

<sup>15)</sup> R.Becker, Theorie der Elektrizität, Bd.I, S.124, (Leipzig 1949)

$$u(\gamma) = \pi \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{x_1^2}{\beta_1 + \lambda} - \frac{x_2^2}{\beta_2 + \lambda} - \frac{x_3^2}{\beta_3 + \lambda}}}{D^*(\lambda)} d\lambda \quad (5)$$

wobei  $D^* = \sqrt{(\beta_1 + \lambda)(\beta_2 + \lambda)(\beta_3 + \lambda)}$ . Es ist zu zeigen, daß dies tatsächlich eine Lösung der Gl.(1) ist. Nach Anwendung des Laplace-Operators erhält man

$$\Delta u = -2\pi \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\beta_1 + \lambda} + \frac{1}{\beta_2 + \lambda} + \frac{1}{\beta_3 + \lambda} \right] + \right. \\ \left. - 2 \left[ \frac{x_1^2}{(\beta_1 + \lambda)^2} + \frac{x_2^2}{(\beta_2 + \lambda)^2} + \frac{x_3^2}{(\beta_3 + \lambda)^2} \right] \right\} \frac{e^{-\rho^2(\lambda)}}{D^*(\lambda)} d\lambda$$

wobei

$$\rho^2(\lambda) = \frac{x_1^2}{\beta_1 + \lambda} + \frac{x_2^2}{\beta_2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{\beta_3 + \lambda} \quad (6)$$

Man kann dann das Integral auf folgende Form bringen

$$\Delta u = -4\pi \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial \ln D^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial \rho^2(\lambda)}{\partial \lambda} \right] \frac{e^{-\rho^2(\lambda)}}{D^*(\lambda)} d\lambda$$

Durch partielle Integration erhält man schliesslich

$$\Delta u = 4\pi \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \frac{e^{-\rho^2(\lambda)}}{D^*(\lambda)} \Big|_0^{\infty} = -4\pi e^{-\left(\frac{x_1^2}{\beta_1} + \frac{x_2^2}{\beta_2} + \frac{x_3^2}{\beta_3}\right)}$$

womit gezeigt ist, daß Gl.(5) wirklich eine Lösung von Gl.(1) ist. Sie kann sich nur um eine Lösung der homogenen Gl.(1) von Gl.(3) unterscheiden. Die einzige Lösung der homogenen Gleichung, welche überall singularitätenfrei ist, ist die

Konstante. Ein Vergleich von Gl.(3) und Gl.(5) zeigt, daß (5a) für  $\varphi = 0$  die Funktionen gleich sind, womit die Identität von Gl.(3) und Gl.(5) bewiesen ist.

Es ist zu erwarten, daß Gl.(2) eine Lösung von ähnlicher Form hat. Macht man den Ansatz

$$v^*(\varphi) = \pi \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_0^\infty \frac{h(\lambda) e^{-\beta^2(\lambda)}}{D^*(\lambda)} d\lambda \quad (7)$$

so erhält man, indem man  $\Delta v^*(\varphi) = 2u(\varphi)$  setzt, eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $h(\lambda)$ , welche die einfache Lösung  $h(\lambda) = -\lambda/2$  hat. Setzt man dies formal in Gl.(7) ein, so findet man, daß der Integrand für  $\lambda \rightarrow \infty$  sich wie  $\lambda^{-1/2}$  verhält, das Integral ist also für alle  $\varphi$  divergent. Es liegt nahe, dies Integral dadurch konvergent zu machen, daß man  $h(\lambda)$  im Zähler subtrahiert. Man erhält dann das Integral

$$v(\varphi) = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\beta_1 \beta_2 \beta_3} \int_0^\infty \frac{\lambda (e^{-\beta^2(\lambda)} - 1)}{D^*(\lambda)} d\lambda \quad (8)$$

welches für jedes  $\varphi$  konvergiert und für  $|\varphi| \rightarrow \infty$  sich wie  $|\varphi|$  verhält. Auch hier kann sich Gl.(8) nur um eine Lösung der homogenen Gl.(2) von Gl.(4) unterscheiden, welche ebenfalls nur eine Konstante sein kann. Da nur Ableitungen von  $v(\varphi)$  benötigt werden, ist es gleichgültig, welchen Zahlenwert diese Konstante hat.

Es ist zweckmässig, durch die Substitution  $\lambda = \beta \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right)$  wobei  $\beta = (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)/3$  ist, die Integrale Gl.(5) und Gl.(6) umzuformen. Man erhält

$$u(\varphi) = 2\pi \sqrt{\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\beta}} \int_0^1 e^{-\frac{s^2}{\beta} \left[ \frac{x_1^2}{1+\tau_1 s^2} + \frac{x_2^2}{1+\tau_2 s^2} + \frac{x_3^2}{1+\tau_3 s^2} \right]} \frac{ds}{\sqrt{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2)(1+\tau_3 s^2)}} \quad (5a)$$

und

$$v(\varphi) = -\frac{\beta}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\beta_1 \beta_2 \beta_3}{\beta}} \int_0^1 \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right) \frac{e^{-\frac{s^2}{\beta} \left[ \frac{x_1^2}{1+\tau_1 s^2} + \frac{x_2^2}{1+\tau_2 s^2} + \frac{x_3^2}{1+\tau_3 s^2} \right]} - 1}{\sqrt{(1+\tau_1 s^2)(1+\tau_2 s^2)(1+\tau_3 s^2)}} ds \quad (8a)$$

Diese Integrale sind offenbar mit den elliptischen Integralen verwandt und lassen sich nicht elementar darstellen.

Da man bei der Integration der Momentengleichungen meistens auf die Hilfe von Rechenmaschinen angewiesen ist, stellt sich die Frage, wie man diese beiden Integrale bzw. deren Ableitungen auswertet. Es zeigt sich, daß man bei Benutzung der 8-Punkte-Formel nach Gauss einen Fehler von einigen Promille macht, wenn  $x^2/\beta < 8$  und  $\tau < 0,3$ . Für grössere Werte von  $x^2/\beta$  wird der Integralwert, der für  $\tau_i = 0$  und  $x_i = 0$  gerade 1 ist, rasch klein gegen 1. Diese Methode besitzt also erhebliche Vorteile gegenüber einer Reihenentwicklung.