

Internationales und nationales Rahmenkonzept für die Erfassung von mathematischer Grundbildung in PISA



Konsortium:

Jürgen Baumert
Eckhard Klieme
Michael Neubrand
Manfred Prenzel
Ulrich Schiefele
Wolfgang Schneider
Klaus-Jürgen Tillmann
Manfred Weiß

Projekt-Koordination:

Max-Planck-Institut für Bildungsforschung
Lentzeallee 94, 14195 Berlin
Tel: 030 82 406 456; Fax: 030 82 406 466
Email: pisa@mpib-berlin.mpg.de

Internationales Rahmenkonzept

Definition von mathematischer Grundbildung („Mathematical Literacy“)

Die Definition mathematischer Grundbildung („Mathematical Literacy“) im Rahmen von OECD/PISA lautet:

„Mathematische Grundbildung ist die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.“

Der Begriff *Grundbildung (literacy)* wurde gewählt, um zu betonen, dass mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten, wie sie im traditionellen Curriculum der Schulmathematik definiert werden, im Rahmen von OECD/PISA nicht im Vordergrund stehen. Statt dessen liegt der Schwerpunkt auf der funktionalen Anwendung von mathematischen Kenntnissen in ganz unterschiedlichen Kontexten und auf ganz unterschiedliche, Reflexion und Einsicht erfordernde Weise¹.

Aspekte von mathematischer Grundbildung für den PISA-Test

Für den OECD/PISA-Test sind vier Aspekte maßgeblich. Die beiden Hauptaspekte sind „mathematische Kompetenzen“ und „mathematische Leitideen“. Die beiden Nebenaspekte sind „curriculare Teilbereiche der Mathematik“ und „Situationen und Kontexte“. Die Hauptaspekte dienen dazu, den Bereich, der mit dieser Erhebung erfasst wird, abzustecken und Leistungen zu beschreiben. Die Nebenaspekte werden verwendet, um zu gewährleisten, dass der Bereich angemessen breit abgedeckt und ein ausgewogenes Spektrum von Aufgaben ausgewählt wird.

Mathematische Kompetenzen

Ausgangspunkt ist eine Liste allgemeiner mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten:

- die Fähigkeit, mathematisch zu denken
- die Fähigkeit, mathematisch zu argumentieren
- die Fähigkeit zur mathematischen Modellierung
- die Fähigkeit, Probleme zu stellen und zu lösen

¹ Im deutschen Sprachraum ist auch der Begriff „fundamentale Ideen“ geläufig. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass diese beiden Konzepte nicht übereinstimmen.

- die Fähigkeit, mathematische Darstellungen zu nutzen
- die Fähigkeit, mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umzugehen
- die Fähigkeit, zu kommunizieren
- die Fähigkeit, Hilfsmittel einzusetzen und zu gebrauchen.

Kompetenzklassen

Im Rahmen von OECD/PISA ist nicht vorgesehen, Items zu entwickeln, mit denen diese Fähigkeiten jeweils getrennt erfasst werden. Wenn man echte Mathematik betreibt, kommen gewöhnlich viele (wenn nicht alle) dieser Fähigkeiten gleichzeitig zum Einsatz, so dass jeder Versuch der Messung einzelner Fähigkeiten zu künstlichen Aufgaben und damit zu einer unnötigen Aufspaltung des Bereichs der mathematischen Grundbildung führen würde.

Um den Aspekt der *mathematischen Kompetenzen* durch die Konstruktion von Items und Tests operationalisieren zu können, ist es hilfreich, die Fähigkeiten zu drei größeren Kompetenzklassen zusammenzufassen. Diese drei Kompetenzklassen sind:

- Kompetenzklasse 1: Wiedergabe, Definitionen und Berechnungen
- Kompetenzklasse 2: Querverbindungen und Zusammenhänge herstellen, um Probleme zu lösen
- Kompetenzklasse 3: Einsichtsvolles mathematisches Denken und Verallgemeinern

Die *Kompetenzklasse 1* ist definiert unter Rückgriff auf die sogenannte „Fähigkeit zum Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen“, also die Fähigkeit, die mathematische Sprache sinnvoll zu benutzen. Dies geht weit über das reine Beherrschen von Verfahren hinaus, indem nämlich explizit auch Übersetzungsleistungen, also Modellierungen (allerdings einfacher Art), einbezogen werden.

Bei *Kompetenzklasse 2* kommt es darauf an, verschiedene Stoffgebiete und Teilbereiche der Mathematik in Beziehung zu setzen und Informationen zu integrieren, um einfache Probleme zu lösen.

Den Übergang zur *Kompetenzklasse 3* markieren Aufgaben, in denen ausdrücklich eine Verallgemeinerung einer Situation, das Entwerfen einer umfassenden Strategie, die Einbettung einer gegebenen Situation in einen allgemeinen mathematischen Zusammenhang, erforderlich ist. Insbesondere ist die Bedingung für Kompetenzklasse 3 erfüllt, wenn beim Modellieren auch explizit die Validierung eines mathematischen Modells erwartet wird.

Die Klassen haben also alle mit „Mathematisierung“ zu tun. Dies – in Deutschland spricht man meist vom „Modellierungsprozess“ – ist eine durchgehende Leitidee des internationalen PISA-Rahmenkonzepts.

Mathematische Leitideen

Unter den „mathematischen Leitideen“ werden miteinander stark vernetzte mathematische Konzepte verstanden, die unter einem gemeinsamen übergeordneten, phänomenbezogenen Gesichtspunkt gesehen werden. Beispiele für mathematische Leitideen sind etwa „Zufall“, „Veränderung und Wachstum“, „Abhängigkeit und Beziehungen“, „Raum und Form“ usw. Für den ersten Zyklus von PISA, in dem Mathematik eine untergeordnete Rolle spielt, werden zwei Leitideen herausgegriffen, nämlich „Veränderung und Wachstum“ und „Raum und Form“. Diese sind in der Regel nicht explizit in den Curricula verankert, sprechen aber jeweils zentrale Themenkreise der Mathematik an. Sie prüfen schulische Kenntnisse indirekt, indem sie auf vertieftes Verständnis mathematischer Begriffe abheben. Mathematische Leitideen haben den Vorteil, dass sie die Mathematik nicht in verschiedene separierte Themengebiete aufspalten, sondern fachgebietsübergreifend mathematische Ideen realisieren.

Curriculare Teilbereiche der Mathematik

Die Berücksichtigung der traditionellen Teilbereiche der Mathematik wie Arithmetik, Algebra, Geometrie usw. dient dazu, den Test stofflich auszubalancieren.

Situationen

Situationen sind spezielle Aufgabenkontexte. Diese unterscheiden sich bezüglich der „Distanz“, die sie zu den Schülerinnen und Schülern haben. Eine entsprechende Skala wird so definiert, dass sie vom persönlichen Leben über das schulische und gesellschaftliche Umfeld bis zu wissenschaftlichen Themen führt. Die Berücksichtigung von „Situationen“ soll die Authentizität der Aufgaben sichern helfen.

Allgemeine Kennzeichen der Items und des Tests

In den letzten Abschnitten der OECD/PISA-Rahmenkonzeption wird die Art der Aufgaben beschrieben, die im OECD/PISA-Test eingesetzt werden, und der Testaufbau als Ganzes erläutert.

Itemkontexte

Der Begriff „Kontext“ wird hier entsprechend seines in der Mathematikdidaktik üblichen Gebrauchs verwendet. Es gibt inner- und außermathematische Kontexte und, unter den letztgenannten, authentische und realitätsbezogene. Die von der OECD/PISA verwendeten Kontexte

werden schwerpunktmäßig authentisch sein. Insbesondere sogenannte „eingekleidete Aufgaben“ sollen vermieden werden.

Aufgabenformate und Aufbau des Tests

Wie die Lesekompetenz soll auch die mathematische Grundbildung im Rahmen von OECD/PISA mit einer Kombination aus Items mit Multiple-Choice-Formaten und Items mit offenem Antwortformat gemessen werden. Dabei wird es unter den Items mit offenem Antwortformat sowohl Aufgaben geben, für die es nur eine richtige Lösung gibt (offene Frage/eine richtige Antwort), als auch Fragen, die mehrere richtige Antwortmöglichkeiten haben (offene Frage/mehrere richtige Antworten). In der Studie sollen 25-35 % der Mathematik-Testzeit auf offene Items mit mehreren richtigen Antworten entfallen. Im ersten Zyklus von OECD/PISA wird ein Aufgabenformat verwendet, bei dem mehrere Items an ein gemeinsames Stimulusmaterial anknüpfen. Hierbei kann es sich um einen Text, eine Graphik, eine geschilderte Situation handeln. Zu diesem Stimulus werden dann verschiedene aufeinander bezogene und vertiefende Teilaufgaben gestellt werden.

Damit ist eine typische 30-minütige Testeinheit etwa so aufgebaut: eine kleine Anzahl (2-4) Multiple-Choice-Items oder offene Items mit einer einzigen richtigen Antwort zur Erfassung von Kompetenzklasse 1 oder 2, eine kleine Anzahl (1-2) von Aufgaben mit jeweils 2 oder 3 Items innerhalb ein und desselben Kontexts zur Erfassung von Kompetenzklasse 1 oder 2 und ein *Block* von mehreren Items innerhalb eines Kontexts, wobei die Items mit relativ einfachen Aufgaben zur Erfassung von Kompetenzklasse 1 beginnen und dann zu komplexeren Aufgaben zur Erfassung von Kompetenzklasse 3 übergehen.

Zur Auswertung des Tests

Es wird versucht, bei der Auswertung des OECD/PISA-Tests zu mehreren Items nicht nur korrekt/inkorrekt zu unterscheiden, sondern durch die Erfassung von unterschiedlichen Lösungsstrategien zu genaueren Informationen zu kommen. Für die zukünftigen PISA-Zyklen ist darüber hinaus geplant, auch weitere Aufgabenformate, z.B. tatsächliche Explorationen mathematischer Zusammenhänge, in Betracht zu ziehen.

Nationale Ergänzungen

Die Entwicklung der deutschen PISA-Mathematik-Rahmenkonzeption ist am Aufbau des internationalen Rahmenkonzepts orientiert, *erweitert* und *differenziert* dieses jedoch aufgrund mathematikdidaktischer Sichtweisen und spezifischer Ausrichtungen des deutschen Mathematikunterrichts.

Mathematische Grundbildung („Mathematical Literacy“) als Basis des PISA-Tests

Die Bedeutung der Definition von „mathematical literacy“ in der internationalen PISA-Rahmenkonzeption wird einsichtiger im Kontext der mathematikdidaktischen Theorie, aus der das internationale PISA-Rahmenkonzept stammt. Es sind dies die Gedanken Hans Freudenthals, die insbesondere im umfassenden Werk „Didactical phenomenology of mathematical structures“ dargestellt sind. Freudenthals zentrale Aussage, „our mathematical concepts, structures and ideas have been invented as tools to organise the phenomena of the physical, social and mental world“ betont, dass es gerade die mathematischen Begriffe sind, die als „tools“ zur Erschließung „der Welt“ in Frage kommen, und nicht etwa nur das Beherrschen alltagstauglicher Rechenverfahren. Demgemäß stehen in der internationalen PISA-Rahmenkonzeption mathematische Konzepte – und damit verbunden die Fähigkeit zur Vernetzung und Modellierung – als Ziel im Vordergrund. Die in den traditionellen Curricula unterrichteten mathematischen Fertigkeiten („skills and routines“) bilden dagegen ausdrücklich keinen Schwerpunkt von PISA.

Nach vorliegenden empirischen Untersuchungen zeigen sich allerdings im realen Mathematikunterricht in Deutschland Probleme bei der Vernetzung mathematischer Konzepte sowie eine ausgeprägte Kalkülorientierung. Die internationale PISA-Rahmenkonzeption kann also zwar einen allgemeinen, normativ gesetzten Horizont abgeben, vor dem auch die deutschen Leistungen gesehen werden können. Es bedarf aber einiger Ergänzungen.

Eine Orientierung dafür können die Diskussionen um den Beitrag der Mathematik zur allgemeinen Bildung abgeben. Zum Beispiel skizzierte Heinrich Winter drei hierfür entscheidende Bereiche: (1) Erscheinungen der Welt um uns verstehen, (2) mathematische Gegenstände als eine Welt eigener Art kennen lernen, (3) heuristische Fähigkeiten erwerben.

Die Ergänzungen in der deutschen Zusatzerhebung zu PISA werden diese Bereiche stärker berücksichtigen. Andererseits muss aber, jedenfalls im ersten PISA-Zyklus, auch der real existierenden Kalkülorientierung des deutschen Mathematikunterrichts durch Hereinnahme „technischer Fertigkeiten“ Rechnung getragen werden. Der internationale PISA-Test und die deutsche Zusatzerhebung sind dabei als *komplementär* zu sehen.

Erweiterung und Differenzierung der internationalen PISA-Rahmenkonzeption: Rahmenkonzeption für den PISA-Test in Deutschland

Einzelerfassung ausgewählter mathematischer Kompetenzen

Die internationale PISA-Rahmenkonzeption „Mathematical Literacy“ geht von einer Liste allgemeiner mathematischer Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten aus. Diese werden in den drei relativ umfangreichen Kompetenzklassen (siehe erster Teil) gebündelt. Um spezifische Leistungen auf der Grundlage des bestehenden deutschen Mathematikunterrichts erfassen zu können, erscheint diese Klasseneinteilung zu grob. Für die PISA-Rahmenkonzeption in Deutschland werden daher die Kompetenzen „Argumentieren“, „Modellieren“, „Darstellen“ und die „technischen Fertigkeiten“ separat und differenziert festgehalten:

- Es wird erfasst, ob *Begründungen* oder *Beweise* gefordert werden oder weitere *mathematische Tätigkeiten* für das Lösen der Aufgabe von Bedeutung sind.
- Die Beherrschung von *Modellierungsprozessen* wird anhand zweier Komponenten beschrieben, nämlich ob „präzisieren“ und/oder „mathematisieren“ bzw. „interpretieren“ und/oder „validieren“ erforderlich sind. „Darstellungsfähigkeiten“ werden insoweit betrachtet, als sie Aufschluss darüber geben, aus welcher *Repräsentationsform* heraus ein Modellierungsprozess einsetzt.
- Die Fähigkeit zum Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen aus der internationalen Rahmenkonzeption geht weit über das hinaus, was gewöhnlich in Deutschland unter dem Beherrschen von Verfahren verstanden wird. *Technische Fertigkeiten* werden daher als eine eigene Kompetenzklasse aufgenommen (siehe unten: Kompetenzklasse 1A).

Bildung von differenzierteren Kompetenzklassen in der deutschen PISA-Rahmenkonzeption

Auch in der deutschen PISA-Rahmenkonzeption werden die Items in Kompetenzklassen eingeteilt. Diese Kompetenzklassen entstehen teilweise aus Spezifizierungen der internationalen Kompetenzklassen, sind jedoch in einigen Charakteristika auf deutsche Verhältnisse zugeschnitten.

- ***Kompetenzklasse 1A:***
Item erfordert nur technische Fertigkeiten und/oder den Abruf von Faktenwissen.
- ***Kompetenzklasse 1B:***
Es ist eine Modellierung erforderlich, jedoch ist diese unter Rückgriff auf einen einzigen Algorithmus, eine einzige Formel möglich.

Die Kompetenzklasse 1A lässt zu, isoliert technische Fertigkeiten zu erfassen. Die Kompetenzklasse 1B entspricht Mustern deutscher Unterrichts- und Schulbuchaufgaben.

Die internationale Kompetenzklasse 2 ist durch „connections“ charakterisiert. Es sind also Querverbindungen zwischen verschiedenen Gebieten und/oder innerhalb der Aufgabe selbst zu ziehen. Eine erste Form, Verbindungen herzustellen, wird in Kompetenzklasse 2A beschrieben:

- **Kompetenzklasse 2A:**

Der zur Modellierung erforderliche Schritt ist überwiegend begrifflicher Art.

Items der Kompetenzklasse 2A werden in Deutschland oft benutzt, wenn mathematische Grundbildung angesprochen und eine übermäßige Orientierung an technischen Fertigkeiten vermieden werden soll. Andere Arten von „connections“ kommen in Kompetenzklasse 2B vor:

- **Kompetenzklasse 2B:**

Die Struktur der Modellierung ist mehrschrittig, d.h. bei der Lösung der Aufgabe ist entweder Wissen aus mehreren mathematischen Zusammenhängen einzusetzen oder gleiche Schritte sind mehrfach vorzunehmen und zu kombinieren.

Detaillierter kann man hierbei noch zwischen „repetitiven“ und „integrativen“ Modellierungen unterscheiden.

Die Kompetenzklasse 3 ist identisch mit der Kompetenzklasse 3 im internationalen Rahmenkonzept:

- **Kompetenzklasse 3:**

Die Aufgabe beinhaltet Schritte der Verallgemeinerung, des Entwerfens einer allgemeinen komplexen Strategie, der Reflexion über das verwendete mathematische Modell, die Präsentation eines subtilen mathematischen Arguments etc.

Zusätzlich können verschiedene Aspekte der kognitiven Komplexität, mathematikdidaktisch bestimmte Grundvorstellungen mathematischer Inhalte und die Unterscheidung unterschiedlicher Aufgabenarten, z.B. Umkehraufgaben, für inhaltsbezogene Erklärungen herangezogen werden.

Stoffgebiete an Stelle von „mathematischen Leitideen“

In den deutschen Lehrplänen sind die in dem internationalen Rahmenkonzept verankerten „mathematischen Leitideen“ nicht realisiert. Die nationale Zusatzerhebung wird daher um die traditionell zugeschnittenen Stoffgebiete Arithmetik, Proportionalität (Dreisatz, Prozentrechnung, Zinsen etc.), Algebra, Geometrie, Stochastik und Umgehen mit Daten gruppiert.

Kontexte statt Situationen

Die deutsche Zusatzerhebung orientiert sich nicht an „Situationen“ wie das internationale Rahmenkonzept, sondern an „Kontexten“. Es wird hierbei unterschieden zwischen *authentischen, realitätsbezogenen* oder *innermathematischen* Kontexten, bzw. danach, ob nur kalkülhaftes Rechnen mit *Größen* oder überhaupt *kein* zusätzlicher Kontext erforderlich ist.

Aufbau des internationalen und des nationalen PISA-Mathematik-Tests

Im nationalen Test wird die Testzeit auf die Aufgabenformate Multiple-Choice, kurze freie Antwort und ausführliche freie Antwort ungefähr 2 : 1 : 1 verteilt. Der internationale Test enthält darüber hinaus mehrmals Reihen von einzelnen Items, die an ein gemeinsames „Stimulusmaterial“ anknüpfen. Das nationale Testinstrument vermeidet diese aufeinander aufbauenden Aufgaben.

Im internationalen Teil soll die Testzeit auf die drei Kompetenzklassen im Verhältnis 1 : 2 : 1 verteilt werden. Im deutschen Teil erscheint eine Verteilung der Items auf die Klassen 1 und 2 im Verhältnis 1 : 1 angemessen.

Zusätzlich zu den Leistungen der Schülerinnen und Schüler wird im nationalen Teil auch ihr Interesse an Mathematik und ihr Selbstkonzept in Bezug zur Mathematik erhoben.