КОМПОНЕНТА ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА $\mathbb{P}^3$ С ОСОБЕННОСТЯМИ СМЕШАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Иванов А. Н., Тихомиров А. С.

Мы описываем новую неприводимую компоненту схемы модулей Гизекера-Маруямы $\mathcal{M}(3)$ полустабильных когерентных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 3,\ c_3 = 0$ на $\mathbb{P}^3$, общая точка которой соответствует пучку с множеством особенностей, содержащим компоненты размерностей 0 и 1. Эти пучки получаются с помощью элементарных преобразований стабильных рефлексивных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$ вдоль проективной прямой. Построенное семейство пучков является первым примером неприводимой компоненты схемы Гизекера-Маруямы, общая точка которой соответствует пучку с особенностями смешанной размерности.

Ключевые слова: полустабильные пучки ранга 2, рефлексивные пучки, пространство модулей.

Пусть $\mathcal{M}(0, k, n)$ – схема модулей Гизекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = k,\ c_3 = n$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над основным полем $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ характеристики 0. Обозначим $\mathcal{M}(k) = \mathcal{M}(0, k, 0)$. Под множеством особенностей данного $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-пучка E мы понимаем множество $\mathrm{Sing}(E) = \{x \in \mathbb{P}^3 \mid E$ не является локально свободным в точке $x\}$. $\mathrm{Sing}(E)$ является всегда собственным замкнутым подмножеством $\mathbb{P}^3$ и, более того, если E – полустабильный пучок ненулевого ранга, каждая неприводимая компонента множества $\mathrm{Sing}(E)$ имеет размерность максимум 1. Кроме того, всюду далее для стабильного пучка E мы не будем делать различия между E и его классом изоморфизма $[E]$ как точкой в пространстве модулей.

Общие точки всех известных до настоящего времени компонент схем $\mathcal{M}(k),\ k \geq 1$, являются пучками с особенностями чистой размерности, при этом все компоненты схем $\mathcal{M}(1)$ и $\mathcal{M}(2)$ найдены [3], в отличие от схемы $\mathcal{M}(3)$, полное описание всех компонент которой является открытой проблемой. Основным результатом настоящей статьи является описание новой неприводимой компоненты схемы $\mathcal{M}(3)$, общая точка которой является пучком с множеством особенностей, содержащим компоненты размерностей 0 и 1 – см. теорему ниже. Построенное семейство пучков является первым примером неприводимой компоненты схемы Гизекера-Маруямы, общая точка которой является пучком с особенностями смешанной размерности.

Рассмотрим в $\mathcal{M}(0, 2, 2)$ открытое подмножество $\mathcal{R}$ – схему модулей стабильных рефлексивных когерентных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$. Для любой точки $[F] \in \mathcal{R}$, по теореме Грауэрта-Мюлиха [2], множество $X_{[F]} = \{l \in \mathrm{Gr}(2, 4) \mid\ l \cap \mathrm{Sing}(F) = \emptyset,\ F|_l \simeq 2\mathcal{O}_l\}$ является плотным подмножеством грассманиана $\mathrm{Gr}(2, 4)$ прямых пространства $\mathbb{P}^3$. Рассмотрим открытое плотное подмножество $\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e \subset \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))$, состоящее из эпиморфизмов $\phi : F \twoheadrightarrow \mathcal{O}_l(2)$. Для любого элемента $\phi \in \mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e$ мы можем взять ядро $E = \ker\ \phi$ (переход от F к E иногда называется элементарным преобразованием F вдоль l). Легко видеть, что E

– стабильный пучок и определяет точку $[E]$ схемы $\mathcal{M}(3)$. Кроме того, $\ker\phi \simeq \ker\phi'$ тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $g \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathbb{K}^*$, такой что $\phi' = g\circ\phi$. Обозначим через $[\phi]$ класс эквивалентности ϕ по модулю $\mathbb{K}^*$. Теперь рассмотрим множество $\widetilde{\mathcal{X}} = \{x = ([F], l, [\phi_x]) \mid [F] \in \mathcal{R},\ l \in X_{[F]},\ [\phi_x] \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e)\}$. Поскольку $\mathcal{R}$ является приведенной неприводимой схемой [1], множество $\widetilde{\mathcal{X}}$ имеет естественную структуру приведенной неприводимой схемы. Более того, существует корректно определенный инъективный морфизм $f : \widetilde{\mathcal{X}} \longrightarrow \mathcal{M}(3),\ \ x \mapsto [\ker\ \phi_x]$. Положим $\mathcal{X} := f(\widetilde{\mathcal{X}}) \subset \mathcal{M}(3)$. Тогда имеет место следующая

Теорема. *Замыкание $\overline{\mathcal{X}}$ схемы $\mathcal{X}$ в $\mathcal{M}(3)$ является неприводимой компонентой размерности 22, общая точка которой является стабильным пучком с особенностями смешанной размерности.*

Для доказательства теоремы нам понадобится вспомогательная

Лемма. *Для любого пучка $[F] \in \mathcal{R}$ верно равенство $h^2(\mathcal{H}om(F, F)) = 0$.*

Доказательство. Согласно [1, стр. 63], общий пучок $[F] \in \mathcal{R}$ включается в точную тройку

$$\xi : \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{I}_Y(1) \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где $Y = m \sqcup C$ – дизъюнктное объединение прямой m и гладкой коники C в $\mathbb{P}^3$. Расширение $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))$ при изоморфизмах $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Y(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) \simeq H^0(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), \mathcal{O}$ $H^0(\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}))$ соответствует сечению $\sigma \in H^0(\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}))$ такому, что схема улей $(\sigma)_0 = \{x_1, x_2\}$ – две различные точки на конике C, и $\mathrm{Sing}(F) = \{x_1, x_2\}$.

В результате применения функтора $\mathcal{H}om(-, F)$ к (1) мы получим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(1), F) \longrightarrow \mathcal{H}om(F, F) \longrightarrow F(1) \xrightarrow{\delta} \tag{2}$$

$$\xrightarrow{\delta} \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), F) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(F, F).$$

Так как $\mathrm{hd}(F) = 1$, то существует локально свободная $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-резольвента $0 \to L_1 \to L_0 \to F \to 0$ пучка F. Применяя к ней функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(1), -)$ и учитывая легко проверяемое равенство $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{I}_Y(1), L_1) = 0$, получаем точную последовательность $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), L_1) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), L_0) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), F) \to 0$. Простое вычисление показывает, что пучки $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), L_0)$ и $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), L_1)$ – локально свободные $\mathcal{O}_Y$-пучки. Тем самым, и $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), F)$ является $\mathcal{O}_Y$-пучком, притом, как легко видеть, локально свободным в общей точке $\mathcal{O}_Y$-пучком ранга 2. Более того, δ пропускается через морфизм ограничения $\otimes\mathcal{O}_Y : F(1) \longrightarrow F(1) \otimes \mathcal{O}_Y$. Так как $F(1) \otimes \mathcal{O}_Y$ есть локально свободный в общей точке $\mathcal{O}_Y$-пучок ранга 2, то отсюда следует, что $\delta = j \circ (\otimes\mathcal{O}_Y)$, где $j : F(1) \otimes \mathcal{O}_Y \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{I}_Y(1), F)$ – инъективный в общей точке морфизм $\mathcal{O}_Y$-пучков. Таким образом, поскольку $\ker(\otimes\mathcal{O}_Y) = F \otimes \mathcal{I}_Y(1)$, пучок $\mathcal{G} := \ker\delta$ включается в следующие точные тройки

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(1), F) \longrightarrow \mathcal{H}om(F, F) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0, \tag{3}$$

$$0 \longrightarrow F \otimes \mathcal{I}_Y(1) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow Q \longrightarrow 0, \qquad \dim Q \leq 0. \tag{4}$$

Далее, применяя функтор $\mathcal{H}om(-,F(-1))$ к точной тройке $0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_Y \to 0$, получим точную последовательность $0 \to F(-1) \to \mathcal{H}om(\mathcal{I}_Y(1),F) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),F)$. С другой стороны, применяя к вышеуказанной $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$-резольвенте пучка F функтор $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_Y(1),-)$, имеем точную последовательность ... $\to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),L_0) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),F) \to \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(1),L_1) \to$ ... Поскольку F локально свободен вне точек x_1 и x_2, то пучок $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),F)$ либо равен нулю, либо он артинов. Но ввиду локальной свободы пучков L_0 и L_1 пучок $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),L_0)$ – нулевой, а пучок $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(1),L_1)$ – локально свободный $\mathcal{O}_Y$-пучок. Следовательно, пучок $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),F)$ – подпучок в $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_Y(1),L_1)$, а значит, он не может быть ненулевым артиновым пучком. Поэтому $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_Y(1),F)=0$, откуда

$$Hom(\mathcal{I}_Y(1),F) \simeq F(-1). \tag{5}$$

Применяя к тройке (1) функтор $\otimes\mathcal{O}_Y(1)$, получаем точную последовательность $\mathcal{T}or_1(\mathcal{I}_Y(2),\mathcal{O}_Y \to F(1)\otimes\mathcal{O}_Y \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathcal{I}_Y(2)\otimes\mathcal{O}_Y \to 0$. Поскольку пучки $F(1)\otimes\mathcal{O}_Y$ и $\mathcal{I}_Y(2)\otimes\mathcal{O}_Y$, очевидно, являются $\mathcal{O}_Y$-пучками ранга 2, а ε_0 – эпиморфизм, то $\ker\varepsilon_0$ – артинов пучок, а значит, ε_1 – ненулевой морфизм на каждой из компонент m и C кривой Y. Далее, стандартное вычисление дает $\mathcal{T}or_1(\mathcal{I}_Y(2),\mathcal{O}_Y) \simeq \mathcal{T}or_2(\mathcal{O}_Y(2),\mathcal{O}_Y) \simeq \det N^{\vee}_{Y/\mathbb{P}^3}(2) \simeq \mathcal{O}_m \oplus \mathcal{O}_C(-1)$. Поэтому ввиду того, что $\mathrm{Sing}(F)=\{x_1,x_2\}$, получаем $\mathrm{coker}\,\varepsilon_1 = \ker\varepsilon_0 \simeq \mathcal{O}_{x_1}\oplus\mathcal{O}_{x_2}$, т. е. точна тройка $0 \to \mathcal{O}_{x_1}\oplus\mathcal{O}_{x_2} \to F(1)\otimes\mathcal{O}_Y \to \mathcal{I}_Y(2)\otimes\mathcal{O}_Y \to 0$. Эта тройка $\mathcal{O}_Y$-пучков на гладкой кривой Y распадается. Поэтому, так как $\mathcal{I}_Y(2)\otimes\mathcal{O}_Y \simeq N^{\vee}_{Y/\mathbb{P}^3}(2) \simeq 2\mathcal{O}_m(1)\oplus\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{O}_C(1)$, имеем изоморфизм

$$F(1)\otimes\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_{x_1}\oplus\mathcal{O}_{x_2}\oplus 2\mathcal{O}_m(1)\oplus\mathcal{O}_C\oplus\mathcal{O}_C(1). \tag{6}$$

Далее, поскольку $\mathrm{hd}(F)=1$ ввиду рефлексивости F, то $\mathcal{T}or_1(F,\mathcal{O}_Y(1))=0$, и поэтому точна тройка $0 \to F\otimes\mathcal{I}_Y(1) \to F(1) \to F\otimes\mathcal{O}_Y(1) \to 0$. Кроме того, согласно [1, табл. 2.8.1] имеем $h^1(F(1)) = h^2(F(1)) = h^2(F(-1)) = h^3(F(-1)) = 0$. Таким образом, учитывая (3)-(6), получаем, что $h^2(\mathcal{H}om(F,F)) = h^2(\mathcal{G}) = h^2(F(1)\otimes\mathcal{I}_Y) = h^1(F(1)\otimes\mathcal{O}_Y)=0$. $\square$

Доказательство теоремы. Рассмотрим произвольный пучок $[E]\in\mathcal{X}$, который согласно конструкции семейства $\mathcal{X}$ включается в следующую точную тройку:

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow \mathcal{O}_l(2) \longrightarrow 0, \tag{7}$$

где $[F]\in\mathcal{R}$, а l – прямая в $\mathbb{P}^3$, такая что

$$\mathrm{Sing}(F)\cap l=\emptyset, \quad F|_l \simeq 2\mathcal{O}_l. \tag{8}$$

Так как $\mathrm{hd}(F)=1$ и $\dim\mathrm{Sing}(F)=0$, то $\mathcal{E}xt^{\ge1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3},F) = \mathcal{E}xt^{\ge2}(F,F)=0$ и пучки $\mathcal{E}xt^1(F,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, $\mathcal{E}xt^1(F,F)$ являются артиновыми. Отсюда и из (8) следует, что

$$\mathcal{H}om(F,\mathcal{O}_l(2)) \simeq 2\mathcal{O}_l(2), \quad \mathcal{E}xt^i(F,\mathcal{O}_l(2)) = \mathcal{E}xt^j(\mathcal{O}_l(2),F)=0, \quad i\ge1,\ j\le1, \tag{9}$$

и морфизм φ в (7) индуцирует изоморфизм артиновых пучков

$$\mathcal{E}xt^1(F,E) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}xt^1(F,F). \tag{10}$$

Аналогично ввиду вытекающего из (7) изоморфизма $E|_U \simeq F|_U, \quad U := \mathbb{P}^3 \setminus l$, имеем изоморфизмы артиновых пучков $\mathcal{E}xt^1(F,F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F|_U, F|_U) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{E}xt^1(E|_U, F|_U)$. Отсюда вытекает вложение артинова пучка $\mathcal{E}xt^1(F,F)$ в пучок $\mathcal{E}xt^1(E,F)$ в качестве прямого слагаемого, так что $\mathcal{E}xt^1(E,F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F,F) \oplus \mathcal{E}xt^1(E,F)|_{U'}$, $U' = \mathbb{P}^3 \setminus \mathrm{Sing}(F)$. Заметим, что пучок $F|_{U'}$ локально свободен, поэтому $\mathcal{E}xt^1(E,F)|_{U'} \simeq \mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, F|_{U'}) \simeq \mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, \mathcal{O}_{U'}) \otimes F|_{U'}$. Кроме того, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l(2), \mathcal{O}_{U'}) \simeq (\det N_{l/\mathbb{P}^3})(-2) \simeq \mathcal{O}_l$. Применяя к точной тройке (7), ограниченной на U', функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_{U'})$ и учитывая, что ввиду локальной свободы пучка $F|_{U'}$ пучки $\mathcal{E}xt^1(F|_{U'}, \mathcal{O}_{U'})$ и $\mathcal{E}xt^2(F|_{U'}, \mathcal{O}_{U'})$ зануляются, находим $\mathcal{E}xt^1(E|_{U'}, \mathcal{O}_{U'}) \simeq \mathcal{O}_l$. Поэтому ввиду (8) имеем $\mathcal{E}xt^1(E,F)|_{U'} \simeq 2\mathcal{O}_l$. Отсюда следует изоморфизм

$$\mathcal{E}xt^1(E,F) \simeq \mathcal{E}xt^1(F,F) \oplus 2\mathcal{O}_l. \tag{11}$$

Далее, ввиду (9) примененяя к тройке (7) функторы $\mathcal{H}om(F,-)$, $\mathcal{H}om(-,E)$ и учитывая (8)-(10) и изоморфизмы $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_l(2), E) \simeq \mathcal{H}om(\mathcal{O}_l(2), \mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{O}_l$, получаем точные тройки $0 \to \mathcal{H}om(F,E) \to \mathcal{H}om(F,F) \to 2\mathcal{O}_l(2) \to 0$, $0 \to \mathcal{H}om(F,E) \to \mathcal{H}om(E,E) \to \mathcal{O}_l \to 0$.

Мономорфизм $E \hookrightarrow F$ в (7) индуцирует мономорфизм $\tau : \mathcal{H}om(E,E) \hookrightarrow \mathcal{H}om(F,F)$, причем coker τ является локально свободным $\mathcal{O}_l$-пучком. Две последние тройки и мономорфизм τ включаются в коммутативную диаграмму, полученную применением функторов $\mathcal{H}om(F,-)$ и $\mathcal{H}om(E,-)$ к тройке (7). Из этой диаграммы по лемме о змее следует, что coker $\tau \simeq \mathcal{O}_l(4)$. Поэтому в результате применения функтора $\mathcal{H}om(E,-)$ к (7) мы получим точную последовательность

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathcal{O}_l(4) \longrightarrow \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_l(2)) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E,E) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E,F) \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_l(2)) \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}xt^2(E,E). \end{gathered} \tag{12}$$

С другой стороны, применяя к (7) функтор $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_l(2))$ и учитывая (9) и $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_l, \mathcal{O}_l) \simeq \binom{2}{i}\mathcal{O}_l(i)$, получаем точную последовательность $0 \to \mathcal{O}_l \to 2\mathcal{O}_l(2) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{H}om(E, \mathcal{O}_l(2)) \to 2\mathcal{O}_l(1) \to 0$ и изоморфизм $\mathcal{E}xt^1(E, \mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_l(2), \mathcal{O}_l(2)) \simeq \mathcal{O}_l(2)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{im}\gamma$ – локально свободный $\mathcal{O}_l$-пучок, а значит, он изоморфен $\mathcal{O}_l(4)$. Кроме того, применяя к (7) функтор $\mathcal{H}om(-,E)$ мы получим $\mathcal{E}xt^2(E,E) \simeq \mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_l(2), E) \simeq 0$, поскольку $\mathrm{hd}(F) = 1$ и $\mathrm{hd}(\mathcal{O}_l) = 2$. Таким образом, из (11), (12) и того факта, что $\mathcal{E}xt^1(F,F)$ – артинов пучок, следует точная тройка $0 \to 2\mathcal{O}_l(1) \to \mathcal{E}xt^1(E,E) \to \mathcal{E}xt^1(F,F) \oplus \mathcal{O}_l(-2) \to 0$. Отсюда $h^0(\mathcal{E}xt^1(E,E)) = 4 + h^0(\mathcal{E}xt^1(F,F))$.

Как было показано выше, точна тройка $0 \to \mathcal{H}om(E,E) \xrightarrow{\tau} \mathcal{H}om(F,F) \to \mathcal{O}_l(4) \to 0$. Так как пучки E и F стабильны, то они просты, т. е. $h^0(\mathcal{H}om(E,E)) = h^0(\mathcal{H}om(F,F)) = 1$. Отсюда и из леммы следуют равенства

$$h^1(\mathcal{H}om(E,E)) = 5 + h^1(\mathcal{H}om(F,F)), \quad h^2(\mathcal{H}om(E,E)) = 0. \tag{13}$$

Кроме того, из леммы и [1, теорема 2.8] имеем $h^0(\mathcal{E}xt^1(F,F)) + h^1(\mathcal{H}om(F,F)) = \dim \mathrm{Ext}^1(F,F) = \dim \mathcal{R} = 13$. Следовательно, учитывая (13), полученное выше равенство для $h^0(\mathcal{E}xt^1(E,E))$ и точную последовательность $0 \to H^1(\mathcal{H}om(E,E)) \to \mathrm{Ext}^1(E,E) \to H^0(\mathcal{E}xt^1(E,E)) \to H^2(\mathcal{H}om(E,E))$, находим $\dim \mathrm{Ext}^1(E,E) = 22$. С другой стороны, размерность схемы $\mathcal{X}$ равна $\dim\ \mathcal{X} = \dim\ \widetilde{\mathcal{X}} = \dim\ \mathcal{R} + \dim\ \mathrm{Gr}(2,4) + \dim\ \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(F, \mathcal{O}_l(2))_e) = 22$. Таким образом, для любой точки $[E] \in \mathcal{X}$ имеет место $\dim\ \mathrm{Ext}^1(E,E) = \dim\ \mathcal{X}$. Следовательно, замыкание $\overline{\mathcal{X}}$ – неприводимая компонента размерности 22 схемы $\mathcal{M}(3)$. Из конструкции схемы $\mathcal{X}$ видно, что общая точка $[E] \in \overline{\mathcal{X}}$ является стабильным пучком с особенностями на $l \sqcup \mathrm{Sing}(F)$. Поскольку $\dim\ \mathrm{Sing}(F) = 0$, особенности пучка E имеют смешанную размерность. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications. Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 57–89.

[2] D. Huybrechts, M. Lehn, The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[3] Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A. S., Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Annali di Matematica Pura ed Applicata. 2017. P. 1-36.

А. Н. Иванов

Факультет математики, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, ул. Усачева, 6, 119048 Москва, Россия

email: anivanov_1@edu.hse.ru

А. С. Тихомиров

Факультет математики, Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики, ул. Усачева, 6, 119048 Москва, Россия

email: astikhomirov@mail.ru