L'espace symmétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale II

Haoran Wang

Abstract

We study the geometry and the cohomology of the tamely ramified cover of Drinfeld's p-adic symmetric space over a p-adic field K. For this tame level, we prove, in a purely local way, most of a conjecture of Harris on the form of the ℓ-adic cohomologies, as well as the torsion freeness of the integral cohomology. In this paper, we also compute the ℓ-adic cohomology of Coxeter Deligne-Lusztig variety associated to GL_d, and some results of independent interest on the coefficient systems over the Bruhat-Tits building associated to $\mathrm{GL}_d(K)$ have been established.

Table des matières

1 Introduction

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle p, d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Pour $d \geqslant 2$, Drinfeld a introduit dans [Dri74] son fameux "espace symétrique p-adique" Ω^{d-1} ($\mathbb{P}^{d-1}_K$ privé des hyperplans K-rationnels), et il a trouvé que Ω^{d-1} possède un système projectif de revêtements étales des espaces rigide-analytiques au sens de Raynaud-Berkovich $\{\Sigma_n\}$ (on l'appelle la tour de Drinfeld).

La cohomologie de la tour de Drinfeld est liée à la correspondance de Langlands locale. Elle a été conjecturalememnt décrite par Harris dans un travail non publié basé sur le calcul de Schneider-Stuhler dans [SS91] et son article [Har97]. Cette conjecture est maintenant connue, de manière indirecte, en combinant le théorème de Faltings-Fargues qui permet de passer à la tour de Lubin-Tate, et le travail de Boyer [Boy09] qui décrit la cohomologie de la tour de Lubin-Tate par une approche de nature globale. En considérant le complexe de cohomologie de la tour de Drinfeld comme un objet de la catégorie dérivée des représentations lisses, Dat [Dat07] en a tiré un raffinement spectaculaire : ce complexe de cohomologie réalise à la fois la partie elliptique de la correspondance de Langlands locale et une forme de la correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Cet article fait suit à [Wan14]. On étudie, de manière purement *locale*, la partie *non-supercuspidale* de la cohomologie ℓ-adique ainsi que la cohomologie à coefficients entiers du niveau modéré Σ_1 de la tour ou plutôt d'une variante $\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}$ qui est en fait une réunion de d copies de Σ_1.

Soient W_K le groupe de Weil de K et D l'algèbre à division centrale d'invariant $1/d$ sur K. La cohomologie de $\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}$ est munie d'une action des trois groupes $\mathrm{GL}_d(K)$, W_K et $D^\times$. Pour la décrire, on rappelle que si ρ est une représentation irréductible de $D^\times$, alors la correspondance de Jacquet-Langlands lui associe une représentation $\mathrm{JL}(\rho)$ de $\mathrm{GL}_d(K)$. De plus, la correspondante de Langlands semi-simplifiée $L(\mathrm{JL}(\rho))^{ss}$ est de la forme $\sigma_\rho \oplus \sigma_\rho(-1) \oplus \cdots \oplus \sigma_\rho(1-e)$ pour un diviseur e de d. On appelle alors "représentation elliptique de type ρ" toute représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_d(K)$ telle que $L(\pi)^{ss} = L(\mathrm{JL}(\rho))^{ss}$. Ces représentations sont paramétrées $I \mapsto \pi_\rho^I$ par les sous-ensembles de $\{1, \ldots, e\}$, *cf.* [Dat07].

Notre résultat est le suivant :

Théorème A. ((3.2.2) (3.2.3) (3.3.6) (3.5.3) (3.5.5) (3.5.6))

(a) *Pour tout* $q \in \mathbb{N}$, *le* $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$*-module* $H_c^q(\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ *est admissible en tant que* $\mathrm{GL}_d(K)$*-module ; il est sans-torsion et non-divisible.*

(b) *Soit* ρ *une représentation irréductible de niveau zéro de* $D^\times$ *de caractère central trivial. Alors,*

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}\left(\rho, H_c^{d-1+i}(\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)\right) \cong \begin{cases} \pi_\rho^{I_i} \otimes \sigma_\rho(-i), & \textit{si } i \in \{0, \ldots, e-1\}\,; \\ 0, & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où $I_i = \{1, \ldots, i\}$ *ou* $\{e-i, \ldots, e-1\}$.

Remarque.– (i) On a étudié la partie supercuspidale de la cohomologie ℓ-adique dans [Wan14].

(ii) Grâce à la méthode globale (Boyer [Boy09] et Faltings-Fargues [Far08]), on sait que $I_i = \{1, \ldots, i\}$.

(iii) Boyer [Boy13] a récemment annoncé une preuve de l'absence de torsion dans la cohomologie entière de la tour de Lubin-Tate.

Notre méthode repose sur l'existence d'une suite spectrale associée à certain recouvrement ouvert de Σ_1. Ceci nous permet de calculer la cohomologie $H_c^q(\Sigma_1, \Lambda)$ ($\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$) via un *système de coefficients* sur l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{BT}$ associé à $G := \mathrm{GL}_d(K)$. Plus précisément, rappelons qu'il existe une application τ de Ω^{d-1} vers la réalisation géométrique $|\mathcal{BT}|$ de $\mathcal{BT}$. En prenant la composition avec la transition $p : \Sigma_1 \to \Omega^{d-1}$, on obtient un morphisme G°-équivariant $\nu : \Sigma_1 \longrightarrow |\mathcal{BT}|$, où $G^\circ := \{g \in G \mid \det(g) \in \mathcal{O}^\times\}$. Considérons alors le recouvrement admissible $\{\nu^{-1}(|\sigma|^*)\}_{\sigma \in \mathcal{BT}}$

de Σ_1, où $|\sigma|^*$ est la réunion de toutes les $|\sigma'|$ de la réalisation géométrique de σ' avec σ' contenant σ.

Fait.– Notons $\mathcal{BT}_k$ l'ensemble des simplexes de dimension k. Le complexe de Cěch associé au recouvrement ci-dessus nous fournit une suite spectrale G°-équivariante

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{BT}_{-p}} H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\Sigma_1, \Lambda), \quad (1.0.1)$$ [1]

dont la différentielle d_1^{pq} est celle du complexe de chaînes du système de coefficients $\sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$.

On renvoie les lecteurs à 2.1 pour la notion de système de coefficients.

Dans [Wan14], nous avons calculé les $H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$ pour les sommets $s \in \mathcal{BT}$ ainsi que les $H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$ en terme de $H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$ avec σ contenant s (voir les rappels dans (3.1.5)). En particulier, on a montré que le système de coefficients $\sigma \mapsto V_\sigma := H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$ satisfait la propriété suivante : si σ est un simplexe contenant un sommet s, alors le morphisme $V_\sigma \to V_s$ induit un isomorphisme $V_\sigma \cong V_s^{G_\sigma^+}$, où G_σ^+ désigne le pro-p-radical du fixateur de σ.

Nous étudions les systèmes de coefficients ayant la propriété sus-mentionnée dans la section 2. Nous démontrons le résultat suivant qui implique entre autres la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale 1.0.1.

Théorème B. (Théorème (2.1.9)) *Soit $\{V_\sigma\}$ un système de coefficients tel que le morphisme φ_s^σ : $V_\sigma \to V_s$ induit un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} V_s^{G_\sigma^+}$. Alors, le complexe de chaînes $\mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \{V_\sigma\})$ associé à $\{V_\sigma\}$ est acyclique sauf en degré zéro, donc il induit une résolution de $H_0(\mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \{V_\sigma\}))$. De plus, V_σ est isomorphe à $H_0(\mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \{V_\sigma\}))^{G_\sigma^+}$ canoniquement.*

En fait, on démontre ce résultat dans un cadre un peu plus général, pour les systèmes de coefficients associés à un système d'idempotents $(e_s)_{s \in \mathcal{BT}_0}$ dans le langage de Meyer et Solleveld [MS10].

Décrivons brièvement le contenu des différentes parties. Au paragraphe 2.1, après quelques rappels sur les systèmes de coefficients, on précise dans quel cadre on utilise le langage de [MS10]. Ensuite, on démontre le théorème B dans les paragraphes 2.2 - 2.4. Le théorème A est obtenu dans la section 3. Au paragraphe 3.1, on fait un rappel sur les résultats géométriques obtenus dans [Wan14]. Ensuite, on donne l'admissibilité et l'absence de torsion pour les coefficients entiers. Celles-ci découlent des résultats connus [BR06] sur les variétés de Deligne-Lusztig. Aux paragraphes 3.3 et 3.4, on fait des rappels et des compléments sur les représentations elliptiques de groupes finis et de groupes p-adiques, et on calcul la cohomologie de variété de Deligne-Lusztig Coxeter associée à GL_d. On étudie la partie non-supercuspidale de la cohomologie ℓ-adique de $\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}$ dans 3.5. Les ingrédients cruciales sont le foncteur de l'induction « tordue » de Lusztig et la version explicite de la correspondance de Jacquet-Langlands décrite par Bushnell et Henniart [BH11] .

Remerciements : Je remercie profondément mon directeur de thèse Jean-François Dat tant pour son aide généreuse que pour ses constants encouragements. Je tiens à exprimer ma gratitude à Cédric Bonnafé pour répondre à mes questions. Une partie de cet article a été accomplie lorsque je visitais Institute for Mathematical Sciences, National University of Singapore en 2013. Je le remercie pour l'excellente condition de travail.

1. On triche un peu ici ; il faut considérer l'orientation de σ.

2 Systèmes de coefficients sur l'immeuble de Bruhat-Tits

Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}$. Notre but de cette section est de montrer le théorème B dans l'introduction. Pour les définitions et les propriétés fondamentaux de l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple $\mathcal{BT}$ associé à $G := \mathrm{GL}_d(K)$ ($d \geqslant 2$), on renvoie les lecteurs à [Far07] annexe A. On s'intéresse à la catégorie des $R[G]$-modules *lisses* à gauche, où R est une algèbre sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ (*cf.* [Vig97]).

2.1 Rappels et compléments sur les systèmes de coefficients

(2.1.1) Rappelons que $\mathcal{BT}$ est un complexe simplicial partiellement ordonné de sorte que $\tau < \sigma$ si τ est une facette de σ. Un simplexe de dimension 0 est appelé un *sommet*, et un simplexe de dimension maximale est appelé une *chambre*. On sait que l'ensemble des sommets de $\mathcal{BT}$ s'identifie à l'ensemble des classes d'homothétie de $\mathcal{O}$-réseaux dans l'espace vectoriel K^d (un $\mathcal{O}$-reseau de K^d est un sous-$\mathcal{O}$-module M de K^d tel que $M \otimes_{\mathcal{O}} K \cong K^d$). Un ensemble de simplexes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ est appelé *adjacent* s'il existe un simplexe σ tel que $\sigma_i < \sigma$ $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$. Si σ et τ deux simplexes adjacents, on notera $[\sigma, \tau]$ le plus petit simplexe contenant $\sigma \cup \tau$. Pour un sous complexe Σ de $\mathcal{BT}$, on désignera Σ° l'ensemble des sommets de Σ. L'action de G sur $\mathcal{BT}$ se factorise par $\mathrm{PGL}_d(K)$. Soient τ, σ deux simplexes, notons $H(\sigma, \tau)$ l'enclos de τ et σ : l'intersection de tous les appartements contenant $\sigma \cup \tau$. Pour un simplexe $\sigma \in \mathcal{BT}$, notons G_σ son fixateur sous l'action de G, i.e.

$$G_\sigma = \{g \in G \mid gx = x \text{ pour tout sommet } x \text{ de } \sigma\}.$$

Il admet un unique pro-p-sous-groupe distingué maximal, appelé son *pro-p-radical* et noté G_σ^+. Plus généralement, fixons un entier $r \geqslant 1$ et considérons

$$U^{(r)} := \{g \in G \mid g \equiv 1 \pmod{\varpi^r}\}$$

le sous-groupe congruence principal de niveau r dans G. Pour tout sommet x de $\mathcal{BT}$, on peut considérer le sous-groupe de G_x^+

$$U_x^{(r)} := gU^{(r)}g^{-1}, \text{ si } x = g([\mathcal{O}^d]) \text{ avec } g \in G.$$

Pour un simplexe quelconque $\sigma \in \mathcal{BT}$, on peut considérer le groupe (*cf.* [SS93])

$$U_\sigma^{(r)} := \text{le sous-groupe de } G \text{ engendré par } U_x^{(r)}, \text{ avec } x \in \sigma.$$

Schneider et Stuhler ont démontré que lorsque $r = 1$, $U_\sigma^{(1)} = G_\sigma^+$, $\forall \sigma \in \mathcal{BT}$ (*cf.* [SS91, §6 Lemme 2]).

(2.1.2) Définition.– (1) *Un système de coefficients* Γ sur $\mathcal{BT}$ à valeurs dans la catégorie des R-modules est un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathcal{BT}, <)$ vers la catégorie de R-modules. Concrètement, c'est la donnée des R-modules $(V_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ et des R-morphismes $\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \longrightarrow V_\tau$ si $\tau < \sigma$, soumis aux conditions : $\varphi_\sigma^\sigma = \mathrm{Id}_{V_\sigma}$ et $\varphi_\omega^\tau \circ \varphi_\tau^\sigma = \varphi_\omega^\sigma$ si $\omega < \tau < \sigma$.

(2) Un *système de coefficients G-équivariant* est un système de coefficients Γ muni des isomorphismes $\alpha_g : V_\sigma \xrightarrow{\sim} V_{g \cdot \sigma}$, $\forall g \in G$, $\sigma \in \mathcal{BT}$ compatibles avec les φ_τ^σ, et $\alpha_1 = \mathrm{Id}$, $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$.

(3) Un système de coefficients G-équivariant est dit *de niveau 0*, si pour tout sommet x de $\mathcal{BT}$ et tout simplexe σ contenant x, le morphisme $\varphi_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ induit un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} V_x^{G_\sigma^+}$. On note $\mathrm{Coef}_0(G, R)$ la catégorie abélienne des systèmes de coefficients G-équivariants de niveau 0, dont les morphismes sont des morphismes G-équivariants de systèmes de coefficients.

Remarque.– On peut considérer les systèmes de coefficients G°-équivariants de niveau 0, où $G^\circ = \mathrm{Ker}(\mathrm{val}_K \circ \det : \mathrm{GL}_d(K) \to K^\times)$, car pour tout $\sigma \in \mathcal{BT}$, $G_\sigma^+ \subset G^\circ$. Ce sont les systèmes de coefficients satisfaisant la condition (2) de (2.1.2) pour tout $g \in G^\circ$ et la condition (3). Le système de coefficients $\sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$ que nous allons considérer dans §3 est un système de coefficients G°-équivariant de niveau 0.

Exemple.– L'exemple essentiel de système de coefficients de R-modules introduit par Schneider et Stuhler est le suivant : partant alors d'un RG-module lisse V, on définit un système de coefficients à valeurs dans la catégorie des R-modules :

– $\sigma \mapsto V^{U_\sigma^{(r)}}$.

– $(\tau < \sigma) \mapsto (V^{U_\sigma^{(r)}} \hookrightarrow V^{U_\tau^{(r)}})$ dont l'existence est assurée par l'inclusion $U_\tau^{(r)} \subset U_\sigma^{(r)}$.

Bien sûr, le système de coefficients ainsi obtenu est G-équivariant.

(2.1.3) Plus généralement, on peut considérer la catégorie abélienne des systèmes de coefficients associés à un système d'idempotents $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ satisfaisant les conditions de [MS10, Def. 2.1]. Plus précisément, pour chaque sommet $x \in \mathcal{BT}$, e_x est un idempotent dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G_x, R) \hookrightarrow \mathcal{H}(G, R)$. On considère l'ensemble des systèmes d'idempotents $e = (e_x)_{x \in \mathcal{BT}^\circ}$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

– (a) e_x et e_y commutent pour deux sommets adjacents x, y.

– (b) Soient x, y, z trois sommets avec $z \in H(x, y)$ et z, x adjacents, on a $e_x e_z e_y = e_x e_y$.

– (c) $e_{gx} = g e_x g^{-1}$, $\forall g \in G,\ x \in \mathcal{BT}^\circ$.

Pour un simplexe $\sigma \in \mathcal{BT}$, notons

$$e_\sigma := \prod_{\substack{x \in \mathcal{BT}^\circ \\ x \in \sigma}} e_x$$

qui est un idempotent dans $\mathcal{H}(G, R)$ bien défini d'après (a). Pour la suite, on demande de plus que le système d'idempotents satisfait une condition supplémentaire :

– (d) Pour tout sommet x et tout simplexe σ contenant x, $e_\sigma \in \mathcal{H}(G_x, R)$.

Remarque.– (i) Soient $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ un système d'idempotents satisfaisant les conditions (a)-(c) de (2.1.3), et V un RG-module lisse. Alors, le foncteur $\sigma \mapsto e_\sigma(V)$ définit un système de coefficients G-équivariant (*cf.* [MS10]).

(ii) Notons $e_{U_\sigma^{(r)}} := \frac{\chi_{U_\sigma^{(r)}}}{\mu(U_\sigma^{(r)})}$ l'idempotent associé au sous-groupe compact ouvert $U_\sigma^{(r)}$. Le système d'idempotents $(e_{U_\sigma^{(r)}})_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ satisfait les conditions (a)-(d), voir [MS10, Section 2.2].

(iii) Supposons que l'on se donne un système d'idempotents $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ satisfaisant les conditions (a)-(c). S'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que pour tout sommet x et tout simplexe σ contenant x, on ait

$$e_\sigma = e_{U_\sigma^{(r)}} e_x,$$

alors $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ satisfait la condition (d).

(2.1.4) Définition.– Soit $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ un système d'idempotents satisfaisant les conditions (a)-(d) de (2.1.3). *Un e-système de coefficients* est un système de coefficients tel que pour tout $x \in \mathcal{BT}^\circ$ et tout simplexe σ contenant x, le morphisme $\varphi_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ induit un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$. Notons que la condition (d) assure que $e_\sigma \in \mathcal{H}(G_x, R)$ agit sur V_x. On a comme précédemment une notion de e-système de coefficients G-équivariant, et on note $\mathrm{Coef}_e(G, R)$ la catégorie abélienne de

e-systèmes de coefficients G-équivariants, dont les morphismes sont des morphismes G-équivariants de systèmes de coefficients.

(2.1.5) Pour former le complexe de chaîne cellulaire associé à un sous complexe Σ, on munit chaque simplexe σ d'une orientation (*cf.* [MS10, (1.1.2)]) qui induit une orientation sur chaque sous facette de σ. On définit

$$\varepsilon_{\tau\sigma} := \begin{cases} 1, & \text{si } \tau < \sigma \text{ et l'orientation sur } \tau \text{ coïncide avec celle induite par } \sigma\,; \\ -1, & \text{si } \tau < \sigma \text{ et l'orientation sur } \tau \text{ est opposée à celle induite par } \sigma\,; \\ 0, & \text{si } \tau \text{ n'est pas une facette de } \sigma. \end{cases}$$

Soient $\Gamma = (V_\sigma, \varphi_\tau^\sigma)$ un système de coefficients et Σ un sous complexe de $\mathcal{BT}$, on les associe un *complexe de chaînes* sur Σ à coefficients Γ :

$$\mathcal{C}_*(\Sigma, \Gamma) := \mathcal{C}_c^{or}(\Sigma_{d-1}, \Gamma) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_c^{or}(\Sigma_0, \Gamma) \tag{2.1.6}$$

où $\mathcal{C}_c^{or}(\Sigma_q, \Gamma) := \bigoplus_{\sigma\in\Sigma,\ \dim\sigma = q} V_\sigma$, et la différentielle est donnée par

$$\partial\big((v_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}\big)_\tau := \sum_{\tau\in\Sigma} \varepsilon_{\tau\sigma}\varphi_\tau^\sigma(v_\sigma).$$

Nous noterons $H_*(\Sigma, \Gamma)$ les objets d'homologie du complexe $\mathcal{C}_*(\Sigma, \Gamma)$. Notons que G agit sur les facettes orientées de $\mathcal{BT}_q$ de sorte que si Γ est un système de coefficients G-équivariant, alors pour tout $q \geqslant 0$, $\mathcal{C}_c^{or}(\mathcal{BT}_q, \Gamma)$ possède une action de G.

(2.1.7) Soit $e = (e_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{BT}}$ un système d'idempotents satisfaisant les conditions (a)-(c) de (2.1.3). Notons $\mathrm{Rep}_e(G, R)$ la catégorie de $\mathcal{H}(G, R)$-modules non-dégénérés V tels que

$$V = \sum_{x\in\mathcal{BT}^\circ} e_x(V).$$

Grâce à [MS10, Thm. 3.1], $\mathrm{Rep}_e(G, R)$ est une sous-catégorie de Serre de la catégorie de $R[G]$-modules lisses. Lorsque $e = (e_{U_\sigma^{(r)}})_{\sigma\in\mathcal{BT}}$, on dit que c'est la catégorie de $R[G]$-modules lisses de niveau r, notée par $\mathrm{Rep}_r(G, R)$. Rappelons le théorème principal de [MS10] :

(2.1.8) Théorème.– *([MS10, Thm. 2.4]) Sous ces hypothèses, soient V un R-module tel que $e_\sigma \in \mathrm{End}(V)$ $\forall\sigma \in \mathcal{BT}$, et $\Gamma(V)$ le système de coefficients ($\sigma \mapsto e_\sigma(V)$) associé à V. Alors le complexe de chaînes*

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}_c^{or}(\mathcal{BT}_{d-1}, V) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} \mathcal{C}_c^{or}(\mathcal{BT}_0, V) \longrightarrow V \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (v_x)_{x\in\mathcal{BT}^\circ} \longmapsto \displaystyle\sum_{x\in\mathcal{BT}^\circ} v_x \end{array}$$

est une résolution de V.

Remarque.– (i) Lorsque $e = (e_{U_\sigma^{(r)}})_{\sigma\in\mathcal{BT}}$ et $V \in \mathrm{Rep}_r(G, R)$, ce théorème est démontré par Schneider et Stuhler [SS93].

(ii) Ce théorème est valable pour tout groupe réductif p-adique, *cf.* [SS97], [MS10].

Notre but est de démontrer le résultat suivant :

(2.1.9) THÉORÈME.– *Soient $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ un système d'idempotents satisfaisant les conditions (a)-(d) de (2.1.3), et Γ un e-système de coefficients sur $\mathcal{BT}$. Alors,*

(a) *en posant $\Sigma = \mathcal{BT}$, le complexe de chaînes 2.1.6 est exact sauf en degré* 0, *i.e. c'est une résolution de $H_0(\mathcal{BT}, \Gamma)$.*

(b) Γ *est isomorphe au système de coefficients* $(\sigma \mapsto e_\sigma(H_0(\mathcal{BT}, \Gamma)))$.

Si l'on considère la catégorie des e-systèmes de coefficients G-équivariants, on a le corollaire suivant :

(2.1.10) COROLLAIRE.– *Soit $e = (e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$ un système d'idempotents satisfaisant les conditions (a)-(d) de (2.1.3), le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}_e(G, R) &\longrightarrow \mathrm{Coef}_e(G, R) \\ V &\longmapsto \Gamma(V) \end{aligned}$$

admet un quasi-inverse $\Gamma \mapsto H_0(\mathcal{BT}, \Gamma)$, donc induit une équivalence de catégories.

Preuve : Si Γ est un système de coefficient G-équivariant, on sait que $H_0(\mathcal{BT}, \Gamma)$ est muni une action de G. Grâce au (b) du théorème précédent, on sait que le foncteur $V \mapsto \Gamma(V)$ est essentiellement surjectif. Donc il suffit de montrer que le foncteur est pleinement fidèle. Soient $V, W \in \mathrm{Rep}_e(G, R)$, Γ induit un morphisme

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathrm{Hom}_{RG}(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coef}_e}(\Gamma(V), \Gamma(W)) \\ f &\longmapsto (f_\sigma = f|_{e_\sigma(V)} : V_\sigma \to W_\sigma). \end{aligned}$$

Soit $f \in \mathrm{Hom}_{RG}(V, W)$ tel que $\Gamma(f) = 0$. Alors, $\forall x \in \mathcal{BT}^\circ$, $f|_{e_x(V)} = f_x = 0$. Par hypothèse que $V \in \mathrm{Rep}_e(G, R)$, donc $V = \sum_{x \in \mathcal{BT}^\circ} e_x(V)$. On en déduit que $f = 0$. Ceci démontre l'injectivité de Γ. Pour la surjectivité, soit $(g_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Coef}_e}(\Gamma(V), \Gamma(W))$, il induit un morphisme de complexes

$$g : \mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \Gamma(V)) \longrightarrow \mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \Gamma(W)).$$

D'après le théorème (2.1.8), le complexe

$$\mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \Gamma(V)) \to V \to 0 \quad (\text{resp. } \mathcal{C}_*(\mathcal{BT}, \Gamma(W)) \to W \to 0)$$

est une résolution de V (resp. W). Donc $H_0(g)$ induit un morphisme de RG-modules

$$H_0(g) : V \longrightarrow W.$$

Par définition, pour tout sommet $x \in \mathcal{BT}$, on a $H_0(g)|_{e_x(V)} = g_x$. Donc pour tout simplexe σ contenant x, on a

$$H_0(g)|_{e_\sigma(V)} = (H_0(g)|_{e_x(V)})|_{e_\sigma(V)} = g_x|_{e_\sigma(V)} = g_\sigma.$$

Ceci démontre la surjectivité. $\square$

2.2 Les applications locales

Désormais, on utilisera les alphabets latins $x, y, z \ldots$ pour des sommets de $\mathcal{BT}$, et les alphabets grecs $\sigma, \tau, \omega, \ldots$ pour des simplexes quelconques.

(2.2.1) Pour un e-système de coefficients $\Gamma = (V_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$, on identifie V_σ et $e_\sigma(V_x)$ via le morphisme canonique φ_x^σ lorsque $x \in \sigma$. Pour deux simplexes $\tau < \sigma$, $V_\sigma = e_\sigma(V_\tau)$, notons alors p_σ^τ le projecteur $V_\tau \twoheadrightarrow e_\sigma(V_\tau) = V_\sigma$. Nous allons définir une famille d'applications $\varepsilon_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ (x n'est pas forcément contenu dans σ) telle que $\forall \tau < \sigma$, l'application ε_x^σ se factorise par ε_x^τ, i.e. le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} V_\sigma \arrow[r, "\varepsilon_x^\sigma"] \arrow[d, hook, "\varphi_\tau^\sigma"'] & V_x \\ V_\tau \arrow[ur, "\varepsilon_x^\tau"'] & \end{tikzcd}$$

Tout d'abord, soient x, σ adjacents, on définit l'application ε_x^σ par la composée :

$$\varepsilon_x^\sigma : V_\sigma \xrightarrow{p_{[x,\sigma]}^\sigma} V_{[x,\sigma]} = e_{[x,\sigma]}(V_x) \hookrightarrow V_x$$

En particulier, si $x \in \sigma$, ε_x^σ est l'inclusion $V_\sigma = e_\sigma(V_x) \hookrightarrow V_x$ induite par φ_x^σ. On peut aussi définir un idempotent $\widetilde{\varepsilon_x^\sigma} \in \mathrm{End}(V_\sigma)$:

$$\widetilde{\varepsilon_x^\sigma} : V_\sigma \xrightarrow{p_{[x,\sigma]}^\sigma} V_{[x,\sigma]} = e_{[x,\sigma]}(V_\sigma) \hookrightarrow V_\sigma.$$

(2.2.2) Lemme.– *Soit y un autre sommet tel que x, y, σ soient adjacents, alors $\widetilde{\varepsilon_y^\sigma} \circ \widetilde{\varepsilon_x^\sigma} = \widetilde{\varepsilon_x^\sigma} \circ \widetilde{\varepsilon_y^\sigma}$.*

Preuve : L'application $\widetilde{\varepsilon_y^\sigma} \circ \widetilde{\varepsilon_x^\sigma}$ est la composée

$$V_\sigma \twoheadrightarrow e_{[y,\sigma]}(e_{[x,\sigma]}(V_\sigma)) \hookrightarrow V_\sigma$$

et l'application $\widetilde{\varepsilon_x^\sigma} \circ \widetilde{\varepsilon_y^\sigma}$ est la composée

$$V_\sigma \twoheadrightarrow e_{[x,\sigma]}(e_{[y,\sigma]}(V_\sigma)) \hookrightarrow V_\sigma.$$

Grâce à l'hypothèse de $(e_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{BT}}$, on a $e_{[x,\sigma]} e_{[y,\sigma]} = e_{[y,\sigma]} e_{[x,\sigma]}$, d'où l'énoncé du lemme. □

Soit maintenant y un sommet quelconque. On peut choisir un appartement A contenant x et y, et une chambre de Weyl fermée[2] C telle que $y \in x + C$.

(2.2.3) Lemme.– *L'enclos $H(x, y)$ est égal à $(x + C) \cap (y - C)$.*

Preuve : Rappelons que $H(x, y)$ est l'intersection de tous les appartements contenant x, y. Il est aussi égal à la réalisation géométrique de l'enveloppe convexe simpliciale de $\{x, y\}$, *cf.* [Far07, Annexe A. Prop. 29]. D'abord on sait que les ensembles $x + C$ et $y - C$ sont convexes, leur intersection $(x + C) \cap (y - C)$ est également convexe et contient x, y. Donc $H(x, y) \subset (x + C) \cap (y - C)$. Réciproquement, il suffit de montrer que pour tout sommet $z \in (x + C) \cap (y - C)$, z est contenu dans $H(x, y)$.

2. C est la clôture d'une chambre de Weyl.

Comme tout sommet de l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple associé à $\mathrm{GL}_d(K)$ est un point spécial [BT72], on peut alors supposer que x est l'origine de la donnée radicielle valuée, i.e. x est représentable par le réseau $[\mathcal{O}^d]$ de l'espace vectoriel K^d. Notons $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$ l'ensemble de racines simples associées à C, on a alors $\alpha_i(x) = 0,\ \forall i \in \{1, \dots, d-1\}$. Par hypothèse, on sait que pour tout $i \in \{1, \dots, d-1\}$, $\alpha_i(y) \geqslant \alpha_i(z) \geqslant 0$. Pour montrer que $z \in H(x, y)$, il suffit de montrer que pour toute racine affine α telle que $\alpha(x) \geqslant 0$ et $\alpha(y) \geqslant 0$, on a $\alpha(z) \geqslant 0$. Écrivons $\alpha = \sum \lambda_i \alpha_i + n$ où $n \in \mathbb{Z}$ et les λ_i sont tous positifs ou tous négatifs. Notons d'abord que $n \geqslant 0$, car $\alpha(x) \geqslant 0$ et $\alpha_i(x) = 0$. Si $\lambda_i \geqslant 0$, on a $\alpha(z) = \sum \lambda_i \alpha_i(z) + n \geqslant 0$. Si $\lambda_i \leqslant 0$, alors puisque $\alpha(y) = \sum \lambda_i \alpha_i(y) + n \geqslant 0$, on a aussi

$$\alpha(z) = \sum \lambda_i \alpha_i(z) + n = \sum \lambda_i \alpha_i(y) + n + \sum (-\lambda_i)(\alpha_i(y) - \alpha_i(z)) \geqslant 0.$$

$\square$

(2.2.4) Définition.– On dit qu'une suite finie de sommets différents $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m)$ est un *chemin tendu* de y vers x, si $z_0 = y$, $z_m = x$ et z_{i-1}, z_i sont adjacents de sorte que $z_i \in H(x, z_{i-1})\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

(2.2.5) Lemme.– **(a)** *Si $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m)$ est un chemin tendu, alors $(z_m, z_{m-1}, \dots, z_0)$ l'est aussi.*

(b) *L'entier m dans la définition ci-dessus ne dépend pas du choix de chemin tendu. On l'appelle la distance entre x et y, notée par $\rho(x, y)$.*

(c) *Soit $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_m)$ un chemin tendu, alors $\forall 0 \leqslant k \leqslant m$, $(z_0, \dots, z_k)$ (resp. $(z_k, \dots, z_m)$) est un chemin tendu.*

(d) *Soient $(z_0, \dots, z_k)$ et $(z_k, \dots, z_m)$ deux chemins tendus et $z_k \in H(z_0, z_m)$, alors $(z_0, \dots, z_k, \dots, z_m)$ est un chemin tendu.*

Preuve : (a) Choisissons un appartement A contenant z_0 et z_m, et une chambre de Weyl fermée C telle que $z_0 \in z_m + C$. Par définition, on a $z_i \in H(z_{i-1}, z_m) = (z_m + C) \cap (z_{i-1} - C)$ *cf.* (2.2.3). Ceci entraîne que $z_{i-1} \in H(z_0, z_i)$, car $z_{i-1} \in z_0 - C$. Autrement dit, $(z_m, z_{m-1}, \dots, z_0)$ est un chemin tendu.

(b) Le choix d'un appartement A comme ci-dessus nous fournit un tore maximal déployé T dans G tel que la réalisation géométrique $|A|$ de A s'identifie à l'espace euclidean $X_*(T) \otimes \mathbb{R} / (X_*(Z(G)) \otimes \mathbb{R})$, où $Z(G)$ désigne le centre de G. On peut supposer que T s'identifie au sous-groupe de matrices diagonales. On peut supposer de plus que les racines simples $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$ associées à la chambre de Weyl fermée C que l'on a choisie sont de la forme $\alpha_i(t) = t_i / t_{i+1}$, où $t = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_d)$. Notons $\{\omega_1, \dots, \omega_{d-1}\}$ l'ensemble des copoids fondamentaux associés à Δ, où $\omega_i(a) = \mathrm{diag}(\underbrace{a, \dots, a}_{i}, 1 \dots, 1)$, $\forall a \in K^\times$. Supposons de plus que le sommet x est l'origine de cet espace affine $X_*(T) \otimes \mathbb{R} / (X_*(Z(G)) \otimes \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d-1}$. Considérons les cocaractères $\lambda_k : K^\times \to T$ tels que $(\lambda_k(a))_{ij} = a$ si $i = j = k$ et $(\lambda_k(a))_{ij} = 1$ si $i = j \neq k$. Alors $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}$ induisent une base de $|A| \cong \mathbb{R}^{d-1}$, sous laquelle ω_i s'identifie au vecteur $\omega_i := (\underbrace{1, \dots, 1}_{i}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{d-1}$, et la chambre vectorielle $x + C$ s'identifie au cône $\mathbb{R}_+ \omega_1 + \dots + \mathbb{R}_+ \omega_{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Ainsi le sommet y s'identifie à un point $(a_1, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$, où $a_1 \geqslant \dots \geqslant a_{d-1} \geqslant 0$, et la chambre vectorielle $y - C$ s'identifie au cône $(a_1, \dots, a_{d-1}) + \mathbb{R}_- \omega_1 + \dots +$

$\mathbb{R}_-\omega_{d-1} \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Un sommet $z \in H(x,y)$ adjacent à y s'identifie alors à un point $(b_1,\dots,b_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ satisfaisant $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_{d-1} \geqslant 0$ et $1 \geqslant a_1 - b_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{d-1} - b_{d-1} \geqslant 0$. Donc on voit que le nombre m est égal à a_1, indépendant du choix de chemin tendu.

(c) Par définition, on sait que $(z_k, z_{k+1}, \dots, z_m)$ est un chemin tendu. D'après le lemme (2.2.3), $z_k \in H(z_{k-1}, z_m) = (z_m + C) \cap (z_{k-1} - C)$, on a $z_{k-1} \in z_k + C$. On en déduit par récurrence que $z_i \in z_k + C,\ \forall 0 \leqslant i \leqslant k-1$. De plus, notons que $z_i \in H(z_{i-1}, z_m) = (z_m + C) \cap (z_{i-1} - C)$, on a alors que $z_i \in z_{i-1} - C$. Donc $z_i \in (z_k + C) \cap (z_{i-1} - C) = H(z_{i-1}, z_k),\ \forall 0 \leqslant i \leqslant k-1$. C'est-à-dire $(z_0, z_1, \dots, z_k)$ est un chemin tendu.

(d) Il s'agit de montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,k\}$, $z_i \in H(z_{i-1}, z_m)$. Par hypothèse, $z_k \in (z_m + C) \cap (z_0 - C)$, donc $z_0 \in z_k + C$. Pour chaque i, $z_i \in H(z_{i-1}, z_k) = (z_k + C) \cap (z_{i-1} - C)$, donc $z_i \in z_k + C \subset z_m + C$. On en déduit que $z_i \in (z_{i-1} - C) \cap (z_m + C) = H(z_{i-1}, z_m)$. □

La preuve du lemme précédent donne également l'existence d'un chemin tendu de y vers x, on définit alors ε_x^y comme une composition de $\varepsilon_{z_i}^{z_{i-1}}$:

$$\varepsilon_x^y := \varepsilon_x^{z_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1}^y.$$

(2.2.6) Proposition.– *Cette définition ne dépend pas du choix de chemin tendu.*

Preuve : On démontre cette proposition par récurrence sur $m = \rho(x,y)$. Lorsque $m = 1$, on n'a qu'un seul chemin tendu reliant x et y, l'énoncé est trivial. Si $m > 1$, soit $(z'_0 = y, \dots, z'_m = x)$ un autre chemin tendu de y vers x. On peut supposer que $z'_i \neq z_i\ \forall i \in \{1,\dots,m-1\}$. Sinon, il existe un entier $k \in \{1,\dots,m-1\}$ tel que $z_k = z'_k$. Par le lemme (2.2.5) (c), le chemin $(y = z_0, z_1, \dots, z_k)$ (resp. $(y = z'_0, z'_1, \dots, z'_k = z_k)$) est un chemin tendu de y vers z_k, et le chemin $(z_k, z_{k+1}, \dots, z_m = x)$ (resp. $(z_k = z'_k, z'_{k+1}, \dots, z'_m = x)$) est un chemin tendu de y vers z_k. Par récurrence, on a

$$\varepsilon_x^{z_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_{k+1}}^{z_k} = \varepsilon_x^{z'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z'_{k+1}}^{z_k} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{z_k}^{z_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1}^y = \varepsilon_{z_k}^{z'_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z'_1}^y.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{z_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1}^y &= \varepsilon_x^{z_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_{k+1}}^{z_k} \circ \varepsilon_{z_k}^{z_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1}^y \\ &= \varepsilon_x^{z'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z'_{k+1}}^{z_k} \circ \varepsilon_{z_k}^{z'_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z'_1}^y = \varepsilon_x^{z'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z'_1}^y.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $z'_i \neq z_i\ \forall i \in \{1,\dots,m-1\}$. D'après [MS10, Lemme 2.9], y, z_1, z'_1 sont adjacents. Si $m = \rho(x,y) = 2$, on a par la condition (b) dans (2.1.3) que $e_x e_{z_1} e_y = e_x e_y = e_x e_{z'_1} e_y$. On sait alors que le morphisme $\varepsilon_x^{z_1} \varepsilon_{z_1}^y$ est donné par la composée :

$$\begin{aligned}V_y \xrightarrow{p^y_{[y,z_1]}} V_{[y,z_1]} = e_{[y,z_1]}(V_{z_1}) \xrightarrow{p^{z_1}_{[x,z_1]}} e_{[x,z_1]} e_{[y,z_1]}(V_{z_1}) = e_x e_{[z_1,z'_1]} e_{[y,z_1]}(V_{z_1}) = e_x e_{[z_1,z'_1]}(V_{[y,z_1,z'_1]}) \\ \hookrightarrow e_x e_{[z_1,z'_1]}(V_{[z_1,z'_1]}) = V_{[x,z_1,z'_1]} \hookrightarrow V_x.\end{aligned}$$

On voit qu'il s'identifie à la composée :

$$V_y \xrightarrow{p^y_{[y,z_1,z'_1]}} V_{[y,z_1,z'_1]} \hookrightarrow V_{[z_1,z'_1]} \xrightarrow{p^{[z_1,z'_1]}_{[z_1,z'_1,x]}} V_{[x,z_1,z'_1]} \hookrightarrow V_x.$$

De la même manière, on sait que ceci s'identifie également au morphisme $\varepsilon_x^{z'_1} \varepsilon_{z'_1}^y$.

Si $m = \rho(x,y) \geqslant 3$, grâce au lemme qui suit, il existe un sommet $z \in H(x,z_1) \cap H(x,z_1')$ différent de x tel que $z_1', z_1 \in H(z,y)$. Posons un chemin tendu de z_1 vers z (resp. z_1' vers z), alors $(y, z_1, \ldots, z)$ (resp. $(y, z_1', \ldots, z)$) est un chemin tendu de y vers z, et $(z_1, \ldots, z, x)$ (resp. $(z_1', \ldots, z, x)$) est un chemin tendu de z_1 (resp. z_1') vers x grâce au lemme (2.2.5) (d). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{z_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1}^y = \varepsilon_x^{z_1} \circ \varepsilon_{z_1}^y = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^{z_1} \circ \varepsilon_{z_1}^y = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^y \\ = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^{z_1'} \circ \varepsilon_{z_1'}^y = \varepsilon_x^{z_1'} \circ \varepsilon_{z_1'}^y = \varepsilon_x^{z_{m-1}'} \circ \cdots \circ \varepsilon_{z_1'}^y.\end{aligned}$$

On conclut par récurrence. $\square$

(2.2.7) Lemme.– *Soient x, y, z trois sommets tels que y, z adjacents et* $\min\{\rho(x,y), \rho(x,z)\} \geqslant 2$, *alors il existe un sommet w différent de x tel que $w \in H(x,y) \cap H(x,z)$ et x, w soient adjacents.*

Preuve : Choisissons un appartement A contenant x et $[y,z]$, et une chambre de Weyl fermée C tel que $[y,z] \subset x + C$. Identifions $|A|$ à l'espace affine $\mathbb{R}^{d-1}$ et x au point d'origine comme dans la preuve du lemme (2.2.5). Comme y, z sont adjacents, on peut supposer que y (resp. z) s'identifie au point $(a_1, \ldots, a_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ (resp. $(b_1, \ldots, b_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$) tel que $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_{d-1} \geqslant 0$ (resp. $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_{d-1} \geqslant 0$) et $|a_i - b_i| \leqslant 1,\ \forall i$. Notons $r \in \{1, \ldots, d-1\}$ (resp. $s \in \{1, \ldots, d-1\}$) l'entier tel que $a_r \geqslant 2$ et $a_{r+1} \leqslant 1$ (resp. $b_s \geqslant 2$ et $b_{s+1} \leqslant 1$). On peut alors prendre $w \in A$ le sommet associé au point $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{\min\{r,s\}}, 0 \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{d-1}$. $\square$

Le corollaire suivant est un analogue « local » de la condition (b) dans [MS10, Def. 2.1].

(2.2.8) Corollaire.– *Soient x, y, z trois sommets tels que $z \in H(x,y)$, alors $\varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^y = \varepsilon_x^y$.*

Preuve : D'après le lemme (2.2.5) (d), si l'on choisit un chemin tendu de y vers z, et un chemin tendu de z vers x, alors le chemin composé est un chemin tendu de y vers x. L'énoncé du corollaire découle du fait que ε_x^y ne dépend pas du choix de chemin tendu, *cf.* (2.2.6). $\square$

(2.2.9) Lemme.– *Soient x, y, z trois sommets et y, z adjacents. Alors on a*

(a) $\varepsilon_x^y \circ \varepsilon_y^{[y,z]} = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^{[y,z]}$.

(b) $p_{[y,z]}^y \circ \varepsilon_y^x = p_{[y,z]}^z \circ \varepsilon_z^x$.

Preuve : On démontre (a) par récurrence sur $m = \max\{\rho(x,y), \rho(x,z)\}$. Lorsque $m = 1$, x, y, z sont adjacents, on a par définition $\varepsilon_x^y \circ \varepsilon_y^{[y,z]} = \varepsilon_x^{[x,y,z]} \circ p_{[x,y,z]}^{[y,z]} = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^{[y,z]}$. Si $m > 1$, d'après le lemme (2.2.7), il existe un sommet $w \in H(x,y) \cap H(x,z)$ tel que $\rho(w,y) = \rho(x,y) - 1$ et $\rho(w,z) = \rho(x,z) - 1$. Par récurrence, on a $\varepsilon_w^y \circ \varepsilon_y^{[y,z]} = \varepsilon_w^z \circ \varepsilon_z^{[y,z]}$. En vertu du corollaire précédent, on obtient que

$$\varepsilon_x^y \circ \varepsilon_y^{[y,z]} = \varepsilon_x^w \circ \varepsilon_w^y \circ \varepsilon_y^{[y,z]} = \varepsilon_x^w \circ \varepsilon_w^z \circ \varepsilon_z^{[y,z]} = \varepsilon_x^z \circ \varepsilon_z^{[y,z]}.$$

L'assertion (b) peut être démontrée de la même manière, et on laisse le détail au lecteur. $\square$

(2.2.10) Maintenant, pour un simplexe quelconque σ, on définit l'application ε_x^σ de la manière suivante : choisissons un sommet $y \in \sigma$ et posons

$$\varepsilon_x^\sigma : V_\sigma \xrightarrow{\varepsilon_y^\sigma} V_y \xrightarrow{\varepsilon_x^y} V_x.$$

Lemme.– *Cette définition ne dépend pas du choix de y. En conséquence, soient $\tau < \sigma$ deux simplexes, on a $\varepsilon_x^\sigma = \varepsilon_x^\tau \circ \varphi_\tau^\sigma$ (voir (2.2.1)).*

Preuve : Soit y' un autre sommet de σ. D'après le lemme (2.2.9) (a), on a

$$\varepsilon_x^y \circ \varepsilon_y^\sigma = \varepsilon_x^y \circ \varepsilon_y^{[y,y']} \circ \varphi_{[y,y']}^\sigma = \varepsilon_x^{y'} \circ \varepsilon_{y'}^{[y,y']} \circ \varphi_{[y,y']}^\sigma = \varepsilon_x^{y'} \circ \varepsilon_{y'}^\sigma.$$

□

2.3 Les projecteurs $u_{\Sigma'}^\Sigma$

Soient Σ un sous complexe fini convexe de $\mathcal{BT}$, $\Gamma = (V_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{BT}}$ un e-système de coefficients. Fixons un sommet $x \in \Sigma$, et notons $\underline{V_x} := (\sigma \mapsto V_x, \varphi_x^\sigma = \mathrm{Id}_{V_x})$ le système de coefficients constant à valeurs dans V_x. Alors, les applications locales $\{\varepsilon_x^\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ induisent un morphisme de systèmes de coefficients, et donc un morphisme de complexes

$$\oplus_{\sigma\in\Sigma}\varepsilon_x^\sigma : \mathcal{C}_*(\Sigma, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}_*(\Sigma, \underline{V_x}),$$

et un morphisme sur les homologies $p_x^\Sigma := H_0(\oplus\varepsilon_x^\sigma) : H_0(\Sigma, \Gamma) \to H_0(\Sigma, \underline{V_x})$. Soit $\Sigma' \subset \Sigma$ un sous complexe fini convexe, notons

$$\oplus_{\sigma\in\Sigma'} \mathrm{Id}_{V_\sigma} : \mathcal{C}_*(\Sigma', \Gamma) \longrightarrow \mathcal{C}_*(\Sigma, \Gamma)$$

le morphisme des complexes de chaînes induit par $\{\mathrm{Id}_{V_\sigma}\}_{\sigma\in\Sigma'}$, et

$$i_{\Sigma'}^\Sigma := H_0(\oplus \mathrm{Id}_{V_\sigma}) : H_0(\Sigma', \Gamma) \to H_0(\Sigma, \Gamma).$$

(2.3.1) Lemme.– *On a $H_0(\Sigma, \underline{V_x}) = V_x$, et pour $y \in \Sigma^\circ$ la composée de morphismes d'homologies*

$$H_0(\{y\}, \Gamma) = V_y \xrightarrow{i_y^\Sigma} H_0(\Sigma, \Gamma) \xrightarrow{p_x^\Sigma} H_0(\Sigma, \underline{V_x}) = V_x$$

s'identifie à ε_x^y. En particulier, $p_x^\Sigma \circ i_x^\Sigma = \mathrm{Id}_{V_x}$.

Preuve : Comme Σ est fini convexe donc contractile, le complexe de chaînes $\mathcal{C}_*(\Sigma, \underline{V_x})$ est une résolution de V_x. Par définition de p_x^Σ, on voit que $p_x^\Sigma \circ i_y^\Sigma = \varepsilon_x^y$. Or, ε_x^x est l'identité sur V_x. On a $p_x^\Sigma \circ i_x^\Sigma = \mathrm{Id}_{V_x}$. □

Grâce au lemme précédent, V_x est un sous R-module de $H_0(\Sigma, \Gamma)$. Posons alors

$$e_x^\Sigma : H_0(\Sigma, \Gamma) \xrightarrow{p_x^\Sigma} V_x \xrightarrow{i_x^\Sigma} H_0(\Sigma, \Gamma).$$

C'est un idempotent de $H_0(\Sigma, \Gamma)$ d'image $i_x^\Sigma(V_x)$ (voir la proposition qui suit).

(2.3.2) Proposition.– *Nous avons les propriétés suivantes :*

(a) $H_0(\Sigma,\Gamma)=\sum_{x\in\Sigma^\circ} i_x^\Sigma(V_x)$.

(b) $e_x^\Sigma\circ e_x^\Sigma=e_x^\Sigma$, *i.e.* e_x^Σ *est un idempotent de* $H_0(\Sigma,\Gamma)$.

(c) *Si* $x,y\in\Sigma^\circ$ *sont adjacents, alors* $e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma=e_y^\Sigma\circ e_x^\Sigma$.

(d) *Si* $x,y,z\in\Sigma^\circ$, $z\in H(x,y)$ *et* z,x *sont adjacents, alors* $e_x^\Sigma\circ e_z^\Sigma\circ e_y^\Sigma=e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma$.

Preuve : (a) et (b) sont claires. Pour (c) (resp. (d)) il suffit de montrer que $\forall w\in\Sigma^\circ$, $e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma=e_y^\Sigma\circ e_x^\Sigma$ (resp. $e_x^\Sigma\circ e_z^\Sigma\circ e_y^\Sigma=e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma$) sur $i_w^\Sigma(V_w)$. (d) découle du corollaire (2.2.8). En effet, grâce au lemme précédent, on a

$$e_x^\Sigma\circ e_z^\Sigma\circ e_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma=i_x^\Sigma\circ p_x^\Sigma\circ i_z^\Sigma\circ p_z^\Sigma\circ i_y^\Sigma\circ p_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma=i_x^\Sigma\circ\varepsilon_x^z\circ\varepsilon_z^y\circ\varepsilon_y^w$$

et

$$e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma=i_x^\Sigma\circ p_x^\Sigma\circ i_y^\Sigma\circ p_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma=i_x^\Sigma\circ\varepsilon_x^y\circ\varepsilon_y^w.$$

En vertu du corollaire (2.2.8), on obtient l'égalité $e_x^\Sigma\circ e_z^\Sigma\circ e_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma=e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma$.

Pour (c), soit a un élément de V_w,

$$e_x^\Sigma\circ e_y^\Sigma\circ i_w^\Sigma(a)-e_y^\Sigma\circ e_x^\Sigma\circ i_w^\Sigma(a)=i_x^\Sigma\circ\varepsilon_x^y\circ\varepsilon_y^w(a)-i_y^\Sigma\circ\varepsilon_y^x\circ\varepsilon_x^w(a).$$

Notons $i_x'^\Sigma: V_x\to V_x\oplus V_y\oplus\bigoplus_{s\in\Sigma^\circ\setminus\{x,y\}}V_s$ (resp. $i_y'^\Sigma: V_y\to V_x\oplus V_y\oplus\bigoplus_{s\in\Sigma^\circ\setminus\{x,y\}}V_s$) l'immersion naturelle $u\mapsto(u,0,0\ldots)$ (resp. $v\mapsto(0,v,0\ldots)$). On a donc deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "i_x'^\Sigma"] \arrow[dr, "i_x^\Sigma"'] & \bigoplus_{s\in\Sigma^\circ}V_s \arrow[d, two heads] \\ & H_0(\Sigma,\Gamma) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} V_y \arrow[r, "i_y'^\Sigma"] \arrow[dr, "i_y^\Sigma"'] & \bigoplus_{s\in\Sigma^\circ}V_s \arrow[d, two heads] \\ & H_0(\Sigma,\Gamma) \end{tikzcd}$$

Il s'agit alors de montrer que $i_x'^\Sigma\circ\varepsilon_x^y\circ\varepsilon_y^w(a)-i_y'^\Sigma\circ\varepsilon_y^x\circ\varepsilon_x^w(a)\in\partial(\oplus_{\sigma\in\Sigma,\dim\sigma=1}V_\sigma)$. Considérons l'élément $b:=p_{[x,y]}^y\circ\varepsilon_y^w(a)=p_{[x,y]}^x\circ\varepsilon_x^w(a)\in V_{[x,y]}$ (*cf.* Lemme (2.2.9) (b)). Par définition, on a donc $\varphi_x^{[x,y]}(b)=\varphi_x^{[x,y]}\circ p_{[x,y]}^y\circ\varepsilon_y^w(a)=\varepsilon_x^y\circ\varepsilon_y^w(a)$ et $\varphi_y^{[x,y]}(b)=\varphi_y^{[x,y]}\circ p_{[x,y]}^x\circ\varepsilon_x^w(a)=\varepsilon_y^x\circ\varepsilon_x^w(a)$. Alors, la différence $i_x'^\Sigma\circ\varepsilon_x^y\circ\varepsilon_y^w(a)-i_y'^\Sigma\circ\varepsilon_y^x\circ\varepsilon_x^w(a)$ est égale à $\partial(b)$. Ceci démontre l'énoncé (c) du lemme. □

(2.3.3) Définition.– Soit σ un simplexe de Σ. Grâce à (c) de la proposition précédente, on peut définir un idempotent

$$e_\sigma^\Sigma:=\prod_{x<\sigma,x\in\Sigma^\circ}e_x^\Sigma\in\mathrm{End}(H_0(\Sigma,\Gamma)).$$

(2.3.4) Corollaire.– **(a)** *Soient* τ,σ *deux simplexes adjacents de* Σ, *alors* $e_\sigma^\Sigma\circ e_\tau^\Sigma=e_{[\sigma,\tau]}^\Sigma$.

(b) *Soient* σ,τ,ω *trois simplexes de* Σ *tels que* $\omega\in H(\sigma,\tau)$. *Alors* $e_\sigma^\Sigma\circ e_\omega^\Sigma\circ e_\tau^\Sigma=e_\sigma^\Sigma\circ e_\tau^\Sigma$.

Preuve : En vertu des propriétés données par la proposition (2.3.2), on peut adapter la stratégie de la démonstration de [MS10, Prop. 2.2] dans notre situation. On laisse les détails au lecteur. □

Comme dans [MS10, Thm. 2.12], on pose la définition suivante :

(2.3.5) Définition.– Soit $\Sigma' \subset \Sigma$ un sous complexe fini convexe de Σ, on définit un endomorphisme $u^{\Sigma}_{\Sigma'} \in \mathrm{End}(H_0(\Sigma, \Gamma))$ par la formule :

$$u^{\Sigma}_{\Sigma'} := \sum_{\sigma \in \Sigma'} (-1)^{\dim \sigma} e^{\Sigma}_{\sigma}.$$

(2.3.6) Proposition.– *L'endomorphisme $u^{\Sigma}_{\Sigma'}$ est un idempotent tel que*

$$\begin{aligned} u^{\Sigma}_{\Sigma'}(H_0(\Sigma, \Gamma)) &= \sum_{x \in \Sigma'^{\circ}} \mathrm{Im}\, e^{\Sigma}_{x} \\ \mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma'} &= \bigcap_{x \in \Sigma'^{\circ}} \mathrm{Ker}\, e^{\Sigma}_{x} \\ H_0(\Sigma, \Gamma) &= u^{\Sigma}_{\Sigma'}(H_0(\Sigma, \Gamma)) \oplus \mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma'} \end{aligned}$$

De plus, si $\Sigma' = \Sigma$, $\mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma} = \bigcap_{x \in \Sigma^{\circ}} \mathrm{Ker}\, e^{\Sigma}_{x} = 0$.

Preuve : Grâce au corollaire (2.3.4), la stratégie de la démonstration de [MS10, Thm. 2.12] s'applique. Si $\Sigma' = \Sigma$, $H_0(\Sigma, \Gamma) = \sum_{x \in \Sigma^{\circ}} \mathrm{Im}\, e^{\Sigma}_{x}$, donc d'après la proposition (2.3.2) (a), on a $\mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma} = 0$. □

(2.3.7) Corollaire.– *Soient Σ_+, Σ_- deux sous complexes finis convexes de Σ tels que $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$. Notons $\Sigma_0 := \Sigma_+ \cap \Sigma_-$ leur intersection qui est encore convexe. Alors $u^{\Sigma}_{\Sigma} = u^{\Sigma}_{\Sigma_+} + u^{\Sigma}_{\Sigma_-} - u^{\Sigma}_{\Sigma_0}$, $u^{\Sigma}_{\Sigma_+} u^{\Sigma}_{\Sigma_-} = u^{\Sigma}_{\Sigma_-} u^{\Sigma}_{\Sigma_+} = u^{\Sigma}_{\Sigma_0}$ et*

$$\begin{aligned} u^{\Sigma}_{\Sigma_+}(H_0(\Sigma, \Gamma)) \cap u^{\Sigma}_{\Sigma_-}(H_0(\Sigma, \Gamma)) &= u^{\Sigma}_{\Sigma_0}(H_0(\Sigma, \Gamma)) \\ \mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma_+} + \mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma_-} &= \mathrm{Ker}\, u^{\Sigma}_{\Sigma_0}. \end{aligned}$$

Preuve : On peut utiliser la stratégie de la preuve de [MS10, Corollary 2.13]. □

2.4 Démonstration du théorème (2.1.9)

Démontrons tout d'abord la première partie du théorème (2.1.9).

(2.4.1) Proposition.– *Soient Σ un sous complexe fini convexe de $\mathcal{BT}$ fixé et $\Sigma' \subset \Sigma$ un sous complexe convexe, alors*

(a) $H_n(\Sigma', \Gamma) = 0$ *pour tout* $n > 0$.

(b) *L'application* $i^{\Sigma}_{\Sigma'} : H_0(\Sigma', \Gamma) \longrightarrow H_0(\Sigma, \Gamma)$ *(voir 2.3) est injective d'image* $u^{\Sigma}_{\Sigma'}(H_0(\Sigma, \Gamma))$.

Preuve : Tout d'abord on démontre (b). Notons que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} H_0(\Sigma', \Gamma) \arrow[r, "i^{\Sigma}_{\Sigma'}"] \arrow[d, "p^{\Sigma'}_{x}"] & H_0(\Sigma, \Gamma) \arrow[d, "p^{\Sigma}_{x}"] \\ V_x \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & V_x. \end{tikzcd}$$

Soit $a \in H_0(\Sigma', \Gamma)$ tel que $i^{\Sigma}_{\Sigma'}(a) = 0$. Donc $p^{\Sigma'}_x(a) = p^{\Sigma}_x \circ i^{\Sigma}_{\Sigma'}(a) = 0,\ \forall x \in \Sigma'^{\circ}$. On en déduit que $e^{\Sigma'}_x(a) = i^{\Sigma'}_x \circ p^{\Sigma'}_x(a) = 0,\ \forall x \in \Sigma'^{\circ}$. Donc $a \in \bigcap_{x\in\Sigma'^{\circ}} \operatorname{Ker} e^{\Sigma'}_x = \{0\}$ (*cf.* (2.3.6)).

D'après la proposition (2.3.6), on a

$$\begin{aligned} u^{\Sigma}_{\Sigma'}(H_0(\Sigma,\Gamma)) &= \sum_{x\in\Sigma'^{\circ}} \operatorname{Im} e^{\Sigma}_x = \sum_{x\in\Sigma'^{\circ}} i^{\Sigma}_x(V_x) \\ &= \sum_{x\in\Sigma'^{\circ}} i^{\Sigma}_{\Sigma'} \circ i^{\Sigma'}_x(V_x) = i^{\Sigma}_{\Sigma'}\big(\sum_{x\in\Sigma'^{\circ}} i^{\Sigma'}_x(V_x)\big) \\ &= i^{\Sigma}_{\Sigma'}(u^{\Sigma'}_{\Sigma'} H_0(\Sigma',\Gamma)) = i^{\Sigma}_{\Sigma'} H_0(\Sigma',\Gamma). \end{aligned}$$

On démontre (a) par récurrence.

Lemme.– *Supposons que Σ ne soit pas un simplexe, et $\forall \Sigma' \subsetneqq \Sigma$ fini convexe la propriété* (a) *de la proposition soit vérifiée pour Σ'. Alors elle est vérifiée pour Σ.*

Preuve : Lorsque Σ n'est pas un simplexe, grâce à [MS10, Section 2.5], on peut décomposer $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$ de sorte que Σ_+, Σ_- et leur intersection Σ_0 soient sous complexes finis convexes propres de Σ. En particulier, (a) est vérifiée pour Σ_+, Σ_- et Σ_0. Les complexes de chaînes associés forment une suite exacte de complexes

$$\mathcal{C}_*(\Sigma_0,\Gamma) \rightarrowtail \mathcal{C}_*(\Sigma_+,\Gamma) \oplus \mathcal{C}_*(\Sigma_-,\Gamma) \twoheadrightarrow \mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma),$$

dont la suite exacte longue d'homologie du type Mayer-Vietoris associée implique que $H_n(\Sigma,\Gamma) = 0$ pour $n \geqslant 2$. De plus, l'injectivité de l'application $H_0(\Sigma_0,\Gamma) \xrightarrow{i^{\Sigma_+}_{\Sigma_0}} H_0(\Sigma_+,\Gamma)$ implique que $H_1(\Sigma,\Gamma) = 0$. Donc (a) est vérifiée pour Σ. $\square$

Il nous reste à traiter le cas où Σ est un simplexe. Soit Σ un simplexe, rappelons que pour $x \in \Sigma^{\circ}$ et $\sigma \subset \Sigma$ un sous simplexe, on a défini un idempotent $\widetilde{\varepsilon^{\sigma}_x} \in \operatorname{End}(V_\sigma)$ satisfaisant $\widetilde{\varepsilon^{\sigma}_x} \circ \widetilde{\varepsilon^{\sigma}_y} = \widetilde{\varepsilon^{\sigma}_y} \circ \widetilde{\varepsilon^{\sigma}_x}$ (voir le lemme (2.2.2)). Posons comme [MS10, (2.5)] des idempotents

$$\varepsilon^{\sigma,0}_I := \prod_{x\in I} \widetilde{\varepsilon^{\sigma}_x} \prod_{x\notin I}(1 - \widetilde{\varepsilon^{\sigma}_x}) \in \operatorname{End}(V_\sigma)$$

pour un sous-ensemble I de Σ°. On a comme dans *loc. cit.*

– $\varepsilon^{\sigma,0}_I(V_\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } \sigma^{\circ} \nsubseteq I\,; \\ \varepsilon^{\sigma,0}_I(V_x) \text{ pour un sommet } x \in I, & \text{si } \sigma^{\circ} \subset I. \end{cases}$

– $\mathrm{Id}_{V_\sigma} = \sum_{I\subset\Sigma^{\circ}} \varepsilon^{\sigma,0}_I \in \operatorname{End}(V_\sigma)$ et $\varepsilon^{\sigma,0}_I \varepsilon^{\sigma,0}_J = 0$ si $I \neq J$.

Notons $\varepsilon^0_I := \oplus_\sigma \varepsilon^{\sigma,0}_I \in \operatorname{End}(\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma))$ commutant avec la différentielle. On en déduit une décomposition

$$\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma) = \bigoplus_{I\subset\Sigma^{\circ}} \varepsilon^0_I(\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma)).$$

Si $I = \emptyset$, $\varepsilon^0_I(\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma)) = 0$. Si $I \neq \emptyset$, le complexe de chaînes $\varepsilon^0_I(\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma))$ calcule l'homologie du sous complexe Σ_I de Σ engendré par I à valeurs constants $\varepsilon^0_I(V_x)$, pour un sommet quelconque x contenu dans I. Comme Σ_I est contractile, $\varepsilon^0_I(\mathcal{C}_*(\Sigma,\Gamma))$ est une résolution de $\varepsilon^0_I(V_x)$. Ceci entraîne que $H_n(\Sigma,\Gamma) = 0$ pour $n \geqslant 1$. $\square$

Maintenant, on peut montrer que $\mathcal{C}_*(\mathcal{BT},\Gamma)$ est une résolution de $H_0(\mathcal{BT},\Gamma)$ (*cf.* [MS10]). Posons $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de sous complexes finis convexes telle que $\mathcal{BT}=\bigcup_n \Sigma_n$ et $\mathcal{C}_*(\mathcal{BT},\Gamma)=\varinjlim \mathcal{C}_*(\Sigma_n,\Gamma)$. D'après ce qui précède, on sait que pour chaque n, le complexe

$$\mathcal{C}_*(\Sigma_n,\Gamma)\longrightarrow H_0(\Sigma_n,\Gamma)\longrightarrow 0$$

est exact. Or, la limite inductive préserve l'exactitude dans la catégorie de R-modules. On a alors que $\mathcal{C}_*(\mathcal{BT},\Gamma)$ est une résolution de $\varinjlim H_0(\Sigma_n,\Gamma)$. C'est-à-dire $H_n(\mathcal{BT},\Gamma)=0$ pour $n\geqslant 1$ et $H_0(\mathcal{BT},\Gamma)=\varinjlim H_0(\Sigma_n,\Gamma)$. Ceci entraîne la première partie du théorème.

(2.4.2) On démontre la seconde partie du théorème (2.1.9). Soit x un sommet quelconque. Notons que pour $\Sigma'\subset\Sigma$ deux complexes finis convexes contenant x, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "i_x^{\Sigma'}"] \arrow[dr, "i_x^{\Sigma}"'] & H_0(\Sigma',\Gamma) \arrow[d, "i_{\Sigma'}^{\Sigma}"] \\ & H_0(\Sigma,\Gamma) \end{tikzcd}$$

Ceci induit une injection $i_x : V_x\to H_0(\mathcal{BT},\Gamma)$.

Lemme.– *Soient x,y deux sommets adjacents, alors on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} V_x \arrow[r, "i_x"] \arrow[d, "\varepsilon_y^x"'] & H_0(\mathcal{BT},\Gamma) \arrow[d, "e_y"] \\ V_y \arrow[r, "i_y"] & H_0(\mathcal{BT},\Gamma) \end{tikzcd}$$

Preuve : La démonstration suit la ligne de la démonstration de (2.3.2) (c). Notons $i'_x : V_x\to V_x\oplus V_y\oplus\bigoplus_{s\in\mathcal{BT}^\circ\setminus\{x,y\}}V_s$ l'injection naturelle $u\mapsto(u,0,0\ldots)$, et $i'_y : V_y\to V_x\oplus V_y\oplus\bigoplus_{s\in\mathcal{BT}^\circ\setminus\{x,y\}}V_s$ l'injection naturelle $v\mapsto(0,v,0\ldots)$ telles que $i_x(u)=f(i'_x(u))$ et $i_y(v)=f(i'_y(v))$ où f est l'application canonique $f:\bigoplus_{s\in\mathcal{BT}^\circ}V_s\twoheadrightarrow H_0(\mathcal{BT},\Gamma)$.

Lorsque $x=y$, on a $e_x(i'_x(a))=i'_x(a),\ \forall a\in V_x$. C'est-à-dire, $i_x\circ\varepsilon_x^x=e_x\circ i_x$.

Lorsque $x\neq y$, soit a un élément de V_x, il s'agit de montrer que

$$e_y(i'_x(a))-i'_y(\varepsilon_y^x(a))\in\partial(\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{BT}_1}V_\sigma).$$

Par définition, on a

$$e_y(i'_x(a))-i'_y(\varepsilon_y^x(a))=e_ye_x(i'_x(a))-i'_y(\varepsilon_y^x(a))=(e_{[x,y]}(a),-\varepsilon_y^x(a),0\ldots).$$

Posons $b:=p_{[x,y]}^x(a)\in V_{[x,y]}$, alors $e_{[x,y]}(a)=\varphi_x^{[x,y]}(b)$ et $\varepsilon_y^x(a)=\varphi_y^{[x,y]}(b)$. On en déduit que $(e_{[x,y]}(a),-\varepsilon_y^x(a),0\ldots)$ appartient à $\partial(\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{BT}_1}V_\sigma)$. $\square$

D'après ce qui précède, le morphisme i_x se factorise par $e_x(H_0(\mathcal{BT},\Gamma))$. Soit σ un simplexe contenant x, $i_\sigma := i_x|_{e_\sigma(V_x)}$ envoie $\varphi_x^\sigma(V_\sigma)=e_\sigma(V_x)$ dans $e_\sigma(H_0(\mathcal{BT},\Gamma))$, et il ne dépend pas du choix de sommet contenu dans σ. Donc les morphismes $\{i_\sigma\}_{\sigma\in\mathcal{BT}}$ induisent un morphisme de systèmes de coefficients

$$\Gamma \longrightarrow (\sigma \mapsto e_\sigma(H_0(\mathcal{BT},\Gamma)))_{\sigma\in\mathcal{BT}}.$$

En tenant compte du fait que $H_0(\mathcal{BT},\Gamma) = \sum_{y\in\mathcal{BT}^\circ} i_y(V_y)$, il suffit de montrer que $\forall y \in \mathcal{BT}^\circ$, $e_\sigma(i_y(V_y)) \subset i_x(V_\sigma)$. Prenons un chemin tendu $z_0 = y, \ldots, z_m = x$ de y vers x, on a alors

$$e_\sigma(i_y(V_y)) = e_\sigma(e_y i_y(V_y)) = e_\sigma e_{z_m} e_y(i_y(V_y)) = \cdots = e_\sigma e_{z_m} \cdots e_{z_2} e_{z_1} e_y(i_y(V_y)).$$

D'après le lemme précédent, on a

$$\begin{aligned} e_\sigma e_{z_m} \cdots e_{z_2} e_{z_1} e_y(i_y(V_y)) &= e_\sigma e_{z_m} \cdots e_{z_2} i_{z_1}(\varepsilon^{y}_{z_1}(V_y)) \subset e_\sigma e_{z_m} \cdots e_{z_2} i_{z_1}(V_{z_1}) \\ &= e_\sigma e_{z_m} \cdots i_{z_2}(\varepsilon^{z_1}_{z_2}(V_{z_1})) \subset e_\sigma e_{z_m} \cdots i_{z_2}(V_{z_2}) \\ &\subset \cdots \subset e_\sigma i_x(V_x) = i_x(V_\sigma), \end{aligned}$$

car $e_\sigma \circ i_x = i_\sigma \circ \varepsilon^x_\sigma$. Ceci termine la démonstration du théorème.

3 La cohomologie du revêtement modéré de l'espace de Drinfeld

Dans cette section, on s'intéresse à la partie *non-supercuspidale* de la cohomologie du revêtement modéré de l'espace de Drinfeld (la partie *supercuspidale* a été traitée dans [Wan14]). Rappelons tout d'abord les résultats géométriques obtenus dans [Wan14].

3.1 Rappels sur le revêtement modéré de l'espace de Drinfeld

(3.1.1) Soient K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ d'anneau des entiers $\mathcal{O}$ et ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$ tels que $\mathcal{O}/\varpi \simeq \mathbb{F}_q$. On fixe K^{ca} une clôture algébrique de K et $\widehat{K^{ca}}$ son complété ϖ-adique. Soient D l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D et Π_D une uniformisante. Soient K_d une extension non-ramifiée de degré d de K contenue dans D d'anneau des entiers de $\mathcal{O}_{K_d}$. On note $\breve{K}$ le complété de l'extension non-ramifiée maximale $K^{nr} \subset K^{ca}$ de K, $\breve{\mathcal{O}}$ son anneau des entiers. On désigne W_K le groupe de Weil associé à K, et I_K le groupe d'inertie. Fixons un relèvement $\varphi \in \mathrm{Gal}(K^{ca}/K)$ de $(\mathrm{Frob}_q : x \mapsto x^{-q}) \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$.

Soit $d \geqslant 2$ un entier, notons Ω^{d-1}_K l'espace symétrique de Drinfeld [Dri74] de dimension $d-1$, défini comme le complémentaire de l'ensemble des hyperplans K-rationnels dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1}_K$. Il admet une structure d'espace rigide-analytique au sens de Raynaud-Berkovich. Notons $|\mathcal{BT}|$ la réalisation géométrique de l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple $\mathcal{BT}$ associé à $G := \mathrm{GL}_d(K)$, et rappelons que nous avons une *application de réduction* $\tau : \Omega^{d-1}_K \to |\mathcal{BT}|$. Pour $\sigma = \{s_0, \ldots, s_k\}$ avec s_i des sommets un k-simplexe de $\mathcal{BT}$, notons $|\sigma| \subset |\mathcal{BT}|$ sa facette associée et $|\sigma|^* := \bigcup_{\sigma\subset\sigma'} |\sigma'| = \bigcap_i |s_i|^*$. Donc, les données $\{\tau^{-1}(|\sigma|^*)\}_{\sigma\in\mathcal{BT}}$ fournissent un recouvrement admissible de Ω^{d-1}_K.

Deligne a construit un modèle semi-stable $\widehat{\Omega}^{d-1}_{\mathcal{O}}$ de Ω^{d-1}_K sur $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$ en recollant les modèles locaux $\{\widehat{\Omega}^{d-1}_{\mathcal{O},\sigma}\}_{\sigma\in\mathcal{BT}}$, tel que sa fibre spéciale géométrique $\overline{\Omega} := \widehat{\Omega}^{d-1}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} \overline{\mathbb{F}}_q$ est une réunion des composantes irréductibles paramétrées par les sommets de $\mathcal{BT}$ (*cf.* [Wan14, 2.1.5]) i.e. $\overline{\Omega} = \bigcup_{s\in\mathcal{BT}^\circ} \overline{\Omega}_s$. Soit

$\sigma = \{s_0, \ldots, s_k\}$, notons $\overline{\Omega}_\sigma := \bigcap_i \overline{\Omega}_{s_i}$, $\overline{\Omega}^0_\sigma := \overline{\Omega}_\sigma \backslash \bigcup_{s' \notin \sigma} \overline{\Omega}_{s'}$, et $j_\sigma : \overline{\Omega}^0_\sigma \hookrightarrow \overline{\Omega}_\sigma$ l'inclusion naturelle. Rappelons que Berkovich a défini dans ce cas un morphisme de spécialisation

$$\mathrm{sp} : \Omega^{d-1,ca}_K := \Omega^{d-1}_K \widehat{\otimes}_K \widehat{K^{ca}} \longrightarrow \overline{\Omega}$$

(qui est appelé le *morphisme de réduction* dans [Ber96, §1]).

(3.1.2) Dans [Dri76], Drinfeld a démontré que le schéma formel $\widehat{\Omega}^{d-1}_{\mathcal{O}} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \breve{\mathcal{O}}$ (pro)-représente l'espace de modules des $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux de dimension d et hauteur d^2 sur la catégorie de $\breve{\mathcal{O}}$-algèbres dans lesquelles ϖ est nilpotent. Notons $\mathfrak{X}$ le $\mathcal{O}_D$-module formel spécial universel, et posons $\Sigma_n := \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathcal{O}_D}(\Pi_D^{-n}\mathcal{O}_D/\mathcal{O}_D, \mathfrak{X}[\Pi_D^n]^{an})$, où $\mathfrak{X}[\Pi_D^n]$ désigne les Π_D^n-torsions. Par construction, Σ_n est un $(\mathcal{O}_D/\Pi_D^n\mathcal{O}_D)^\times$-torseur sur $\Omega^{d-1}_K \widehat{\otimes}_K \breve{K}$ muni d'une action de $G^\circ \times \mathcal{O}_D^\times \times I_K$, où

$$G^\circ := \mathrm{Ker}(\mathrm{val}_K \circ \det : \mathrm{GL}_d(K) \to K^\times).$$

Les morphismes de transitions $\Sigma_n \xrightarrow{\times \Pi_D} \Sigma_{n-1}$ sont $G^\circ \times \mathcal{O}_D^\times \times I_K$-équivariants. Lorsque $n = 1$, l'espace rigide-analytique $\Sigma_1^{ca} := \Sigma_1 \widehat{\otimes}_K \widehat{K^{ca}}$ est un $(\mathcal{O}_D/\Pi_D\mathcal{O}_D)^\times \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times$-torseur sur $\Omega^{d-1,ca}_K := \Omega^{d-1}_K \widehat{\otimes}_K \widehat{K^{ca}}$, que l'on appelle *le revêtement modéré* de l'espace de Drinfeld de dimension $d-1$.

Notons $p : \Sigma_1^{ca} \to \Omega^{d-1,ca}_K$ la mutiplication par Π_D, et $\nu := \tau \circ p$. On a un diagramme commutatif dont les flèches sont G°-équivariantes

$$\begin{tikzcd} \Sigma_1^{ca} \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "\nu"] & \\ \Omega^{d-1,ca}_K \arrow[r, "\tau"] & |\mathcal{BT}| \end{tikzcd}$$

et tel que Σ_1^{ca} admet un recouvrement des ouverts admissibles $\{\nu^{-1}(|\sigma|^*)\}_{\sigma \in \mathcal{BT}}$.

Fixons $\ell \neq p$ un nombre premier et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de $\mathbb{Q}_\ell$. Soient $\sigma' \subset \sigma$ deux simplexes de $\mathcal{BT}$, l'immersion ouverte $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|\sigma'|^*)$ induit un morphisme canonique :

$$H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \longrightarrow H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma'|^*), \Lambda), \ \forall q \geqslant 0$$

où $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Donc les données

$$\begin{cases} (\sigma \in \mathcal{BT}) \mapsto H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \\ (\sigma' \subset \sigma) \mapsto \big(H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \to H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma'|^*), \Lambda)\big) \end{cases}$$

définissent un système de coefficients G°-équivariant (voir (2.1.2)) à valeurs dans les Λ-modules que nous noterons simplement $\sigma \mapsto H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$. Ce système de coefficients calcule la cohomologie de Σ_1^{ca}.

(3.1.3) Fait– ([Dat06, Prop. 3.2.4]) Il existe une suite spectrale G°-équivariante

$$E_1^{pq} = \mathcal{C}^{or}_c(\mathcal{BT}_{(-p)}, \sigma \mapsto H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)) \Longrightarrow H^{p+q}_c(\Sigma_1^{ca}, \Lambda) \qquad (3.1.4)$$

dont la différentielle d_1^{pq} est celle du complexe de chaînes du système de coefficients $\sigma \mapsto H^q_c(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$.

On regroupe ci-dessous les résultats dans [Wan14, §2] (où Σ_1 est noté Σ).

(3.1.5) Théorème.– *Soient s un sommet de $\mathcal{BT}$ et σ un simplexe contenant s. Posons $\breve{K}^t = \breve{K}[\varpi_t]/(\varpi_t^{q^d-1} - \varpi)$ une extension modérément ramifiée de degré $q^d - 1$ de $\breve{K}$ d'anneau des entiers $\breve{\mathcal{O}}^t$, notons $\Sigma_{1,s}$ l'espace rigide $\Sigma_1 \times_{\Omega_K^{d-1}} \tau^{-1}(|s|)$, et considérons la normalisation de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},s}^{d-1}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\breve{\mathcal{O}}^t$ dans $\Sigma_{1,s} \otimes_{\breve{K}} \breve{K}^t$ que l'on notera $\widehat{\Sigma}_{1,s}^0$. Alors,*

(a) *$\widehat{\Sigma}_{1,s}^0$ est un $\mathbb{F}_{q^d}^\times$-torseur G_s-invariant au-dessus de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},s}^{d-1}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\breve{\mathcal{O}}^t$; et si l'on note $\overline{\Sigma}_{1,s}^0$ sa fibre spéciale, on en déduit un isomorphisme $I_K/I_{K(\varpi_t)} \cong \mathbb{F}_{q^d}^\times$-équivariant*

$$H^q(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) \cong H^q(\overline{\Sigma}_{1,s}^0, \Lambda), \ \forall q \geqslant 0.$$

De plus, il existe une donnée de descente à la Weil sur Σ_1^{ca} (qui est induite par $\Pi_D^{-1} \circ \varphi$ sur $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}$ cf. *(3.2.1)) telle qu'elle induit une donnée de descente* Fr *sur $\overline{\Sigma}_{1,s}^0$.*

(b) *Quitte à choisir une base d'un réseau qui représente s, on a un isomorphisme $G_s/G_s^+ \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$-équivariant $\overline{\Sigma}_{1,s}^0 \cong \mathrm{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} := \mathrm{DL}^{d-1} \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$ où DL^{d-1} désigne la sous-variété fermée de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d = \mathrm{Spec}\, \mathbb{F}_q[X_0, \ldots, X_{d-1}]$ définie par l'équation*

$$\det((X_i^{q^j})_{0 \leqslant i,j \leqslant d-1})^{q-1} = (-1)^{d-1}. \tag{3.1.6}$$

De plus, cet isomorphisme est compatible aux actions de $\mathbb{F}_{q^d}^\times$, où $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ agit sur $\mathrm{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ par $X_i \mapsto \zeta X_i, \ \forall \zeta \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$; la structure $\mathbb{F}_q$-rationnelle induite par Fr *sur $\overline{\Sigma}_{1,s}^0$ coïncide via cet isomorphisme avec celle induite par* $\mathrm{Frob} : X_i \mapsto X_i^q$ *sur $\mathrm{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$.*

(c) *L'immersion ouverte $\nu^{-1}(|s|) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s|^*)$ induit un isomorphisme :*

$$H^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} H^q(\nu^{-1}(|s|), \Lambda), \ \forall q \geqslant 0.$$

(d) *Soit σ un simplexe contenant s. Le morphisme canonique $H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \to H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$ provenant de l'immersion ouverte $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s|^*)$ induit un isomorphisme*

$$H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)^{G_\sigma^+}.$$

Preuve : (a) découle de [Wan14, 2.3.8, 2.3.9, 3.1.8]. (b) découle de [Wan14, 2.4.6, 2.5.3, 3.1.10]. L'assertion (c) est [Wan14, Théorème 2.2.3] qui est une conséquence de [Zhe08, Lemme 5.6]. La démonstration de (d) est donné dans [Wan14, Théorème 2.5.9] qui est une conséquence du théorème principal de [Wan13]. □

(3.1.7) Corollaire.– *Notons $\Gamma_q(\Lambda)$ le système de coefficients $\sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$. Alors, la suite spectrale 3.1.4 dégénère en E_1, et elle induit un isomorphisme*

$$H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_0(\mathcal{BT}, \Gamma_q(\Lambda)), \ \forall q \geqslant 0.$$

Preuve : D'après (d) du théorème précédent, on sait que $\Gamma_q(\Lambda)$ est un système de coefficients G°-équivariant de niveau 0 (*cf.* 2.1). Donc, l'énoncé du corollaire découle du théorème (2.1.9). □

3.2 La cohomologie à coefficients entiers

Dans cette partie, on considère la cohomologie à coefficients entiers, i.e. $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$. On introduit tout d'abord quelques notations. Posons $GDW := G \times D^\times \times W_K$, et $v : GDW \to \mathbb{Z}$ l'homorphisme qui envoie un élément (g, δ, w) vers l'entier $\mathrm{val}_K(\det(g^{-1})\mathrm{Nr}(\delta)\mathrm{Art}^{-1}(w)) \in \mathbb{Z}$, où $\mathrm{Nr} : D^\times \to K^\times$ désigne la norme réduite et $\mathrm{Art}^{-1} : W_K \twoheadrightarrow W_K^{ab} \to K^\times$ désigne la composée de l'inverse du morphisme d'Artin qui envoie l'uniformisante ϖ vers le Frobenius géométrique φ (*cf.* (3.1.1)). On désigne $(GDW)^0 := v^{-1}(0)$ le noyau de v. Pour $f|d$, on notera $[GDW]_f$ le sous-groupe distingué formé des éléments (g, δ, w) tels que $v(g, \delta, w) \in f\mathbb{Z}$. On considère G (resp. $D^\times$, W_K) comme un sous-groupe de GDW via l'inclusion naturelle, et on notera $[G]_f$ (resp. $[D]_f$, $[W_K]_f$) son intersection avec $[GDW]_f$. Dès que l'on identifie $K^\times$ au centre de G, on a $[GDW]_d = (GDW)^0\varpi^{\mathbb{Z}}$.

(3.2.1) On utilise le langage de Rapoport-Zink [RZ96] afin de définir une action du groupe GDW. Rappelons brièvement (voir [Wan14, 3.1.4] [Dat07, 3.1] pour plus des détails) que nous avons alors un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ isomorphe (non-canoniquement) à $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1} \times \mathbb{Z}$ de fibre générique géométrique $\mathcal{M}_{Dr,0}^{ca} \cong \Omega_K^{d-1,ca} \times \mathbb{Z}$. $\mathcal{M}_{Dr,0}$ possède un revêtement étale $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca} \cong \Sigma_1^{ca} \times \mathbb{Z}$ de groupe de Galois $\mathbb{F}_{q^d}^\times$. Il existe une action de GDW sur $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}$ telle que la composante $\Sigma_1^{ca} \times \{0\}$ soit stable sous $(GDW)^0$, et que $\varpi \in K^\times \subset G$ permute les composantes par $n \mapsto n + d$ sur $\mathbb{Z}$.

Posons

$$\mathbf{H}^q_{c,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} := H^q_c(\mathcal{M}^{ca}_{Dr,1}/\varpi^{\mathbb{Z}}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell), \ \forall q \geqslant 0.$$

D'après la description précédente,

$$\mathbf{H}^q_{c,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} = \mathrm{Ind}_{[GDW]_d}^{GDW} H^q_c(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell),$$

en déclarant que ϖ agit trivialement sur $H^q_c(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$.

En combinant avec les propriétés connues des variétés de Deligne-Lusztig, on déduit les corollaires suivants.

(3.2.2) Corollaire.– *Pour tout entier $q \geqslant 0$, le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G$-module $\mathbf{H}^q_{c,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ est admissible.*

Preuve : Il suffit de montrer que $H^q_c(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G^\circ$-module admissible. D'après (3.1.7), (2.1.9) (b) et (3.1.5) (a) (b),

$$H^q_c(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^{G_x^+} \xrightarrow{\sim} H_0(\mathcal{BT}, \Gamma_q(\overline{\mathbb{Z}}_\ell))^{G_x^+} \xrightarrow{\sim} H^q_c(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell),$$

pour tout sommet x de $\mathcal{BT}$. Notons que $\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ est une variété affine sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. D'où l'énoncé du corollaire. □

(3.2.3) Corollaire.– *Pour tout entier $q \geqslant 0$, le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module $\mathbf{H}^q_{c,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ est sans torsion et non-divisible.*

Preuve : Il suffit de montrer les même énoncés pour $H^q_c(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$. On démontre tout d'abord que le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module

$$C := H^q_c(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$$

est sans torsion. Ceci découle de [BR06, Lemma 3.9, Corollary 4.2]. En effet, notons $\overline{G} := \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, et notons $C_{\mathrm{tor}} \subset C$ la partie de torsions. Bonnafé et Rouquier définissent dans [BR06, 3.3.4] un élément $e(\psi) \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}$ tel que $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}e(\psi)$ soit un progénérateur de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}$, *cf. loc. cit.* Corollary 4.2 (voir [Bon11] pour une approache plus élémentaire). Le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}e(\psi)C_{\mathrm{tor}}$ est un sous-module de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}e(\psi)C$ qui est un $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$-module libre de type fini d'après [BR06, Lemma 3.9]. Donc $\overline{\mathbb{Z}}_\ell\overline{G}e(\psi)C_{\mathrm{tor}} = 0$. Ceci entraîne que $C_{\mathrm{tor}} = 0$ d'après [BR06, Corollary 4.2].

Notons que le $\overline{\mathbb{Z}}_\ell G^\circ$-module $H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ est engendré par

$$H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^{G_x^+} \cong H_c^q(\mathrm{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$$

pour tout sommet $x \in \mathcal{BT}$, i.e.

$$H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell) = \sum_{x \in \mathcal{BT}^\circ} H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)^{G_x^+}.$$

On en déduit que $H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ est sans torsion. En vertu de l'admissibilité dans le corollaire précédent, $H_c^q(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ est non-divisible. $\square$

3.3 Rappels sur les représentations elliptiques

Avant de donner des conséquences sur la partie non-supercuspidale de la cohomologie, nous rappelons les propriétés des représentions elliptiques de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ et de $\mathrm{GL}_d(K)$.

(3.3.1) Soit k un corps fini. Si $\overline{\pi}_i$ est une représentation de $\mathrm{GL}_{d_i}(k)$, $i = 1, \ldots, t$, on note $\times_i \overline{\pi}_i := \overline{\pi}_1 \times \cdots \times \overline{\pi}_t$ l'induite de la représentation $\overline{\pi}_1 \otimes \cdots \otimes \overline{\pi}_t$ du sous-groupe de Levi diagonal par blocs $\mathrm{GL}_{d_1}(k) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_t}(k)$ de $\mathrm{GL}_{d_1+\cdots+d_t}(k)$, le long du parabolique triangulaire par blocs supérieur correspondant $\overline{P}_{(d_1,\ldots,d_t)}$. Notons $R(\mathrm{GL}_d(k))$ le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de longueur finie de $\mathrm{GL}_d(k)$.

Définition.– Soient $k = \mathbb{F}_q$ et $f|d$. On dit qu'un caractère $\theta' : \mathbb{F}_{q^f}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ est *f-primitif*, si θ' ne se factorise pas par la norme $N_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_{q^{f'}}} : \mathbb{F}_{q^f}^\times \twoheadrightarrow \mathbb{F}_{q^{f'}}^\times$, $\forall f'|f$ et $f' \neq f$.

Un caractère f-primitif θ' correspond à une représentation irréductible cuspidale $\overline{\pi}_f(\theta')$ de $\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q)$ par la correspondance de Green. Notons $e := d/f$. Les sous-quotients irréductibles de $\times^e \overline{\pi}_f(\theta')$ (le produit e fois) sont en bijection avec les $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\times^e \overline{\pi}_f(\theta'))$-modules à droites simples. Howlett et Lehrer (voir [Dip85, 3.6]) ont défini un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\times^e \overline{\pi}_f(\theta')) \cong \mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e),$$

où $\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)$ désigne l'algèbre de Hecke du groupe symétrique $\mathfrak{S}_e$. Rappelons que $\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)$ possède une base $\{T_w \mid w \in \mathfrak{S}_e\}$ telle que

$$\begin{cases} T_v \cdot T_w = T_{vw}, \text{ si } l(vw) > l(w); \\ T_v T_w = q^f T_{vw} + (q^f - 1)T_w, \text{ sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des caractères irréductibles de $\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)$ est paramétré par l'ensemble des partitions de e : $(\lambda \vdash e) \mapsto S_\lambda(q^f)$, où $S_\lambda(q^f)$ est le module de Specht associé à λ [Dip85]. Si $q^f = 1$, $S_\lambda(1)$ est le module de Specht du groupe symétrique $\mathfrak{S}_e$. On en déduit une bijection

$$\lambda \mapsto \overline{\pi}_{\theta'}^{\lambda} := S_\lambda(q^f) \otimes_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} (\times^e \overline{\pi}_f(\theta'))$$

entre l'ensemble des partitions de e et l'ensemble des sous-quotients irréductibles de $\times^e \overline{\pi}_f(\theta')$.

Définition.– Une représentation irréductible $\overline{\pi}$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ sera dite *elliptique* si son image dans $R(\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q))$ n'est pas contenue dans le sous-groupe engendré par les induites paraboliques de représentations de sous-groupes de Levi propres.

(3.3.2) Lemme.– *Soit $\overline{\pi}$ une représentation irréductible elliptique de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Alors, il existe un unique triple (f, θ', i) avec $f|d$, θ' un caractère f-primitif de $\mathbb{F}_{q^f}^\times$ et $i \in \{0, \ldots, e-1\}$ avec $e := d/f$ tel que $\overline{\pi} \cong \overline{\pi}_{\theta'}^{i} := \overline{\pi}_{\theta'}^{(i+1,1^{e-1-i})}$.*

Preuve : D'après la classification dûe à Green des représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, le support cuspidal d'une représentation elliptique $\overline{\pi}$ est de la forme $((\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q))^{d/f}, \otimes^{d/f} \overline{\pi}_f(\theta'))$ pour un entier $f|d$ et un caractère f-primitif θ'. Donc, on a $\overline{\pi} \cong \overline{\pi}_{\theta'}^{\lambda}$ pour $\lambda \vdash e := d/f$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\overline{\mathfrak{B}}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_{nf}(\mathbb{F}_q)}$ la sous-catégorie pleine des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $\mathrm{GL}_{nf}(\mathbb{F}_q)$ de longueur finie engendrée par les sous-quotients de $\times^n \overline{\pi}_f(\theta')$. On a donc une famille d'équivalences de catégories

$$\begin{aligned}
\overline{\alpha}_{\mathbb{F}_q}^{n} : \overline{\mathfrak{B}}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_{nf}(\mathbb{F}_q)} &\longrightarrow \text{Mod-}\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_n) \\
V &\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{nf}(\mathbb{F}_q)}(\times^n \overline{\pi}_f(\theta'), V) \\
M \otimes_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_n)} \left(\times^n \overline{\pi}_f(\theta') \right) &\longleftarrow M
\end{aligned}$$

où Mod-$\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_n)$ désigne la catégorie des $\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_n)$-modules à droites de longueur finie.

Fait.– Soient $\mu := (\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_r)$ une partition de e et $\mathfrak{S}_\mu := \mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_r}$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_e$ associé à μ. Posons

$$x_\mu := \sum_{w \in \mathfrak{S}_\mu} T_w \in \mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\times^e \overline{\pi}_f(\theta')).$$

Alors, on a

(a) $x_\mu \mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e) = \mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_\mu)}^{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} 1$;

(b) $x_\mu(\times^e \overline{\pi}_f(\theta')) = \mathrm{Ind}_{\overline{P}_{\mu \cdot f}}^{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)} \overline{\sigma}$, où $\overline{P}_{\mu \cdot f}$ désigne le sous-groupe parabolique standard $\overline{P}_{(\mu_1 f, \ldots, \mu_r f)}$ de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, et $\overline{\sigma}$ est une représentation cuspidale du quotient réductif de $\overline{P}_{\mu \cdot f}$.

Preuve : (a) découle de [Dip85, 4.2]. (b) découle de [Jam86, 6.2]. Notons qu'en fait on connaît la forme précise de $\overline{\sigma}$. □

Rappelons que $S_\lambda(q^f)$ apparaît avec multiplicité un dans $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_\lambda)}^{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} 1$, et que dans le groupe de

Grothendieck de Mod-$\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)$, $[\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_\lambda)}^{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} 1] = [S_\lambda(q^f)] + \sum_{\mu>\lambda} m_{\lambda,\mu} S_\mu(q^f)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}[S_\lambda(q^f)] &= \sum_{\mu\geqslant\lambda} a_{\lambda,\mu}[\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_\mu)}^{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} 1] \\ &= \sum_{\mu\geqslant\lambda} a_{\lambda,\mu} x_\mu(\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\overline{\pi}_{\theta'}^{\lambda} = \sum_{\mu\geqslant\lambda} a_{\lambda,\mu} x_\mu(\times^e \overline{\pi}_f(\theta')).$$

Par définition, $\overline{\pi}_{\theta'}^{\lambda}$ est elliptique si et seulement si $a_{\lambda,(e)} \neq 0$. Par ailleurs, il exist un isomorphisme d'algèbres entre $\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)$ et l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_e]$ tel que $S_\mu(q^f)$ correspond à $S_\mu(1)$ et que $\mathrm{Ind}_{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_\mu)}^{\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e)} 1$ correspond à $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_e/\mathfrak{S}_\lambda]$ (*cf.* [Dip85, 4.3]). D'après [JK81, 2.3.17], $a_{\lambda,(e)} \neq 0$ si et seulement si λ est de la forme $(i+1, 1^{e-1-i})$ avec $i \in \{0, \dots, e-1\}$.

□

(3.3.3) Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Notons $R(\mathrm{GL}_d(K))$ le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de longueur finie de $\mathrm{GL}_d(K)$. Comme d'habitude, pour π_i une représentation de $\mathrm{GL}_{d_i}(K)$, $i = 1, \dots, t$, on note $\times_i \pi_i := \pi_1 \times \cdots \times \pi_t$ l'induite normalisée de la représentation $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t$ du sous-groupe de Levi diagonal par blocs $\mathrm{GL}_{d_1}(K) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{d_t}(K)$ de $\mathrm{GL}_{d_1+\cdots+d_t}(K)$, le long du parabolique triangulaire par blocs supérieur $P_{(d_1,\dots,d_t)}$.

Rappelons brièvement la classification des représentations elliptiques [Dat07, §2].

Définition.– Une représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_d(K)$ est *elliptique* si son image dans $R(\mathrm{GL}_d(K))$ n'est pas contenue dans le sous-groupe engendré par les induites paraboliques de représentations de sous-groupes de Levi propres.

Pour une représentation irréductible ρ de $D^\times$, il existe un unique diviseur $f \in \mathbb{N}$ de d et une unique représentation supercuspidale irréductible de $\mathrm{GL}_f(K)$ tels que $\mathrm{JL}(\rho)$ apparaisse dans l'induite parabolique standard normalisée $|\det|^{\frac{1-e}{2}}\pi_\rho \times \cdots \times |\det|^{\frac{e-1}{2}}\pi_\rho$, où $e := d/f$ et JL désigne la correspondance de Jacquet-Langlands induisant une bijection entre les représentations irréductibles de $D^\times$ et les séries discrètes de $\mathrm{GL}_d(K)$. Notons M_ρ le sous-groupe de Levi standard $(\mathrm{GL}_f(K))^e$ et $\overrightarrow{\pi_\rho} := |\det|^{\frac{1-e}{2}}\pi_\rho \otimes \cdots \otimes |\det|^{\frac{e-1}{2}}\pi_\rho$, alors la paire $(M_\rho, \overrightarrow{\pi_\rho})$ est un représentant du support cuspidal de $\mathrm{JL}(\rho)$. Posons S_ρ l'ensemble des racines simples du centre de M_ρ dans l'algèbre de Lie du parabolique triangulaire supérieur P_ρ de Levi M_ρ. On peut identifier S_ρ à l'ensemble $\{1, \dots, e-1\}$.

(3.3.4) Fait– Soit π une représentation elliptique de $\mathrm{GL}_d(K)$, alors il existe une unique représentation irréductible ρ de $D^\times$ et un unique sous-ensemble I de S_ρ tels que π peut s'écrire de la manière unique sous la forme

$$\pi_\rho^I := \mathrm{Cosoc}\left(i_{M_{\rho,I}}^{\mathrm{GL}_d(K)}\left(\mathrm{Soc}\left(i_{M_\rho}^{M_{\rho,I}}(\overrightarrow{\pi_\rho})\right)\right)\right),$$

où $M_{\rho,I}$ est le centralisateur du noyau commun des $\alpha \in I$ et le symbole i désigne l'induite normalisée. Dans ce cas, π_ρ^I a le même support cuspidal que $\mathrm{JL}(\rho)$. On a l'égalité $\mathrm{LJ}(\pi_\rho^I) = (-1)^{|I|}[\rho]$ dans $R(D^\times)$

le groupe de Grothendieck des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de longueur finie de $D^\times$, où LJ : $R(\mathrm{GL}_d(K)) \to R(D^\times)$ désigne le transfert de Langlands-Jacquet [Dat07, 2.1].

(3.3.5) La représentation elliptique π_ρ^I de $\mathrm{GL}_d(K)$ est de niveau zéro, i.e. $(\pi_\rho^I)^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})} \neq 0$, si et seulement si ρ est de niveau zéro, i.e. $\rho^{1+\Pi_D\mathcal{O}_D} \neq 0$. Bushnell et Henniart [BH11] décrivent dans ce cas, la classification explicite des représentations irréductibles de niveau zéro de $D^\times$ ainsi que la correspondance de Jacquet-Langlands associée.

Pour $n \in \mathbb{N}$ un entier, notons K_n l'extension non-ramifiée de K de degré n. Un caractère modéré[3] $\widetilde{\theta} : K_d^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ sera dit *f-primitif* si f est l'entier positif minimal tel qu'il existe un caractère $\widetilde{\theta}' : K_f^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ avec $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}' \circ N_{K_d/K_f}$. Notons dans ce cas $e := d/f$. Le couple $(K_f/K, \widetilde{\theta}')$ est une *paire admissible modérée*, *cf.* [BH11].

Il existe une bijection $\widetilde{\theta} \mapsto \rho(\widetilde{\theta})$ entre l'ensemble des classes d'équivalence des caractères $\widetilde{\theta} : K_d^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et l'ensemble des classes d'isomorphie des représentations irréductibles de niveau zéro de $D^\times$. En effet, si $\widetilde{\theta}$ est f-primitif, on fixe une K-injection $K_f \hookrightarrow D$, unique à conjugaison par un élément de $D^\times$ près, et on identifie K_f à une K-sous-algèbre de $D^\times$. Notons B le centralisateur de K_f dans D. Alors, B est une K_f-algèbre à division centrale de dimension e^2. On désigne $\mathrm{Nr}_{B/K_f} : B^\times \to K_f^\times$ la norme réduite et U_D^1 le sous-groupe $1 + \Pi_D\mathcal{O}_D$ de $D^\times$. Donc $\widetilde{\theta}$ induit un caractère Θ du groupe $[D]_f = B^\times U_D^1$ (*cf.* 3.2) par

$$\Theta(bu) = \widetilde{\theta}'(\mathrm{Nr}_{B/K_f}(b)),\ b \in B^\times,\ u \in U_D^1,$$

où $\widetilde{\theta}'$ est le caractère de $K_f^\times$ tel que $\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta}' \circ N_{K_d/K_f}$. Alors, on définit la représentation irréductible $\rho(\widetilde{\theta})$ de $D^\times$ comme suit

$$\rho(\widetilde{\theta}) := \mathrm{Ind}_{[D]_f}^{D^\times} \Theta,$$

et on obtient de telle manière toutes les représentations de niveau zéro de $D^\times$.

(3.3.6) Théorème.– *Soit π une représentation de niveau zéro de $\mathrm{GL}_d(K)$ telle que $\pi^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})}$ soit irréductible et elliptique en tant que représentation de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, donc isomorphe à une $\overline{\pi}_{\theta'}^i$ avec $f|d$ et θ' un caractère f-primitif de $\mathbb{F}_{q^f}^\times$ (voir (3.3.2)). Alors, π est irréductible elliptique de la forme $\pi_{\rho(\widetilde{\theta})}^I$ où $\widetilde{\theta}$ est un caractère modéré tel que $\widetilde{\theta}|_{\mathcal{O}_{K_d}^\times/1+\varpi\mathcal{O}_{K_d}} \cong \theta := \theta' \circ N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}}$ et $I = \{1, \ldots, i\}$ ou $\{e-i, \ldots, e-1\}$ avec $e := d/f$, $0 \leqslant i \leqslant e-1$ sous la convention $I = \emptyset$ si $i = 0$.*

Preuve : Rappelons que le foncteur $M \mapsto M^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations lisses de niveau zéro de $\mathrm{GL}_d(K)$ et la catégorie des modules sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\mathrm{GL}_d(K), 1 + \varpi M_d(\mathcal{O}))$. Comme $\pi^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})}$ est irréductible et non nulle, π est irréductible.

Supposons que π ne soit pas elliptique. Alors, on peut écrire

$$[\pi] = \sum_{P \subsetneq \mathrm{GL}_d(K)} a_P[\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_d(K)} \sigma_{M_P}],\ a_P \in \mathbb{Z},$$

3. C'est-à-dire $\widetilde{\theta}|_{1+\varpi\mathcal{O}_{K_d}}$ est trivial.

où σ_{M_P} désigne une représentation de niveau zéro du sous-groupe de Levi M_P de P. Donc, en prenant les invariants sous $1+\varpi M_d(\mathcal{O})$, on a (*cf.* [Vig96, III. 3.14])

$$\pi^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})} = \overline{\pi}^i_{\theta'} = \sum_{\overline{P}\subsetneq \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)} a_P \operatorname{Ind}_{\overline{P}}^{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\sigma_{M_P}^{M\cap(1+\varpi M_d(\mathcal{O}))}),$$

où $\overline{P} := P(\mathcal{O}) \pmod{\varpi}$. On obtient alors une contradiction car $\overline{\pi}^i_{\theta'}$ est elliptique.

Comme $\pi^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})} = \overline{\pi}^i_{\theta'}$, le couple $((\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q))^e, (\overline{\pi}_f(\theta'))^{\otimes e})$ est un représentant du support cuspidal de $\pi^{1+\varpi M_d(\mathcal{O})}$. Donc, il existe un caractère modéré $\widetilde{\theta}' : K_f^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ prolongeant θ' tel que le support cuspidal de π est égal à $((\mathrm{GL}_f(K))^e, \overrightarrow{\pi_f(\widetilde{\theta}')})$, où $\pi_f(\widetilde{\theta}')$ est la représentation supercuspidale de $\mathrm{GL}_f(K)$ associée à $\widetilde{\theta}'$, *cf.* [BH11, Prop. 8]. Notons $\widetilde{\theta} := \widetilde{\theta}' \circ N_{K_d/K_f}$, alors $\mathrm{LJ}(\pi) = \pm[\rho(\widetilde{\theta})]$. Donc on peut écrire π sous la forme $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta})}$ pour un sous-ensemble I de $\{1,\dots,e-1\}$.

Considérons $\mathfrak{B}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_{nf}(K)}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ la sous-catégorie pleine des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de longueur finie de $\mathrm{GL}_{nf}(K)$ formée des objets dont tous les sous-quotients irréductibles contiennent $((\mathrm{GL}_f(K))^n, \overrightarrow{\psi\cdot\pi_f(\widetilde{\theta}')})$ dans leur support cuspidal, pour un certain caractère non-ramifié ψ de $(\mathrm{GL}_f(K))^n$. On sait que c'est une sous-catégorie de Serre et que l'on a des équivalences

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_{nf}(K)} &\longrightarrow \text{Mod-End}_{\mathrm{GL}_{nf}(K)}(\times^n\pi_f(\widetilde{\theta}'))\\ V &\mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{nf}(K)}(\times^n\pi_f(\widetilde{\theta}'), V),\end{aligned}$$

où $\text{Mod-End}_{\mathrm{GL}_{nf}(K)}(\times^n\pi_f(\widetilde{\theta}'))$ désigne la catégorie des $\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_{nf}(K)}(\times^n\pi_f(\widetilde{\theta}'))$-modules à droites de longueur finie. Bushnell et Kutzko [BK93, 5.6.6] ont défini un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{\mathrm{GL}_{nf}(K)}(\times^n\pi_f(\widetilde{\theta}')) \cong \mathcal{H}(n,q^f),$$

où $\mathcal{H}(n,q^f)$ est l'algèbre de Iwahori-Hecke. Nous avons donc une équivalence de catégories (bijective sur les objets simples)

$$\alpha_K^n : \mathfrak{B}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_{nf}(K)} \longrightarrow \text{Mod-}\mathcal{H}(n,q^f)\,.$$

Cette équivalence est compatible à l'équivalence $\overline{\alpha}^n_{\mathbb{F}_q}$, les induites paraboliques normalisées et les foncteurs de Jacquet normalisés (voir [Dat07]). Notons que $\pi = \pi^I_{\rho(\widetilde{\theta})} \in \mathfrak{B}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_d(K)}$. Nous avons donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{B}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_d(K)} \arrow[r, "\alpha_K^e"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{1+\varpi M_d(\mathcal{O})}(1,-)"'] & \text{Mod-}\mathcal{H}(e,q^f) \arrow[r, "(\alpha^e_{K_f})^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{res.}"] & \mathfrak{B}_{1,\theta'}^{\mathrm{GL}_e(K_f)} \cong \mathfrak{B}_{1,1}^{\mathrm{GL}_e(K_f)} \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{1+\varpi M_e(\mathcal{O}_{K_f})}(1,-)"] \\
\overline{\mathfrak{B}}_{f,\theta'}^{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)} \arrow[r, "\overline{\alpha}^e_{\mathbb{F}_q}"] & \text{Mod-}\mathcal{H}_{q^f}(\mathfrak{S}_e) \arrow[r, "(\overline{\alpha}^e_{\mathbb{F}_{q^f}})^{-1}"] & \overline{\mathfrak{B}}_{1,\theta'}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} \cong \overline{\mathfrak{B}}_{1,1}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}
\end{tikzcd}$$

En décorant de signes $'$ les objets relatifs au corps K_f et $\mathbb{F}_{q^f}$ selon le contexte, l'image de $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta})}$ (resp. $\overline{\pi}^\lambda_{\theta'}$) sous $(\alpha^e_{K_f})^{-1}\circ\alpha^e_K$ (resp. $(\overline{\alpha}^e_{\mathbb{F}_{q^f}})^{-1}\circ\overline{\alpha}^e_{\mathbb{F}_q}$) est de la forme π'^I_1 (resp. $\overline{\pi}'^\lambda_1$) (*cf.* [Dat07, 2.1.13]).

(3.3.7) Lemme.– *On a* $\lambda_I = (i+1, 1^{(e-1-i)})$.

Preuve : Grâce aux équivalences ci-dessus, on se ramène à $\theta' = 1$ et $f = 1$. La représentation induite $\mathrm{Ind}_{\overline{P}'_I}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} 1$ contient la représentation irréductible $\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1$ avec multiplicité un, et on a de plus

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}(\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1, \mathrm{Ind}_{\overline{P}'_\mu}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} 1) = 0, \quad \text{si } \lambda_I < \mu.$$

Dans le groupe de Grothendieck $R(\mathrm{GL}_e(K_f))$, on a l'égalité

$$[\pi'^I_1] = [\mathrm{Ind}_{P'_I}^{\mathrm{GL}_e(K_f)} 1] + \sum_{J \supsetneq I} (-1)^{|J \setminus I|} [\mathrm{Ind}_{P'_J}^{\mathrm{GL}_e(K_f)} 1].$$

Ceci entraîne que dans $R(\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f}))$, on a

$$[\overline{\pi}'^I_1] = [\mathrm{Ind}_{\overline{P}'_I}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} 1] + \sum_{J \supsetneq I} (-1)^{|J \setminus I|} [\mathrm{Ind}_{\overline{P}'_J}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} 1].$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}(\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1, \overline{\pi}'^i_1) &= \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}(\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1, (\pi'^I_1)^{1+\varpi M_e(\mathcal{O}_{K_f})}) \\
&= \dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}([\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1], [\overline{\pi}'^{\lambda_I}_1] + \sum_{\mu > \lambda_I} a_\mu [\mathrm{Ind}_{\overline{P}'_\mu}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})} 1]) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\lambda_I = (i+1, 1^{e-1-i})$. □

Revenons à la preuve du théorème (3.3.6), il nous reste à montrer que $I = \{1, \dots, i\}$ ou $\{e - i, \dots, e-1\}$. Notons $r_{P'_{(1,\dots,1)}}$ le foncteur de Jacquet normalisé associé au sous-groupe de Borel $P'_{(1,\dots,1)}$ de $\mathrm{GL}_e(K_f)$, et $\overline{U}'_{(1,\dots,1)}$ le radical unipotent de $\overline{P}'_{(1,\dots,1)}$. On a

$$\begin{aligned}
\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} r_{P'_{(1,\dots,1)}}(\pi'^I_1) &= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{Hom}_{(1+\varpi\mathcal{O}_{K'})^e}(1, r_{P'_{(1,\dots,1)}}(\pi'^I_1)) \\
&= \dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} (\overline{\pi}'^i_1)^{\overline{U}'_{(1,\dots,1)}} \\
&= \binom{e-1}{i},
\end{aligned}$$

car $\dim(\overline{\pi}'^i_1)^{\overline{U}'_{(1,\dots,1)}}$ est la dimension du module de Specht associé à la partition $(i+1, 1^{e-1-i})$.

Par ailleurs, d'après [Dat12, (2.1.1) Fact], on a

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} r_{P'_{(1,\dots,1)}}(\pi'^I_1) = \#\{w \in \mathfrak{S}_e \mid I = \{i \in \{0, \dots, e-1\} \mid w(i-1) < w(i)\}\}.$$

Par un calcul direct de ce sous-ensemble de $\mathfrak{S}_e$, on obtient que

$$\#\{w \in \mathfrak{S}_e \mid I = \{i \in \{0, \dots, e-1\} \mid w(i-1) < w(i)\}\} = \binom{e-1}{i}$$

si et seulement si $I = \{1, \dots, i\}$ ou $\{e-i, \dots, e-1\}$. Ceci termine la preuve du théorème (3.3.6). □

3.4 Cohomologie de la variété de Deligne-Lusztig

On relie les représentations elliptiques $\overline{\pi}^i_{\theta'}$ dans 3.3 aux cohomologies de variété de Deligne-Lusztig $\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ (*cf.* (3.1.5) (b)). Les lettres épaisses $\mathbf{G}, \mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{U}, \mathbf{V}$... seront utilisées pour les groupes algébriques linéaires sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. $\mathbf{G}$ sera toujours le groupe linéaire GL_d sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, et on fixe un morphisme de Frobenius $F : (a_{i,j}) \mapsto (a^q_{i,j})$. Soit $\mathbf{V}$ un sous-groupe unipotent de $\mathbf{G}$, la variété de Deligne-Lusztig associée est définie par (voir [BR03])

$$Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} := \{g\mathbf{V} \in \mathbf{G}/\mathbf{V} \mid g^{-1}Fg \in \mathbf{V}F(\mathbf{V})\}.$$

(3.4.1) Fixons une injection d'algèbres

$$\iota : \mathbb{F}_{q^d} \hookrightarrow M_d(\mathbb{F}_q) = \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q}(\mathbb{F}^d_q).$$

Le centralisateur de $\iota(\mathbb{F}^\times_{q^d})$ dans $\mathbf{G}$ est un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$, déployé sur $\mathbb{F}_{q^d}$. $\mathbf{T}$ est un tore Coxeter de $\mathbf{G}$, et $\mathbf{T}^F \cong \mathbb{F}^\times_{q^d}$. Notons $V := \mathbb{F}^d_q$ et $\overline{V} := \overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} V$. Alors, on a

$$\overline{V} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \overline{V}_i, \text{ avec } \overline{V}_i = \{v \in \overline{V} \mid \iota(\lambda)(v) = \lambda^{q^i} v, \forall \lambda \in \mathbb{F}^\times_{q^d}\}.$$

Posons $\mathbf{B}$ le sous-groupe de Borel associé au drapeau complet

$$0 \subset \overline{V}_0 \subset \overline{V}_0 \oplus \overline{V}_1 \subset \cdots \subset \bigoplus_{i<d-1} \overline{V}_i \subset \overline{V},$$

et $\mathbf{U}$ son radical unipotent.

Soit $d = ef$. Notons $\mathbf{L}$ le centralisateur de $\iota(\mathbb{F}^\times_{q^f})$ dans $\mathbf{G}$. $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi F-stable de $\mathbf{G}$ défini sur $\mathbb{F}_{q^f}$; $\mathbf{L}$ contient $\mathbf{T}$, et $\mathbf{L}^F \cong \mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$. Si l'on note

$$\overline{V}^j = \{v \in \overline{V} \mid \iota(\lambda)(v) = \lambda^{q^j} v, \forall \lambda \in \mathbb{F}^\times_{q^f}\} = \bigoplus_{i \equiv j \mod f} \overline{V}_i,$$

$\mathbf{L}$ est associé à la décomposition $\overline{V} = \bigoplus_{j=0}^{f-1} \overline{V}^j$. Posons $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique associé au drapeau

$$0 \subset \overline{V}^0 \subset \overline{V}^0 \oplus \overline{V}^1 \subset \cdots \subset \bigoplus_{j<f-1} \overline{V}^j \subset \overline{V},$$

et $\mathbf{V}$ son radical unipotent. Notons $\mathbf{B_L} := \mathbf{B} \cap \mathbf{L} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U_L}$ un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}$ de radical unipotent $\mathbf{U_L}$.

Soit θ' un caractère f-primitif de $\mathbb{F}^\times_{q^f}$. En composant avec la norme de $\mathbb{F}_{q^d}$ sur $\mathbb{F}_{q^f}$, on définit un caractère $\theta := \theta' \circ N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}}$ de $\mathbb{F}^\times_{q^d}$. La classe de conjugaison Frobenius de θ correspond à une classe de conjugaison d'éléments semi-simples $\{s\}$ dans le groupe dual $\mathbf{G}^*$ de $\mathbf{G}$. On identifie $\mathbf{L}$ au groupe dual du centralisateur de s dans $\mathbf{G}^*$. Dans [BR03, Thm. A'], Bonnafé et Rouquier ont associé à s un idempotent central $e^{\mathbf{L}^F}_s \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell \mathbf{L}^F$. Soit $t \in \{s\} \cap \mathbf{T}^*$ correspondant à θ; l'idempotent $e^{\mathbf{T}^F}_t$ est alors l'idempotent associé au caractère θ.

Posons $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ l'induction de Lusztig définie par somme alternée [Lus76, §1]. Le morphisme $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ induit une bijection

$$R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}} : \overline{\mathfrak{B}}^{\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})}_{1,\theta'} \longrightarrow \overline{\mathfrak{B}}^{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}_{f,\theta'}.$$

(3.4.2) Fait– On a $R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}((\theta'\circ\det)\otimes\overline{\pi}'^i_1) = (-1)^{d+e}\overline{\pi}^i_{\theta'}$, où $\overline{\pi}'^i_1$ signifie la représentation elliptique de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$ associée au caractère trivial et la partition $(i+1, 1^{e-1-i})$.

Preuve : D'après [Dip85, 4.5] et [FS82, Page 116], $\overline{\pi}^i_{\theta'} = \varepsilon_{\mathbf{G}^F}\varepsilon_{\mathbf{L}^F} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}((\theta'\circ\det)\otimes\overline{\pi}'^i_1)$ avec $\varepsilon_{\mathbf{G}^F} = (-1)^d$ et $\varepsilon_{\mathbf{L}^F} = (-1)^e$. $\square$

(3.4.3) Proposition.– *Rappelons brièvement que la variété* $\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ *est munie une action de* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, *et qu'elle est un* $\mathbb{F}^{\times}_{q^d}$*-torseur au-dessus de l'espace de Drinfeld* $\Omega^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ *sur* $\overline{\mathbb{F}}_q$ *qui est le complémentaire de tous les hyperplans* $\mathbb{F}_q$*-rationnels dans* $\mathbb{P}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ *(*cf. *[Wan14, 2.5.1]). Notons* $M(\theta)$ *la partie* θ*-isotypique d'un* $\mathbb{F}^{\times}_{q^d}$*-module* M*. Alors, en tant que représentations de* $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$*, on a*

$$H^{d-1+i}_c(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) \cong \overline{\pi}^i_{\theta'},\ \forall i \in \{0, \dots, e-1\}.$$

Preuve : On utilise le résultat de l'indépendance de paraboliques prouvé dans [Dat14]. Nous avons des isomorphismes de variétés

$$Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{U}} \cong \mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$$
$$Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}} \cong \mathrm{DL}^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q},$$

ainsi qu'un isomorphisme grâce à [Lus76, Lemma 3],

$$Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}} \cong Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{VU_L}}. \tag{3.4.4}$$

Notons que $\mathbf{VU_L}$ est le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}' := (\mathbf{B}\cap\mathbf{L})\mathbf{V}$ de $\mathbf{G}$. D'après, [BR03, Thm. B'], $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}}$ (resp. $Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}}$) est de dimension $e(d-e)$ (resp. $e-1$), et le complexe $R\Gamma(Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}})e^{\mathbf{L}^F}_s$ est concentrée en degré $e(d-e)$. En vertu de [Dat14, Prop. 5.3], les parties θ-isotypiques des complexes de cohomologies de $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{U}}$ et de $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{VU_L}}$ sont isomorphes, à un décalage de la différence de leurs dimensions et un twist à la Tate près. Tenant compte du fait que $R\Gamma(Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}})e^{\mathbf{T}^F}_t = e^{\mathbf{L}^F}_s R\Gamma(Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}})e^{\mathbf{T}^F}_t$ ([BR03, Thm. 11.4]), on a

$$\begin{aligned}
H^{d-1+i}_c(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) &= H^{e(d-e)+e-1+i}_c(Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)e^{\mathbf{T}^F}_t \\
&= H^{e(d-e)}(Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}})e^{\mathbf{L}^F}_s \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbf{L}^F]} H^{e-1+i}_c(Y^{\mathbf{L}}_{\mathbf{U_L}})(\theta) \\
&= (-1)^{e(d-e)} R^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}((\theta'\circ\det)\otimes\overline{\pi}'^i_1) \\
&= (-1)^{e(e-1)(f-1)}\overline{\pi}^i_{\theta'} = \overline{\pi}^i_{\theta'}.
\end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de (3.4.2). D'où l'énoncé. $\square$

On peut calculer les valeurs propres de Frobenius sur les cohomologies de $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{U}} \cong \mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$.

(3.4.5) Proposition.– *Le Frobenius* F^f *agit sur* $H^{d-1+i}_c(Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{U}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ *par le scalaire*

$$(-1)^{e(f-1)}\theta'((-1)^{e-1})\cdot(q^f)^{\frac{d-e}{2}+i}.$$

Preuve : En vertu de [Dat14, Prop. 5.3], on a un isomorphisme F-équivariant

$$H_c^{d-1+i}(Y_{\mathbf{U}}^{\mathbf{G}})(\theta)(\frac{(e-1)(d-e)}{2}) \cong H_c^{e(d-e)+e-1+i}(Y_{\mathbf{V}\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{G}})(\theta).$$

Comme $\mathbf{V}$ est F^f-stable, l'isomorphisme 3.4.4 :

$$Y_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}} \cong Y_{\mathbf{V}\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{G}}$$

est F^f-équivariant. Donc il suffit de calculer la valeur propre de F^f sur

$$H_c^{e(d-e)+e-1+i}(Y_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})(\theta)(-\frac{(e-1)(d-e)}{2}).$$

Comme précédemment, on a l'expression suivante

$$H_c^{e(d-e)+e-1+i}(Y_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}} \times_{\mathbf{L}^F} Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})(\theta) = H_c^{e(d-e)}(Y_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}})e_s^{\mathbf{L}^F} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbf{L}^F]} H_c^{e-1+i}(Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})e_t^{\mathbf{T}^F}.$$

Alors, le valeur propre de F^f est égal à $\mu_1 \cdot \mu_2$, où μ_1 (resp. μ_2) désigne la valeur propre de F^f sur $H_c^{e-1+i}(Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})e_t^{\mathbf{T}^F}$ (resp. $H_c^{e(d-e)}(Y_{\mathbf{V}}^{\mathbf{G}})(-\frac{(e-1)(d-e)}{2})e_s^{\mathbf{L}^F}$).

Commençons par le calcul de μ_1.

(3.4.6) Lemme.– $\mu_1 = \theta'((-1)^{e-1})q^{fi}$.

Preuve : Ceci est essentiellement donné par Digne et Michel [DM85]. Rappelons que $Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}}$ est isomorphe à la variété $\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_{q^f}}^{e-1}$ définie par l'équation :

$$\det((X_i^{q^{fj}})_{0\leqslant i,j\leqslant e-1})^{q^f-1} = (-1)^{e-1}.$$

Notons que dans [DM85], les auteurs ont considéré la variété définie par l'équation

$$\det((X_i^{q^{fj}})_{0\leqslant i,j\leqslant e-1})^{q^f-1} = 1.$$

Soit $g \in \mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$, notons, suivant eux [DM85, Page 12] (noté $N_{\dot{w}}^1(\theta)(g)$ dans *loc. cit.*),

$$\begin{aligned} N_\theta(g) &:= \mathrm{Trace}(gF^f | H_c^*(Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})e_t^{\mathbf{T}^F}) \\ &:= \sum_k (-1)^k \,\mathrm{Trace}(gF^f | H_c^k(Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})e_t^{\mathbf{T}^F}). \end{aligned}$$

Rappelons que s se correspond à θ, et $\theta = \theta' \circ N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}}$.

Fait.– **(a)** En tant que représentations de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$, on a

$$H_c^k(Y_{\mathbf{U}_{\mathbf{L}}}^{\mathbf{L}})e_t^{\mathbf{T}^F} = H_c^k(\Omega_{\mathbb{F}_{q^f}}^{e-1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \otimes \theta'^{-1} \circ \det, \ \forall k.$$

(b) Pour tout $g \in \mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$, on a

$$N_\theta(g) = \theta'((-1)^{e-1}) \cdot N_1(g) \cdot \theta'^{-1}(\det(g)); \tag{3.4.7}$$

Preuve : (a) découle du fait que l'élément $(g,\zeta) \in \mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f}) \times \mathbb{F}_{q^d}^\times$ avec $\det(g) \cdot N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}}(\zeta) = 1$ stabilise une composante connexe géométrique fixée de $\mathrm{DL}^{e-1}_{\mathbb{F}_{q^f}}$. (b) découle de [DM85, V. Corollaire 3.3], avec le facteur supplémentaire $\theta'((-1)^{e-1})$ qui vient du fait que $\mathrm{DL}^{e-1}_{\mathbb{F}_{q^f}}$ est définie par l'équation

$$\det((X_i^{q^{fj}})_{0\leqslant i,j\leqslant e-1})^{q^f-1} = (-1)^{e-1}.$$

On revoie les lectures à [Wan14, Thm. 3.1.12] pour les détails. □

Posons g un élément régulier elliptique de $\mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$. D'après [DOR10, Prop. 3.3.9], on a

$$\begin{aligned} N_1(g) &= \sum_k (-1)^k \operatorname{Trace}(gF^f | H_c^k(\Omega^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_{q^f}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &= \sum_{k=e-1}^{2e-2} (-1)^k q^{f(k-e+1)} \cdot (-1)^{2e-2-k} \operatorname{Trace}(g|1) \\ &= \sum_{k=e-1}^{2e-2} q^{f(k-e+1)}. \end{aligned}$$

Notons α_k la valeur propre de F^f sur $H_c^k(\mathrm{DL}^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_{q^f}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)e_t^{\mathbf{T}^F}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} N_\theta(g) &= \sum_k (-1)^k \operatorname{Trace}(gF^f | H_c^k(\mathrm{DL}^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_{q^f}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)e_t^{\mathbf{T}^F}) \\ &= \sum_k (-1)^k \alpha_k \operatorname{Trace}(g | H_c^k(\mathrm{DL}^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_{q^f}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)e_t^{\mathbf{T}^F}) \\ &= \sum_k (-1)^k \alpha_k \theta'^{-1}(\det(g)) \operatorname{Trace}(g | H_c^k(\Omega^{e-1}_{\overline{\mathbb{F}}_{q^f}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &= \sum_{k=e-1}^{2e-2} (-1)^k \alpha_k \theta'^{-1}(\det(g)) \cdot (-1)^{2e-2-k} \operatorname{Trace}(g|1) \\ &= \theta'^{-1}(\det(g)) \cdot \sum_{k=e-1}^{2e-2} \alpha_k. \end{aligned}$$

Comme les $\alpha_k/q^{f(k-e+1)}$ sont des nombre de Weil de poids 0, en vertu de l'égalité 3.4.7, on a $\alpha_k = \theta'((-1)^{e-1})q^{f(k-e+1)}$. En particulier, on a $\mu_1 = \theta'((-1)^{e-1})q^{fi}$. □

(3.4.8) Lemme.– $\mu_2 = (-1)^{e(f-1)} q^{\frac{ef(f-1)}{2}}$.

Preuve : La stratégie de la démonstration est la suivante. Notons $R_u(\mathbf{H})$ le radical unipotent d'un groupe réductif connexe $\mathbf{H}$. On va choisir un sous-groupe de Borel $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{P} := \mathbf{LV}$ tel que l'on a un isomorphisme F^f-équivariant :

$$Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B})} \cong Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{R_u(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})}$$

et que l'on connaît la valeur propre de F^f sur la partie θ-isotypique de la cohomologie de $Y^{\mathbf{L}}_{R_u(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})}$. Ensuite, on trouve un autre sous-groupe de Borel $\mathbf{B}'$ tel que $\mathbf{B}^* \cap \mathbf{L}^* = \mathbf{B}'^* \cap \mathbf{L}^*$, et que l'on connaît la valeur propre de F^f sur la partie θ-isotypique de sa cohomologie. En vertu du résultat de [Dat14], les valeurs propres de F^f sur la partie θ-isotypique de la cohomologie de $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B})}$ et de celle de $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B}')}$ sont les mêmes à un twist de Tate explicit près. Donc, on en déduit μ_2.

Notons $V_1 = V_2 = \cdots = V_e := \mathbb{F}_q^f$, et $\overline{V}_i := \overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} V_i$. Fixons des injections d'algèbres $\iota_i : \mathbb{F}_{q^f} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{F}_q} V_i,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant e$. Posons $V := \bigoplus_{i=1}^e V_i$ et $\overline{V} := \overline{\mathbb{F}}_q \otimes_{\mathbb{F}_q} V$. On identifie $\mathbf{G}$ au groupe de $\mathbb{F}_q$-automorphisme de $\overline{V}$. Les ι_i induisent une injection

$$\iota := \iota_1 \times \cdots \times \iota_e : (\mathbb{F}_{q^f}^\times)^e \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(V_e) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_e) \hookrightarrow \mathbf{G}.$$

Le centralisateur de $\iota((\mathbb{F}_{q^f}^\times)^e)$ dans $\mathbf{G}$ est un tore maximal F-stable $\mathbf{T}$ dont la structure rationelle est donnée par la restriction de scalaires $\mathrm{Res}_{\mathbb{F}_{q^f}/\mathbb{F}_q}(\mathbb{G}_m)^e$. De plus, $\mathbf{T}^F = \iota((\mathbb{F}_{q^f}^\times)^e)$. L'action de $\mathbb{F}_{q^f}^\times$ sur $\overline{V}_i$ induite par ι_i fait une décomposition en sous-espaces de dimension 1

$$\overline{V}_i = \bigoplus_{j=0}^{f-1} \overline{V}_{i,j},\ \text{où}\ \overline{V}_{i,j} := \{v \in \overline{V}_i \mid \iota_i(\lambda)(v) = \lambda^{q^j} v, \forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^f}^\times\}.$$

On note $\mathbf{B}'$ le sous-groupe de Borel de $\mathbf{G}$ associé au drapeau complet défini par les sous-espaces vectoriels successifs

$$0, \overline{V}_{1,0}, \overline{V}_{1,1}, \ldots, \overline{V}_{1,f-1}, \overline{V}_{2,0}, \overline{V}_{2,1}, \ldots, \overline{V}_{2,f-1}, \ldots, \overline{V}_{e,0} \ldots \overline{V}_{e,f-1},$$

et $R_u(\mathbf{B}')$ son radical unipotent. Notons $\mathbf{L}'$ le sous-groupe de Levi F-stable associé à la décomposition

$$\overline{V} = \bigoplus_{i=1}^{e} \overline{V}_i,$$

et $\mathbf{P}'$ le sous-groupe parabolique F-stable associé au drapeau

$$0 \subset \overline{V}_1 \subset \overline{V}_1 \oplus \overline{V}_2 \subset \cdots \subset \bigoplus_{j<e} \overline{V}_j \subset \overline{V}$$

de radical unipotent $R_u(\mathbf{P}')$. Le sous-groupe de Borel $\mathbf{B}' \cap \mathbf{L}'$ de $\mathbf{L}'$ est de radical unipotent $R_u(\mathbf{B}' \cap \mathbf{L}')$. On a $\mathbf{L}'^F \cong (\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q))^e$. La variété de Deligne-Lusztig $Y^{\mathbf{L}'}_{R_u(\mathbf{B}'\cap\mathbf{L}')}$ (resp. $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P}')}$) s'identifie à $(\mathrm{DL}^{f-1}_{\mathbb{F}_{q^f}})^e$ (resp. $\mathbf{G}^F / R_u(\mathbf{P}')^F$).

Notons que ι_i induit une structure de $\mathbb{F}_{q^f}$-espace vectoriel sur V_i. Donc l'injection $\iota = \iota_1 \times \cdots \times \iota_e$ se factorise par

$$(\mathbb{F}_{q^f}^\times)^e \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{q^f}}(V_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{q^f}}(V_e) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{q^f}}(\bigoplus_{i=1}^{e} V_i) \subset \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_q}(\bigoplus_{i=1}^{e} V_i) \hookrightarrow \mathbf{G}.$$

L'immersion diagonale $\Delta : \mathbb{F}_{q^f}^\times \to (\mathbb{F}_{q^f}^\times)^e$ induit une décomposition

$$\overline{V} = \bigoplus_{j=0}^{f-1} \overline{V}^j,\ \text{où}\ \overline{V}^j := \{v \in \overline{V} \mid \iota \circ \Delta(\lambda)(v) = \lambda^{q^j} v, \forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^f}^\times\}.$$

En fait, $\overline{V}^j = \bigoplus_{i=1}^{e} \overline{V}_{i,j}$. Notons $\mathbf{L}$ le sous-groupe de Levi F-stable associé à cette décomposition $\overline{V} = \bigoplus_{j=0}^{f-1} \overline{V}^j$, et $\mathbf{P}$ le sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ correspondant au drapeau

$$0 \subset \overline{V}^0 \subset \overline{V}^0 \oplus \overline{V}^1 \subset \cdots \subset \bigoplus_{j<f-1} \overline{V}^j \subset \overline{V},$$

et $R_u(\mathbf{P})$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$. On note $\mathbf{B}$ le sous-groupe de Borel F-stable de $\mathbf{G}$ associé au drapeau complet défini par les sous-espaces vectoriels successifs

$$0, \overline{V}_{1,0}, \overline{V}_{2,0}, \ldots, \overline{V}_{e,0}, \overline{V}_{1,1}, \overline{V}_{2,1}, \ldots, \overline{V}_{e,1}, \ldots, \overline{V}_{1,f-1} \ldots \overline{V}_{e,f-1},$$

et $R_u(\mathbf{B})$ son radical unipotent. Le tore maximal $\mathbf{T}$ est contenu dans $\mathbf{L}$, et $\mathbf{B} \cap \mathbf{L} \supset \mathbf{T}$ est un sous-groupe de Borel de $\mathbf{L}$ de radical unipotent $R_u(\mathbf{B} \cap \mathbf{L})$. On a $\mathbf{L}^F \cong \mathrm{GL}_e(\mathbb{F}_{q^f})$, la variété de Deligne-Lusztig $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})}$ s'identifie à la variété $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}}$ introduite dans (3.4.1).

Considérons les deux variétés $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B})}$ et $Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B}')}$. D'après [Lus76, Lemma 3], on a des isomorphismes

$$Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B})} \cong Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{R_u(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})}$$
$$Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{B}')} \cong Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P}')} \times_{\mathbf{L}'^F} Y^{\mathbf{L}'}_{R_u(\mathbf{B}'\cap\mathbf{L}')}.$$

Par définition, $\mathbf{B}^* \cap \mathbf{L}^* = \mathbf{B}'^* \cap \mathbf{L}^*$ et $\mathbf{L}^* = C_{\mathbf{G}^*}(s)$. Donc on peut appliquer le résultat de [Dat14] sur l'indépendance du sous-groupe parabolique . On obtient

$$\begin{aligned} H_c^{e(d-e)}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{R_u(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})})(\theta) &= (-1)^{e(d-e)} \cdot (-1)^{d-e} \cdot H_c^{d-e}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P}')} \times_{\mathbf{L}'^F} Y^{\mathbf{L}'}_{R_u(\mathbf{B}'\cap\mathbf{L}')})(\theta)(\frac{(e-1)(d-e)}{2}) \\ &= H_c^{d-e}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P}')} \times_{\mathbf{L}'^F} Y^{\mathbf{L}'}_{R_u(\mathbf{B}'\cap\mathbf{L}')})(\theta)(\frac{(e-1)(d-e)}{2}). \end{aligned}$$

Notons que

$$H_c^{e(d-e)}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})} \times_{\mathbf{L}^F} Y^{\mathbf{L}}_{R_u(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})})(\theta) = H_c^{e(d-e)}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})}) e_s^{\mathbf{L}^F} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbf{L}^F]} (\theta' \circ \det|_{\mathbf{L}^F} \otimes \mathrm{Ind}_{(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})^F}^{\mathbf{L}^F} 1),$$

et que

$$H_c^{d-e}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P}')} \times_{\mathbf{L}'^F} Y^{\mathbf{L}'}_{R_u(\mathbf{B}'\cap\mathbf{L}')})(\theta) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}'^F}^{\mathbf{G}^F}\left((H_c^{f-1}(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'}))^{\otimes e}\right),$$

où $\mathcal{L}_{\theta'}$ désigne le système local sur $\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ associé à θ'. On en déduit l'égalité suivante :

$$H_c^{e(d-e)}(Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})})(-\frac{(e-1)(d-e)}{2}) e_s^{\mathbf{L}^F} \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathbf{L}^F]} \theta' \circ \det|_{\mathbf{L}^F} \otimes \mathrm{Ind}_{(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})^F}^{\mathbf{L}^F} 1 = \mathrm{Ind}_{\mathbf{P}'^F}^{\mathbf{G}^F}\left((H_c^{f-1}(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'}))^{\otimes e}\right).$$

Comme θ' est f-primitif, $H_c^{f-1}(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'})$ est cuspidale en tant que représentation de $\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q)$. D'après [Wan14, Thm. 3.1.12], la valeur propre de F^f sur $H_c^{f-1}(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'})$ est égale à $(-1)^{f-1} q^{\frac{f(f-1)}{2}}$. Comme F^f agit trivialement sur les variétés $\mathbf{L}^F/(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})^F$ et $\mathbf{G}^F/\mathbf{P}'^F$, sa valeur propre sur $\theta' \circ \det|_{\mathbf{L}^F} \otimes \mathrm{Ind}_{(\mathbf{B}\cap\mathbf{L})^F}^{\mathbf{L}^F} 1$ est égale à 1 et sa valeur propre sur $\mathrm{Ind}_{\mathbf{P}'^F}^{\mathbf{G}^F}\left((H_c^{f-1}(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'}))^{\otimes e}\right)$ est égale à $(-1)^{e(f-1)} q^{\frac{ef(f-1)}{2}}$. Rappelons que $Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{V}} \cong Y^{\mathbf{G}}_{R_u(\mathbf{P})}$. On en déduit que μ_2 est égale à $(-1)^{e(f-1)} q^{\frac{ef(f-1)}{2}}$. $\square$

Grâce aux deux lemmes précédents, le Frobenius F^f agit sur $H_c^{d-1+i}(Y^{\mathbf{G}}_{\mathbf{U}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ par le scalaire

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = (-1)^{e(f-1)} \theta'((-1)^{e-1}) \cdot (q^f)^{\frac{d-e}{2}+i}.$$

$\square$

3.5 La cohomologie à coefficients ℓ-adiques

On étudie la partie non-supercuspidale de la cohomologie ℓ-adique :

$$\mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell} := \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell = \operatorname{Ind}_{[GDW]_d}^{GDW} H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),\ 0 \leqslant i \leqslant d-1.$$

(3.5.1) Soient $f|d$ et $\theta' : \mathbb{F}_{q^f}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère f-primitif. Notons $\theta := \theta' \circ N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}}$, et $e = d/f$ comme précédemment.

Notons $K_f \subset K^{ca}$ l'extension non-ramifiée de K de degré f. Le caractère θ (ou plutôt θ') nous fournit un caractère modérément ramifié $\widetilde{\theta}'$ de K_f, i.e. il est trivial sur le sous-groupe $1 + \varpi\mathcal{O}_{K_f}$, défini par la composée :

$$\begin{aligned} \widetilde{\theta}' : K_f \twoheadrightarrow (\mathcal{O}_{K_f}^\times / 1 + \varpi\mathcal{O}_{K_f}) \times \varpi^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{F}_{q^f}^\times \times \varpi^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times \\ (\zeta, \varpi) &\mapsto \theta'(\zeta) \cdot \theta'((-1)^{e-1}) \end{aligned}$$

Alors, la paire $(K_f/K, \widetilde{\theta}')$ est une paire admissible modérée [BH11, 1.1].

Notons $\widetilde{\theta} := \widetilde{\theta}' \circ N_{K_d/K_f}$, et $\rho(\widetilde{\theta}) := \operatorname{Ind}_{[D]_f}^{D^\times} \Theta$ la représentation irréductible de niveau zéro de $D^\times$ associée à $\widetilde{\theta}$, où $\Theta = \widetilde{\theta}' \circ \mathrm{Nr}_{B/K_f}$, *cf.* (3.3.5). En particulier, on a

$$\Theta(\Pi_D^f) = \widetilde{\theta}'(\mathrm{Nr}_{B/K_f}(\Pi_D^f)) = \widetilde{\theta}'((-1)^{e-1}\varpi) = 1.$$

(3.5.2) Lemme.– *En tant que représentation de GW, on a*

$$\operatorname{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) = \operatorname{Ind}_{[GW]_f}^{GW} \left(\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \right),$$

où $[GW]_f = \{(g, w) \in GW \mid v(g, 1, w) \in f\mathbb{Z}\}$, et l'action d'un élément $(g, w) \in [GW]_f$ sur $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ vient de celle de $(g, \Pi_D^{-v(g,1,w)}, w) \in (GDW)^0$ sur $H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Preuve : D'après la réciprocité de Frobenius, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) &\cong \operatorname{Hom}_{[D]_f}(\Theta, \operatorname{Ind}_{[GDW]_d}^{GDW} H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}\left(\theta, (\operatorname{Ind}_{(GDW)^0\varpi^{\mathbb{Z}}}^{GDW} H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))^{\Pi_D^f}\right). \end{aligned}$$

Comme $[GDW]_f = [GDW]_d \Pi_D^{f\mathbb{Z}}$, on peut prolonger l'action naturelle de $[GDW]_d$ sur Σ_1^{ca} en une action (non naturelle) de $[GDW]_f$ en faisant agir Π_D^f trivialement. On a alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, \operatorname{Ind}_{[GDW]_f}^{GDW} H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &\cong \operatorname{Ind}_{[GW]_f}^{GW} \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)). \end{aligned}$$

□

(3.5.3) Proposition.– *Il existe une représentation irréductible elliptique de niveau zéro $\pi_i(\theta)$ de G telle que*

$$\operatorname{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) \underset{GW}{\cong} \pi_i(\theta) \otimes \operatorname{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V.$$

où V est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension 1 sur lequel I_K agit via $I_K \twoheadrightarrow I_K/I_{K(\varpi_t)} \cong \mathbb{F}_{q^d}^\times \xrightarrow{\theta} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, avec ϖ_t la racine (q^d-1)-ième de ϖ fixée dans (3.1.5), et φ^f agit sur V par un scalaire λ_i qui est de la forme $(-1)^{e(f-1)}\theta'((-1)^{e-1}) \cdot (q^f)^{\frac{d-e}{2}+i}$.

De plus, $\mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V$ est irréductible de dimension f, et $\pi_i(\theta)$ est de la forme $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ pour un caractère modéré $\widetilde{\theta}_i$ de $K_d^\times$ prolongeant θ et un sous-ensemble I de $\{1,\ldots,e\}$ satisfaisant $I = \{1,\ldots,i\}$ ou $\{e-i,\ldots,e-1\}$.

Preuve : Notons $x = [\mathcal{O}^d]$ le sommet standard de $\mathcal{BT}$ et $G_x^+ = 1 + \varpi M_d(\mathcal{O})$. Considérons les G_x^+-invariants de $\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})$. En vertu du lemme (3.4.3), nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})^{G_x^+} &\underset{G_x\times W_K}{\cong} \mathrm{Ind}_{G_x\times[W_K]_f}^{G_x\times W_K} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{G_x^+}) \\ &\underset{G_x\times W_K}{\cong} \mathrm{Ind}_{G_x\times[W_K]_f}^{G_x\times W_K} \left(H_c^{d-1+i}(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)\right) \\ &\underset{G_x\times W_K}{\cong} \mathrm{Ind}_{G_x\times[W_K]_f}^{G_x\times W_K} \overline{\pi}^i_{\theta'}.\end{aligned}$$

Grâce à (3.1.5) (a) et (b), l'action de I_K sur $H_c^{d-1+i}(\mathrm{DL}^{d-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ se factorise par $I_K/I_{K(\varpi_t)}$ via le caractère θ, et φ^f y agit comme l'endomorphisme Frob^f. Or, l'action de Frob^f commute avec celle de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ et $\overline{\pi}^i_{\theta'}$ est une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Frob^f y agit par un scalaire λ_i. D'après Prop. (3.4.5), λ_i est de la forme prévue dans l'énoncé. Donc, on a

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})^{G_x^+} \underset{G_x\times W_K}{\cong} \overline{\pi}^i_{\theta'} \otimes \mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V,$$

avec V un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel de dimension 1 comme dans l'énoncé. Comme l'action de $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ sur V se factorise par le caractère f-primitif θ', le W_K-module $\mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V$ est irréductible.

Posons

$$\pi_i(\theta) := \mathrm{Hom}_{W_K}\left(\mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V, \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})\right).$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}(\pi_i(\theta))^{G_x^+} &= \mathrm{Hom}_{W_K}\left(\mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V, \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell})^{G_x^+}\right) \\ &\cong \overline{\pi}^i_{\theta'}.\end{aligned}$$

D'après le théorème (3.3.6), $\pi_i(\theta)$ est de la forme $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ comme dans l'énoncé, et on a

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\widetilde{\theta}), \mathbf{H}^{d-1+i}_{c,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}) \underset{GW}{\simeq} \pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)} \otimes \mathrm{Ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V.$$

□

(3.5.4) Corollaire.– *Si $i=0$, la représentation $\pi_0(\theta) = \pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_0)}$ est générique, donc elle est "de la série discrète".*

Preuve : Ceci découle de [Dat07, 2.1.11]. □

(3.5.5) Corollaire.– *Le W_K-module* $\mathrm{ind}_{[W_K]_f}^{W_K} V$ *est isomorphe à* $\sigma_{\rho(\widetilde{\theta})}(-i)$ *comme dans le théorème A. (b) dans l'introduction.*

Preuve : C'est une conséquence directe du théorème principal de [BH11]. En effet, comme décrit par Bushnell et Henniart, le W_K-module $\sigma_{\rho(\widetilde{\theta})}(-i)$ s'identifie à l'induction $\mathrm{ind}_{[W_{K_f}]}^{W_K}(\eta_{K_f}^{e(f-1)}\widetilde{\theta}')$ normalisée à la Hecke, où η_{K_f} est le caractère non-ramifié quadratique de $K_f^\times$. Bien sûr, on voit $\eta_{K_f}^{e(f-1)}\widetilde{\theta}'$ comme un caractère de W_{K_f} via l'inverse de morphisme d'Artin $\mathrm{Art}_{K_f}^{-1} : W_{K_f} \twoheadrightarrow W_{K_f}^{ab} \xrightarrow{\sim} K_f^\times$. Donc la restriction à $I_{K_f} = I_K$ du caractère $\eta_{K_f}^{e(f-1)}\widetilde{\theta}'$ se factorise par le quotient $I_{K_f} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_{q^f}^\times$, et la valeur du caractère $\eta_{K_f}^{e(f-1)}\widetilde{\theta}'$ en φ^f est égale à

$$(-1)^{e(f-1)}\widetilde{\theta}'(\mathrm{Art}^{-1}(\varphi^f)) = (-1)^{e(f-1)}\widetilde{\theta}'(\pi) = (-1)^{e(f-1)}\theta'((-1)^{e-1}).$$

D'où le corollaire. □

Dans le reste de ce paragraphe, on démontre le théorème suivant, qui nous dit en particulier que la représentation $\pi_i(\theta) = \pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ est isomorphe à $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta})}$.

(3.5.6) Théorème.– *Dans le groupe de Grothendieck* $R(D^\times)$*, on a l'égalité* $\mathrm{LJ}(\pi_i(\theta)) = (-1)^i[\rho(\widetilde{\theta})]$*, i.e.* $\pi_i(\theta)$ *est elliptique de type* $\rho(\widetilde{\theta})$.

Preuve : Soit K_f/K l'extension non-ramifiée de degré f. Posons $g' \in \mathrm{GL}_e(K_f)$ la matrice donnée par $x_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant e-1$, $x_{e1} = \varpi$, et les autres $x_{ij} = 0$. Dès que l'on fait un choix de base de K_f sur K, pour tout élément de $\mathrm{GL}_e(K_f)$, on le voit naturellement comme un élément de $\mathrm{GL}_d(K)$ dont la classe de conjugaison ne dépend pas du choix de base.

Lemme.– *Il existe un* $\alpha \in \mathcal{O}_{K_f}^\times$ *tel que* $g' \cdot \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \alpha) \in \mathrm{GL}_e(K_f)$ *soit un élément elliptique dans* $\mathrm{GL}_d(K)$*, et que* $\sum_{i=0}^{f-1} \widetilde{\theta}'(\varphi^i(\alpha)) \neq 0$.

Preuve : Soit α un élément de $\mathcal{O}_{K_f}^\times$ qui engendre K_f sur K. Alors, son polynôme caractéristique $P_\alpha(X)$ sur K a des racines distinctes $a_1, \ldots, a_f$ dans K^{ca}. Le polynôme caractéristique de $g' \cdot \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \alpha) \in \mathrm{GL}_e(K_f)$ sur K est de la forme

$$P(X) = (X^e - a_1\varpi)(X^e - a_2\varpi)\cdots(X^e - a_f\varpi) \in K[X].$$

Il s'agit alors de montrer que $P(X)$ est irréductible sur K. Soit $f(X)$ un polynôme unitaire de $K[X]$ divisant $P(X)$, comme les polynômes $X^e - a_i\varpi$ sont irréductibles dans $K_f[X]$, on a $f(X) = \prod_{i\in I}(X^e - a_i\varpi)$, où I est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, f\}$. Posons $g(X) := \prod_{i\in I}(X - a_i\varpi)$, alors $g(X)$ divise $P_\alpha(X)$ et $f(X) = g(X^e)$. Comme $f(X) \in K[X]$, $g(X)$ l'est aussi. En vertu de la irréductibilité de $P_\alpha(X)$ sur K, on sait que $I = \emptyset$ ou $\{1, \ldots, f\}$. Donc $P(X)$ est irréductible sur K.

Comme θ' est un caractère f-primitif de $\mathbb{F}_{q^f}^\times$, les caractères $\theta' \circ \mathrm{Frob}_q^i$, $0 \leqslant i \leqslant f-1$, sont distincts. D'après Artin, ils sont linéairement indépendants. En vertu du fait que

$$\widetilde{\theta}'(\varphi^i(\alpha)) = \theta'(\varphi^i(\alpha) \pmod{\varpi}) = \theta'(\mathrm{Frob}_q^i(\alpha \pmod{\varpi})),$$

on a $\sum_{i=0}^{f-1} \widetilde{\theta}'(\varphi^i(\alpha)) \neq 0$. □

Choisissons un $\alpha \in \mathcal{O}_{K_f}^\times$ satisfaisant le lemme précédent, et notons

$$g_G := g' \cdot \mathrm{diag}(1, \dots, 1, \alpha)$$

vu comme un élément de $\mathrm{GL}_e(K_f) \hookrightarrow \mathrm{GL}_d(K)$. Fixons un K-injection $K_f \hookrightarrow D$ de sorte qu'il soit normalisé par Π_D, et notons B le centralisateur de K_f dans D. Alors, g_G correspond à une classe de conjugaison d'éléments réguliers elliptiques $\{g_D\}$ de $B^\times \subset D^\times$. On va calculer la trace de g_G (resp. g_D) sur $\pi_i(\theta)$ (resp. $\rho(\widetilde{\theta})$) dans la proposition suivante.

(3.5.7) Proposition.– *On a l'égalité de caractères suivante :*

$$\chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) = (-1)^{d-1+i}\chi_{\rho(\widetilde{\theta})}(g_D) \neq 0.$$

Preuve : Rappelons que $\rho(\widetilde{\theta}) = \mathrm{Ind}_{[D]_f}^{D^\times} \Theta$, où Θ est le caractère de $[D]_f$ défini dans (3.3.5). Comme $g_D \in B^\times \subset [D]_f$ correspond à g_G, $(g_D)^e$ est conjugué à $\alpha\varpi$. Donc, on a $\mathrm{Nr}_{B/K_f}(\Pi_D^i g_D \Pi_D^{-i}) = \Pi_D^i(-1)^{e-1}\alpha\varpi\Pi_D^{-i} = (-1)^{e-1}\varphi^i(\alpha)\varpi$. Alors, par définition,

$$\begin{aligned}\chi_{\rho(\widetilde{\theta})}(g_D) = \chi_{\mathrm{Ind}_{[D]_f}^{D^\times}\Theta}(g_D) &= \sum_{i=0}^{f-1} \Theta(\Pi_D^i g_D \Pi_D^{-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{f-1} \widetilde{\theta}'((-1)^{e-1}\varphi^i(\alpha)\varpi) = \sum_{i=0}^{f-1} \widetilde{\theta}'\big(\varphi^i(\alpha)\big).\end{aligned}$$

Notons $\sigma := \{s_1, \dots, s_e\}$ la facette stable sous g_G sur laquelle g_G agit par la permutation $\{1, \dots, e\} \in \mathfrak{S}_e$. D'après [SS97, Thm. III 4.16 et Lemma III 4.10], on a

$$\chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) = \mathrm{Trace}(g_G | \pi_i(\theta)^{G_\sigma^\dagger}).$$

En vertu du théorème (2.1.9) et la dualité de Poincaré, on a

$$\pi_i(\theta)^{G_\sigma^\dagger} = H_c^{d-1+i}(\tau^{-1}(|\sigma|^*), \mathcal{L}_\theta) = H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|^*), \mathcal{L}_{\theta^{-1}})^\vee,$$

où $\tau : \Omega_K^{d-1,ca} \to |\mathcal{BT}|$ signifie le morphisme de réduction (voir (3.1.1)), et $\mathcal{L}_\theta$ (resp. $\mathcal{L}_{\theta^{-1}}$) désigne le système local sur $\Omega_K^{d-1,ca}$ associé à θ (resp. θ^{-1}).

Notons que l'action de g_G sur $H_c^{d-1+i}(\Sigma_1^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ est induite par l'action naturelle de l'élément $(g_G, \Pi_D^{-f}) \in (GD)^0 := \{(g, \delta) \in G \times D^\times \mid v(g, \delta, 1) = 0\}$ sur Σ_1^{ca} (*cf.* [Dat07, 3.1.5]), grâce au fait que $\Theta(\Pi_D^f) = 1$ (voir (3.5.1)). On a alors

$$\begin{aligned}\chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) &= \mathrm{Trace}\left((g_G, \Pi_D^{-f}) | H_c^{d-1+i}(\tau^{-1}(|\sigma|^*), \mathcal{L}_\theta)\right) \\ &= \mathrm{Trace}\left((g_G^{-1}, \Pi_D^{f}) | H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|^*), \mathcal{L}_{\theta^{-1}})\right).\end{aligned}$$

Lemme.– *Le morphisme de restriction*

$$H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|^*), \mathcal{L}_{\theta^{-1}}) \longrightarrow H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|), \mathcal{L}_{\theta^{-1}})$$

est un isomorphisme.

Preuve : Notons $R\Psi_\eta$ le foncteur de cycles évanescents formel à la Berkovich [Ber96]. D'après Berkovich, il s'agit de montrer que le morphisme de restriction

$$R\Gamma(\overline{\Omega}_\sigma, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_{\theta^{-1}})) \longrightarrow R\Gamma(\overline{\Omega}^0_\sigma, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_{\theta^{-1}}))$$

induit un isomorphisme. Choisissons un sommet $s \in \sigma$, et notons les inclusions

$$j_s : \overline{\Omega}^0_s \hookrightarrow \overline{\Omega}_s,\ i_\sigma : \overline{\Omega}_\sigma \hookrightarrow \overline{\Omega}_s \text{ et } j_\sigma : \overline{\Omega}^0_\sigma \hookrightarrow \overline{\Omega}_\sigma.$$

En vertu des égalités [Wan14, (2.1), (2.4)], on a

$$\begin{aligned} R\Psi_\eta(\mathcal{L}_{\theta^{-1}})|_{\overline{\Omega}_\sigma} &= i^*_\sigma Rj_{s*}\big(R\Psi_\eta(\mathcal{L}_{\theta^{-1}})|_{\overline{\Omega}^0_s}\big) \\ &= i^*_\sigma Rj_{s*}(\overline{p}_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta^{-1}). \end{aligned}$$

Finalement, [Wan13, Lemme 3.2.2] nous dit que

$$\begin{aligned} i^*_\sigma Rj_{s*}(\overline{p}_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta^{-1}) &= Rj_{\sigma*}j^*_\sigma i^*_\sigma Rj_{s*}(\overline{p}_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta^{-1}) \\ &= Rj_{\sigma*}(Rj_{s*}(\overline{p}_{s*}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta^{-1})|_{\overline{\Omega}^0_\sigma}). \end{aligned}$$

On en déduit l'énoncé du lemme. □

Grâce au lemme précédent, on a

$$\chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) = \mathrm{Trace}\left((g_G^{-1}, \Pi_D^f)|H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|), \mathcal{L}_{\theta^{-1}})\right).$$

On va considérer un certain sous-schéma formel de $\widehat{\Omega} := \widehat{\Omega}^{d-1}_{\mathcal{O}}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}}\widehat{\mathcal{O}^{ca}}$ afin de calculer cette trace.

Soit $\sigma = \{\varpi\Lambda_k \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_k\}$ un k-simplexe. On dit que σ est de *type* $(e_0, \ldots, e_k)$ si $e_0 = \dim_{\mathbb{F}_q}\Lambda_0/\varpi\Lambda_k$ et $e_i = \dim_{\mathbb{F}_q}\Lambda_i/\Lambda_{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On dit de plus que σ est une f*-facette*, si $f|e_i,\ \forall i$. Lorsque $e_i = f\ \forall i$ et $k = e-1$, on dit que σ est une f*-facette maximale*. On note $F(f)$ l'ensemble de f-facettes, et $F(f)^c := \mathcal{BT}\backslash F(f)$.

Soit $\sigma = \{s_0, \ldots, s_k\} \in F(f)$, on note

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}^f_\sigma :&= \overline{\Omega}_\sigma \backslash \bigcup_{\sigma\subset\omega, \omega\in F(f)^c} \overline{\Omega}_\omega \\ &= \bigcup_{\sigma\subset\omega,\omega\in F(f)} \overline{\Omega}^0_\omega. \end{aligned}$$

Il est évident que $\overline{\Omega}^f_\sigma = \overline{\Omega}^f_{s_0} \cap \cdots \cap \overline{\Omega}^f_{s_k}$, et $\overline{\Omega}^f_\sigma = \overline{\Omega}^0_\sigma$ si σ est une f-facette maximale. Pour s un sommet de $\mathcal{BT}$, $\overline{\Omega}^f_s = \overline{\Omega}_s \backslash \bigcup_{s\in\omega,\omega\in F(f)^c}\overline{\Omega}_\omega$ est une sous-variété ouverte de $\overline{\Omega}_s$, donc elle est lisse.

Notons $\overline{\Omega}(f) := \bigcup_{s\in\mathcal{BT}^\circ}\overline{\Omega}^f_s$ une variété ouverte de la fibre spéciale $\overline{\Omega}$ de $\widehat{\Omega}$, et $\Omega(f) := \mathrm{sp}^{-1}(\overline{\Omega}(f))$ où sp désigne le morphisme de spécialisation (voir (3.1.1)). Posons $\widehat{\Omega}(f)$ le complété de $\widehat{\Omega}$ le long de $\overline{\Omega}(f)$, alors $\Omega(f)$ s'identifie à la fibre générique de $\widehat{\Omega}(f)$, *cf.* [Ber96, Prop. 1.3].

Calculons le groupe de cohomologie $H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|), \mathcal{L}_{\theta^{-1}})$ en utilisant ce modèle entier.

$$\Omega(f) \xhookrightarrow{j} \widehat{\Omega}(f) \xhookleftarrow{i} \overline{\Omega}(f)$$

Notons tout d'abord que le faisceau $\mathcal{L}_{\theta^{-1}}$ se prolonge à $\widehat{\Omega}(f)$, i.e. il existe un système local de rang un $\widehat{\mathcal{L}}_{\theta^{-1}}$ sur $\widehat{\Omega}(f)$ tel que $j^*\widehat{\mathcal{L}}_{\theta^{-1}} \cong \mathcal{L}_{\theta^{-1}}$. En effet, d'après (3.1.5), pour chaque sommet $s \in \mathcal{BT}^\circ$, $\mathcal{L}_{\theta^{-1}}$ se prolonge en un faisceau sur $\overline{\Omega}^0_s$, qui est isomorphe au système local $\mathcal{F}^{\mathbf{w}}_{\theta^{-1}}$ dans [BR03, Thm. 7.7], ici $\mathbf{w} = (1, \ldots, d) \in \mathfrak{S}_d$. Alors, d'après *loc. cit.*, si ω est une f-facette contenant s, on sait que $\mathcal{F}^{\mathbf{w}}_{\theta^{-1}}$ se prolonge sur la strate $\overline{\Omega}^0_\omega$. C'est-à-dire le système local $\mathcal{L}_{\theta^{-1}}$ se prolonge sur toutes les $\overline{\Omega}^0_\omega$, pour $\omega \in F(f)$, donc il se prolonge sur $\overline{\Omega}(f)$, car $\overline{\Omega}(f) = \bigcup_{\omega\in F(f)} \overline{\Omega}^0_\omega$. Comme $\widehat{\Omega}(f)$ est ϖ-adiquement complet, ce faisceau se relève uniquement comme un faisceau $\widehat{\mathcal{L}}_{\theta^{-1}}$ sur $\widehat{\Omega}(f)$ prolongeant $\mathcal{L}_{\theta^{-1}}$.

Notons $R\Psi^f_\eta$ le foncteur de cycles évanescents formel à la Berkovich [Ber96] associé au modèle entier $\widehat{\Omega}(f)$ de $\Omega(f)$. D'après Berkovich, on a

$$\begin{aligned} H^{d-1-i}(\tau^{-1}(|\sigma|), \mathcal{L}_{\theta^{-1}}) &= \mathbb{H}^{d-1-i}(\overline{\Omega}^f_\sigma, R\Psi^f_\eta \mathcal{L}_{\theta^{-1}}) \\ &= \mathbb{H}^{d-1-i}(\overline{\Omega}^0_\sigma, R\Psi^f_\eta \mathcal{L}_{\theta^{-1}}), \end{aligned}$$

car σ est f-maximale. En vertu de la formule de projection, on obtient que

$$R\Psi^f_\eta \mathcal{L}_{\theta^{-1}}|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} = \widehat{\mathcal{L}}_{\theta^{-1}}|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} \otimes^L R\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma}.$$

Rappelons que dans ce cas (où $\widehat{\Omega}(f)$ est un modèle semi-stable de $\Omega(f)$), on connaît les faisceaux de cycles évanescents (*cf.* [Ill94, Thm. 3.2])

$$\begin{aligned} R^0\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} &= \overline{\mathbb{Q}}_\ell; \\ R^1\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} &= (\oplus^e_{i=1}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)_i/\overline{\mathbb{Q}}_\ell \text{ diagonal})(-1); \\ R^q\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} &= \bigwedge^q R^1\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma}. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Grâce à [Lus76, Lemma 3], $\overline{\Omega}^0_\sigma$ est isomorphe à $(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q})^e$. Donc, on a

$$H^q_c(\overline{\Omega}^0_\sigma, \widehat{\mathcal{L}}_\theta|_{\overline{\Omega}^0_\sigma}) = \begin{cases} H^{f-1}_c(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'})^{\otimes e}, & \text{si } q = e(f-1)\,; \\ 0, & \text{si } q \neq e(f-1). \end{cases} \tag{3.5.9}$$

Ici, $\mathcal{L}_{\theta'}$ désigne le système local sur $\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ associé au caractère $\theta' : \mathbb{F}^\times_{q^f} \to \overline{\mathbb{Q}}^\times_\ell$ qui est f-primitif. En particulier, en tant que représentation de $\mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q)$, $H^{f-1}_c(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'})$ est la représentation cuspidale $\overline{\pi}_f(\theta')$.

Maintenant, on peut terminer le calcul de la trace de g_G.

$$\begin{aligned} \chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) &= \mathrm{Trace}\left((g_G^{-1}, \Pi^f_D)|\mathbb{H}^{d-1-i}(\overline{\Omega}^0_\sigma, R\Psi^f_\eta \mathcal{L}_{\theta^{-1}})\right) \\ &= \mathrm{Trace}\left((g_G^{-1}, \Pi^f_D)|H^{e(f-1)}(\overline{\Omega}^0_\sigma, \widehat{\mathcal{L}}_{\theta^{-1}}|_{\overline{\Omega}^0_\sigma} \otimes R^{e-1-i}\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma})\right) \\ &= \mathrm{Trace}\left((g_G, \Pi^{-f}_D)|H^{f-1}_c(\Omega^{f-1}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathcal{L}_{\theta'})^{\otimes e}\right) \cdot \mathrm{Trace}\left((g_G^{-1}, \Pi^f_D)|R^{e-1-i}\Psi^f_\eta \overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}^0_\sigma}\right) \end{aligned}$$

Comme le morphisme de période $\xi_{Dr} : \mathcal{M}^{ca}_{Dr,0} \to \Omega^{d-1,ca}_K$ est $G \times D^\times$-équivariant si l'on munit $\Omega^{d-1,ca}_K$ de l'action naturelle de G et de l'action triviale de $D^\times$ (voir [Dat07, 3.1.1 (ii)]), (g_G^{-1}, Π^f_D)

permute les sommets de $\sigma = \{s_1, \ldots, s_e\}$ comme la permutation $(1, \ldots, e) \in \mathfrak{S}_e$. Donc il agit sur $R^1\Psi_\eta^f\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}_\sigma^0}$ via cette permutation. Il s'ensuit que

$$\mathrm{Trace}((g_G^{-1}, \Pi_D^f)|R^{e-1-i}\Psi_\eta^f\overline{\mathbb{Q}}_\ell|_{\overline{\Omega}_\sigma^0}) = (-1)^{e-1-i}.$$

D'après la règle de Koszul [Del77, Sommes trig. 2.4*, Cycle 1.3], on sait que (g', Π_D^{-f}) agit sur $H_c^{f-1}(\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{f-1}, \mathcal{L}_{\theta'})^{\otimes e}$ par la formule

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_e \mapsto \widetilde{\theta}'(\mathrm{Nr}_{B/K_f}(\Pi_D^{-f})) \cdot (-1)^{(f-1)^2(e-1)} v_2 \otimes \cdots \otimes v_e \otimes v_1.$$

En vertu de la formule de caractère pour l'induite tensorielle, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Trace}\left((g_G, \Pi_D^{-f})|H_c^{f-1}(\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{f-1}, \mathcal{L}_{\theta'})^{\otimes e}\right)\\
&= \widetilde{\theta}'(\mathrm{Nr}_{B/K_f}(\Pi_D^{-f})) \cdot (-1)^{(f-1)^2(e-1)}\, \mathrm{Trace}(\alpha|H_c^{f-1}(\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{f-1}, \mathcal{L}_{\theta'}))\\
&= (-1)^{(f-1)^2(e-1)}\, \mathrm{Trace}(\alpha|H_c^{f-1}(\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{f-1}, \mathcal{L}_{\theta'})).
\end{aligned}$$

La dernière trace a été calculée par Deligne et Lusztig [DL76, Cor. 7.2], elle est de la forme

$$(-1)^{f-1}\sum_{i=0}^{f-1}\theta'(\mathrm{Frob}_q^i(\alpha \pmod{\varpi})).$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
\chi_{\pi_i(\theta)}(g_G) &= (-1)^{e-1-i}\cdot(-1)^{(f-1)^2(e-1)}\cdot(-1)^{f-1}\sum_{i=0}^{f-1}\theta'(\mathrm{Frob}_q^i(\alpha \pmod{\varpi}))\\
&= (-1)^{d-1-i}\cdot\sum_{i=0}^{f-1}\widetilde{\theta}'(\varphi^i(\alpha))\\
&= (-1)^{d-1-i}\cdot\chi_{\rho(\widetilde{\theta})}(g_D).
\end{aligned}$$

□

(3.5.10) Proposition.– *On a $\pi_0(\theta) \cong \mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$, où* JL *désigne la correspondance de Jacquet-Langlands.*

Preuve : Grâce au corollaire (3.5.4), $\pi_0(\theta)$ est une série discrète de G. D'après la proposition (3.5.7), on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\chi_{\pi_0(\theta)}(g_G) &= (-1)^{d-1}\chi_{\rho(\widetilde{\theta})}(g_D)\\
&= \chi_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))}(g_G).
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

D'après 3.5.9, les deux séries discrètes $\pi_0(\theta)$ et $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$ contiennent le même type simple $(J_\theta, \lambda_\theta)$, où J_θ est isomorphe à G_σ^+ pour σ une facette f-maximale, et λ_θ est la représentation d'inflation de J_θ, via le morphisme $J_\theta \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_f(\mathbb{F}_q)^e$, de la représentation $(\overline{\pi}_f(\theta'))^{\otimes e}$, *cf.* [BH11, 5.2]. Donc, leurs types simples étendus [BH11] sont conjugués à un caractère non-ramifié près. Plus précisément, un type simple étendu qui prolonge $(J_\theta, \lambda_\theta)$ est un couple $(\mathbf{J}_\theta, \mathbf{\Lambda})$, où $\mathbf{J}_\theta$ s'identifie au stabilisateur de σ dans G, et $\mathbf{\Lambda}$ est une représentation de $\mathbf{J}_\theta$ telle que $\mathbf{\Lambda}|_J \cong \lambda_\theta$, *cf.* [BH11, 4.1]. D'après [BH11, Prop. 7], on a une bijection entre les séries discrètes contenant $(J_\theta, \lambda_\theta)$ et les types simples étendus prolongeant $(J_\theta, \lambda_\theta)$. Notons $(\mathbf{J}_\theta, \mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)})$ (resp. $(\mathbf{J}_\theta, \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))})$) le type simple étendu associé à $\pi_0(\theta)$ (resp. $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$). Grâce à [BH11, Lemma 10], il existe un caractère non-ramifié χ de $K^\times$ tel que $\mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)} \cong \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))} \otimes \chi_{\mathbf{J}_\theta}$, où $\chi_{\mathbf{J}_\theta} = \chi \circ \det|_{\mathbf{J}_\theta}$.

Comme le type simple étendu $(\mathbf{J}_\theta, \mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)})$ (resp. $(\mathbf{J}_\theta, \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))})$) est de multiplicité un dans $\pi_0(\theta)$ (resp. $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$), *cf.* [BH11], on sait que $\pi_0(\theta)^{G_\sigma^\dagger} \cong \mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)}$ (resp. $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))^{G_\sigma^\dagger} \cong \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))}$).

Notons que $g_G \in \mathbf{J}_\theta$. D'après [SS97, Thm. III 4.16 et Lemma III 4.10], on a

$$\chi_{\pi_0(\theta)}(g_G) = \mathrm{Trace}(g_G|\mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)}),$$

et idem pour $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$. Donc, en vertu de 3.5.11, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Trace}(g_G|\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))}) &= \mathrm{Trace}(g_G|\mathbf{\Lambda}_{\pi_0(\theta)}) \\ &= \mathrm{Trace}(g_G|\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))} \otimes \chi_{\mathbf{J}_\theta}) \\ &= \mathrm{Trace}(g_G|\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))}) \cdot \chi_{\mathbf{J}_\theta}(g_G).\end{aligned}$$

Donc $\chi_{\mathbf{J}_\theta}(g_G) = 1$. Il s'ensuit que $\chi_{\mathbf{J}_\theta} = 1$. □

L'énoncé du théorème (3.5.6) découle de la proposition suivante.

(3.5.12) PROPOSITION.– *Nous avons* $\mathrm{LJ}(\pi_i(\theta)) = (-1)^i[\rho(\widetilde{\theta})]$, $\forall i \in \{1, \ldots, e-1\}$.

Preuve : Grâce à la proposition (3.5.3), $[\rho(\widetilde{\theta}_i)] = (-1)^i \mathrm{LJ}(\pi_i(\theta))$ pour un caractère modéré $\widetilde{\theta}_i$ prolongeant θ. Comme $\widetilde{\theta}_i$ prolonge θ, le support cuspidal de $\pi_i(\theta)$ contient le type simple $((\mathrm{GL}_f(\mathcal{O}))^e, (\overline{\pi}_f(\theta'))^{\otimes e})$ du Levi standard. Comme les représentations elliptiques $\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)} (\cong \pi_i(\theta))$ et $\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ ont le même support cuspidal, on obtient que $\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ contient le type simple $(J_\theta, \lambda_\theta)$.

D'après [Dat07, 2.1.14], on a l'égalité suivante

$$\chi_{\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}}(g_G) = (-1)^{|I|} \chi_{\pi^I_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}}(g_G).$$

En vertu des propositions (3.5.7) et (3.5.10), nous avons

$$\begin{aligned}\chi_{\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}}(g_G) &= \chi_{\pi_0(\theta)}(g_G) \\ &= \chi_{\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))}(g_G).\end{aligned}$$

En résumé, les deux séries discrètes $\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)}$ et $\mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$ contiennent le même type simple $(J_\theta, \lambda_\theta)$, et leurs caractères ont la même valeur en l'élément g_G. Comme dans la preuve de la proposition (3.5.10), ils sont isomorphes, i.e. $\pi^\emptyset_{\rho(\widetilde{\theta}_i)} \cong \mathrm{JL}(\rho(\widetilde{\theta}))$. Donc $\rho(\widetilde{\theta}_i) \cong \rho(\widetilde{\theta})$. □

□

Références

[Ber96] Vladimir G. Berkovich : Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2): 367–390, 1996.

[BH11] Colin J. Bushnell et Guy Henniart : Explicit functorial correspondences for level zero representations of p-adic linear groups. *J. Number Theory*, 131(2):309–331, 2011.

[BK93] Colin J. Bushnell et Philip C. Kutzko : *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, volume 129 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[Bon11] Cédric Bonnafé : A progenerator for representations of $\mathbf{SL_n}(\mathbb{F}_q)$ in transverse characteristic. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(13-14):731–733, 2011.

[Boy09] Pascal Boyer : Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. *Invent. Math.*, 177(2):239–280, 2009.

[Boy13] Pascal Boyer : La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est sans torsion. *disponible sur http ://www.math.univ-paris13.fr/∼boyer*, 2013.

[BR03] Cédric Bonnafé et Raphaël Rouquier : Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (97):1–59, 2003.

[BR06] Cédric Bonnafé et Raphaël Rouquier : Coxeter orbits and modular representations. *Nagoya Math. J.*, 183:1–34, 2006.

[BT72] F. Bruhat et J. Tits : Groupes réductifs sur un corps local I, Données radicielles valuées. *Inst. Hautes Ét. Sci. Publ. Math.*, 41:5–251, 1972.

[Dat06] Jean-François Dat : Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(1):1–74, 2006.

[Dat07] Jean-François Dat : Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169(1):75–152, 2007.

[Dat12] Jean-François Dat : Lefschetz operator and local Langlands mod ℓ : the regular case. *Nagoya Math. J.*, 208:1–38, 2012.

[Dat14] J.-F. Dat : Dependence of the Deligne-Lusztig induction on the parabolic subgroup. *en préparation*, 2014.

[Del77] P. Deligne : *Cohomologie étale.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569. Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 1/2.

[Dip85] Richard Dipper : On the decomposition numbers of the finite general linear groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 290(1):315–344, 1985.

[DL76] P. Deligne et G. Lusztig : Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1):103–161, 1976.

[DM85] François Digne et Jean Michel : Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (20):iv+144, 1985.

[DOR10] Jean-François Dat, Sascha Orlik et Michael Rapoport : *Period domains over finite and p-adic fields*, volume 183 de *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[Dri74] V. G. Drinfel′d : Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136):594–627, 656, 1974.

[Dri76] V. G. DRINFEL′D : Coverings of p-adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2):29–40, 1976.

[Far07] Laurent FARGUES : Application de Hodge-Tate duale d'un groupe de Lubin-Tate, immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire et filtrations de ramification. *Duke Math. J.*, 140(3):499–590, 2007.

[Far08] Laurent FARGUES : L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. *In L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 de *Progr. Math.*, pages 1–325. Birkhäuser, Basel, 2008.

[FS82] Paul FONG et Bhama SRINIVASAN : The blocks of finite general linear and unitary groups. *Invent. Math.*, 69(1):109–153, 1982.

[Har97] Michael HARRIS : Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel′d upper half spaces ; elaboration of Carayol's program. *Invent. Math.*, 129(1):75–119, 1997.

[Ill94] Luc ILLUSIE : Autour du théorème de monodromie locale. *Astérisque*, (223), 1994. Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[Jam86] Gordon JAMES : The irreducible representations of the finite general linear groups. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 52(2):236–268, 1986.

[JK81] Gordon JAMES et Adalbert KERBER : *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.

[Lus76] G. LUSZTIG : On the finiteness of the number of unipotent classes. *Invent. Math.*, 34(3): 201–213, 1976.

[MS10] Ralf MEYER et Maarten SOLLEVELD : Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings. *J. Reine Angew. Math.*, 647:115–150, 2010.

[RZ96] M. RAPOPORT et Th. ZINK : *Period spaces for p-divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[SS91] P. SCHNEIDER et U. STUHLER : The cohomology of p-adic symmetric spaces. *Invent. Math.*, 105(1):47–122, 1991.

[SS93] P. SCHNEIDER et U. STUHLER : Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field. *J. Reine Angew. Math.*, 436:19–32, 1993.

[SS97] Peter SCHNEIDER et Ulrich STUHLER : Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (85):97–191, 1997.

[Vig96] Marie-France VIGNÉRAS : *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, volume 137 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.

[Vig97] Marie-France VIGNÉRAS : Cohomology of sheaves on the building and R-representations. *Invent. Math.*, 127(2):349–373, 1997.

[Wan13] Haoran WANG : Sur la cohomologie des compactifications de variétés de Deligne-Lusztig. *À paraître dans Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, arXiv :1310.7259, 2013.

[Wan14] Haoran WANG : L'espace de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I. *À paraître dans Math. Z.*, arXiv :1401.0530, 2014.

[Zhe08] Weizhe ZHENG : Sur la cohomologie des faisceaux l-adiques entiers sur les corps locaux. *Bull. Soc. Math. France*, 136(3):465–503, 2008.

Haoran Wang, Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
haoran.wang@mpim-bonn.mpg.de