

L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale I

Haoran Wang

Résumé

Soit K une extension finie de \mathbb{Q}_p . On étudie la géométrie et la cohomologie du revêtement modéré de l'espace symétrique de Drinfeld sur K . On prouve, de manière purement locale, que la cohomologie de degré médian réalise la correspondance de Langlands locale et la correspondance de Jacquet-Langlands locale pour les représentations supercuspidales de niveau zéro.

Abstract

Let K be a finite extension of \mathbb{Q}_p . We study the geometry and cohomology of the tamely ramified cover of Drinfeld's symmetric space over K . We prove, in a purely local way, that the cohomology in middle degree realises the local Langlands correspondence and local Jacquet-Langlands correspondence for the depth zero supercuspidal representations.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Sur le revêtement modéré de l'espace symétrique de Drinfeld	3
2.1	Rappels sur l'espace symétrique de Drinfeld	3
2.2	Le revêtement modéré Σ^{ca}	7
2.3	Le prolongement de Σ^{ca} au-dessus d'un sommet	10
2.4	Un calcul du torseur $\overline{\Sigma}_s^0$	13
2.5	Le lien avec les variétés de Deligne-Lusztig	17
3	La partie supercuspidale de la cohomologie	21
3.1	La démonstration de Théorème A.	21
	Références	27

1 Introduction

Soit K un corps local de caractéristique résiduelle p , d'anneau des entiers \mathcal{O} et de corps résiduel \mathbb{F}_q . Fixons une clôture algébrique K^{ca} de K et un entier $d \geq 2$. On dispose de trois groupes $G := \mathrm{GL}_d(K)$, D^\times les éléments inversibles dans l'algèbre à division D qui est centrale sur K et est d'invariant $1/d$, et W_K le groupe de Weil de K .

Dans [Dri74], Drinfeld a introduit l’“espace symétrique p -adique” de dimension $d-1$, Ω_K^{d-1} , défini comme le complémentaire de tous les hyperplans K -rationnels dans l’espace projectif \mathbb{P}_K^{d-1} . Cet espace est un espace rigide-analytique muni d’une action continue de G . Peu après, il a découvert, dans [Dri76], un système projectif de revêtements étales $\{\Sigma_n\}$ (la tour de Drinfeld) de Ω_K^{d-1} munis des actions de $G \times D^\times \times W_K$. Drinfeld et Carayol [Car90] ont conjecturé que la limite inductive de la cohomologie de Σ_n se décompose en une somme directe sur les séries discrètes π de G , de $\pi \otimes \text{LJ}(\pi) \otimes \sigma(\pi)$, où $\text{LJ}(\pi)$ désigne la représentation de D^\times associée à π par la correspondance de Jacquet-Langlands, et $\sigma(\pi)$ est l’unique quotient irréductible de la représentation de Weil-Deligne $L(\pi)$ associée à π par la correspondance de Langlands normalisée à la Hecke. Lorsque π est supercuspidale, $\sigma(\pi)$ coïncide avec $L(\pi)$.

La partie *supercuspidale* de cette conjecture ainsi que l’énoncé analogue concernant la tour de Lubin-Tate $\{\mathcal{M}_{LT,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (la conjecture de Deligne-Carayol) ont été explorés dans les quatres articles [Har97] [Boy99] [HT01] et [Hau05], en caractéristique nulle ou en égales caractéristique, par voie *globale* en utilisant les variétés de Shimura ou de Drinfeld.

Comme la théorie de Lubin-Tate classique, il est naturel de chercher une preuve de voie *locale* et plus explicite de ces résultats. L’objet de cet article est d’étudier par voie *locale* la partie *supercuspidale* de la cohomologie de Σ_1 (par abus de notation, on le note Σ dans les sections qui suivent) lorsque K est de caractéristique nulle (cette étude est aussi valable pour K d’égale caractéristique). La partie *non-supercuspidale* sera l’objet de [Wan14]. Pour énoncer nos résultats, on utilise une variante de Σ_1 notée $\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^\mathbb{Z}$ qui est une réunion disjointe de d -copies de Σ_1 . Le théorème principal est le suivant :

Théorème A. (Théorème (3.1.6)) *Soit ρ une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentation irréductible de niveau zéro de D^\times de caractère central trivial sur $\varpi^\mathbb{Z}$ telle que $\text{JL}(\rho)$ soit une représentation supercuspidale de G par la correspondance de Jacquet-Langlands. Alors, en tant que représentations de $G \times W_K$, on a*

$$\text{Hom}_{D^\times}(\rho, H_c^i(\mathcal{M}_{Dr,1}/\varpi^\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \cong \begin{cases} \text{JL}(\rho) \otimes L(\text{JL}(\rho)), & \text{si } i = d-1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notre preuve repose sur l’étude de la géométrie de Σ_1 . Rappelons qu’il existe une application $\tau : \Omega_K^{d-1} \rightarrow |\mathcal{BT}|$, où $|\mathcal{BT}|$ désigne la réalisation géométrique de l’immeuble de Bruhat-Tits semi-simple \mathcal{BT} associé à G . En prenant la composition avec la transition $p : \Sigma_1 \rightarrow \Omega_K^{d-1}$, on obtient un morphisme $\nu : \Sigma_1 \rightarrow |\mathcal{BT}|$. Comme il n’existe pas de notion de “base de Drinfeld” à l’instant, on construit sur chaque sommet $s \in \mathcal{BT}$ un modèle entier *lisse* de $\nu^{-1}(|s|)$ dans (2.3.8), et on obtient en particulier le résultat suivant :

Théorème B. (Théorème (2.5.6)) *Si s est un sommet de \mathcal{BT} , on a un isomorphisme :*

$$H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\text{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}, \Lambda),$$

où $|s|^* = \cup_{\sigma \in \mathcal{O}} |\sigma|$ et $\text{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ désigne le revêtement de Deligne-Lusztig Coxeter associé à $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$,

Ce travail est inspiré par celui de Genestier [Gen] sur l’espace de Drinfeld modéré lorsque K est de caractéristique positive, et par celui de Yoshida [Yos10] sur le niveau modéré de la tour de Lubin-Tate. Notre résultat est néanmoins plus précis que celui de Yoshida qui ne décrit que l’action de G et du groupe d’inertie. Notre démonstration est inspirée par Teitelbaum [Tei90] qui étudie la géométrie de Σ_1 lorsque $d = 2$. Dans [Str08], Strauch a étudié la correspondance de Jacquet-Langlands dans la tour de Lubin-Tate.

Nous décrivons brièvement les contenus de différents paragraphes. Dans les paragraphes 2.1 et 2.2, on rappelle l'espace de Drinfeld Ω^{d-1} et son revêtement modéré Σ_1 . On démontre au paragraphe 2.2, en employant un lemme de Zheng [Zhe08], que l'étude de la cohomologie sans support $H^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$ se ramène à celle de $H^q(\nu^{-1}(|s|), \Lambda)$. Au paragraphe 2.3, on construit un modèle entier *lisse* de $\nu^{-1}(|s|)$, défini sur une extension modérément ramifiée du complété de l'extension non ramifiée maximale de K , dont la fibre spéciale $\overline{\Sigma}_s^0$ calcule la cohomologie sans support de $\nu^{-1}(|s|)$. Au cours de la preuve, on utilise la classification, due à Raynaud [Ray74], des schémas en groupes de type (p, \dots, p) . Aux paragraphes 2.4 et 2.5, on démontre que $\overline{\Sigma}_s^0 \cong \mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ (et en conséquence le Théorème B.), en calculant leurs classes de μ_{q^d-1} -torseur dans $H^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^d-1})$, où $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ désigne l'espace de Drinfeld sur le corps fini \mathbb{F}_q . Le théorème A. est alors obtenu dans la section 3. Pour réaliser la correspondance de Langlands locale dans la cohomologie, on a besoin d'un résultat sur les composantes connexes de Σ_1 . Ce résultat étant connu dans le cas d'égales caractéristiques [Gen96], peut être obtenu par le travail de Chen [Che13] sur le côté de Lubin-Tate, en vertu d'isomorphisme de Faltings-Fargues, et il nous permet de descendre la fibre spéciale $\overline{\Sigma}_s^0$, et donc de décrire l'action de Frobenius.

Remerciements : Je remercie profondément mon directeur de thèse Jean-François Dat de me proposer ce sujet et ses constants encouragements. Je tiens à exprimer ma gratitude à Miaofen Chen, Bas Edixhoven, Jared Weinstein et Weizhe Zheng pour leurs enrichissantes discussions. Je remercie Jared Weinstein pour son intérêt sur ce travail et pour m'avoir invité à Boston. Enfin, je remercie le referee anonyme pour ses commentaires.

2 Sur le revêtement modéré de l'espace symétrique de Drinfeld

Dans cette section, on rappelle tout d'abord l'espace symétrique p -adique de Drinfeld introduit dans [Dri74]. C'est un espace rigide-analytique dont un modèle entier paramètre certains groupes p -divisibles [Dri76]. On rappelle le niveau modéré de la tour de Drinfeld. Le lecteur pourra consulter [BC91] pour une démonstration détaillée de l'interprétation modulaire lorsque $d = 2$. Ensuite, on donne des résultats sur la géométrie du niveau modéré.

2.1 Rappels sur l'espace symétrique de Drinfeld

(2.1.1) Soit $d \geq 2$ un entier. Fixons un corps p -adique K , une extension finie de \mathbb{Q}_p , et notons \mathcal{O} son anneau des entiers et ϖ une uniformisante de \mathcal{O} . Le corps résiduel $\mathcal{O}/\varpi \simeq \mathbb{F}_q$ est une extension finie de \mathbb{F}_p , son degré $[\mathbb{F}_q : \mathbb{F}_p]$ sera noté f . On fixe K^{ca} une clôture algébrique de K et $\widehat{K^{ca}}$ son complété par l'unique norme qui étend celle de K . Soient D l'algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$ et \mathcal{O}_D l'anneau des entiers de D . Soient K_d une extension non-ramifiée de degré d de K contenue dans D , \mathcal{O}_d l'anneau des entiers de K_d . Il existe un élément $\Pi_D \in \mathcal{O}_D$ tel que \mathcal{O}_D soit engendré sur \mathcal{O}_d par Π_D vérifiant les relations $\Pi_D^d = \varpi$ et $\Pi_D a = \sigma(a) \Pi_D$, $\forall a \in \mathcal{O}_d$, où $\sigma \in \mathrm{Gal}(K_d/K)$ le relèvement de Frobenius. On note \check{K} le complété de l'extension non-ramifiée maximale de K dans la clôture algébrique K^{ca} , $\check{\mathcal{O}}$ son anneau des entiers, on a donc $\check{K} = \check{\mathcal{O}}[1/p]$.

Notons \mathcal{BT} l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple de $G := \mathrm{GL}_d(K)$, c'est un complexe simplicial dont l'ensemble de sommets s'identifie à l'ensemble des classes d'homothétie de \mathcal{O} -réseaux dans l'espace vectoriel K^d . Un ensemble de sommets $\sigma = \{s_0, \dots, s_k\}$ forme un

k -simplexe s'il existe des représentants Λ_i de $s_i \forall 0 \leq i \leq k$ tels que $\varpi\Lambda_k \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_k$. On notera \mathcal{BT}_k l'ensemble des k -simplexes. On désignera $|\mathcal{BT}|$ la réalisation géométrique de \mathcal{BT} . Pour $\sigma = \{\varpi\Lambda_k \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_k\}$ un k -simplexe de \mathcal{BT} , notons $|\sigma| \subset |\mathcal{BT}|$ sa facette associée : on a pour toute paire de simplexes $\sigma' \subset \sigma$, $|\sigma'| \subset |\sigma|$, où $|\sigma|$ désigne l'adhérence de $|\sigma|$. On notera aussi $|\sigma|^* \subset |\mathcal{BT}|$ la réunion de toutes les facettes $|\sigma'|$ avec σ' contenant σ , i.e. $|\sigma|^* = \bigcup_{\sigma \subset \sigma'} |\sigma'|$. Évidemment, si $\sigma = \{s_0, \dots, s_k\}$ avec $s_i \in \mathcal{BT}_0$ des sommets, on a $|\sigma|^* = \bigcap_i |s_i|^*$.

Notons Ω_K^{d-1} l'espace symétrique de Drinfeld de dimension $d-1$, défini dans [Dri74] comme un sous K -espace rigide-analytique de l'espace projectif \mathbb{P}_K^{d-1} . Il s'identifie au complémentaire de l'ensemble des hyperplans K -rationnels dans \mathbb{P}_K^{d-1} . On sait que les points de $|\mathcal{BT}|$ s'identifient aux classes d'homothétie de *normes* sur le K -espace vectoriel K^d (cf. [GI63]). Ceci nous fournit une *application de réduction* $\tau : \Omega_K^{d-1} \rightarrow |\mathcal{BT}|$ (voir [DH87]). On désignera par le même symbole Ω_K^{d-1} le K -espace analytique à la Berkovich correspondant, et il est naturellement muni d'une action *continue* de G triviale sur le centre (cf. [Ber95]). On obtient alors un espace analytique $\Omega_K^{d-1, ca} := \Omega_K^{d-1} \widehat{\otimes}_K \widehat{K}^{ca}$ muni d'une action continue du groupe de Weil W_K de K en étendant les scalaires à \widehat{K}^{ca} .

(2.1.2) Dans un travail non publié, Deligne introduit un modèle semi-stable $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ de Ω_K^{d-1} sur $\mathrm{Spf}\mathcal{O}$, en recollant les modèles locaux (au-dessus des simplexes de \mathcal{BT}) que nous rappelons ci-dessous (cf. [Rap90]).

On note alors $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}$ le schéma formel classifiant les classes d'isomorphie de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda_{-1} = \varpi\Lambda_k & \hookrightarrow & \Lambda_0 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_k \\ \alpha_k/\varpi \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & & & \downarrow \alpha_k \\ L_k & \xrightarrow{\Pi} & L_0 & \xrightarrow{\Pi} & \dots & \xrightarrow{\Pi} & L_k \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & & \times \varpi & \end{array}$$

sur un \mathcal{O} -schéma $S = \mathrm{Spec}(R)$, où $R \in \mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}}$, la catégorie des \mathcal{O} -algèbres sur lesquelles ϖ est nilpotent. Les L_i sont des fibrés en droites sur S , les applications α_i sont des homomorphismes de \mathcal{O} -modules, les morphismes Π sont des homomorphismes de \mathcal{O}_S -modules, vérifiant la condition : pour tout $x \in \mathrm{Spec}(R)$, on a

$$\mathrm{Ker}\{\alpha_i(x) : \Lambda_i/\varpi\Lambda_i \rightarrow L_i \otimes_R k(x)\} \subset \Lambda_{i-1}/\varpi\Lambda_i,$$

où $k(x)$ est le corps résiduel de x . L'objet universel sur $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}$ sera noté :

$$\begin{array}{ccccccc} \varpi\Lambda_k & \hookrightarrow & \Lambda_0 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_k \\ \alpha_k/\varpi \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & & & \downarrow \alpha_k \\ \mathcal{L}_k & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\Pi} & \dots & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{L}_k \end{array}$$

FAIT.— (cf. [Gen96, (III.1)]) On note $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma}$ le \mathcal{O} -schéma obtenu à partir de $\mathbb{P}(\Lambda_k) = \mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}(\Lambda_k))$ en l'éclatant successivement le long du sous-schéma fermé $\mathbb{P}(\Lambda_k/\Lambda_{k-1})$ de sa fibre spéciale $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q = \mathbb{P}(\Lambda_k/\varpi\Lambda_k)$, puis en éclatant le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_k/\Lambda_{k-2})$, puis le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_k/\Lambda_{k-3})$ et ainsi de suite. Comme expliqué dans [Gen96, (III.1)], $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma}$ représente un foncteur H_{σ} sur $\mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}}$ qui associe à $R \in \mathrm{Nilp}_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc}
\Lambda_{-1} = \varpi \Lambda_k & \hookrightarrow & \Lambda_0 & \hookrightarrow & \dots & \hookrightarrow & \Lambda_k \\
\alpha_k / \varpi \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & & & \downarrow \alpha_k \\
L_k & \xrightarrow{\Pi} & L_0 & \xrightarrow{\Pi} & \dots & \xrightarrow{\Pi} & L_k \\
& & & & \searrow & & \nearrow \\
& & & & & \times \varpi &
\end{array}$$

où les L_i sont des R -modules inversibles, les applications α_i sont des homomorphismes de \mathcal{O} -modules, les morphismes Π sont des homomorphismes de R -modules, tels que pour tout i le morphisme B -linéaire

$$\alpha_i \otimes \text{Id}_R : \Lambda_i \otimes_{\mathcal{O}} R \longrightarrow L_i$$

soit surjectif. On a alors une immersion de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ dans $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma}$. On désigne $\Omega_{\mathcal{O},\sigma}^0$ le complémentaire dans la fibre spéciale $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ de $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma}$ des fermés

$$\{\alpha_j(m) = 0\} \quad (j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, m \in \Lambda_j / \varpi \Lambda_j - \Lambda_{j-1} / \varpi \Lambda_j).$$

Alors $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ s'identifie au complété de $\widetilde{\mathbb{P}}_{\sigma}$ le long de $\Omega_{\mathcal{O},\sigma}^0$. Lorsque σ' est un sous-simplexe de σ , on a une immersion naturelle ouverte $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma'}^{d-1} \hookrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$. Le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ est par définition la limite inductive $\varinjlim_{\sigma \in \mathcal{BT}} \widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$. De plus, la fibre générique de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ (au sens de Raynaud-Berkovich) s'identifie à Ω_K^{d-1} . Si $g \in G$ envoyant un simplexe σ sur $g\sigma$, on définit un isomorphisme $g : \widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O},g\sigma}^{d-1}$ en associant à une donnée $(\alpha_j : \Lambda_j \rightarrow L_j, \Pi)$ la donnée $(g\Lambda_j \xrightarrow{g^{-1}} \Lambda_j \xrightarrow{\alpha_j} L_j, \Pi)$. Ceci définit une action de G sur le système inductif $(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1})_{\sigma}$, et donc sur Ω_K^{d-1} . Sous cette action, l'application de réduction $\tau : \Omega_K^{d-1} \rightarrow |\mathcal{BT}|$ est G -équivariante.

(2.1.3) DÉFINITION.— Soit $\sigma = \{\varpi \Lambda_k \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \dots \subsetneq \Lambda_k\}$ un k -simplexe, le *type* de σ est la suite des entiers (e_0, \dots, e_k) telle que $e_0 = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda_0 / \varpi \Lambda_k$ et $e_i = \dim_{\mathbb{F}_q} \Lambda_i / \Lambda_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq k$. Évidemment, on a $\sum e_i = d$.

(2.1.4) EXEMPLE.— Nous aurons besoin des descriptions explicites suivantes.

Commençons par le cas où le simplexe $\sigma = \Phi$ est maximal, i.e. Φ est associé à une chaîne des réseaux $\varpi \Phi_{d-1} \subsetneq \Phi_0 \subsetneq \dots \subsetneq \Phi_{d-1}$. On peut supposer que $\Phi_{d-1} = \mathcal{O}^d$, et que sous la base canonique $\{e_0, \dots, e_{d-1}\}$ de \mathcal{O}^d ,

$$\Phi_i = \langle e_0, \dots, e_i, \varpi e_{i+1}, \dots, \varpi e_{d-1} \rangle, \quad \forall 0 \leq i \leq d-1.$$

La condition imposée sur α_i implique que $\alpha_i(e_i)$ engendre L_i . Identifions L_i avec R en posant $\alpha_i(e_i) = 1$. Le morphisme R -linéaire $\Pi : L_i \rightarrow L_{i+1}$ est alors donné par multiplication par c_i , où

$$c_i = \frac{\alpha_{d-1}(e_i)}{\alpha_{d-1}(e_{i+1})}, \quad 0 \leq i \leq d-2 \quad \text{et} \quad c_{d-1} = \frac{\varpi \alpha_{d-1}(e_{d-1})}{\alpha_{d-1}(e_0)}.$$

Ceci nous permet d'identifier le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\Phi}^{d-1}$ au spectre formel du complété ϖ -adique de l'anneau

$$\mathcal{O}[c_0, \dots, c_{d-1}, P_{\Phi}^{-1}] / (\prod c_i - \varpi),$$

où $P_{\Phi} = \prod P_{\mathfrak{a},i}$, $i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = (a_0, \dots, a_{d-2})$ parcourt une classe de représentants de $(\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^{d-1}$ dans \mathcal{O}^{d-1} , et $P_{\mathfrak{a},i} = 1 + a_0 c_{i-1} + a_1 c_{i-1} c_{i-2} + \dots + a_{d-2} c_{i-1} \dots c_{1+i-d}$.

L'objet universel sur $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\Phi}^{d-1}$ est la donnée d'une suite de $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\Phi}^{d-1}}$ -modules

$$\mathcal{L}_{d-1} \xrightarrow{\Pi} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\Pi} \cdots \xrightarrow{\Pi} \mathcal{L}_{d-1}$$

avec \mathcal{L}_i libre de base 1 et $\Pi : \mathcal{L}_i \rightarrow \mathcal{L}_{i+1}$ est la multiplication par c_i .

Ensuite on considère le cas où $\sigma = [\Lambda]$ est un sommet. Il suffit de traiter le cas où $\Lambda = \mathcal{O}^d$. Le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},[\Lambda]}^{d-1}$ classe les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \varpi\Lambda & \xrightarrow{\quad} & \Lambda \\ \alpha/\varpi \downarrow & & \downarrow \alpha \\ L & \xrightarrow{\quad \Pi \quad} & L \end{array}$$

tels que l'application

$$\alpha(x) : \Lambda/\varpi\Lambda \longrightarrow L \otimes_R k(x)$$

soit injective pour tout $x \in \text{Spec}(R)$. Ceci implique que $\alpha(u)$ est un générateur de L , $\forall u \in \Lambda \setminus \varpi\Lambda$. Le couple (L, α) est alors déterminé à isomorphisme près par

$$\left(x_0 = \frac{\alpha(e_0)}{\alpha(e_{d-1})}, \dots, x_{d-2} = \frac{\alpha(e_{d-2})}{\alpha(e_{d-1})} \right) \in R^{d-1}.$$

Nous pouvons donc identifier le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},[\Lambda]}^{d-1}$ au spectre formel du complété ϖ -adique de l'anneau

$$\mathcal{O}[x_0, \dots, x_{d-2}, P_\Lambda^{-1}],$$

où $P_\Lambda = \prod (a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1})$, (a_0, \dots, a_{d-1}) parcourt une classe de représentants de $(\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^d \setminus \{0\}$ dans \mathcal{O}^d . L'objet universel sur $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},[\Lambda]}^{d-1}$ est la donnée d'un $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},[\Lambda]}^{d-1}}$ -module \mathcal{L} libre de base 1, et $\Pi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ est la multiplication par ϖ .

REMARQUE.— L'immersion canonique $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},[\Lambda]}^{d-1} \hookrightarrow \widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\Phi}^{d-1}$ (ou $\Omega_{K,[\Lambda]}^{d-1} \hookrightarrow \Omega_{K,\Phi}^{d-1} \hookrightarrow \mathbb{P}_K^{d-1}$) induit une identification $c_i = x_i/x_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq d-3$, $c_{d-2} = x_{d-2}$, $c_{d-1} = \varpi/x_0$.

Enfin, soit $\sigma = \{\varpi\Lambda_{d-1} \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \Lambda_{d-1} = \mathcal{O}^d\}$ le sous-simplexe de Φ de type $(1, d-1)$, i.e. Λ_0 est engendré par $e_0, \varpi e_1, \dots, \varpi e_{d-1}$. L'objet universel correspondant est décrit par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \varpi\Lambda & \xrightarrow{\quad} & \Lambda_0 & \xrightarrow{\quad} & \Lambda \\ \alpha/\varpi \downarrow & & \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\quad \varpi/x_0 \quad} & \mathcal{L}_0 & \xrightarrow{\quad x_0 \quad} & \mathcal{L} \end{array}$$

Le schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ s'identifie au spectre formel du complété ϖ -adique de l'anneau

$$\mathcal{O}[x_0, \dots, x_{d-2}, c_{d-1}, P_\sigma^{-1}]/(x_0 c_{d-1} - \varpi)$$

où $P_\sigma = \prod (1 + a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2})(1 + a_0x_1c_{d-1} + \cdots + a_{d-3}x_{d-2}c_{d-1} + a_{d-2}c_{d-1})$, (a_0, \dots, a_{d-2}) parcourt une classe de représentants de $(\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O})^{d-1}$ dans \mathcal{O}^{d-1} .

(2.1.5) Les composantes irréductibles de la fibre spéciale géométrique $\overline{\Omega} := \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1} \otimes_{\mathcal{O}} \overline{\mathbb{F}}_q$ de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ sont paramétrées par les sommets de \mathcal{BT} . Plus précisément, soit $s = [\Lambda_s]$ représenté par un réseau Λ_s , considérons tous les simplexes maximaux contenant s . Pour un tel simplexe σ , il est représenté par une suite de réseaux $\{\varpi\Lambda_s \subsetneq \Lambda_{\sigma,0} \subsetneq \cdots \subsetneq \Lambda_{\sigma,d-2} \subsetneq \Lambda_s\}$. Notons $\overline{\Omega}_s$ la variété projective obtenue à partir de $\mathbb{P}(\Lambda_s/\varpi\Lambda_s)$ en l'éclatant successivement le long du sous-schéma fermé $\mathbb{P}(\Lambda_s/\Lambda_{\sigma,d-2})$ pour tout simplexe maximal σ contenant s , puis en éclatant le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_s/\Lambda_{\sigma,d-3})$ pour tous ces σ , puis le transformé strict de $\mathbb{P}(\Lambda_s/\Lambda_{\sigma,d-4})$ pour tous ces σ et ainsi de suite, cf. [It05, §4] ou [Wan13, (4.1.2)]. On sait alors que le $\overline{\mathbb{F}}_q$ -schéma $\overline{\Omega}$ est localement de type fini, et $\overline{\Omega} = \bigcup_{s \in \mathcal{BT}_0} \overline{\Omega}_s$. Chaque $\overline{\Omega}_s$ est une variété projective munie d'une action de $G_s := \text{Stab}_G(s)$. Soit $\sigma = \{s_0, \dots, s_k\}$ un simplexe quelconque, notons $\overline{\Omega}_\sigma$ la variété projective $\overline{\Omega}_{s_0} \cap \cdots \cap \overline{\Omega}_{s_k}$ munie d'une action de $\widehat{G}_\sigma := \text{Stab}_G(\sigma)$. On désigne G_σ le fixateur de σ , et G_σ^+ le pro- p -radical de G_σ (voir [SS93]). Notons $\overline{\Omega}_\sigma^0 := \overline{\Omega}_\sigma \setminus \bigcup_{s' \notin \sigma} \overline{\Omega}_{s'}$, et $j_\sigma : \overline{\Omega}_\sigma^0 \hookrightarrow \overline{\Omega}_\sigma$ l'inclusion naturelle. En particulier, $\overline{\Omega}_s^0$ est la fibre spéciale géométrique de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},s}^{d-1}$ (le modèle de Deligne au-dessus de s).

Rappelons que Berkovich a défini dans ce cas un morphisme de spécialisation

$$\text{sp} : \Omega_K^{d-1,ca} \longrightarrow \overline{\Omega}$$

(qui est appelé le *morphisme de réduction* dans [Ber96, §1]). L'image réciproque sous ce morphisme de l'inclusion naturelle $j_s : \overline{\Omega}_s^0 \hookrightarrow \overline{\Omega}_s$ s'identifie à :

$$\begin{array}{ccc} \text{sp}^{-1}(\overline{\Omega}_s^0) & \xrightarrow{\text{sp}^{-1}(j_s)} & \text{sp}^{-1}(\overline{\Omega}_s) \\ \parallel & & \parallel \\ \tau^{-1}(|s|) & \hookrightarrow & \tau^{-1}(|s|^*) \end{array}$$

(2.1.6) LEMME.— Soit s un sommet. Quitte à choisir une base d'un réseau qui représente s , on a un isomorphisme $G_s/G_s^+ \xrightarrow{\sim} \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Via cet isomorphisme, $\overline{\Omega}_s^0$ munie de l'action de G_s/G_s^+ (G_s^+ agit trivialement sur $\overline{\Omega}_s^0$) est isomorphe à $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ muni de l'action de $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, où $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ est le complémentaire de tous les hyperplans \mathbb{F}_q -rationnels dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ appelé l'espace de Drinfeld sur le corps fini \mathbb{F}_q (cf. (2.5.1)).

Preuve : On peut supposer que $s = [\Lambda] = [\mathcal{O}^d]$ le réseau standard. D'après l'exemple (2.1.4), $\overline{\Omega}_s^0 = \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-2}, \overline{P}_\Lambda^{-1}]$ qui s'identifie donc à $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Les éléments de $G_s^+ = 1 + \varpi M_d(\mathcal{O})$ agissent bien trivialement, et les actions sont compatibles. \square

2.2 Le revêtement modéré Σ^{ca}

(2.2.1) Rappelons tout d'abord deux descriptions modulaires de notre schéma formel $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ introduites par Drinfeld dans [Dri76] (voir aussi [BC91]). Si R est une \mathcal{O} -algèbre, nous noterons $R[\Pi]$ le quotient de l'algèbre de polynômes $R[X]$ par l'idéal engendré par $X^d - \varpi$. C'est donc un R -module libre de rang d , engendré par 1 et un élément Π (l'image de X) qui vérifie $\Pi^d = \varpi$. L'algèbre $R[\Pi]$ est munie d'une graduation à valeurs dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ telle que les éléments de R soient de degré 0, et Π soit de degré 1.

On considère le foncteur F^{Dr} qui associe à une algèbre $R \in \text{Nilp}_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de (ψ, η, T, u, r) , où

- ψ est un \mathbb{F}_q -homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vers $R/\varpi R$.
- η est un faisceau en $\mathcal{O}[\Pi]$ -modules plats, $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ -gradué, constructible, sur $S := \text{Spec}(R)$ muni de la topologie de Zariski.
- T est un faisceau en $\mathcal{O}_S[\Pi]$ -modules, $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ -gradué, tel que les composantes homogènes soient des faisceaux inversibles sur S .
- u est un homomorphisme $\mathcal{O}[\Pi]$ -linéaire de degré 0 de η vers T , tel que $u \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S : \eta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_S \rightarrow T$ soit surjectif.
- r est un isomorphisme K -linéaire du faisceau constant \underline{K}^d vers le faisceau $\eta_0 \otimes_{\mathcal{O}} K$.

satisfaisant les conditions suivantes :

- Soit $S_i \subset S$ le lieu d'annulation du morphisme $\Pi : T_i \rightarrow T_{i+1}$, alors la restriction $\eta_i|_{S_i}$ est un faisceau constant de fibre isomorphe à \mathcal{O}^d .
- Pour tout point $s \in S$ l'application $\eta_s/\Pi\eta_s \rightarrow (T_s/\Pi T_s) \otimes k(s)$ est injective, où $k(s)$ est le corps r sidual de s .
- $\bigwedge^d(\eta_i)|_{S_i} = \varpi^{-i}(\bigwedge^d(\Pi^i r \underline{\mathcal{O}}^d))|_{S_i}$ ($\forall i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$).

Drinfeld démontre que ce foncteur F^{Dr} est pro-représentable par le \mathcal{O} -schéma formel $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1} := \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$. Dans la suite, on notera $(\psi, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$ l'objet universel sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$. Les composantes homogènes universelles \mathbf{T}_i sont des fibrés en droites sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$. Par la construction de l'isomorphisme entre $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$ et F^{Dr} (cf. [BC91]), on sait que la restriction de \mathbf{T}_i à chaque $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O},\sigma}}^{d-1} := \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O},\sigma}}^{d-1} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}} \check{\mathcal{O}}$ est en fait libre. Soit $\sigma = \Phi$ le simplexe maximal standard, et identifions $\mathbf{T}_i|_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O},\Phi}}^{d-1}}$ avec $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O},\Phi}}^{d-1}}$. Via cette identification, l'application $\Pi : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_{i+1}$ est induite par multiplication par c_i (cf. l'exemple (2.1.4)).

Le foncteur G^{Dr} de Drinfeld est un problème de modules des \mathcal{O}_D -modules formels munis d'une certaine rigidification. Rappelons ci-dessous leurs définitions. Si R est une \mathcal{O} -algèbre, un \mathcal{O} -module formel X est un groupe formel sur R muni d'une action de \mathcal{O} relevant l'action naturelle sur l'espace tangent $\text{Lie}(X)$. Un \mathcal{O}_D -module formel sur R est un \mathcal{O} -module formel muni d'une action de \mathcal{O}_D prolongeant l'action de \mathcal{O} . Un \mathcal{O}_D -module formel X est dit *spécial* si l'action de \mathcal{O}_d fait de $\text{Lie}(X)$ un $\mathcal{O}_d \otimes_{\mathcal{O}} R$ -module localement libre de rang 1.

La définition du foncteur G^{Dr} repose sur l'existence d'un \mathcal{O}_D -module formel spécial \mathbb{H} de dimension d et (\mathcal{O} -)hauteur d^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$, qui est unique à isogénie près (cf. [Dri76] voir aussi [BC91, II Prop. 5.2]). On considère le foncteur G^{Dr} sur $\text{Nilp}_{\mathcal{O}}$ qui associe à $R \in \text{Nilp}_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des classes d'isomorphie de triple (ψ, X, ρ) , où

- ψ est un \mathbb{F}_q -homomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_q$ vers $R/\varpi R$.
- X est un \mathcal{O}_D -module formel spécial de hauteur d^2 sur R .
- ρ est une quasi-isogénie de hauteur zéro de $\psi^* \mathbb{H} := \mathbb{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q, \psi} R/\varpi R$ vers $X_{R/\varpi R}$.

Un théorème difficile de Drinfeld nous dit qu'il existe un isomorphisme entre G^{Dr} et F^{Dr} . C'est-à-dire G^{Dr} est pro-représentable par le \mathcal{O} -schéma formel $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$.

(2.2.2) On désigne \mathfrak{X} le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel de dimension d et hauteur d^2 sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$. Le morphisme $\Pi_D : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ est une isogénie, son noyau $\mathfrak{X}[\Pi_D]$ est un schéma formel en groupes fini plat de rang q^d sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$. On note $\Sigma := \underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D/\Pi_D \mathcal{O}_D, \mathfrak{X}[\Pi_D]^{\text{rig}})$ ou $\underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D/\Pi_D \mathcal{O}_D, \mathfrak{X}[\Pi_D]^{an})$ selon besoin. Par construction, Σ est un revêtement fini étale sur $\Omega_K^{d-1} := \Omega_K^{d-1} \widehat{\otimes}_K \check{K}$ de groupe de Galois $(\mathcal{O}_D/\Pi_D \mathcal{O}_D)^\times \simeq \mathbb{F}_{q^d}^\times$. On note $\Sigma^{ca} := \Sigma \widehat{\otimes}_K \widehat{K}^{ca} \xrightarrow{p} \Omega_K^{d-1, ca}$ la projection naturelle induite par $\mathfrak{X}[\Pi_D] \rightarrow \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$ après une extension de scalaires. On sait que le groupe des quasi-isogénies de hauteur zéro du \mathcal{O}_D -module formel \mathbb{H} vers lui-même

s'identifie à

$$G^\circ := \text{Ker}(\text{val}_K \circ \det : \text{GL}_d(K) \rightarrow K^\times),$$

où val_K est la valuation normalisée sur K de sorte que $\text{val}_K(\varpi) = 1$. Ceci fournit une action de G° sur tous les niveaux de la tour de Drinfeld. Par conséquent le morphisme de transition $p : \Sigma^{ca} \rightarrow \Omega_K^{d-1,ca}$ est G° -équivariant. Dans cet article, on s'intéresse à la cohomologie étale à support compact de Σ^{ca} au sens de Berkovich.

Par la construction précédente, on a un diagramme commutatif dont toutes les flèches sont G° -équivariantes :

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^{ca} & & \\ \downarrow p & \searrow \nu & \\ \Omega_K^{d-1,ca} & \xrightarrow{\tau} & |\mathcal{BT}| \end{array}$$

où ν est la composée $\tau \circ p$. Donc Σ^{ca} admet un recouvrement par les ouverts admissibles $\nu^{-1}(|s|^*)$ où s parcourent les sommets de \mathcal{BT} . Soit s un sommet quelconque de \mathcal{BT} , l'immersion ouverte $\nu^{-1}(|s|) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s|^*)$ induit un morphisme de restriction :

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \xrightarrow{\text{res.}} R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda)$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}/n$ avec n un entier premier à p .

(2.2.3) THÉORÈME.— *Le morphisme de restriction ci-dessus est en fait un isomorphisme.*

Preuve : La démonstration repose sur un résultat des cycles évanescents d'un faisceau modéré sur une variété de réduction semi-stable établi par Zheng *cf.* [Zhe08, Lemme 5.6]. Supposons tout d'abord que Γ soit un sous-groupe discret cocompact et sans torsion de $\text{PGL}_d(K)$. On sait alors que Γ agit librement sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$ de sorte que $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}/\Gamma$ soit propre sur $\text{Spf}\check{\mathcal{O}}$. On peut munir Ω_K^{d-1}/Γ d'une structure de \check{K} -espace analytique telle que le quotient $\Omega_K^{d-1} \rightarrow \Omega_K^{d-1}/\Gamma$ soit un revêtement analytique galoisien. D'après Kurihara [Kur80] et Mustafin [Mus78], Ω_K^{d-1}/Γ est algébrisable, i.e. il existe un schéma propre X_Γ sur $\check{\mathcal{O}}$ de réduction semi-stable tel que $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}/\Gamma$ soit le complété de X_Γ le long de sa fibre spéciale $X_{\Gamma 0}$. La stratification de $X_{\Gamma 0}$ coïncide avec le complexe simplicial \mathcal{BT}/Γ *cf.* [Kur80, Thm. 2.2.6]. Quitte à rapetisser Γ , on peut supposer que la projection $\pi : \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1} \rightarrow \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}/\Gamma$ induit un isomorphisme entre $\overline{\Omega}_s$ et $\pi(\overline{\Omega}_s)$. Notons Z (resp. Z^0) le sous-schéma localement fermé de X_Γ qui correspond à $\pi(\overline{\Omega}_s)$ (resp. $\pi(\overline{\Omega}_s^0)$) par l'algébrisation. D'après GAGA analytique, le revêtement étale modérément ramifié $\Sigma_{\check{K}}/\Gamma$ de Ω_K^{d-1}/Γ correspond à un revêtement modéré $f : Y \rightarrow X_{\Gamma,\eta}$ de $X_{\Gamma,\eta}$, où $X_{\Gamma,\eta}$ est la fibre générique de X_Γ .

D'après [Ber96, Corollary 3.5], on a des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned} R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) &= R\Gamma(\tau^{-1}(|s|^*), p_*\Lambda|_{\tau^{-1}(|s|^*)}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{\Omega}_s, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s}) \\ R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) &= R\Gamma(\tau^{-1}(|s|), p_*\Lambda|_{\tau^{-1}(|s|)}) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0}) \end{aligned}$$

qui nous donnent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) & \xrightarrow{\text{res.}} & R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ R\Gamma(\overline{\Omega}_s, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s}) & \xrightarrow{\text{res.}} & R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0}) \end{array}$$

où $R\Psi_\eta$ désigne le foncteur des cycles évanescents formels défini par Berkovich dans *loc. cit.*. Le théorème principal de Berkovich nous dit qu'il existe des isomorphismes canoniques

$$R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s} \cong R\Psi(X_\Gamma, f_*\Lambda)|_Z$$

et

$$R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0} \cong R\Psi(X_\Gamma, f_*\Lambda)|_{Z^0},$$

où $R\Psi$ est le foncteur des cycles évanescents algébrique. En vertu du [Zhe08, Lemme 5.6], nous avons

$$R\Psi(X_\Gamma, f_*\Lambda)|_Z = Rj_{Z*}R\Psi(X_\Gamma, f_*\Lambda)|_{Z^0},$$

où j_Z désigne l'immersion naturelle $Z^0 \hookrightarrow Z$. On en déduit l'égalité suivante

$$(2.2.4) \quad R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s} = Rj_{s,*}R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0},$$

et donc un isomorphisme

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda)$$

donné par le morphisme de restriction. □

2.3 Le prolongement de Σ^{ca} au-dessus d'un sommet

Dans ce paragraphe, on prolonge le revêtement modéré Σ^{ca} en un $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur sur $\overline{\Omega}_s^0$ pour chaque sommet s de \mathcal{BT} . Les calculs que nous effectuons ici généralisent ceux de Teitelbaum [Tei90] pour $d = 2$.

(2.3.1) L'espace tangent $\text{Lie}(\mathfrak{X})$ du \mathcal{O}_D -module formel spécial universel \mathfrak{X} (voir (2.2.2)) admet une graduation par $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ sous l'action de $\mathcal{O}_d \subset \mathcal{O}_D$ en posant

$$\text{Lie}(\mathfrak{X})_i = \{m \in \text{Lie}(\mathfrak{X}) \mid \iota(a)(m) = \sigma^{-i}(a)m, \forall a \in \mathcal{O}_d\}$$

où $\iota : \mathcal{O}_D \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X})$ exprime la structure de \mathcal{O}_D -module de \mathfrak{X} . Chaque $\text{Lie}(\mathfrak{X})_i$ est un faisceau inversible sur $\widehat{\Omega}_\mathcal{O}^{d-1}$. Considérons l'objet universel $(\psi, \eta, \mathbf{T}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$ sur $\widehat{\Omega}_\mathcal{O}^{d-1}$ rappelé dans (2.2.1).

Dans la construction de l'isomorphisme de $G^{Dr} \xrightarrow{\sim} F^{Dr}$ (voir [BC91, Théorème 8.4]), on identifie \mathbf{T}_i à $\text{Lie}(\mathfrak{X})_i$, et l'action de Π envoie \mathbf{T}_i vers \mathbf{T}_{i+1} . On en déduit une décomposition de l'espace cotangent de $\mathfrak{X}[\Pi]$:

$$(2.3.2) \quad \text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])^\vee = \mathbf{T}_0^\vee / \Pi \mathbf{T}_1^\vee \oplus \mathbf{T}_1^\vee / \Pi \mathbf{T}_2^\vee \oplus \cdots \oplus \mathbf{T}_{d-1}^\vee / \Pi \mathbf{T}_0^\vee.$$

Le morphisme ι induit un homomorphisme $\bar{\iota} : \mathcal{O}_D / \Pi \simeq \mathbb{F}_{q^d} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}[\Pi])$. Ceci nous permet d'utiliser la classification de Raynaud [Ray74] que nous rappelons ci-dessous.

Soit $M = \text{Hom}(\mathbb{F}_{q^d}^\times, \mathcal{O}_D^\times)$ le groupe des caractères (homomorphisme de groupes) de $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ à valeurs dans \mathcal{O}_D^\times . On prolonge chaque caractère $\mu \in M$ à $\mathbb{F}_{q^d} = \mathcal{O}_D / \Pi \mathcal{O}_D$ tout entier en posant $\mu(0) = 0$. Un caractère μ est dit *fondamental* si l'application composée $\mathbb{F}_{q^d} \xrightarrow{\mu} \mathcal{O}_D \xrightarrow{\text{can.}} \mathbb{F}_{q^d}$ est un homomorphisme de corps. On a donc fd caractères fondamentaux au total. Si on désigne $\chi : \mathbb{F}_{q^d}^\times \rightarrow \mathcal{O}_D^\times \subset \mathcal{O}_D^\times$ le représentant de Teichmüller. Alors l'ensemble des caractères fondamentaux $\{\chi_i\}_{0 \leq i \leq fd-1}$ sont de la forme $\chi_0 = \chi$, $\chi_i = \chi_{i-1}^p$, $1 \leq i \leq fd-1$. Notons que $\bar{\iota}(\lambda) = \iota(\chi(\lambda))|_{\mathfrak{X}[\Pi]} \in \text{End}(\mathfrak{X}[\Pi])$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$.

Soit $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}[\Pi]} = \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}} \oplus \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est l'idéal d'augmentation. L'endomorphisme $\bar{\iota}(\lambda)$ sur $\mathfrak{X}[\Pi]$ induit un endomorphisme $[\lambda]$ de l'algèbre de Hopf $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}[\Pi]}$. Pour tout $\mu \in M$, les endomorphismes

$$i_\mu = \frac{1}{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times} \mu^{-1}(\lambda)[\lambda]$$

de la $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}}$ -algèbre $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}[\Pi]}$ forment une famille d'idempotents orthogonaux qui respectent \mathcal{I} . On a alors une décomposition

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{\mu \in M} \mathcal{I}_\mu$$

où $\mathcal{I}_\mu = i_\mu(\mathcal{I})$ formé des éléments $x \in \mathcal{I}$ tels que $[\lambda](x) = \mu(\lambda)x$, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$. Notons $\mathcal{I}_i := \mathcal{I}_{\chi_i}$, $\forall 0 \leq i \leq fd-1$. Le $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}$ -schéma en groupes $\mathfrak{X}[\Pi]$ satisfait la condition de la classification de Raynaud, i.e. chacun des faisceaux \mathcal{I}_i est un $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}}$ -module inversible, cf. [Ray74, Prop. 1.2.2]. Donc \mathcal{I} est un $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}}$ -module localement libre de rang $q^d - 1$.

(2.3.3) FAIT- ([Ray74, Thm. 1.4.1]) Sous ces conditions, le schéma en groupes $\mathfrak{X}[\Pi]$ est déterminé par le système $(\mathcal{I}_i, \bar{c}_i : \mathcal{I}_{i+1} \rightarrow \mathcal{I}_i^p, \bar{d}_i : \mathcal{I}_i^p \rightarrow \mathcal{I}_{i+1})_i$ où les \bar{c}_i et \bar{d}_i sont $\mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}}$ -linéaires de sorte que $\bar{d}_i \circ \bar{c}_i = w \text{Id}_{\mathcal{I}_{i+1}}$, $\forall 0 \leq i \leq fd-1$. Ici $w \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}})$ est donné par la somme de Gauss indépendant du $\mathfrak{X}[\Pi]$.

Localement, on peut supposer que chaque \mathcal{I}_i est en fait libre engendré par X_i . On en déduit que $\mathfrak{X}[\Pi]$ est donné localement sur $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}$ par les équations

$$X_i^p = \delta_i X_{i+1}, i \in \mathbb{Z}/fd\mathbb{Z}$$

avec δ_i des sections locales de $\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}$. On a alors une autre description de l'espace cotangent de $\mathfrak{X}[\Pi]$:

$$(2.3.4) \quad \text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi])^\vee = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}_0/\mathcal{I}_{fd-1}^p \oplus \mathcal{I}_1/\mathcal{I}_0^p \oplus \cdots \oplus \mathcal{I}_{fd-1}/\mathcal{I}_{fd-2}^p.$$

$$(2.3.5) \text{ LEMME.} - \mathbf{T}_{i+1}^\vee/\Pi\mathbf{T}_{i+1}^\vee = \{x \in \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \mid [\lambda](x) = \sigma^{-i}(\chi(\lambda))x, \forall \lambda \in \mathbb{F}_{q^d}\}.$$

Preuve : On a $\text{Lie}(\mathfrak{X}[\Pi]) = \text{Hom}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\mathfrak{O}}^{d-1}})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_{q^d}$, $\iota(\lambda)$ induit une action sur $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ qui est, par définition, celle induite par $[\lambda]$. \square

En comparant les deux décompositions 2.3.2 et 2.3.4, on obtient que

$$\mathcal{I}_{fi+j} = \mathcal{I}_{f(i+j-1)}^p, 1 \leq j \leq f-1, \text{ et } \mathcal{I}_{fi}/\mathcal{I}_{fi-1}^p = \mathbf{T}_{d-i}^\vee/\Pi\mathbf{T}_{d-i+1}^\vee.$$

On en déduit que

$$\mathcal{I}_{fi}/\mathcal{I}_{f(i-1)}^q = \mathbf{T}_{d-i}^\vee/\Pi\mathbf{T}_{d-i+1}^\vee.$$

Il s'ensuit que $\mathfrak{X}[\Pi]$ est localement donné par les équations $X_i^q = \delta_i X_{i+1}$ ($i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$).

(2.3.6) Pour un simplexe $\sigma \in \mathcal{BT}$, on note $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ le produit fibré de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ avec $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}$ au-dessus de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$, et $\Omega_{\check{K},\sigma}^{d-1}$ sa fibre générique. Si $\sigma = \Phi$ est le simplexe maximal standard, le morphisme $\Pi : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_{i+1}$ est donné par multiplication par c_i (cf. (2.2.1) et (2.1.4)). Alors, sur $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},\Phi}^{d-1}$

$$\mathcal{I}_{fi}/\mathcal{I}_{f(i-1)}^q = \mathbf{T}_{d-i}^\vee / c_{d-i} \mathbf{T}_{d-i}^\vee.$$

(2.3.7) LEMME.— Soit s un sommet de \mathcal{BT} . Notons Σ_s l'espace rigide $\Sigma \times_{\Omega_{\check{K}}^{d-1}} \Omega_{\check{K},s}^{d-1}$. Alors il existe une section $u \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}}^*)$ telle que

$$\Sigma_s \cong \mathrm{Sp} \mathcal{O}_{\Omega_{\check{K},s}^{d-1}}[X_0]/(X_0^{q^{d-1}} - \varpi u).$$

Preuve : Il suffit de traiter le cas où s est le sommet standard $\Lambda = [\mathcal{O}^d]$. On observe tout d'abord que le groupe de Picard de $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}$ est trivial. En effet, il est isomorphe au groupe de Picard de sa fibre spéciale, car $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}$ est ϖ -adique complet (cf. [FvdP04, 3.7.4]). Donc

$$\mathrm{Pic}(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}) = \mathrm{Pic}(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}) = 0,$$

d'après [Har77, II Prop. 6.5]. Donc $\mathfrak{X}[\Pi] \times_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}}}^{d-1}} \widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}$ est donné par $X_i^q = \delta_i X_{i+1}$ où $\delta_i \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}})$. D'après l'exemple (2.1.4), il existe des sections $u_i \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}}^*)$ telles que $\delta_i = c_i u_i$, $\forall i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Sigma_{[\Lambda]} &= \mathrm{Sp} \mathcal{O}_{\Omega_{\check{K},[\Lambda]}^{d-1}}[X_0]/(X_0^{q^{d-1}} - \delta_0^{q^{d-1}} \delta_1^{q^{d-2}} \cdots \delta_{d-1}) \\ &= \mathrm{Sp} \mathcal{O}_{\Omega_{\check{K},[\Lambda]}^{d-1}}[X_0]/(X_0^{q^{d-1}} - c_0 \cdots c_{d-1} u_0^{q^{d-1}} u_1^{q^{d-2}} \cdots u_{d-2}^q u_{d-1} c_0^{q^{d-1}-1} c_1^{q^{d-2}-1} \cdots c_{d-2}^{q-1}) \\ &= \mathrm{Sp} \mathcal{O}_{\Omega_{\check{K},[\Lambda]}^{d-1}}[X_0]/(X_0^{q^{d-1}} - \varpi u), \end{aligned}$$

où $u := u_0^{q^{d-1}} u_1^{q^{d-2}} \cdots u_{d-1} c_0^{q^{d-1}-1} c_1^{q^{d-2}-1} \cdots c_{d-2}^{q-1} \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}}^*)$, car $c_0 \cdots c_{d-1} = \varpi$ et c_0, \dots, c_{d-2} appartiennent à $\Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},[\Lambda]}^{d-1}}^*)$, cf. l'exemple (2.1.4). D'où l'énoncé du lemme. \square

(2.3.8) Posons $\check{K}^t = \check{K}[\varpi_t]/(\varpi_t^{q^{d-1}} - \varpi)$ une extension modérément ramifiée de degré $q^d - 1$ de \check{K} , $\check{\mathcal{O}}^t$ l'anneau des entiers de \check{K}^t . Après l'extension des scalaires à \check{K}^t , l'espace rigide $\Sigma_{s,\check{K}^t} := \Sigma_s \otimes_{\check{K}} \check{K}^t$ est donné par

$$\mathrm{Sp} \mathcal{O}_{\Omega_{\check{K}^t,s}^{d-1}}[X'_0]/(X'_0{}^{q^{d-1}} - u),$$

où $X'_0 = X_0/\varpi_t$ et $\Omega_{\check{K}^t,s}^{d-1} = \Omega_{\check{K},s}^{d-1} \otimes_{\check{K}} \check{K}^t$. Considérons la normalisation de $\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}$ dans Σ_{s,\check{K}^t} que l'on notera $\widehat{\Sigma}_s^0$. D'après [SGA1, Exp. I (9.10), (10.2)], $\widehat{\Sigma}_s^0 = \mathrm{Spf} \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}}[X'_0]/(X'_0{}^{q^{d-1}} - u)$, avec $u \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\check{\mathcal{O}},s}^{d-1}}^*)$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\check{K}^t/\check{K})$ est isomorphe canoniquement à

$\mu_{q^{d-1}}$ via $g \in \text{Gal}(\check{K}^t/\check{K}) \mapsto g(\varpi_t)/\varpi_t \in \mu_{q^{d-1}}$. On en déduit qu'un élément $\zeta \in \mu_{q^{d-1}}$ agit sur l'anneau de schéma affine formel $\widehat{\Sigma}_s^0$ en envoyant X'_0 vers $\zeta^{-1}X'_0$.

Notons que la fibre spéciale $\overline{\Sigma}_s^0$ de $\widehat{\Sigma}_s^0$ est un $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur G_s/G_s^+ -invariant au-dessus de $\overline{\Omega}_s^0$, car $\bar{u} := u \pmod{\varpi_t}$ est une unité dans $\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \mathcal{O}_{\overline{\Omega}_s^0})$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma_{s, \check{K}^t} & \hookrightarrow & \widehat{\Sigma}_s^0 & \longleftarrow & \overline{\Sigma}_s^0 \\ p \downarrow & & \widehat{p}_s \downarrow & & \bar{p}_s \downarrow \\ \Omega_{\check{K}^t, s}^{d-1} & \hookrightarrow & \widehat{\Omega}_{\check{O}, s}^{d-1} & \longleftarrow & \overline{\Omega}_s^0 \end{array}$$

où \widehat{p} et \bar{p} désignent les projections naturelles.

(2.3.9) COROLLAIRE.— *On a un isomorphisme*

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) \cong R\Gamma(\overline{\Sigma}_s^0, \Lambda).$$

Preuve : D'après Berkovich, on a

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) = R\Gamma(\tau^{-1}(|s|), p_*\Lambda) = R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0}).$$

Notons que $\widehat{\Sigma}_s^0$ est un modèle lisse de Σ_{s, \check{K}^t} . D'après [SGA7-1, Exp. I 2.4],

$$(2.3.10) \quad \begin{aligned} R^0\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0} &= \bar{p}_{s*}\Lambda, \\ R^n\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_s^0} &= 0, \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) = R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \bar{p}_{s*}\Lambda) = R\Gamma(\overline{\Sigma}_s^0, \Lambda).$$

□

2.4 Un calcul du toiseur $\overline{\Sigma}_s^0$

Dans le paragraphe précédent, on a relié la cohomologie du tube $\nu^{-1}(|s|)$ à la cohomologie de $\overline{\Sigma}_s^0$. Rappelons que $\overline{\Sigma}_s^0$ est un $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur G_s/G_s^+ -équivariant sur $\overline{\Omega}_s^0$. Dans ce paragraphe, notre but est de calculer sa classe dans $H_{\text{ét}}^1(\overline{\Omega}_s^0, \mu_{q^{d-1}})$. Supposons désormais que s soit le sommet standard $\Lambda = [\mathcal{O}^d]$. On se ramène donc au cas où $\overline{\Omega}_s^0 = \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ sur lequel $\overline{\Sigma}_{[\Lambda]}^0$ est un $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant.

(2.4.1) Notons \mathcal{H} l'ensemble des hyperplans \mathbb{F}_q -rationnels de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, nous avons alors

$$\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} = \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \setminus \bigcup_{Y \in \mathcal{H}} Y.$$

Notons i (resp. j) l'inclusion naturelle de $D := \bigcup_{Y \in \mathcal{H}} Y$ (resp. $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$) dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Pour I un sous-ensemble de \mathcal{H} , on notera $Y_I = \bigcap_{Y \in I} Y$, et i_{Y_I} l'inclusion de Y_I dans $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. La suite exacte de cohomologie relative associée aux inclusions :

$$\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \xrightarrow{j} \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \xleftarrow{i} \bigcup_{Y \in \mathcal{H}} Y$$

nous fournit une suite exacte

$$(2.4.2) \quad 0 \longrightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n) \xrightarrow{\partial} H_D^2(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n)$$

où n est un entier premier à p .

(2.4.3) LEMME.— *On a un isomorphisme canonique*

$$H_D^2(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n) = \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} H_Y^2(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n) = \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} \mathbb{Z}/n.$$

Preuve : On prend une résolution injective $\mathbb{Z}/n \rightarrow \mathcal{I}$ du faisceau constant \mathbb{Z}/n . Pour chaque q , nous avons une résolution simpliciale de $i_* i^! \mathcal{I}^q$:

$$0 \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{I \subset \mathcal{H}, |I|=r} i_{Y_I, *} i_{Y_I}^! (\mathcal{I}^q) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} i_{Y, *} i_Y^! (\mathcal{I}^q) \rightarrow i_* i^! (\mathcal{I}^q) \rightarrow 0.$$

Les suites spectrales associées à deux filtrations du double complexe $K^{pq} := \bigoplus_{I \subset \mathcal{H}, |I|=-p} i_{Y_I, *} i_{Y_I}^! \mathcal{I}^q$ ($p \leq -1, q \geq 0$) nous fournit une suite spectrale :

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{I \subset \mathcal{H}, |I|=-p} i_{Y_I, *} R^q i_{Y_I}^! \mathbb{Z}/n \implies i_* R^{p+q} i^! \mathbb{Z}/n.$$

Pour chaque hyperplan rationnel Y , $(Y, \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})$ est un couple lisse ([SGA4-3, Exp. XVI]) de codimension 1, et $(Y_I, \mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})$ est un couple lisse de codimension > 1 si $|I| \geq 2$. D'après la pureté (voir *loc. cit.*), on sait que

$$R^0 i^! (\mathbb{Z}/n) = R^1 i^! (\mathbb{Z}/n) = 0,$$

et

$$i_* R^2 i^! (\mathbb{Z}/n) = \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} i_{Y, *} R^2 i_Y^! (\mathbb{Z}/n) = \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} i_{Y, *} (\mathbb{Z}/n)_Y(-1).$$

On déduit la première égalité par la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(D, R^q i^! \mu_n) \implies H_D^{p+q}(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n).$$

Chaque Y est un diviseur irréductible, et la deuxième égalité est donnée par la classe fondamentale de Y :

$$H_Y^2(\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_n) = H^0(Y, R^2 i_Y^! \mu_n) = H^0(Y, (\mathbb{Z}/n)_Y) = \mathbb{Z}/n.$$

□

(2.4.4) Posons $n = q^d - 1$ et considérons la suite exacte 2.4.2. Réécrivons-la sous la forme suivante :

$$0 \longrightarrow H_{et}^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^d-1}) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} \mathbb{Z}/(q^d - 1) \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/(q^d - 1).$$

Notre but est de calculer la classe du μ_{q^d-1} -torseur $\overline{\Sigma}_{[\Lambda]}^0$ dans $H_{et}^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^d-1})$. Rappelons tout d'abord la définition de l'application ∂ . Comme $\text{Pic}(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}) = 0$, par la suite exacte de Kummer,

un μ_{q^d-1} -torseur Z peut être écrit sous la forme $\mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}}[T]/(T^{q^d-1}-f)$, avec $f \in \Gamma(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}}^*)$.

Alors

$$\partial(Z)(Y) \equiv \text{ord}_Y f \pmod{q^d - 1}, \quad \forall Y \in \mathcal{H}.$$

(2.4.5) LEMME.— Soit Z un μ_{q^d-1} -torseur $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -invariant sur $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, alors $\partial(Z)(Y) = \partial(Z)(g \cdot Y)$, $\forall g \in \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, et $\partial(Z)(Y) \equiv 0 \pmod{q - 1}$.

Preuve : La première assertion découle d'invariance sous $g \in \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Pour la deuxième, on observe que $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ agit transitivement sur \mathcal{H} et le cardinal de \mathcal{H} est $1 + q + q^2 + \dots + q^{d-1}$. Notons que $\partial(Z)$ est contenu dans le noyau de $\sum : \bigoplus_{Y \in \mathcal{H}} \mathbb{Z}/(q^d - 1) \rightarrow \mathbb{Z}/(q^d - 1)$, on a donc

$$(1 + q + \dots + q^{d-1}) \cdot \partial(Z)(Y) \equiv 0 \pmod{q^d - 1}.$$

Donc $\partial(Z)(Y) \equiv 0 \pmod{q - 1}$. □

(2.4.6) THÉORÈME.— Pour tout $Y \in \mathcal{H}$, on a $\partial(\overline{\Sigma}_{[\Lambda]}^0)(Y) \equiv q - 1 \pmod{q^d - 1}$.

Preuve : Commençons par un lemme géométrique.

LEMME.— Soit $\sigma = \{\varpi\Lambda \subsetneq \Lambda_0 \subsetneq \Lambda\}$ le simplexe que l'on a étudié dans l'exemple (2.1.4), i.e. Λ_0 correspond à l'hyperplan $\overline{x}_0 = 0$ de $\mathbb{P}(\Lambda/\varpi\Lambda)$, alors $\text{Pic}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}) = 0$.

Preuve : Il suffit de montrer que le groupe de Picard de la fibre spéciale X de $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},\sigma}^{d-1}$ est triviale. D'après l'exemple (2.1.4), X est une réunion des deux composantes irréductibles

$$C = \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-2}] \left[\prod (1 + a_0x_0 + \dots + a_{d-2}x_{d-2})^{-1} \right]$$

et

$$D = \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_1, \dots, x_{d-2}, c_{d-1}] [P^{-1}]$$

où $P = \prod (1 + a_1x_1 + \dots + a_{d-2}x_{d-2})(1 + a_0x_1c_{d-1} + \dots + a_{d-3}x_{d-2}c_{d-1} + a_{d-2}c_{d-1})$, avec l'intersection

$$E := C \cap D = \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_1, \dots, x_{d-2}] \left[\prod (1 + a_1x_1 + \dots + a_{d-2}x_{d-2})^{-1} \right].$$

Nous noterons i_C , i_D , et i_E les inclusions canoniques dans X . D'après [Har77, II Prop. 6.5], $\text{Pic}(C) = \text{Pic}(D) = \text{Pic}(E) = 0$.

On montre qu'il existe une suite exacte des faisceaux sur X :

$$(2.4.7) \quad 1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{\alpha} i_{C*}\mathcal{O}_C^* \times i_{D*}\mathcal{O}_D^* \xrightarrow{\beta} i_{E*}\mathcal{O}_E^* \longrightarrow 1,$$

où α est donné par $f \mapsto (f|_C, f|_D)$, β est donné par $(f, g) \mapsto f|_E \cdot g|_E^{-1}$. L'exactitude est vérifiée en regardant la fibre en chaque point. En effet, soit x un point de X contenu dans $C \setminus D$ (resp. $D \setminus C$), le complexe 2.4.7 se réduit à l'isomorphisme $\mathcal{O}_{X,x}^* \simeq \mathcal{O}_{C,x}^*$ (resp. $\mathcal{O}_{X,x}^* \simeq \mathcal{O}_{D,x}^*$). Il nous reste le cas où x est un point de E . Comme cette question est locale, on peut supposer que

$$\begin{aligned} X &= \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}] / x_0x_{d-1} & C &= \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}] / x_0 \\ D &= \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}] / x_{d-1} & E &= \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}] / (x_0, x_{d-1}), \end{aligned}$$

et $x = \mathfrak{p}$ est un point de E . Notons que l'on a une suite exacte des faisceaux cohérents sur X

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\alpha'} i_{C*}\mathcal{O}_C \times i_{D*}\mathcal{O}_D \xrightarrow{\beta'} i_{E*}\mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

où α' est donné par $f \mapsto (f|_C, f|_D)$, β' est donné par $(f, g) \mapsto f|_E - g|_E$. On la vérifie en regardant les fibres en tous les points fermés. Donc on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \xrightarrow{\alpha'_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{C,\mathfrak{p}} \times \mathcal{O}_{D,\mathfrak{p}} \xrightarrow{\beta'_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

On en déduit que la suite

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}^* \xrightarrow{\alpha_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{C,\mathfrak{p}}^* \times \mathcal{O}_{D,\mathfrak{p}}^* \xrightarrow{\beta_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}^*$$

est exacte. Notons que l'application surjective

$$\overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}]/x_{d-1} \rightarrow \overline{\mathbb{F}}_q[x_0, \dots, x_{d-1}]/(x_0, x_{d-1})$$

est scindée, et donc induit une surjection $\mathcal{O}_{D,\mathfrak{p}}^* \rightarrow \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}^*$. C'est-à-dire $\beta_\mathfrak{p}$ est surjective.

On associe la suite exacte longue de cohomologie $H^\bullet(X, -)$ au complexe 2.4.7, et on obtient une suite exacte

$$H^0(C, \mathcal{O}_C^*) \times H^0(D, \mathcal{O}_D^*) \xrightarrow{H^0(\beta)} H^0(E, \mathcal{O}_E^*) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(C) \times \text{Pic}(D).$$

L'immersion $E \hookrightarrow D$ est induite par l'épimorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \overline{\mathbb{F}}_q[x_1, \dots, x_{d-2}, c_{d-1}][P^{-1}] &\rightarrow \overline{\mathbb{F}}_q[x_1, \dots, x_{d-2}][\prod (1 + a_1x_1 + \dots + a_{d-2}x_{d-2})^{-1}] \\ x_i &\mapsto x_i \\ c_{d-1} &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Notons que φ est scindé, donc il induit un épimorphisme $H^0(D, \mathcal{O}_D^*) \rightarrow H^0(E, \mathcal{O}_E^*)$. Alors $H^0(\beta)$ est surjectif, donc $\text{Pic}(X)$ est trivial. \square

Revenons à la preuve du théorème. Rappelons que

$$\Sigma_{[\Lambda]} \cong \text{Sp } \mathcal{O}_{\Omega_{\tilde{K}, [\Lambda]}^{d-1}} [T]/(T^{q^{d-1}} - \varpi u)$$

cf. le lemme (2.3.7). Grâce au lemme (2.4.5), il s'agit de calculer $\text{ord}_H \bar{u}$, pour un hyperplan \mathbb{F}_q -rationnel H . On peut supposer que H est l'hyperplan donné par $\bar{x}_0 = 0$. D'après le lemme précédent, $\mathfrak{X}[\Pi] \times_{\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}} \widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}$ est donné sur $\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}$ par les equations $X_i^q = \delta_i X_{i+1}$ où $\delta_i \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}})$. En tenant compte de l'exemple (2.1.4), il est donné par

$$\text{Spf } \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}} [X_0, X_1]/(X_0^{q^{d-1}} - \delta_1 X_1, X_1^q - \delta_0 X_0)$$

où $\delta_1 = u_1 x_0$, $\delta_0 = u_0 \varpi / x_0$, avec $u_0, u_1 \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}, \mathcal{O}_{\widehat{\Omega}_{\tilde{\mathcal{O}, \sigma}^{d-1}}})$. Ceci implique que $\Sigma_\sigma := \Sigma \times_{\Omega_{\tilde{K}}^{d-1}} \Omega_{\tilde{K}, \sigma}^{d-1}$ est l'espace rigide défini par

$$\text{Sp } \mathcal{O}_{\Omega_{\tilde{K}, \sigma}^{d-1}} [X_0]/(X_0^{q^{d-1}} - \varpi u_1^q u_0 x_0^{q-1}).$$

Comme $\Sigma_\sigma|_{\tau^{-1}(\Lambda)}$ et $\Sigma_{[\Lambda]}$ donnent la même classe de torseur dans $H^1(\Omega_{\check{K},[\Lambda]}^{d-1}, \mu_{q^{d-1}})$, il existe alors une fonction $f \in \Gamma(\Omega_{\check{K},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\check{K},[\Lambda]}^*)$ telle que $\varpi u = \varpi u_1^q u_0^{q-1} f^{q^{d-1}}$. Notons que f appartient à $\Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{O},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\check{O},[\Lambda]}^*)$, en fait u, u_0, u_1, x_0 sont tous dans $\Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{O},[\Lambda]}^{d-1}, \mathcal{O}_{\check{O},[\Lambda]}^*)$. Donc on a

$$\text{ord}_{\bar{x}_0} \bar{u} \equiv \text{ord}_{\bar{x}_0} \bar{u}_0 + \text{ord}_{\bar{x}_0} \bar{u}_1^q + \text{ord}_{\bar{x}_0} \bar{x}_0^{q-1} \pmod{q^d - 1}.$$

Notons que $u_0, u_1 \in \Gamma(\widehat{\Omega}_{\check{O},\sigma}^{d-1}, \mathcal{O}_{\check{O},\sigma}^*)$, l'ordre de \bar{u}_i en \bar{x}_0 est nulle. On en déduit que

$$\text{ord}_{\bar{x}_0} \bar{u} \equiv q - 1 \pmod{q^d - 1}.$$

□

2.5 Le lien avec les variétés de Deligne-Lusztig

Considérons GL_d le groupe linéaire sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ muni un morphisme de Frobenius $(a_{i,j}) \mapsto (a_{i,j}^q)$. Dans ce paragraphe, on rappelle certains aspects de la théorie de variétés de Deligne-Lusztig [DL76] associées à GL_d et l'élément de Coxeter $w := (1, \dots, d) \in \mathfrak{S}_d$, et on étudie le lien avec l'espace de Drinfeld p -adique.

(2.5.1) Les variétés de Deligne-Lusztig sont des variétés sur un corps fini \mathbb{F}_q , qui jouent un rôle important dans l'étude de la théorie de représentation de groupes finis réductifs. Ici on s'intéresse au cas associé à GL_d et l'élément de Coxeter $w := (1, \dots, d) \in \mathfrak{S}_d$, ceci est traité dans [DL76, (2.2)]. On a vu dans (2.4.1) que la sous-variété ouverte $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ est définie comme le complémentaire de tous les hyperplans \mathbb{F}_q -rationnels, donc elle est définie par la non-nullité du déterminant $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})$, car cette fonction s'identifie (à une constante non-nulle près) au produit de formes linéaires à coefficients dans \mathbb{F}_q , i.e.

$$\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1}) = c \cdot \prod_{[a_0, \dots, a_{d-1}] \in \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)} (a_0 X_0 + \dots + a_{d-1} X_{d-1}),$$

où $c \in \mathbb{F}_q^\times$ dépend du choix des relèvements à $\mathbb{F}_q \setminus \{0\}$ des éléments de $\mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)$. Évidemment, le groupe fini $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ par translation linéaire sur les coordonnées.

Par la construction de Deligne et Lusztig, $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ admet un revêtement fini étale DL^{d-1} de groupe de Galois \mathbb{F}_q^\times . On peut identifier DL^{d-1} avec la sous-variété fermée de l'espace affine $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^d = \text{Spec } \mathbb{F}_q[X_0, \dots, X_{d-1}]$ définie par l'équation

$$(2.5.2) \quad \det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})^{q-1} = (-1)^{d-1}.$$

L'action de $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ sur $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ se lève naturellement sur DL^{d-1} , et le groupe \mathbb{F}_q^\times agit sur DL^{d-1} par multiplication sur les coordonnées $X_i \mapsto \zeta X_i, \forall \zeta \in \mathbb{F}_q^\times$.

Posons $\text{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} := \text{DL}^{d-1} \otimes \overline{\mathbb{F}}_q$ le $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -invariant au-dessus de $\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$, et notons $\pi : \text{DL}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1} \rightarrow \Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ la projection canonique $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariante. Notons $x_i = X_i/X_{d-1}$, $0 \leq i \leq d-2$ les coordonnées affines associées, alors $\Omega_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ s'identifie à $\mathbb{A}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$ privé les hyperplans

rationnels $a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1}$, où (a_0, \dots, a_{d-1}) parcourt $\mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}$. De plus, nous avons une expression explicite du torseur $\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ en posant $T := 1/X_{d-1}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} &= \mathrm{Spec} \mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}}[T]/(T^{q^{d-1}} - (-1)^{d-1} \left(\prod_{[a_0:\dots:a_{d-1}] \in \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)} (a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1}) \right)^{q-1}) \\ &= \mathrm{Spec} \mathcal{O}_{\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}}[T]/(T^{q^{d-1}} - (-1)^d \prod_{(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}} (a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1})), \end{aligned}$$

car $\prod_{(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}} (a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1}) = (-1) \cdot \left(\prod_{[a_0:\dots:a_{d-1}] \in \mathbb{P}^{d-1}(\mathbb{F}_q)} (a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1}) \right)^{q-1}$. On en déduit que $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$ agit sur DL^{d-1} par la formule $T \mapsto \zeta^{-1}T$.

(2.5.3) PROPOSITION.— *Rappelons que \mathcal{H} est l'ensemble des hyperplans \mathbb{F}_q -rationnels de $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, cf. (2.4.1). Alors pour tout $Y \in \mathcal{H}$, on a $\partial(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})(Y) \equiv q - 1 \pmod{q^d - 1}$.*

Preuve : Le torseur $\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ est $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -invariant. D'après le lemme (2.4.5), il suffit de savoir la valeur de $\partial(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})$ en l'hyperplan $X_0 = 0$ qui correspond à l'hyperplan $x_0 = 0$ de $\mathbb{A}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} \partial(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})(X_0 = 0) &= \mathrm{ord}_{x_0}((-1)^d \cdot \prod_{(a_0, \dots, a_{d-1}) \in \mathbb{F}_q^d \setminus \{0\}} (a_0x_0 + \cdots + a_{d-2}x_{d-2} + a_{d-1})) \\ &\equiv q - 1 \pmod{q^d - 1}. \end{aligned}$$

□

(2.5.4) THÉORÈME.— *Soit s un sommet de \mathcal{BT} . Quitte à choisir une base d'un réseau qui représente s , on a un isomorphisme $G_s/G_s^+ \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant*

$$(2.5.5) \quad R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \Lambda).$$

Preuve : D'après le théorème (2.4.6) et la proposition (2.5.3), on a un isomorphisme $G_s/G_s^+ \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant $\overline{\Sigma}_s^0 \cong \mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Sigma}_s^0 & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \\ \downarrow \overline{p}_s & & \downarrow \pi \\ \overline{\Omega}_s^0 & \xrightarrow{\cong} & \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \end{array}$$

En vertu du corollaire (2.3.9), on obtient un isomorphisme

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \Lambda).$$

□

(2.5.6) COROLLAIRE.— *On a un isomorphisme $G_s/G_s^+ \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant :*

$$R\Gamma_c(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \Lambda).$$

Preuve : Ceci découle du théorème (2.2.3) et le théorème précédent, en vertu de la dualité de Poincaré analytique [Ber93, (7.3)] et algébrique [SGA4-3, Exp. XVIII]. \square

(2.5.7) Dans [DL76, §9], Deligne et Lusztig ont introduit une compactification $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ de $\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ dont le complémentaire est un diviseur à croisements normaux. Soit $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{d-1}\}$ l'ensemble de racines simples tel que $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_{d-1}} \in \mathfrak{S}_d$, suivant eux, on définit

$$\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} := \coprod_{\substack{x=x_1 \cdots x_{d-1} \in W \\ x_i \in \{1, s_{\alpha_i}\}}} X(x),$$

où $X(x)$ est la variété de Deligne-Lusztig associée à GL_d et l'élément $x \in \mathfrak{S}_d$, en particulier, $X(w) = \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. D'ailleurs, la variété $\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ peut s'obtenir par une suite d'éclatements successifs de l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ comme dans (2.1.5), cf. [Wan13, Lemme 4.1.2].

FAIT.— Soit s un sommet de \mathcal{BT} . Quitte à choisir une base d'un réseau qui représente s , on a un diagramme commutatif $G_s/G_s^+ \cong \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ -équivariant :

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}_s^0 & \xrightarrow{\cong} & \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\Omega}_s & \xrightarrow{\cong} & \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}. \end{array}$$

Preuve : Ceci découle de [Wan13, Lemme 4.1.2]. \square

REMARQUE.— Soient I un sous-ensemble de Δ , $P_I = BW_I B$ le sous-groupe parabolique standard associé à I et U_I le radical unipotent de P_I . Dès que l'on fait un choix d'un sommet $s \in \mathcal{BT}_0$ et une base d'un réseau qui représente s , l'isomorphisme dans le fait précédent nous fournit un sous-groupe parabolique de G_s/G_s^+ , et donc un simplexe σ contenant s . De plus, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G_s/G_s^+ & \cong & \mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q) \\ \cup & & \cup \\ G_\sigma^+/G_s^+ & \cong & U_I \end{array}$$

FAIT.— Sous l'hypothèse du fait précédent, l'isomorphisme $\overline{\Omega}_s \xrightarrow{\sim} \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$ comme dans *loc. cit.* identifie $\overline{\Omega}_\sigma$ à \overline{C}_I , où $\overline{C}_I := (\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1})^{U_I}$ les points stables sous U_I .

Preuve : Supposons tout d'abord que $I = \Delta \setminus \{\alpha_i\}$ pour une racine simple $\alpha_i \in \Delta$. D'après ce qui précède, I fait un choix d'un simplexe $[s, s']$ contenant s , où s' est un sommet voisin de s . La remarque dans [Wan13, (4.1.4)] nous dit que \overline{C}_I s'identifie à $\overline{\Omega}_s \cap \overline{\Omega}_{s'} = \overline{\Omega}_{[s, s']}$. Pour I quelconque, supposons que $I = \Delta \setminus \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_r}\}$. Alors $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, où $I_j = \Delta \setminus \{\alpha_{i_j}\}$, et $\overline{C}_I = \overline{C}_{I_1} \cap \cdots \cap \overline{C}_{I_r}$. Chaque I_j fait un choix d'un sommet voisin s_j de s , et identifie \overline{C}_{I_j} à $\overline{\Omega}_{[s, s_j]}$. Notons que $\sigma := [s, s_1, \dots, s_r]$ est le simplexe donné par I . Par définition, $\overline{\Omega}_\sigma = \overline{\Omega}_{[s, s_1]} \cap \cdots \cap \overline{\Omega}_{[s, s_r]}$, donc il s'identifie à \overline{C}_I . \square

(2.5.8) Rappelons le théorème principal (Théorème 5.1.1) de [Wan13]. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} & & \\ \downarrow \pi & & \\ \Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1} & \xrightarrow{j} & \overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1} \xleftarrow{i_I} \overline{C}_I \end{array}$$

THÉORÈME.— *Le morphisme de restriction*

$$R\Gamma(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \pi_*\Lambda) = R\Gamma(\overline{\Omega}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, Rj_*(\pi_*\Lambda)) \xrightarrow{\mathrm{res}} R\Gamma(\overline{C}_I, i_I^*Rj_*(\pi_*\Lambda))$$

induit un isomorphisme

$$R\Gamma(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \pi_*\Lambda)^{U_I} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{C}_I, i_I^*Rj_*(\pi_*\Lambda)).$$

Cela nous donne la conséquence suivante sur la cohomologie de Σ^{ca} .

(2.5.9) THÉORÈME.— *Soient s un sommet de \mathcal{BT} et σ un simplexe contenant s , alors le morphisme canonique $H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \rightarrow H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$ provenant de l'immersion ouverte $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s|^*)$ induit un isomorphisme*

$$(2.5.10) \quad H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \xrightarrow{\sim} H_c^q(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)^{G_\sigma^+}.$$

Preuve : Par la dualité de Poincaré, il suffit de montrer que le morphisme de restriction $R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) \rightarrow R\Gamma(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$ induit un isomorphisme $R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)_{G_\sigma^+} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$. D'après Berkovich [Ber96, Corollary 3.5],

$$R\Gamma(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) = R\Gamma(\overline{\Omega}_\sigma, R\Psi_\eta(p_*\Lambda)|_{\overline{\Omega}_\sigma}),$$

où p est la projection $\Sigma^{ca} \rightarrow \Omega_K^{d-1, ca}$.

Notons $\overline{p}_s : \overline{\Sigma}_s^0 \rightarrow \overline{\Omega}_s^0$ et $i_\sigma : \overline{\Omega}_\sigma \hookrightarrow \overline{\Omega}_s$. D'après le théorème (2.2.3) et le corollaire (2.3.9), on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \overline{p}_{s*}\Lambda) \\ \downarrow \mathrm{res} . & & \downarrow \mathrm{res} . \\ R\Gamma(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma(\overline{\Omega}_\sigma, i_\sigma^*Rj_{s*}\overline{p}_{s*}\Lambda) \end{array}$$

Donc on se ramène à montrer que le morphisme de restriction induit un isomorphisme

$$R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \overline{p}_{s*}\Lambda)_{G_\sigma^+/G_s^+} \xrightarrow{\sim} R\Gamma(\overline{\Omega}_\sigma, i_\sigma^*Rj_{s*}\overline{p}_{s*}\Lambda).$$

Comme G_σ^+/G_s^+ est un p -groupe fini et Λ est de torsion premier à p , on peut identifier canoniquement $R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \overline{p}_{s*}\Lambda)_{G_\sigma^+/G_s^+}$ à $R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \overline{p}_{s*}\Lambda)^{G_\sigma^+/G_s^+}$. On obtient l'énoncé du théorème, en vertu du théorème précédent et les isomorphismes canoniques :

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(\overline{\Omega}_s^0, \overline{p}_{s*}\Lambda) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \pi_*\Lambda) \\ \downarrow \mathrm{res} . & & \downarrow \mathrm{res} . \\ R\Gamma(\overline{\Omega}_\sigma, i_\sigma^*Rj_{s*}\overline{p}_{s*}\Lambda) & \xrightarrow{\cong} & R\Gamma(\overline{C}_I, i_I^*Rj_{I*}\pi_*\Lambda). \end{array}$$

□

3 La partie supercuspidale de la cohomologie

Dans cette section, on donne quelques conséquences sur la partie supercuspidale de la cohomologie de Σ^{ca} .

3.1 La démonstration de Théorème A.

Fixons $\ell \neq p$ un nombre premier et une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ de \mathbb{Q}_ℓ .

(3.1.1) Soient $\sigma' \subset \sigma$ deux simplexes de \mathcal{BT} , l'immersion ouverte $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|\sigma'|^*)$ induit un morphisme canonique :

$$H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \longrightarrow H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma'|^*), \Lambda).$$

Donc les données

$$\begin{cases} (\sigma \in \mathcal{BT}) \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \\ (\sigma' \subset \sigma) \mapsto (H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda) \rightarrow H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma'|^*), \Lambda)) \end{cases}$$

définissent un système de coefficients G° -équivariant (voir [Dat06, 3.2.3]) à valeurs dans les Λ -modules que nous noterons simplement $\sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$. Nous avons le fait suivant bien connu (voir [Dat06, Prop. 3.2.4] pour le fait et [Dat06, 3.2.3] pour les notations) :

FAIT.— Il existe une suite spectrale G° -équivariante

$$(3.1.2) \quad E_1^{pq} = \mathcal{C}_c^{or}(\mathcal{BT}_{(-p)}, \sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)) \implies H_c^{p+q}(\Sigma^{ca}, \Lambda)$$

dont la différentielle d_1^{pq} est celle du complexe de chaînes du système de coefficients $\sigma \mapsto H_c^q(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \Lambda)$.

(3.1.3) Notons W_K le groupe de Weil associé à K et I_K le sous-groupe d'inertie. Posons $GDW := G \times D^\times \times W_K$, et $v : GDW \rightarrow \mathbb{Z}$ l'homomorphisme qui envoie un élément (g, δ, w) vers l'entier $\text{val}_K(\det(g^{-1})\text{Nr}(\delta)\text{Art}^{-1}(w)) \in \mathbb{Z}$, où $\text{Nr} : D^\times \rightarrow K^\times$ désigne la norme réduite et $\text{Art}^{-1} : W_K \rightarrow W_K^{ab} \rightarrow K^\times$ désigne la composée de l'inverse du morphisme d'Artin qui envoie l'uniformisante ϖ vers un Frobenius géométrique fixé φ . On désigne $(GDW)^0 := v^{-1}(0)$ le noyau de v , et $[GDW]_d$ le sous-groupe distingué formé des éléments (g, δ, w) tels que $v(g, \delta, w) \in d\mathbb{Z}$. On considère G (resp. D^\times, W_K) comme un sous-groupe de GDW via l'inclusion naturelle, et on notera $[G]_d$ (resp. $[D]_d, [W_K]_d$) son intersection avec $[GDW]_d$. Dès que l'on identifie K^\times au centre de G , on a $[GDW]_d = (GDW)^0 \varpi^{\mathbb{Z}}$.

(3.1.4) On a vu dans le paragraphe 2.2 que l'espace analytique Σ^{ca} admet une action naturelle du groupe $G^\circ \times \mathcal{O}_D^\times \times I_K$. Afin de définir une action du groupe GDW , on suit la construction de Rapoport-Zink [RZ96] en adoptant les notations de [Dat07, §3], i.e. on ne fixe pas la hauteur des quasi-isogénies qui rigidifient les problèmes de modules dans la définition du foncteur G^{Dr} dans (2.2.1). Ce nouveau problème de modules \tilde{G} est de même pro-représentable par un schéma formel $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ sur $\text{Spf}\check{\mathcal{O}}$, cf. [Dat07, (3.1.3)]. Grâce à la décomposition suivant la hauteur de quasi-isogénie, $\tilde{G} = \coprod_{h \in \mathbb{Z}} G^{(h)}$ où $G^{(h)}$ classe les classes de triples (ψ, X, ρ) avec ρ de hauteur dh . Chaque $G^{(h)}$ est isomorphe (non-canoniquement) à $G^{(0)}$ et $G^{(0)}$ est le foncteur G^{Dr} de Drinfeld. On en déduit un isomorphisme non-canonique $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0} \cong \widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)} \times \mathbb{Z}$

où $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)} := \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}}^{d-1}$ est le schéma formel qui représente G^{Dr} . On note $\widetilde{\mathfrak{X}}$ le \mathcal{O}_D -module formel spécial universel sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$. Le noyau $\widetilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D]$ de la multiplication par Π_D dans $\widetilde{\mathfrak{X}}$ est un schéma formel en groupe fini plat de rang q^d au-dessus de $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, et qui est étale en fibre générique. Le $(\mathcal{O}_D/\Pi_D\mathcal{O}_D)^\times$ -torseur $\underline{\text{Isom}}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_D/\Pi_D\mathcal{O}_D, \widetilde{\mathfrak{X}}[\Pi_D]^{an})$ sur $\mathcal{M}_{Dr,0}$ la fibre générique au sens de Raynaud-Berkovich de $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$, est donc représenté par un \check{K} -espace analytique $\mathcal{M}_{Dr,1}$, qui est un revêtement étale de $\mathcal{M}_{Dr,0}$ de groupe $\mathcal{O}_D^\times/(1 + \Pi_D\mathcal{O}_D) \cong \mathbb{F}_{q^d}^\times$. En posant $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca} := \mathcal{M}_{Dr,1} \widehat{\otimes}_{\check{K}} \widehat{K}^{ca}$, on a un isomorphisme $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca} \cong \Sigma^{ca} \times \mathbb{Z}$. Suivant [Dat07, (3.1.5)], on définit une action du groupe GDW sur $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}$ telle que la composante $\Sigma^{ca} \times \{0\}$ soit stable sous l'action du sous-groupe $(GDW)^0$. Désormais, on identifie Σ^{ca} au sous-espace analytique ouvert-fermé $\Sigma^{ca} \times \{0\}$ de $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}$.

(3.1.5) Soit $\theta : \mathbb{F}_{q^d}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ un caractère d -primitif, i.e. θ ne se factorise pas par la norme $N_{\mathbb{F}_{q^d}/\mathbb{F}_{q^f}} : \mathbb{F}_{q^d}^\times \rightarrow \mathbb{F}_{q^f}^\times$, $\forall f|d$ et $f \neq d$. Définissons les représentations suivantes :

- une représentation $\rho(\theta) := \text{ind}_{[D]_d}^{D^\times} \theta$ de D^\times , où $[D]_d = \mathcal{O}_D^\times \varpi^\mathbb{Z}$ tel que \mathcal{O}_D^\times agit via la projection $\mathcal{O}_D^\times \rightarrow \mathbb{F}_{q^d}^\times$, et $\varpi^\mathbb{Z}$ agit trivialement.
- une représentation $\pi(\theta) := \text{ind}_{\text{GL}_d(\mathcal{O})\varpi^\mathbb{Z}}^G \overline{\pi}_\theta$ de G , où $\overline{\pi}_\theta$ est la représentation cuspidale de $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ associée à θ via la correspondance de Green (ou de Deligne-Lusztig), vue comme une représentation de $\text{GL}_d(\mathcal{O})\varpi^\mathbb{Z}$ telle que $\text{GL}_d(\mathcal{O})$ agit via la projection $\text{GL}_d(\mathcal{O}) \rightarrow \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$ et $\varpi^\mathbb{Z}$ agit trivialement.
- une représentation $\sigma^\sharp(\theta) := \text{ind}_{[W_K]_d}^{W_K} \tilde{\theta}$ de W_K , où $\tilde{\theta}$ est le caractère de $[W_K]_d = I_K \langle \varphi^d \rangle^\mathbb{Z}$ tel que $\tilde{\theta}(\varphi^d) = (-1)^{d-1} q^{\frac{d(d-1)}{2}}$, et $\tilde{\theta}|_{I_K}$ se factorise par l'inertie modérée $I_K \rightarrow I_K/I_{K(\varpi_t)} \cong \mu_{q^d-1} \xrightarrow{\theta} \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, ici ϖ_t est la racine $(q^d - 1)$ -ième de ϖ fixée dans (2.3.8).

Posons

$$\mathbf{H}_c^i := H_c^i(\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}/\varpi^\mathbb{Z}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell), \quad i \in \{d-1, \dots, 2d-2\}.$$

D'après la description précédente,

$$\mathbf{H}_c^i = \text{ind}_{[GDW]_d}^{GDW} H_c^i(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

où $\varpi \in K^\times \subset G$ agit trivialement. On considère la partie $\rho(\theta)$ -isotypique de \mathbf{H}_c^i .

(3.1.6) THÉORÈME.— *Pour tout $\theta : \mathbb{F}_{q^d}^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ caractère d -primitif, on a*

$$\text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^i) \underset{G \times W_K}{\simeq} \begin{cases} \pi(\theta) \otimes \sigma^\sharp(\theta), & \text{si } i = d-1; \\ 0, & \text{si } i \neq d-1. \end{cases}$$

Preuve : Ceci découle du lemme (3.1.8) et la proposition (3.1.10). □

(3.1.7) LEMME.— *En tant que représentation de $GW := G \times W_K$, on a*

$$\text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^i) = \text{ind}_{[GW]_d}^{GW} \text{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^i(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)),$$

où $[GW]_d = \{(g, w) \in GW \mid v(g, 1, w) \in d\mathbb{Z}\}$.

Preuve : D'après la réciprocity de Frobenius, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^i) &= \mathrm{Hom}_{[D]_d}(\theta, \mathrm{ind}_{[GDW]_d}^{GDW} H_c^i(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &= \mathrm{ind}_{[GW]_d}^{GW} \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^i(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)).\end{aligned}$$

□

(3.1.8) LEMME.— *En tant que représentation de G , on a*

$$\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^i) = \begin{cases} \pi(\theta)^{\oplus d}, & \text{si } i = d - 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve : Notons $M(\theta)$ la partie θ -isotypique d'un $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ -module M . Rappelons que si s est un sommet de \mathcal{BT} , nous avons pour tout $i \in \mathbb{N}$ un isomorphisme (cf. (2.5.6))

$$H_c^i(\nu^{-1}(|s|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H_c^i(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell).$$

Comme θ est d -primitif, grâce à la propriété des variétés de Deligne-Lusztig [DL76, Lemma 9.14], on a

$$H_c^i(\mathrm{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) \cong \begin{cases} \overline{\pi}_\theta, & \text{si } i = d - 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

En vertu du théorème (2.5.9), si $i \neq d - 1$, $H_c^i(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) = 0 \forall \sigma$. Si $i = d - 1$, $\sigma \ni s$ un simplexe tel que $\dim \sigma > 0$, comme $\overline{\pi}_\theta$ est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, on a

$$H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|\sigma|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) \cong \overline{\pi}_\theta^{G_\sigma^+ / G_s^+} = 0.$$

Donc, la partie θ -isotypique de la suite spectrale 3.1.2 dégénère en E_1 lorsque $i = d - 1$. En conclusion, on a

(3.1.9)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^i(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \begin{cases} \bigoplus_{s \in \mathcal{BT}_0} H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) = \bigoplus_{s \in \mathcal{BT}_0} \overline{\pi}_\theta, & \text{si } i = d - 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci nous fournit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[G]_d$ -modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1}(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \cong \pi(\theta)|_{[G]_d}.$$

Alors, en tant que représentation de G , nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1}) &= \mathrm{ind}_{[G]_d}^G \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_{q^d}^\times}(\theta, H_c^{d-1}(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)) \\ &= \mathrm{ind}_{[G]_d}^G \pi(\theta)|_{[G]_d}\end{aligned}$$

Notons $\tilde{\pi}(\theta) := \mathrm{ind}_{\mathrm{GL}_d(\mathcal{O})^{\varpi^{\mathbb{Z}}}}^{[G]_d} \overline{\pi}_\theta$, il s'ensuit que

$$\mathrm{ind}_{[G]_d}^G \pi(\theta)|_{[G]_d} = \mathrm{ind}_{[G]_d}^G \left(\bigoplus_{x \in G/[G]_d} x \tilde{\pi}(\theta) \right) = \bigoplus_{x \in G/[G]_d} \mathrm{ind}_{[G]_d}^G (x \tilde{\pi}(\theta)),$$

où ${}^x\tilde{\pi}(\theta)(g) = \tilde{\pi}(\theta)(x^{-1}gx)$ pour $g \in [G]_d$. D'après la formule de Mackey, on sait que

$$\text{ind}_{[G]_d}^G({}^x\tilde{\pi}(\theta)) = \pi(\theta), \quad \forall x \in G/[G]_d.$$

Ceci nous permet de conclure car $|G/[G]_d| = d$. \square

Considérons le W_K -module

$$\text{Hom}_G(\pi(\theta), \text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1})).$$

Dans le reste de ce paragraphe, on démontre la proposition suivante :

(3.1.10) PROPOSITION.— *On a un isomorphisme de W_K -modules*

$$\text{Hom}_G(\pi(\theta), \text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1})) \cong \sigma^\sharp(\theta).$$

Preuve : D'après la réciprocity de Frobenius, on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\pi(\theta), \text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1})) &= \text{Hom}_G(\text{ind}_{\text{GL}_d(\mathcal{O})\varpi^{\mathbb{Z}}}^G \tilde{\pi}_\theta, \text{ind}_{[GW]_d}^{GW} \text{Hom}_{\mathbb{F}_q^\times}(\theta, H_c^{d-1}(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))) \\ &= \text{ind}_{[W_K]_d}^{W_K} \text{Hom}_{\text{GL}_d(\mathcal{O})\varpi^{\mathbb{Z}}}(\tilde{\pi}_\theta, \text{Hom}_{\mathbb{F}_q^\times}(\theta, H_c^{d-1}(\Sigma^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell))) \end{aligned}$$

D'après 3.1.9,

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(\pi(\theta), \text{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1})) &= \text{ind}_{[W_K]_d}^{W_K} \text{Hom}_{\text{GL}_d(\mathcal{O})\varpi^{\mathbb{Z}}}(\tilde{\pi}_\theta, \bigoplus_{s' \in \mathcal{BT}_0} H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)) \\ &= \text{ind}_{[W_K]_d}^{W_K} \text{Hom}_{\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\tilde{\pi}_\theta, (\bigoplus_{s' \in \mathcal{BT}_0} H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta))^{G_s^+}), \end{aligned}$$

où s désigne le réseau standard $[\mathcal{O}^d]$. On démontre que

$$\left(\bigoplus_{s' \in \mathcal{BT}_0} H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) \right)^{G_s^+} = H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta).$$

Évidemment, les éléments dans $H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ sont G_s^+ -invariants. Soit $x = \sum x_{s'} \in (\bigoplus_{s' \in \mathcal{BT}_0} H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta))^{G_s^+}$ avec $x_{s'} \in H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$. Notons $e_{G_s^+}$ l'idempotent central associé à pro- p -groupe G_s^+ . Par hypothèse, on a $e_{G_s^+}x = x$ et $e_{G_{s'}}x_{s'} = x_{s'}$, $\forall s'$. Soit s' un sommet différent de s , on a $e_{G_s^+}x_{s'} = 0$. En effet, il existe un sommet s'' dans l'enclos de s et s' tel que s', s'' soient adjacents. D'après [MS10, 2.2], $e_{G_s^+}e_{G_{s'}} = e_{G_s^+}e_{G_{s''}}e_{G_{s'}}$. Notons que $G_{s''}^+G_{s'}^+/G_{s'}^+$ est isomorphe à un sous-groupe unipotent non trivial de $\text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$, et que $H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s'|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ est cuspidale en tant que représentation de $G_{s'}/G_{s'}^+ \cong \text{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. On a alors

$$e_{G_s^+}x_{s'} = e_{G_s^+}e_{G_{s'}}x_{s'} = e_{G_s^+}(e_{G_{s''}}e_{G_{s'}}x) = 0.$$

On en déduit que

$$x = e_{G_s^+}x = e_{G_s^+}x_s + \sum_{s' \neq s} e_{G_s^+}x_{s'} = x_s \in H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta).$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{Hom}_G(\pi(\theta), \mathrm{Hom}_{D^\times}(\rho(\theta), \mathbf{H}_c^{d-1})) = \mathrm{ind}_{[W_K]_d}^{W_K} \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\bar{\pi}_\theta, H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)).$$

Notons que

$$V := \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\bar{\pi}_\theta, H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta))$$

est un $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ -espace vectoriel de dimension 1, car

$$H_c^{d-1}(\nu^{-1}(|s|^*), \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) \cong H_c^{d-1}(\mathrm{DL}_{\bar{\mathbb{F}}_q}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta) = \bar{\pi}_\theta$$

en tant que représentation de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)$. Donc on se ramène à comprendre l'action de $[W_K]_d = I_K \langle \varphi^d \rangle^{\mathbb{Z}}$ sur V .

Tout d'abord, on note que la dualité de Poincaré entraîne que

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\bar{\pi}_\theta, H^{d-1}(\nu^{-1}(|s|), \bar{\mathbb{Q}}_\ell(d-1))(\theta^{-1})^\vee). \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_d(\mathbb{F}_q)}(\bar{\pi}_\theta, H^{d-1}(\Sigma_s^{ca}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell(d-1))(\theta^{-1})^\vee). \end{aligned}$$

En comparant (2.3.8) et (2.5.1), on observe que l'action de I_K sur $\widehat{\Sigma}_s^0$ (cf. (2.3.8)) se factorise par $I_K/I_K(\varpi_t) \cong \mathbb{F}_{q^d}^\times$, et elle s'identifie à l'action de $\mathbb{F}_{q^d}^\times$ sur $\mathrm{DL}_{\bar{\mathbb{F}}_q}^{d-1}$. Alors l'action de I_K sur V se factorise par $I_K/I_K(\varpi_t)$ via le caractère θ .

On est amené donc à étudier l'action de φ^d sur V . À priori, l'espace analytique Σ^{ca} n'a qu'une action du groupe d'inertie I_K . Cependant la donnée de descente à la Weil sur $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}$ ([RZ96, (3.48)]) définit une action de l'élément de Frobenius géométrique φ sur $\mathcal{M}_{Dr,1}^{ca}$. Pour définir une donnée de descente de Σ , il faut décaler par l'endomorphisme Π_D^{-1} . Précisément, d'après [RZ96, (3.72)], le morphisme $\Pi_D^{-1} \circ \varphi$ induit la donnée de descente canonique de $\widehat{\mathcal{M}}_{Dr,0}^{(0)}$, donc il induit une donnée de descente de Σ , et de même une donnée de descente de $\widehat{\Sigma}_s^0$. En particulier, $\Pi_D^{-1} \circ \varphi$ induit une donnée de descente de la fibre spéciale $\bar{\Sigma}_s^0$ de $\widehat{\Sigma}_s^0$. Autrement dit, cela nous fournit une structure \mathbb{F}_q -rationnelle de $\bar{\Sigma}_s^0$, et on note Fr le morphisme de Frobenius associé.

Pour déterminer cette structure \mathbb{F}_q -rationnelle, on considère l'action de Fr sur les composantes connexes géométriques de $\bar{\Sigma}_s^0$. Notons $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes géométriques de X pour un espace analytique ou une variété X . On a le fait suivant :

FAIT.— $\pi_0(\mathcal{M}_{Dr,1})$ est un espace homogène sous K^\times , isomorphe à $K^\times/(1 + \varpi\mathcal{O})$, sur lequel l'action de G est donnée par $G \xrightarrow{\det} K^\times$, celle de D^\times est donnée par $D^\times \xrightarrow{\mathrm{Nr}} K^\times$, celle de W_K est donnée par $\mathrm{Art}_K^{-1} : W_K \rightarrow W_K^{ab} \xrightarrow{\sim} K^\times$.

REMARQUE.— Dans [Che13], Chen a étudié les composantes connexes géométriques de la tour de l'espace de Rapoport-Zink non-ramifié de certains types, avec les actions de différents groupes associés à la donnée de Rapoport-Zink. En particulier, elle a décrit les composantes connexes géométriques de la tour de Lubin-Tate $(\mathcal{M}_{LT,n})_{n \in \mathbb{N}}$ munies des actions de G, D^\times, W_K . En vertu de l'isomorphisme de Faltings-Fargues [Far08] entre la tour de Lubin-Tate et la tour de Drinfeld et en prenant le sous-ensemble fixé par $1 + \Pi_D \mathcal{O}_D$, on obtient l'énoncé du fait précédent.

LEMME.— $\pi_0(\bar{\Sigma}_s^0)$ est un espace principal homogène sous \mathbb{F}_q^\times sur lequel Fr agit par multiplication par $(-1)^{d-1}$.

Preuve : Notons que $\text{Nr}(\Pi_D) = (-1)^{d-1}\varpi$ et $\text{Art}^{-1}(\varphi) = \varpi$. D'après le fait précédent, $\pi_0(\Sigma)$ est un espace principal homogène sous \mathbb{F}_q^\times , sur lequel $\Pi_D^{-1} \circ \varphi$ agit par multiplication par

$$\text{Nr}(\Pi_D^{-1}) \cdot \text{Art}^{-1}(\varphi) = (-1)^{d-1}\varpi^{-1} \cdot \varpi = (-1)^{d-1}.$$

Comme $\widehat{\Sigma}_s^0$ est un $\mu_{q^{d-1}}$ -torseur sur $\widehat{\Omega}_{\mathcal{O},s}^{d-1}$, on a une bijection canonique entre $\pi_0(\nu^{-1}(|s|))$ et $\pi_0(\overline{\Sigma}_s^0)$. D'après l'équation 2.5.2 de $\overline{\Sigma}_s^0 \cong \text{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$, on sait que $|\pi_0(\overline{\Sigma}_s^0)| = q - 1$. Les immersions $\nu^{-1}(|s|) \rightarrow \nu^{-1}(|s|^*) \rightarrow \Sigma$ induisent les morphismes α, β entre les composantes connexes

$$\pi_0(\nu^{-1}(|s|)) \xrightarrow{\alpha} \pi_0(\nu^{-1}(|s|^*)) \xrightarrow{\beta} \pi_0(\Sigma).$$

On démontre que le composé $\beta \circ \alpha$ est une bijection. En effet, α est bijective, car $H^0(\nu^{-1}(|s|), \Lambda) = H^0(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$, d'après (2.2.3). Puisque $|\pi_0(\nu^{-1}(|s|))| = |\pi_0(\Sigma)| = q - 1$, il suffit de montrer que β est surjective. Notons que $\{\nu^{-1}(|s'|^*)\}_{s' \in \mathcal{B}\mathcal{T}_0}$ forment un recouvrement ouvert de Σ . On se ramène alors à prouver que pour s' un sommet quelconque et U' une composante connexe de $\pi_0(\nu^{-1}(|s'|^*))$, il existe une suite de sommets $s_0 = s, s_1, \dots, s_n = s'$ et des composantes connexes $U_i \in \pi_0(\nu^{-1}(|s_i|^*))$ avec $U_n = U'$ telles que s_i, s_{i+1} soient adjacent et $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset, \forall i$. Par dévissage, il suffit de considérer le cas où s et s' sont adjacent. Notons σ le simplexe $[s, s']$, et considérons les immersions ouvertes $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s|^*)$ et $\nu^{-1}(|\sigma|^*) \hookrightarrow \nu^{-1}(|s'|^*)$ induisant les morphismes entre π_0 :

$$\alpha_1 : \pi_0(\nu^{-1}(|\sigma|^*)) \rightarrow \pi_0(\nu^{-1}(|s|^*)), \quad \alpha_2 : \pi_0(\nu^{-1}(|\sigma|^*)) \rightarrow \pi_0(\nu^{-1}(|s'|^*)).$$

Notons que α_1 et α_2 sont bijectives. Ceci découle du théorème (2.5.9) et du fait que le p -groupe G_σ^+ agit trivialement sur $H_c^{2d-2}(\nu^{-1}(|s|^*), \Lambda)$. Donc, pour $U' \in \pi_0(\nu^{-1}(|s'|^*))$, il existe une composante connexe $U \in \pi_0(\nu^{-1}(|s|^*))$ tel que $U \cap U'$ contienne une composante connexe du ouvert $\nu^{-1}(|\sigma|^*)$ de Σ . Par conséquent, β est bijective.

On a alors une bijection canonique entre $\pi_0(\Sigma)$ et $\pi_0(\overline{\Sigma}_s^0)$ compatible avec l'action de \mathbb{F}_q^\times . Par conséquent, le morphisme de Frobenius Fr induit la multiplication par $(-1)^{d-1}$ sur $\pi_0(\overline{\Sigma}_s^0)$. \square

(3.1.11) LEMME.— *La forme \mathbb{F}_q -rationnelle de $\overline{\Sigma}_s^0$ induite par la donnée de descente Fr est isomorphe à la variété de Deligne-Lusztig (\mathbb{F}_q -rationnelle) DL^{d-1} définie par l'équation 2.5.2.*

Preuve : D'après le théorème (2.5.4), on sait que $\overline{\Sigma}_s^0 \cong \text{DL}_{\mathbb{F}_q}^{d-1}$. Grâce à la suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), H^q(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^{d-1}})) \implies H^{p+q}(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^{d-1}}),$$

on a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mu_{q^{d-1}}) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^{d-1}}) \rightarrow H^1(\Omega_{\mathbb{F}_q}^{d-1}, \mu_{q^{d-1}}) \rightarrow H^2(\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mu_{q^{d-1}}).$$

Notons que $H^1(\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mu_{q^{d-1}}) = \mathbb{F}_q^\times$ grâce à la suite exacte de Kummer et Thm. 90 de Hilbert, et que $H^2(\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q), \mu_{q^{d-1}}) = 0$. On en déduit que les formes \mathbb{F}_q -rationnelles de $\text{DL}_{\mathbb{F}_q}$ sont données par Y_a pour tout $a \in \mathbb{F}_q^\times$, où Y_a est donnée par l'équation $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})^{q-1} = a$. En particulier, $\text{DL}^{d-1} = Y_{(-1)^{d-1}}$.

L'ensemble des composantes connexes géométriques $\pi_0(Y_a)$ de Y_a s'identifie à l'ensemble des racines $(q-1)$ -ièmes de a . Précisément, on associe ε telle que $\varepsilon^{q-1} = a$ la composante

connexe géométrique définie par l'équation $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1}) = \varepsilon$. Via cette identification, $t \in \mathbb{F}_q^\times$ agit par multiplication qui envoie ε vers $t\varepsilon$. Considérons le morphisme de Frobenius $\text{Frob} : (X_i)_{0 \leq i \leq d-1} \mapsto (X_i^q)_{0 \leq i \leq d-1}$ sur Y_a . Pour un point $x = (x_0, \dots, x_{d-1})$ tel que $\det((x_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1}) = \varepsilon$, $\text{Frob}(x) = (x_0^q, \dots, x_{d-1}^q)$ satisfait l'équation $\det((x_i^q)^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1} = \varepsilon^q = a \cdot \varepsilon$. Autrement dit, Frob agit sur $\pi_0(Y_a)$ par multiplication par a . Il s'ensuit que $Y_{(-1)^{d-1}} = \text{DL}^{d-1}$ est la forme \mathbb{F}_q -rationnelle de $\overline{\Sigma}_s^0$ induite par Fr , en vertu du lemme précédent. \square

(3.1.12) THÉORÈME.— (Digne et Michel [DM85]) Fr^d agit sur $H_c^{d-1}(\overline{\Sigma}_s^0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ par multiplication par $(-1)^{d-1} q^{\frac{d(d-1)}{2}}$.

Preuve : D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que $(-1)^{d-1} q^{\frac{d(d-1)}{2}}$ est l'unique valeur propre de Frob^d sur $H_c^{d-1}(\text{DL}^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$. Ceci est essentiellement démontré par Digne et Michel [DM85, V. (3.14)]. Cependant, ils ont calculé la valeur propre de Frob^d pour la variété définie par l'équation $\det((X_i^{q^j})_{0 \leq i, j \leq d-1})^{q-1} = 1$. De plus, dans leur formule (page 106 de *loc. cit.*), il manque un signe $(-1)^{d-1}$ ($d = n$ dans *loc. cit.*), comme ils ont oublié qu'ils travaillaient avec une somme alternée. En plus, le facteur $\theta((-1)^{d-1})$ dans *loc. cit.* disparaît. Cela vient du fait que l'on peut rendre un isomorphisme entre Y_1 et Y_a par un changement de variables $f : X_i \mapsto X_i/b$ où $b^{d-1} = a$. Alors l'action de Frob^d sur $H_c^i(Y_a, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est la même que celle sur $H_c^i(Y_1, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ tordue par l'automorphisme induit par le changement de variables $X_i \mapsto a \cdot X_i$, donc n'est autre que l'action de l'élément $a \in \mathbb{F}_{q^d}^\times$. Ce dernier agit bien par $\theta(a)$ sur la partie θ -isotypique de la cohomologie. Par conséquent, dans notre cas où $a = (-1)^{d-1}$, l'endomorphisme Frob^d agit sur $H_c^{d-1}(\text{DL}^{d-1}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$ par la constante $(-1)^{d-1} q^{\frac{d(d-1)}{2}}$. \square

Revenons à la preuve de la proposition (3.1.10). L'action de φ^d sur V est donnée par celle sur $H^{d-1}(\Sigma_s^{ca}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(d-1))(\theta)^\vee$, donc elle s'identifie à l'action de Fr^d sur $H_c^{d-1}(\overline{\Sigma}_s^0, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)(\theta)$. En vertu du lemme précédent, on obtient l'énoncé de la proposition. \square

Références

- [BC91] J.-F. BOUTOT et H. CARAYOL : Uniformisation p -adique des courbes de Shimura : les théorèmes de Čerednik et de Drinfel'd. *Astérisque*, (196-197):7, 45–158 (1992), 1991. Courbes modulaires et courbes de Shimura (Orsay, 1987/1988).
- [Ber93] Vladimir G. BERKOVICH : Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 78:5–161, 1993.
- [Ber95] Vladimir G. BERKOVICH : The automorphism group of the Drinfel'd half-plane. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(9):1127–1132, 1995.
- [Ber96] Vladimir G. BERKOVICH : Vanishing cycles for formal schemes. II. *Invent. Math.*, 125(2):367–390, 1996.
- [Boy99] Pascal BOYER : Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Invent. Math.*, 138(3):573–629, 1999.
- [Car90] H. CARAYOL : Nonabelian Lubin-Tate theory. *In Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 de *Perspect. Math.*, pages 15–39. Academic Press, Boston, MA, 1990.

- [Che13] Miaofen CHEN : Composantes connexes géométriques de la tour des espaces de modules de groupes p -divisibles. *À paraître dans Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 2013.
- [Dat06] Jean-François DAT : Espaces symétriques de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(1):1–74, 2006.
- [Dat07] Jean-François DAT : Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques. *Invent. Math.*, 169(1):75–152, 2007.
- [DH87] Pierre DELIGNE et Dale HUSEMOLLER : Survey of Drinfel'd modules. *In Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*, volume 67 de *Contemp. Math.*, pages 25–91. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.
- [DL76] P. DELIGNE et G. LUSZTIG : Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1):103–161, 1976.
- [DM85] François DIGNE et Jean MICHEL : Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (20):iv+144, 1985.
- [Dri74] V. G. DRINFEL'D : Elliptic modules. *Mat. Sb. (N.S.)*, 94(136):594–627, 656, 1974.
- [Dri76] V. G. DRINFEL'D : Coverings of p -adic symmetric domains. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(2):29–40, 1976.
- [Far08] Laurent FARGUES : L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques. *In L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, volume 262 de *Progr. Math.*, pages 1–325. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [FvdP04] Jean FRESNEL et Marius van der PUT : *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2004.
- [Gen] Alain GENESTIER : Exposés à Göttingen et à Harvard.
- [Gen96] Alain GENESTIER : Espaces symétriques de Drinfeld. *Astérisque*, (234):ii+124, 1996.
- [GI63] O. GOLDMAN et N. IWAHORI : The space of p -adic norms. *Acta Math.* 109, pages 137–177, 1963.
- [Har77] Robin HARTSHORNE : *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Har97] Michael HARRIS : Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces ; elaboration of Carayol's program. *Invent. Math.*, 129(1):75–119, 1997.
- [Hau05] Thomas HAUSBERGER : Uniformisation des variétés de Laumon-Rapoport-Stuhler et conjecture de Drinfeld-Carayol. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(4):1285–1371, 2005.
- [HT01] Michael HARRIS et Richard TAYLOR : *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, volume 151 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Ito05] Tetsushi ITO : Weight-monodromy conjecture for p -adically uniformized varieties. *Invent. Math.*, 159(3):607–656, 2005.
- [Kur80] Akira KURIHARA : Construction of p -adic unit balls and the Hirzebruch proportionality. *Amer. J. Math.*, 102(3):565–648, 1980.
- [MS10] Ralf MEYER et Maarten SOLLEVELD : Resolutions for representations of reductive p -adic groups via their buildings. *J. Reine Angew. Math.*, 647:115–150, 2010.

- [Mus78] G. A. MUSTAFIN : Non-Archimedean uniformization. *Mat. Sb. (N.S.)*, 105(147)(2): 207–237, 287, 1978.
- [Rap90] M. RAPOPORT : On the bad reduction of Shimura varieties. *In Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions, Vol. II (Ann Arbor, MI, 1988)*, volume 11 de *Perspect. Math.*, pages 253–321. Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [Ray74] Michel RAYNAUD : Schémas en groupes de type (p, \dots, p) . *Bull. Soc. Math. France*, 102:241–280, 1974.
- [RZ96] M. RAPOPORT et Th. ZINK : *Period spaces for p -divisible groups*, volume 141 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61.
- [SGA7-1] *Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 288. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 .
- [SGA4-3] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 305. Springer-Verlag, Berlin, 1973. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 .
- [SS93] P. SCHNEIDER et U. STUHLER : Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field. *J. Reine Angew. Math.*, 436:19–32, 1993.
- [Str08] Matthias STRAUCH : Deformation spaces of one-dimensional formal modules and their cohomology. *Adv. Math.*, 217(3):889–951, 2008.
- [Tei90] Jeremy TEITELBAUM : Geometry of an étale covering of the p -adic upper half plane. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 40(1):68–78, 1990.
- [Wan13] Haoran WANG : Sur la cohomologie des compactifications de variétés de Deligne-Lusztig. *À paraître dans Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, arXiv :1310.7259, 2013.
- [Wan14] Haoran WANG : L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale II, arXiv :1402.1965, 2014.
- [Yos10] Teruyoshi YOSHIDA : On non-abelian Lubin-Tate theory via vanishing cycles. *In Algebraic and arithmetic structures of moduli spaces (Sapporo 2007)*, volume 58 de *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 361–402. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.
- [Zhe08] Weizhe ZHENG : Sur la cohomologie des faisceaux l -adiques entiers sur les corps locaux. *Bull. Soc. Math. France*, 136(3):465–503, 2008.

HAORAN WANG

Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques de Jussieu

Adresse Présente : Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
 haoran.wang@mpim-bonn.mpg.de