Ramanujan an Hardy: Vom ersten bis zum letzten Brief

Don Zagier

Es gibt verschiedene Meinungen zu der Frage, ob die Mathematik eher eine wissenschaftliche oder eher eine künstlerische Aktivität ist. Aber alle sind sich darüber einig, dass sie keine romantische Aktivität ist. Die Geschichte, die ich Ihnen heute erzählen möchte, ist eine der seltenen Ausnahmen dieser Regel. Es ist die Geschichte eines Autodidakten, eines selbst in seinem eigenen Land unbekannten Genies, der es gewagt hat, einem der berühmtesten Mathematiker seiner Epoche zu schreiben, um ihm einige seiner Entdeckungen zu enthüllen; die Geschichte der warmherzigen und großzügigen Aufnahme dieses Schreibens und der außergewöhnlichen Zusammenarbeit, die daraus entstand; und schlussendlich die Geschichte des glorreichen letzten Schreibens des Genies an seinen Freund, welches inmitten einer Periode von Krankheit und Depression kurz vor seinem viel zu frühen Tod entstand und trotzdem bis heute nicht aufhört, uns zu faszinieren und zu verblüffen. Das unbekannte Genie war der Inder Srinivasa Ramanujan, sein uneigennütziger Gönner der Engländer Godfrey Harold Hardy, und es ist heute mein Ziel, Ihnen die Umstände näher zu bringen, die die beiden zusammenbrachten, und auch etwas die Mathematik, um die es sich dabei handelte.

Als man mich gebeten hatte, in diesem Konferenzzyklus mit dem Titel „Ein Text, ein Mathematiker" zu sprechen,[1] hatte ich zuallererst in Erwägung gezogen, diesen Titel leicht abzuändern in „Drei Texte, ein Mathematiker" und über drei Schriften von Hardy zu sprechen, die meine Karriere und – wie ich glaube – auch die vieler meiner Kollegen beeinflusst haben. Es handelte sich um die drei Bücher von Hardy, die Sie hier sehen: die *Einführung in die Zahlentheorie*, die er in Zusammenarbeit mit E.M. Wright geschrieben hat, sein *Mathematician's Apology* und seine mathematische Biographie von Ramanujan. Ich erhielt das erste dieser Bücher im Alter von 14 Jahren als Preis für einen Wettbewerb, den ich in meinem Jahr an einer englischen „public school" gewonnen hatte (es handelt sich übrigens um das Winchester College, das gleiche College, an dem Hardy Schüler war – und das er verabscheute). Als ich diesen Preis erhielt, war ich nicht sonderlich beeindruckt, da ich im Jahr zuvor in den Vereinigten Staaten für einen ähnlichen Wettbewerb ein Stipendium in Höhe von 1000 Dollar für mein Hochschulstudium gewonnen hatte und mir deshalb ein Preis im Wert von zweieinhalb Pfund nicht sehr aufregend erschien. Aber ich hatte Unrecht, denn das Stipendium hat nichts an meinem Leben verändert, die *Einführung in die Zahlentheorie* dagegen schon. Geschrieben mit der Klarheit und dem Elan, für die Hardy berühmt war, zeigt dieses Buch mit unfehlbarem Scharfsinn und unwiderstehlichem Enthusiasmus die ganze Schönheit der Zahlentheorie auf einem Niveau, das auch einem guten Gymnasiasten zugänglich ist, ohne den Tiefgang der Theorie zu vereinfachen oder zu verschleiern. Wenn ich Zahlentheoretiker geworden bin, liegt das ohne Zweifel zum Teil an diesem Meisterwerk.

Das zweite Buch ist ein ganz anderes Werk. *A Mathematician's Apology*, von dem es leider keine Übersetzung zu geben scheint, ist einzig in seiner Art. Geschrieben in Hardys letzten Lebensjahren gibt es, wie der Titel sagt, eine Art Rechtfertigung für das Leben eines theoretischen Mathematikers. Es ist ein wunderbares Buch: intellektuell, persönlich und zuweilen ziemlich traurig, da eine der

Srinivasa Ramanujan

Godfrey Harold Hardy

Thesen, die Hardy aufstellt, besagt, dass ein Mathematiker nur in seiner Jugend kreativ sein kann, und er daher wohl nie wieder die Freude einer großen Entdeckung erleben würde. Aber das Buch gibt auch viele Einblicke in die Philosophie und Psychologie der Mathematik und der Mathematiker und auch in seine eigene Philosophie, zum Beispiel seine Überzeugung, dass nichts, was er gemacht hat, jemals nützlich sein könnte und dass er dies absolut so haben wollte.

Das dritte Buch, um das es sich gehandelt hätte, wäre ich bei den Büchern von Hardy geblieben, wäre seine Biographie von Ramanujan gewesen, die allerdings eher ein mathematischer Text als eine Biographie ist, da elf der zwölf Kapitel der Mathematik gewidmet sind und nur ein einziges dem Leben von Ramanujan. Ich wollte also erst über diese drei Bücher sprechen, die mir so viel bedeuten, aber letztendlich erschien es mir besser, nur über die Verbindung zwischen den Mathematikern Hardy und Ramanujan zu sprechen und als Texte nicht die brillanten und geschliffenen Bücher des Ersteren, sondern die beiden ungelenk und schlecht geschriebenen Briefe des Letzteren zu nehmen, da sie vielleicht einen noch größeren Einfluss auf die Entwicklung der Mathematik im letzten Jahrhundert hatten und bis zum heutigen Tage noch immer haben.

Ich habe nicht die Zeit, Ihnen das Leben von Ramanujan, auch nur in Kurzform, zu schildern und ziehe es sowieso vor, Ihnen Ramanujan so vorzustellen, wie er sich selbst Hardy in seinem berühmten ersten Brief vom Januar 1913 vorstellte, der den halben Titel meines heutigen Vortrags bildet.

MADRAS, 16 *January* 1913

DEAR SIR,

I beg to introduce myself to you as a clerk in the Accounts Department of the Port Trust Office at Madras on a salary of only £20 per annum. I am now about 23 years of age. I have had no University education but I have undergone the ordinary school course. After leaving school I have been employing the spare time at my disposal to work at Mathematics. I have not trodden through the conventional regular course which is followed in a University course, but I am striking out a new path for myself. I have made a special investigation of divergent series in general and the results I get are termed by the local mathematicians as "startling".

...

I would request you to go through the enclosed paper. Being poor, if you are convinced that there is anything of value I would like to have my theorems published. I have not given the actual investigations nor the expressions that I get but I have indicated the lines on which I proceed. Being inexperienced I would very highly value any advice you give me. Requesting to be excused for the trouble I give you.

I remain, Dear Sir, Yours truly,

S. RAMANUJAN

P.S. My address is S. Ramanujan, Clerk Accounts Department, Port Trust, Madras, India

Die Geschichte von Hardys Reaktion auf diesen Brief wurde sowohl von Hardy selbst, als auch von C.P. Snow in seinem Vorwort zu *A Mathematician's Apology* geschildert und ist berühmt geworden.

... At the back of his mind, getting in the way of his complete pleasure in his game, the Indian manuscript nagged away. Wild theorems. Theorems such as he had never seen before, nor imagined. A fraud of genius ? A question was forming itself in his mind. As it was Hardy's mind, the question forming itself with epigrammatic clarity : is a fraud of genius more probable than an unknown mathematician of genius ? Clearly the answer was no. Back in his rooms in Trinity, he had another look at the script. He sent word to Littlewood (probably by messanger, certainly not by telephone, for which, like all mechanical contriviances including fountain pens, he had a deep distrust) that they must have a discussion after hall.

...

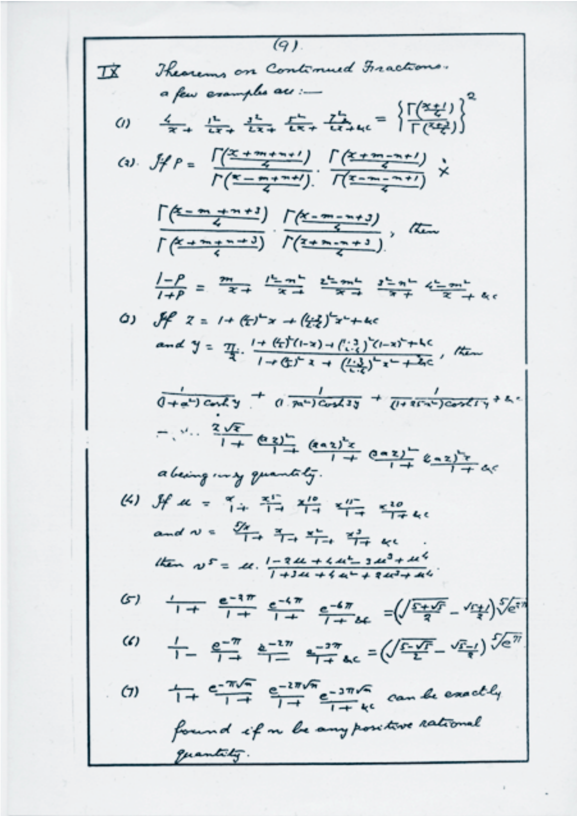
Apparently it did not take them long. Before midnight they knew, and knew for certain. The writer of these manuscripts was a man of genius. That was as much as they could judge that night. It was only later that Hardy decided that Ramanujan was, in terms of *natural* mathematical genius, in the class of Gauss and Euler : but that he could not expect, because of the defects of his education, and because he had come on the scene too late in the line of mathematical history, to make a contribution on the same scale.

C. P. Snow

Vorwort zu A Mathematician's Apology

Stellen Sie sich einmal vor, Sie wären ein renommierter Mathematiker und würden eines schönen Tages den Brief eines Unbekannten erhalten, der wie folgt beginnt: „Sehr geehrter Herr, erlauben Sie mir, dass ich mich Ihnen vorstelle. Ich bin Angestellter in der Buchhaltung des Schifffahrtsbüros von Madras mit einem Jahresgehalt von nur 20 Pfund pro Jahr", und Ihnen weiter mitteilt, dass der Verfasser 23 Jahre alt ist, dass er keine Universitätsausbildung hat, aber dass er neue Wege geöffnet und Resultate erhalten hat, die die Mathematiker vor Ort als „verblüffend" bezeichnen. Es folgen dann ein Dutzend Seiten, die eng mit schreckenerregenden und ungewöhnlich aussehenden Formeln beschrieben sind, insgesamt mehr als hundert.

Ihre erste Reaktion wird ohne Zweifel sein, diesen Brief in den Papierkorb zu werfen, so wie Sie es mit den Briefen zu machen pflegen, die Sie von Zeit zu Zeit von Halbverrückten erhalten, die sich für die Mathematik begeistern, davon aber nichts verstehen. Und genau das haben zwei Ihrer Kollegen bereits getan, was Sie natürlich jetzt nicht wissen. Aber Ihre zweite Reaktion – wenn Sie Hardy wären – wäre, sich die Formeln etwas genauer anzuschauen, festzustellen, dass sie ein gewisses Etwas besitzen, und dann schnell Ihren guten Freund Littlewood aufzusuchen, um bis tief in den Abend mit ihm dieses außergewöhnliche Schriftstück zu studieren. Und bevor der Tag sich zu Ende neigt, werden Sie – obwohl



(9).

IX Theorems on Continued Fractions.

a few examples are:—

(1) $\frac{4}{x+}\,\frac{1^2}{2x+}\,\frac{3^2}{2x+}\,\frac{5^2}{2x+}\,\frac{7^2}{2x+\&c} = \left\{\frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+3}{4}\right)}\right\}^2$

(2) If $P = \frac{\Gamma\left(\frac{x+m+n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x-m+n+1}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{x+m-n+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x-m-n+1}{4}\right)} \div$

$\frac{\Gamma\left(\frac{x-m+n+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m+n+3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{x-m-n+3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+m-n+3}{4}\right)}$, then

$\frac{1-P}{1+P} = \frac{m}{x+}\,\frac{1^2-n^2}{x+}\,\frac{2^2-m^2}{x+}\,\frac{3^2-n^2}{x+}\,\frac{4^2-m^2}{x+\&c}$

(3) If $z = 1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2 + \&c$

and $y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2(1-x)+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2(1-x)^2+\&c}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^2+\&c}$, then

$\frac{1}{(1+a^2)\cosh y} + \frac{1}{(1+9a^2)\cosh 3y} + \frac{1}{(1+25a^2)\cosh 5y} + \&c$

$= \frac{2\sqrt{z}}{1+}\,\frac{(az)^2}{1+}\,\frac{(2az)^2 z}{1+}\,\frac{(3az)^2}{1+}\,\frac{(4az)^2 z}{1+\&c}$

a being any quantity.

(4) If $u = \frac{x}{1+}\,\frac{x^5}{1+}\,\frac{x^{10}}{1+}\,\frac{x^{15}}{1+}\,\frac{x^{20}}{1+\&c}$

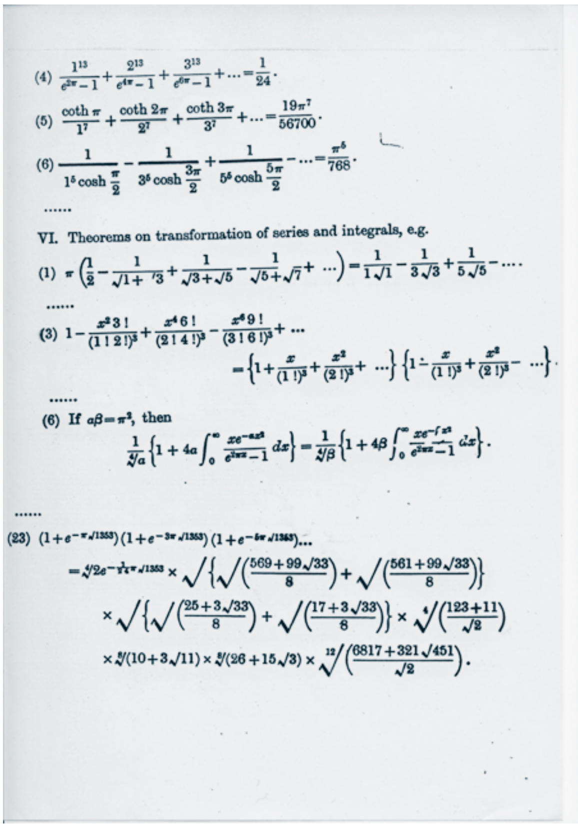
and $v = \frac{\sqrt[5]{x}}{1+}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\&c}$.

then $v^5 = u \cdot \frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}$.

(5) $\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+}\,\frac{e^{-6\pi}}{1+\&c} = \left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{2\pi}}$

(6) $\frac{1}{1-}\,\frac{e^{-\pi}}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1-}\,\frac{e^{-3\pi}}{1+\&c} = \left(\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\sqrt[5]{e^{\pi}}$

(7) $\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-\pi\sqrt{n}}}{1+}\,\frac{e^{-2\pi\sqrt{n}}}{1+}\,\frac{e^{-3\pi\sqrt{n}}}{1+\&c}$ can be exactly found if n be any positive rational quantity.



(4) $\frac{1^{13}}{e^{2\pi}-1}+\frac{2^{13}}{e^{4\pi}-1}+\frac{3^{13}}{e^{6\pi}-1}+\ldots=\frac{1}{24}$.

(5) $\frac{\coth\pi}{1^7}+\frac{\coth 2\pi}{2^7}+\frac{\coth 3\pi}{3^7}+\ldots=\frac{19\pi^7}{56700}$.

(6) $\frac{1}{1^5\cosh\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3^5\cosh\frac{3\pi}{2}}+\frac{1}{5^5\cosh\frac{5\pi}{2}}-\ldots=\frac{\pi^5}{768}$.

......

VI. Theorems on transformation of series and integrals, e.g.

(1) $\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots\right)=\frac{1}{1\sqrt{1}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}-\ldots$.

......

(3) $1-\frac{x^2\,3!}{(1!\,2!)^3}+\frac{x^4\,6!}{(2!\,4!)^3}-\frac{x^6\,9!}{(3!\,6!)^3}+\ldots$

$=\left\{1+\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}+\ldots\right\}\left\{1-\frac{x}{(1!)^3}+\frac{x^2}{(2!)^3}-\ldots\right\}$.

......

(6) If $\alpha\beta=\pi^2$, then

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\left\{1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right\}=\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}}\left\{1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right\}.$$

......

(23) $(1+e^{-\pi\sqrt{1353}})(1+e^{-3\pi\sqrt{1353}})(1+e^{-5\pi\sqrt{1353}})\ldots$

$$=\sqrt[4]{2}\,e^{-\frac{1}{24}\pi\sqrt{1353}}\times\sqrt{\left\{\sqrt{\left(\frac{569+99\sqrt{33}}{8}\right)}+\sqrt{\left(\frac{561+99\sqrt{33}}{8}\right)}\right\}}$$

$$\times\sqrt{\left\{\sqrt{\left(\frac{25+3\sqrt{33}}{8}\right)}+\sqrt{\left(\frac{17+3\sqrt{33}}{8}\right)}\right\}}\times\sqrt[4]{\left(\frac{123+11}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$\times\sqrt[8]{(10+3\sqrt{11})}\times\sqrt[8]{(26+15\sqrt{3})}\times\sqrt[12]{\left(\frac{6817+321\sqrt{451}}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Sie längst nicht alle Resultate überprüfen und deren Ursprung verstehen konnten – zum Schluss gekommen sein: Dieser Brief, der ganz offensichtlich entweder das Werk eines Verrückten, eines Betrügers oder eines Genies ist, kann eigentlich nur das Werk eines Genies sein, denn kein Verrückter und kein Betrüger hätte die Vorstellungskraft, solch phantastische Resultate zu erfinden, wenn sie nicht wahr wären. In den folgenden drei Wochen werden Sie fieberhaft arbeiten, um wenigstens einige der 120 Theoreme zu beweisen, die dieser Brief enthält. In einigen Fällen wird Ihnen das leicht gelingen, in anderen nur mit unglaublicher Mühe, und bei vielen überhaupt nicht. Und selbst die scheinbar unschuldigsten Formeln sind voll versteckter und überraschender Eigenschaften. Drei Wochen nach Erhalt des Briefes werden Sie antworten: „Verehrter Herr, mit großem Interesse habe ich Ihr Schreiben und Ihre dargelegten Lehrsätze vernommen", und zum Schluss werden Sie ihn inständig um die genaue Beweisführung seiner Ergebnisse bitten.

Genau so ist es geschehen. Dreizehn Monate nach Erhalt von Ramanujans Brief (im April 1914) gelang es Hardy mit Hilfe seines Freundes Neville, der nach Madras reiste, um den Weg zu ebnen, Ramanujan nach Cambridge zu holen, und es begann eine intensive Zusammenarbeit, die in der Geschichte der Mathematik berühmt werden sollte. Ramanujan verbrachte vier fruchtbare Jahre in England. Fruchtbare, aber gleichzeitig auch unglückliche Jahre: Er litt sehr unter dem Klima und vor allem unter dem englischen Essen. (Nein, es war nicht die Qualität der englischen Küche, die ihm Probleme bereitete, sondern die Schwierigkeit, sich vegetarisch zu ernähren.) Trotz seiner Freundschaft mit Hardy, den wunderbaren Resultaten, die er allein und mit ihm erzielte, und den Ehren, die ihm zuteil wurden – er wurde im Jahr 1918 als erster Inder Fellow der Royal Society und Fellow of Trinity, wenn auch nicht ohne rassistischen Widerstand seitens mancher englischer Kollegen – wurde er krank und depressiv und wollte nach Indien zurückkehren, was aufgrund des ersten Weltkriegs nicht möglich war. 1918 unternahm er einen Selbstmordversuch, indem er sich vor die U-Bahn warf, und wurde nur durch ein Wunder gerettet. Kurze Zeit später kehrte er heim. Im Januar 1920, genau sieben Jahre nach seinem ersten Brief an Hardy, schickte er ihm seinen letzten, der den zweiten Teil meines Vortragstitels ausmacht und auf den ich später zurückkommen werde. Einige Monate später, im April 1920, und nachdem sich sein gesundheitlicher Zustand gerade zu bessern schien, starb er. Er war 32 Jahre alt.

Ich möchte Ihnen eine ganz kleine Vorstellung von dem Gemeinschaftswerk von Hardy und Ramanujan anhand einer ihrer berühmtesten Entdeckungen geben. Es handelt sich dabei um die Anzahl der *Partitionen* einer gegebenen natürlichen Zahl, ein Problem, das auf Euler und somit ins 18. Jahrhundert zurückgeht. Für jede natürliche Zahl n fragt man, auf wie viele Arten man n Objekte gruppieren kann. Man bezeichnet diese Anzahl mit $p(n)$. So gibt es beispielsweise für $n = 5$ sieben mögliche Gruppierungen, und demzufolge gilt $p(5) = 7$:

$$\begin{array}{ll}
1+1+1+1+1 & (\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet) \\
1+1+1+2 & (\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet\,\bullet) \\
1+1+3 & (\bullet)\,(\bullet)\,(\bullet\;\bullet\;\bullet) \\
1+2+2 & (\bullet)\,(\bullet\,\bullet)\,(\bullet\,\bullet) \\
1+4 & (\bullet)\,(\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet) \\
2+3 & (\bullet\,\bullet)\,(\bullet\;\bullet\;\bullet) \\
5 & (\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet)
\end{array}$$

Für $n = 1, 2, 3, 4$ oder 6 kann man die Partitionen ebenfalls von Hand abzählen:

$$\begin{array}{ll}
p(1) = 1: & 1 \\
p(2) = 2: & 1+1,\ 2 \\
p(3) = 3: & 1+1+1,\ 1+2,\ 3 \\
p(4) = 5: & 1+1+1+1,\ 1+1+2,\ 1+3,\ 2+2,\ 4 \\
p(6) = 11: & 1+1+1+1+1+1,\ 1+1+1+1+2, \\
& 1+1+1+3,\ 1+1+4,\ 1+1+2+2, \\
& 1+2+3,\ 1+5,\ 2+4,\ 2+2+2, \\
& 3+3,\ 6
\end{array}$$

aber diese Methode würde offenbar für $n = 200$ kaum gelingen, denn jetzt hat man

$$p(200) = 3\,972\,999\,029\,388\,.$$

Dieser riesige Wert wurde von Major MacMahon im Jahr 1917 (von Hand!) mit Hilfe einer Rekursionsformel von Euler ermittelt.

Das Ergebnis von Hardy und Ramanujan ist keine exakte Formel für $p(n)$, sondern vielmehr eine so unglaublich präzise Approximation, dass sie eine exakte Berechnung ermöglicht. Diese Approximation ist die Summe von mehreren Termen, von denen bereits der erste eine exzellente Approximation gibt, die sich dann durch das Addieren der anderen Terme noch weiter verbessert. Hier sehen Sie diese Terme für $n = 200$:

$$\begin{array}{rcr}
T_1 & = & 3\,972\,998\,993\,185\,,\,896 \\
T_2 & = & 36\,282\,,\,978 \\
T_3 & = & -87\,,\,555 \\
T_4 & = & 5\,,\,147 \\
T_5 & = & 1\,,\,424 \\
T_6 & = & 0\,,\,071 \\
T_7 & = & 0\,,\,000 \\
T_8 & = & 0\,,\,043 \\
T_1 + T_2 + \cdots + T_8 & = & 3\,972\,999\,029\,388\,,\,004
\end{array}$$

und man findet jetzt den exakten Wert von $p(200)$ einfach als die nächstgelegene natürliche Zahl zu dieser Approximation.[2] Ein schönes Beispiel für die versteckten Tiefen der Zahlentheorie!

Aber mein heutiges Thema ist nicht so sehr die gemeinsame Mathematik von Ramanujan und Hardy, sondern vielmehr Ramanujans eigene Mathematik in seinem ersten und seinem letzten Brief. Ich kann selbstverständlich nicht über alle 120 Theoreme sprechen, auch nicht über alle Themenbereiche, die im Brief von 1913 behandelt werden. In der Zeit, die mir verbleibt, beschränke ich mich auf die Resultate, die mit einer einzigen Theorie zusammenhängen – der Theorie der *Modulformen*, die mein eigenes Spezialgebiet ist und das ich sehr liebe. Fast alle Formeln, die ich Ihnen vorher gezeigt habe, hängen mit dieser Theorie zusammen.

Eine Modulform ist ein mathematisches Objekt mit zwei Gesichtern: einem sichtbaren und einem versteckten. Das sichtbare ist das, was man eine *q-Reihe* nennt, und ist nichts anderes als eine kompakte und handliche Art, eine Folge von Zahlen hinzuschreiben, die einen interessiert. Zum Beispiel kann man, anstatt die Werte der gerade besprochenen Funktion „Partition" als Tabelle zu schreiben,

n	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	$\cdots$	200	$\cdots$
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	$\cdots$	$\cdots$	3972999029388	$\cdots$

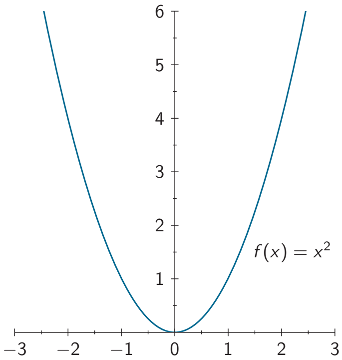
dieselbe Information in der Form einer q-Reihe darstellen:

$$P(q) = q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + \cdots + 3972999029388q^{200} + \cdots$$

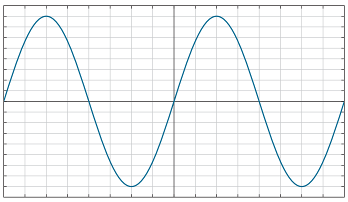
Diese q-Reihe, die schon von Euler verwendet wurde, erweist sich (fast[3]) als eine Modulform.

Aber die Schönheit der Theorie liegt darin, dass es auch eine versteckte Seite gibt, die die Eigenschaften derjenigen q-Reihen aufleuchten lässt, welche Modulformen sind. Um diese zu sehen, muss man den kleinen Buchstaben „q" ernst nehmen und einen Ausdruck wie der, den ich Ihnen gerade für $P(q)$ gezeigt habe, nicht nur als eine praktische Art sehen, um eine Zahlenliste zu organisieren, sondern als eine echte Funktion von q (oder vielmehr von einer anderen Variablen z, die mit q durch eine einfache Formel[4] verbunden ist). Wenn unsere q-Reihe eine Modulform ist, besitzt diese Funktion eine bemerkenswerte Symmetrie – nicht bloß eine Symmetrie der Ordnung 2 durch Spiegelung, wie man sie von den Parabeln kennt, die man in der Schule studiert (Bild a auf der folgenden Seite), noch eine Symmetrie unendlicher Ordnung durch Verschiebungen, wie im Graph der Funktion $\sin(x)$, die man im Gymnasium kennenlernt (Bild b), sondern eine unendliche Symmetrie einer viel raffinierteren Sorte (man nennt sie *nicht-abelsch*), die man nicht besser veranschaulichen kann als mit einer Zeichnung von Escher (Bild c).

Wenn man einmal diesen versteckten Aspekt der modularen q-Reihen kennt, erklären sich die schwierigsten Formeln von selbst. Jede Modulform verfügt über einen „Fingerabdruck", bestehend aus einer expliziten Liste von berechenbaren Invarianten (das „Gewicht", die „Stufe" und die ersten Koeffizienten der q-Reihe), die sie eindeutig charakterisiert. Jede beliebige Identität zwischen



a. *Eine Symmetrie der Ordnung 2*



b. *Eine Symmetrie unendlicher Ordnung*

[Reproduktionsrecht nur fuer Druckausgabe]

c. *Eine nicht-abelsche Symmetrie. M. C. Eschers „Circle Limit IV“* *(©2010 The M. C. Escher Company-Holland. All rights reserved. www.mcescher.com)*

q-Reihen, wie tiefliegend auch immer die mathematische Aussage sein mag, die sie verkörpert, wird also trivial, sobald man weiß, dass die in ihr auftretenden q-Reihen Modulformen sind: es genügt, die „Fingerabdrücke“ zu vergleichen, und wenn diese übereinstimmen, tun das die q-Reihen auch. Es ist eine Art „magisches Prinzip“, welches die tiefgründigsten Dinge einfach werden lässt. So wird beispielsweise die Eulersche Identität bezüglich $p(n)$, die ich vorhin erwähnte und die Euler erst nach jahrelangen Bemühungen beweisen konnte, nahezu banal, wenn man die Modularität der Funktion $P(q)$ kennt.

Die zwei Aspekte der Modulformen

1. Sie sind formale q-Reihen mit aus arithmetischer Sicht interessanten Koeffizienten.
2. Sie habe eine versteckte, nichtabelsche Symmetrie.

Das „magische Prinzip“ der Modulformen

Jede Modulform hat einen „Fingerabdruck“, bestehend aus einer Liste von berechenbaren Invarianten:

– ihr Gewicht,
– ihre Stufe,
– eine bestimmte Anzahl von Termen ihrer q-Reihe,

der sie vollkommen charakterisiert: wenn zwei Modulformen die gleichen Invarianten besitzen, sind sie identisch.

Dieses magische Prinzip wäre natürlich ohne Interesse, wenn es in der Mathematik keine arithmetisch interessanten q-Reihen gäbe, die gleichzeitig Modulformen sind. Glücklicherweise ist dies bei weitem nicht so. Hier ist eine Liste der Namen einiger q-Reihen, von denen man die Modularität kennt oder vermutet, mit den arithmetischen Eigenschaften ihrer Koeffizienten:

Name der Modulform	*Eigenschaft, die durch den Koeffizienten von q^n beschrieben wird*
Thetareihen	Darstellung von n als Summe von Quadraten
Eisensteinreihen	Anzahl oder Summe der Teiler von n
q-Reihen von elliptischen Kurven	Lösungsanzahl von Kongruenzen modulo n
q-Reihen von Galoisdarstellungen	Zerfällung von n in einem Zahlkörper
bestimmte hypergeometrische q-Reihen	Partitionen von n, Quanteninvarianten, …

Ich kann selbstverständlich nicht alle Fachbegriffe, die Sie in dieser Aufstellung sehen, erklären. Vielleicht reicht es aus, wenn ich Ihnen sage, dass Wiles’ Nachweis der Modularität der in der dritten Reihe genannten q-Reihen den Beweis des berühmten letzten Satzes von Fermat als Korollar hatte, und dass das Zerfällungsproblem in Zahlkörpern, das in der vierten Reihe erwähnt wird, das zentrale Problem der algebraischen Zahlentheorie ist und *einzig* in den wenigen Fällen gelöst ist, wenn die q-Reihen, um die es sich handelt, modular sind.

Ich werde trotzdem versuchen, Ihnen ein Beispiel zu geben, das Ihnen zeigt, wie das soeben besprochene magische Prinzip funktioniert (ich hatte zwei vorbereitet, aber die Zeit reicht hierfür nicht aus). Betrachten wir die q-Reihe

$$\begin{aligned}\theta(q) &= \left(\frac{1}{2} + q + q^4 + q^9 + q^{16} + \cdots\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + q + q^2 + 0q^3 + q^4 + 2q^5 + \cdots + 4q^{65} + \cdots\end{aligned}$$

von der der n-te Koeffizient die Zahl $r(n)$ der Darstellungen von n als Summe $a^2 + b^2$ von zwei Quadraten angibt. Z. B. hat die Zahl

$$\begin{aligned}65 &= 64 + 1 && (= 8 \times 8 + 1 \times 1) \\ &= 49 + 16 && (= 7 \times 7 + 4 \times 4) \\ &= 16 + 49 && (= 4 \times 4 + 7 \times 7) \\ &= \ \ 1 + 64 && (= 1 \times 1 + 8 \times 8)\end{aligned}$$

vier solcher Darstellungen, also ist $r(65) = 4$. Diese Funktion ist eine *Thetareihe*, wie in der ersten Zeile der obigen Tabelle, und ist folglich eine Modulform, in diesem Fall vom Gewicht 1 und Stufe 4. Andererseits gibt es eine gewisse *Eisensteinreihe* $E(q)$, deren q-Entwicklung ebenfalls mit den Termen

$$E(q) = \frac{1}{4} + q + q^2 + 0q^3 + q^4 + 2q^5 + \cdots + 4q^{65} + \cdots$$

beginnt. Auch sie ist eine Modulform, und sie hat die gleichen charakteristischen Invarianten wie $\Theta(q)$, so dass die beiden Funktionen übereinstimmen müssen. Nun gilt aber, wie in der Tabelle steht, dass der n-te Koeffizient einer Eisensteinreihe eng mit den Teilern von n zusammenhängt und somit besonders einfach wird, wenn n eine Primzahl ist und daher keine echten Teiler besitzt. In unserem Fall bedeutet dies, dass der Koeffizient von q^n in $E(q)$ gleich 0 ist, wenn n eine Primzahl der Gestalt $4d + 1$ ist, und gleich 2, wenn n eine Primzahl der Gestalt $4d + 1$ ist. (Denken Sie an die Terme $0q^3$ und $2q^5$ in $E(q)$, wo $d = 1$.) Damit ergibt sich sofort und *ohne jede Mühe* der berühmte Satz von Fermat, nach dem sich eine ungerade Primzahl genau dann als Summe von zwei Quadraten schreiben lässt, wenn sie die Gestalt $4d + 1$ hat.

Ziemlich bemerkenswert ist, dass Ramanujan diesen zweiten Aspekt der Modulformen niemals echt verstanden hat und fast immer nur von der rein formalen Seite aus arbeitete, d. h., mit den q-Reihen selbst und nicht unter Heranziehung der Symmetrieeigenschaften der von ihnen dargestellten Funktionen. Da er in formalen Rechnungen ein Genie war – der Einzige in der jüngeren Mathematik, der auf die gleiche Ebene mit Euler und Jacobi gestellt werden kann – gelang es ihm trotzdem, viele bemerkenswerte Entdeckungen zu Modulformen zu machen, wie beispielsweise jene aus seinem ersten Brief an Hardy, die ich Ihnen am Anfang gezeigt habe. Aber doch war es ein Hindernis, und seine Entdeckungen auf diesem Gebiet haben nie die gleiche Bedeutung wie die von Mordell, Hecke oder Eichler, die ihm nachfolgten, erreicht.

Es ist in diesem Zusammenhang, dass ich in den verbleibenden Minuten dieses Vortrags auf seinen letzten Brief an Hardy eingehen möchte, den er wenige Monate vor seinem Tod geschrieben hat und von dem ich Ihnen hier einen Auszug der ersten Seite zeige:

UNIVERSITY OF MADRAS.

12th *January* 1920

I am extremely sorry for not writing you a single letter up to now … I discovered very interesting functions recently which I call "Mock" ϑ-functions. Unlike the "False" ϑ-functions (studied partially by Prof. Rogers in his interesting paper) they enter into mathematics as beautifully as the ordinary ϑ-functions. I am sending you with this letter some examples …

Mock ϑ-functions

$$\begin{aligned}\varphi(q) &= 1 + \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^4}{(1+q^2)(1+q^4)} + \cdots, \\ \psi(q) &= \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^3)} \\ &\quad + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)} + \cdots\end{aligned}$$

…

Mock ϑ-functions (of 5th order)

$$\begin{aligned}f(q) &= 1 + \frac{q}{1+q} + \frac{q^4}{(1+q)(1+q^2)} \\ &\quad + \frac{q^9}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \cdots\end{aligned}$$

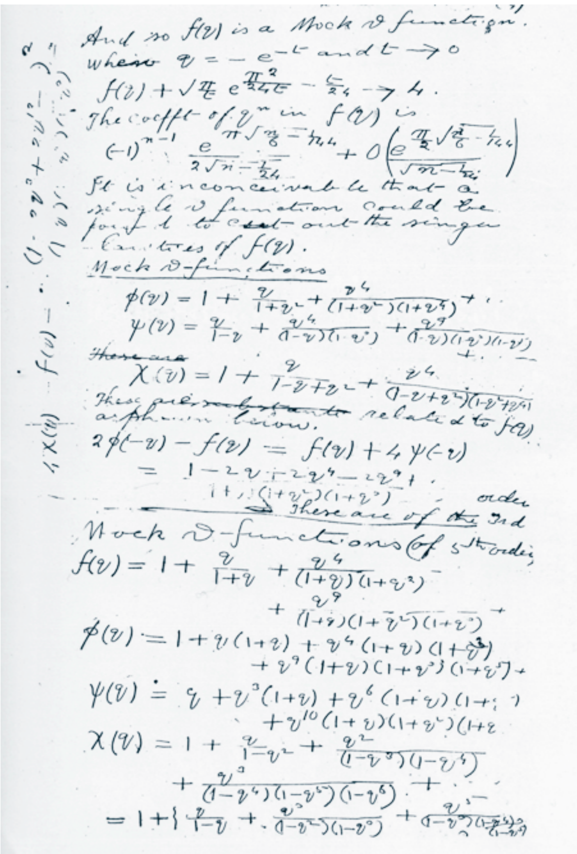
…

Mock ϑ-functions (of 7th order)

$$\begin{aligned}&1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^3)(1-q^4)} \\ &\quad + \frac{q^9}{(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)} + \ldots\end{aligned}$$

…

In diesem Brief informiert er Hardy über die Entdeckung einer neuen Art von Funktionen, die er „*mock theta functions*“ nennt. „Mock“ ist ein englisches Synonym für „falsch“ oder „Ersatz-“, und „Thetafunktionen“ war die von Ramanujan verwendete Terminologie für unsere heutigen Modulformen. Es handelt sich also um unechte Modulformen, die wir „Mock-Modulformen“ nennen werden. Ramanujan definiert sie nicht, aber er beschreibt die wesentlichen charakteristischen Eigenschaften, die diese Formen besitzen sollen, und gibt 17 Beispiele, plus eine Anzahl von Relationen zwischen ihnen. Diese Funktionen, von denen Sie einige auf Seite 40 sehen können, wurden von ihm in drei Gruppen eingeteilt: vier der „Ordnung“ 3, zehn der „Ordnung“ 5 und drei der „Ordnung“ 7, ohne allerdings den Begriff der Ordnung zu erklären.



And so $f(q)$ is a Mock ϑ function.
where $q = -e^{-t}$ and $t \to 0$

$$f(q) + \sqrt{\tfrac{\pi}{t}}\, e^{\frac{\pi^2}{24t} - \frac{t}{24}} \to 4.$$

The coeff^t^ of q^n in $f(q)$ is

$$(-1)^{n-1} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{n}{6} - \frac{1}{144}}}}{2\sqrt{n - \frac{1}{24}}} + O\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{6} - \frac{1}{144}}}}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}\right)$$

It is inconceivable that a single ϑ function could be found to cut out the singularities of $f(q)$.

Mock ϑ-functions

$$\phi(q) = 1 + \frac{q}{1+q^2} + \frac{q^4}{(1+q^2)(1+q^4)} + \cdots$$

$$\psi(q) = \frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^3)} + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)} + \cdots$$

~~There are~~

$$\chi(q) = 1 + \frac{q}{1-q+q^2} + \frac{q^4}{(1-q+q^2)(1-q^2+q^4)}$$

These are ~~not~~ related to $f(q)$ as shown below.

$$2\phi(-q) - f(q) = f(q) + 4\psi(-q) = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots}$$

These are of the 3rd order

Mock ϑ-functions (of 5th order)

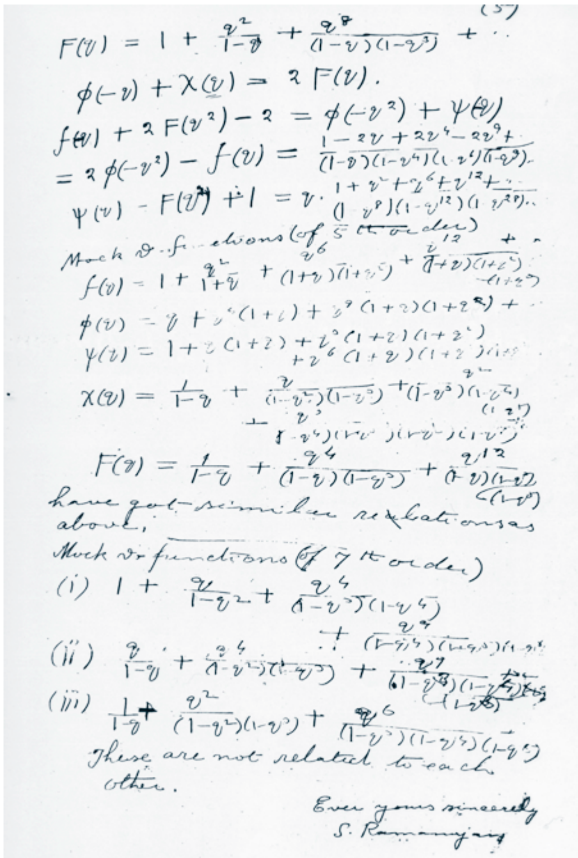
$$f(q) = 1 + \frac{q}{1+q} + \frac{q^4}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^9}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \cdots$$

$$\phi(q) = 1 + q(1+q) + q^4(1+q)(1+q^3) + q^9(1+q)(1+q^3)(1+q^5) + \cdots$$

$$\psi(q) = q + q^3(1+q) + q^6(1+q)(1+q^2) + q^{10}(1+q)(1+q^2)(1+q^3) \cdots$$

$$\chi(q) = 1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^2}{(1-q^3)(1-q^4)} + \frac{q^3}{(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)} + \cdots$$

$$= 1 + \left\{\frac{q}{1-q} + \frac{q^3}{(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^5}{(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)} \cdots\right.$$



(5)

$$F(q) = 1 + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^8}{(1-q)(1-q^3)} + \cdots$$

$$\phi(-q) + \chi(q) = 2F(q).$$

$$f(q) + 2F(q^2) - 2 = \phi(-q^2) + \psi(q)$$

$$= 2\phi(-q^2) - f(q) = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{(1-q)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^9)\cdots}$$

$$\psi(q) - F(q^{4}) + 1 = q \cdot \frac{1 + q^2 + q^6 + q^{12} + \cdots}{(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{20})\cdots}$$

Mock ϑ-functions (of 5th order)

$$f(q) = 1 + \frac{q^2}{1+q} + \frac{q^6}{(1+q)(1+q^2)} + \frac{q^{12}}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)} + \cdots$$

$$\phi(q) = q + q^4(1+q) + q^9(1+q)(1+q^3) + \cdots$$

$$\psi(q) = 1 + q(1+q) + q^3(1+q)(1+q^2) + q^6(1+q)(1+q^2)(1+q^3) \cdots$$

$$\chi(q) = \frac{1}{1-q} + \frac{q}{(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^2}{(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)} + \frac{q^3}{(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)(1-q^7)}$$

$$F(q) = \frac{1}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^3)} + \frac{q^{12}}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)}$$

have got similar relations as above.

Mock ϑ functions (of 7th order)

(i) $1 + \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^3)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)}$

(ii) $\frac{q}{1-q} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^9}{(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)}$

(iii) $\frac{1}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q^2)(1-q^3)} + \frac{q^6}{(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)}$

These are not related to each other.

Ever yours sincerely
S. Ramanujan

Die von ihm angegebenen Identitäten wurden alle von späteren Mathematikern bewiesen – Watson, Andrews, Hickerson und andere – aber nur mit großen Schwierigkeiten, und die letzten sogar erst kürzlich. Hier sind die Verhältnisse also genau umgekehrt zu denen, die wir bei den Modulformen gesehen haben: Dort war Ramanujan gegenüber den europäischen Mathematikern durch seinen Mangel an theoretischen Kenntnissen, den er nur teilweise durch sein Rechengenie ausgleichen konnte, im Nachteil; jetzt ist er nicht auf dieselbe Weise benachteiligt, weil hier niemand das „zweite Gesicht" kennt, wie es für die Modulformen existierte und das Ramanujan nie hatte ausnutzen können. Diesmal sind es die anderen Mathematiker, die sich ihm gegenüber im Nachteil befinden und Jahrzehnte benötigen, um die Resultate, die er in wenigen Monaten gefunden hatte, zu beweisen.

Zum Schluss meines Vortrags möchte ich Ihnen erzählen – nur, um zu zeigen, wie aktuell diese mit grundlegenden Fragen der Zahlentheorie, Topologie und Quantenphysik verbundenen Objekte sind – dass sich die Situation bei den Mock-Modulformen kürzlich geändert hat, dank der Doktorarbeit meines Studenten Sander Zwegers aus Utrecht. Es gelang Zwegers, die versteckte Eigenschaft der Mock-Modulformen zu enthüllen, die der „Eschersymmetrie" der Modulformen, die wir schon kennen, entspricht.

Die Resultate von Sander Zwegers zu den „mock theta functions" (Mock-Modulformen) von Ramanujan

- Er findet die versteckte Symmetrieeigen-schaft der Mock-Modulformen, die analog ist zur der bekannten Symmetrie der Modulformen.
- Er etabliert ein Analogon des „magischen Prinzips" für die Mock-Modulformen, wodurch man alle Identitäten zwischen diesen Funktionen leicht beweisen kann.
- Er gibt mehrere Beispiele von bekannten Konstruktionen in der Mathematik, die Mock-Modulformen produzieren:
  - Lerch-Summen
  - Thetareihen, die zu *indefiniten* quadratischen Formen assoziiert sind
  - Fourierkoeffizienten von meromorphen Jacobi-Formen
  - bestimmte hypergeometrische q-Reihen.

Mit der Theorie, die er ausgearbeitet hat, und die ich im Laufe der letzten Monate noch etwas weiterentwickelt habe, befindet man sich jetzt in der gleichen Situation wie bei den Modulformen: Auch die Mock-Modulformen haben einen „Fingerabdruck", der berechenbar ist und der sie vollständig bestimmt, wodurch alle Identitäten zwischen diesen Funktionen rein mechanisch beweisbar werden. Dadurch gelingt es nicht nur, neue Formeln für die von Ramanujan angegebenen Mock-Thetafunktionen zu finden, wie die, die Sie hier sehen,

Beispiele von neuen Identitäten, die man mit Hilfe der neuen Theorie entdecken und leicht beweisen kann.

Die Funktion

$$\chi_1(q) = 1 + 2q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots ,$$

eine von Ramanujans 10 Mock-Thetafunktionen der Ordnung 5, wird durch jede der folgenden Formeln gegeben:

$$q^{\frac{71}{120}} \chi_1(q) = \frac{1}{\eta(z)} \sum_{\substack{|a| > 5|b| \\ a \equiv 2 \pmod 5 \\ a+b \equiv 2 \pmod 4}} (-1)^a \left(\frac{-3}{a^2-b^2}\right) \operatorname{sgn}(a) q^{\frac{a^2-5b^2}{120}}$$

$$= \frac{1}{\eta(5z)} \sum_{\substack{r,s>0 \\ r \equiv -s \equiv 1 \pmod 5}} \begin{pmatrix} \text{einfacher} \\ \text{Koeffizient} \end{pmatrix} \operatorname{sgn}(r-s) q^{\frac{rs}{30}}$$

$$= \frac{1}{2\eta(z)^3} \sum_{\substack{3m > |n| \\ n \equiv 2 \pmod 5}} \left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{12}{n}\right)(3m \operatorname{sgn}(n) - n) q^{\frac{15m^2-n^2}{120}}$$

wobei $\eta(z) = q^{\frac{1}{24}}(1-q)(1-q^2)\cdots = \sum_{n>0} \left(\frac{12}{n}\right) q^{\frac{n^2}{24}}$.

sondern auch, Ramanujans mysteriöse „Ordnung“ zu verstehen und schließlich, 85 Jahre nach seinem Tod, seinen berühmten Beispielen der Ordnung 3, 5 und 7 weitere Beispiele von beliebiger Primzahl-Ordnung hinzuzufügen, die exakt analoge Eigenschaften besitzen:

„Mock-Thetafunktionen“ von beliebiger Primzahlordnung

Für eine Primzahl $p \geq 5$ und $j = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}$ sei

$$M_{p,j}(q) =$$

$$\frac{1}{\eta(z)^3} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ |n| < \frac{t-1}{u} m \\ n \equiv j \pmod p}} \left(\frac{-4}{m}\right)\left(\frac{12}{n}\right) \operatorname{sgn}(n) \left(m - \frac{u|n|}{t-1}\right) q^{\frac{3pm^2-n^2}{24p}}$$

wobei $t^2 - 3pu^2 = 1, \;\; t, u > 0$. Dann sind die $M_{p,j}(q)$ Mock-Modulformen und sind für $p = 5$ oder 7 genau Ramanujans „Mock-Thetafunktionen“ der „Ordnung“ 5 und 7.

Dieses Ergebnis ist übrigens gerade mal fünf Tage alt! Die Entdeckungen von Ramanujan und insbesondere die mysteriösen und wunderbaren Funktionen, die er in seinem letzten Brief an seinen Freund Hardy einführte, bleiben also bis in die heutige Zeit fruchtbar, und ich bin überzeugt, dass sie in den kommenden Jahren auf subtile und faszinierende Weise die Mathematik und die theoretische Physik beeinflussen werden.

My dream is that I will live to see the day when our young physicists, struggling to bring the predictions of superstring theory into correspondance with the facts of nature, will be led to enlarge their analytic machinery to include not only theta-functions but also mock theta-functions.

Freeman J. Dyson

In A Walk Through Ramanujan's Garden
Ramanujan Centenary Conference, Illinois, 1987

Anmerkungen

1. Dieser Beitrag ist der am 16. März 2005 in der Bibliothèque Nationale de France im Rahmen der Ringvorlesung „Un texte, un mathématicien“) gehaltene Vortrag.
2. Für diejenigen unter Ihnen, die gerne eine mathematische Formel bewundern, gebe ich die exakten Ausdrücke für die beiden ersten Terme der Approximation von Hardy und Ramanujan: der erste ist

$$\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}}{4(n-\frac{1}{24})\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}\right)$$

und der zweite

$$(-1)^n \frac{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}}{4(n-\frac{1}{24})\sqrt{6}} \left(1 - \frac{1}{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}}\right)$$

3. Man muss 1 hinzutun und das Ganze mit $q^{-1/24}$ multiplizieren.
4. Nämlich, $q = e^{2\pi i z}$.

Chronologie

1877	Geburt von G.H. Hardy
1887	Geburt von Srinivasa Ramanujan
1913	Erster Brief von Ramanujan an Hardy
1914–1918	Aufenthalt von Ramanujan in England
1920	Letzter Brief von Ramanujan an Hardy
	Geburt der Mock-Thetafunktionen
1920	Tod von Ramanujan
1947	Tod von Hardy

Prof. Dr. Don Zagier, Max-Planck-Institut für Mathematik,
Vivatsgasse 7, 53111 Bonn. don.zagier@mpim-bonn.mpg.de

Don Zagier, geboren 1951, hat Mathematik und Physik studiert. Seit 1995 ist er Direktor am MPI für Mathematik in Bonn und seit 2000 Professor am Collège de France, Paris. 1984 hat er den Carus-Preis, 1987 den Frank Nelson Cole-Preis, 2001 den Karl Georg Christian von Staudt-Preis erhalten.

Seit 2005 findet am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO) im Rahmen des jährlichen Sitzungswochenendes der Gesellschaft für Mathematische Forschung im Oktober die öffentliche Oberwolfach-Vorlesung statt. Die Vortragenden und Themen waren bisher: Gerhard Huisken, „Geometrische Evolutionsgleichungen und die Uniformisierung Riemannscher Mannigfaltigkeiten“ (2005); Winfried Scharlau, „Wer ist Alexander Grothendieck?“ (2006); Wendelin Werner, „Drawing Large Pictures At Random“ (2007); Don Zagier: „Das Mysterium von q: Von q-Reihen in der Kombinatorik zu Quanteninvarianten von Knoten“ (2008); Friedrich Hirzebruch, „Characteristic Classes in Topology and Algebraic Geometry“ (2009).
Die Oberwolfach-Vorlesungen erscheinen im Jahresbericht des MFO, wobei 2008 anstelle des Vortrags von Don Zagier der hier wiedergegebene Vortrag abgedruckt wurde. Wiedergabe der deutschen Fassung in den *Mitteilungen* mit freundlicher Genehmigung von Don Zagier und des MFO.