

In memoriam Heinz Hopf

Die Redaktion der Mathematischen Annalen betrauert den Tod ihres langjährigen Mitgliedes (1947–1968) Dr. Heinz Hopf, ehemals ordentlicher Professor der Mathematik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich.

Heinz Hopf wurde am 19. November 1894 in Grätschen (Schlesien) geboren. Seine hohe mathematische Begabung wurde schon im Gymnasium in Breslau erkannt und verständnisvoll gepflegt. So begann er sogleich nach Beendigung der Schulzeit das Studium der Mathematik, das allerdings bald – und dann für über 4 Jahre – durch den 1. Weltkrieg unterbrochen wurde. Heinz Hopf hat die schweren Kämpfe bei Verdun mitgemacht und wurde zweimal verwundet. Als Rekonvaleszent konnte er an einem Kursus über Mathematik in Breslau teilnehmen. Dabei hat besonders Erhard Schmidt einen tiefen Eindruck auf ihn gemacht. Ungelöste Probleme, auf die Schmidt hingewiesen hatte, haben seine Gedanken in den späteren Kriegszeiten immer wieder beschäftigt. Gerne berichtete er davon, wie ihn häufig die Beschäftigung mit der Mathematik das Elend und die geistige Einöde um sich vergessen ließ.

Nach dem Kriege studierte er in Berlin, Heidelberg und Göttingen. Seine eigenen wissenschaftlichen Arbeiten begann er unter der Führung von Erhard Schmidt in Berlin mit dem Studium der großen Arbeiten von Henri Poincaré und L. E. J. Brouwer. Seine Dissertation hat den Titel: „Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik von Mannigfaltigkeiten“ und wurde in zwei Teilen (Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Über die Curvatura Integra geschlossener Hyperflächen) in Band 95 der Mathematischen Annalen veröffentlicht.

1925 war Hopf in Göttingen. Dort lernte er den großen russischen Mathematiker Paul Alexandroff kennen, mit dem er nun ein Leben lang in Arbeit und Freundschaft verbunden blieb. Zusammen mit Alexandroff lernte er in Göttingen von Emmy Noether die gruppentheoretische Begründung der Homologietheorie. Seine Arbeit über eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel (Lefschetz-Hopfscher Fixpunktsatz) bringt zum erstenmal diese gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung.

Hopf konnte 1927 gemeinsam mit Alexandroff für ein Jahr an die Universität Princeton gehen und dort mit Lefschetz zusammenarbeiten. Er wurde zu seiner berühmten Arbeit über den „Umkehrhomomorphis-

mus“ angeregt. Alexandroff und Hopf legten in Princeton die Fundamente für das umfangreiche und für die moderne Entwicklung der Mathematik so signifikante Werk „Alexandroff-Hopf, Topologie I (1935)“. Die Fortsetzung ist nie erschienen. Die Weltereignisse verhinderten für lange Zeit eine so umfassende gemeinsame Arbeit. Und danach fanden sie, daß der erste Band völlig neu zu schreiben sei. So sehr hatte sich inzwischen die Topologie weiterentwickelt, am meisten durch ihre eigenen Arbeiten und die ihrer Schüler.

Hopf war 1926 in Berlin mit seinen fundamentalen Arbeiten über Abbildungsklassen und Vektorfelder habilitiert und schon 1931 als Nachfolger von Hermann Weyl an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich berufen worden. Er hat lange geschwankt, ob er den Ruf annehmen sollte, denn zur gleichen Zeit war ihm ein Lehrstuhl in Freiburg (Breisgau) angeboten. (Wieviel schwieriger wäre sein Leben verlaufen, wenn er nach Freiburg gegangen wäre! Vom braunen Sturm wäre der Verdun-Kämpfer nicht verschont geblieben.)

In Zürich hat er als Lehrer wie als Forscher eine segensreiche Tätigkeit entwickelt. Mit großer Hingabe nahm er sich der Kursusvorlesungen an. Er las ebenso gerne über elementare Gebiete wie über die neueste Entwicklung in der Topologie. Zahlreichen Studenten hat er die Liebe zur Mathematik und insbesondere zur Geometrie eingepflanzt.

Bei der Betreuung der Studenten scheute er sich nicht, umfangreiche Prüfungstermine durchzustehen. Dabei respektierte er in jedem Falle die Würde des einzelnen. Hast und Eile mit ihren unangenehmen Folgen für Dritte hat er nie gekannt. Besonnenheit, Gleichmut und besonders Liebe zur Sache strahlte er immer aus.

Bei seinem unbeirrbareren Sinn für die Substanz mathematischer Aussagen und seiner schlichten Überzeugungskraft war es ganz natürlich, daß er bald einen angesehenen Kreis junger Mathematiker um sich versammelte. Um Hopf entstand eine eigene Schule, die bald auch durch auswärtige Gelehrte ergänzt wurde. So wurde Zürich ein Zentrum für die algebraische Topologie.

Umgekehrt wurde er auch viel als Gastdozent eingeladen. Er lehrte an den großen mathematischen Zentren der Welt. Zahlreich waren die Ehrungen, die er erhielt. Er wurde sechsfacher Ehrendoktor, darunter der Sorbonne und der Universität Princeton. Er wurde Mitglied der National Academy of Sciences (USA), der Accademia dei Lincei, und er erhielt den Lobatschewski-Preis der Universität Moskau. 1954 wurde er auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß in Amsterdam für die folgenden 4 Jahre zum Präsidenten der Internationalen Mathematiker Union gewählt, und damit Nachfolger von Marshall Stone und Vorgänger von Georges de Rham. So hatte er 8 Jahre an den weltweiten Kon-

ferenzen der IMU teilzunehmen. Er tat es mit Humor, aber auch im Bewußtsein eines Weltbürgers, der für die künftige Entwicklung mitverantwortlich ist. Zugleich war er besonders berufen, einen Ausgleich zwischen den verschiedenen Interessen, die in der IMU auftraten, zu finden. Aber jeder geschäftige Eifer lag ihm fern.

Während der NS-Zeit, während des Krieges und in den Nöten der Nachkriegszeit sah sein Haus für kürzere und auch längere Zeit viele Besucher, die sich eine neue Heimat suchten. Er und seine Frau halfen, wo immer sie konnten.

Noch in der schweren Zeit des Krieges nahm auf Antrag seiner Wohn-gemeinde Zollikon (Kanton Zürich) die Schweiz ihn und seine Frau als Staatsbürger auf. Das empfand er als ein großes Geschenk, dessen er sich stets in Dankbarkeit erinnerte. In den letzten 10 Jahren seines Lebens mußte er seine großen Reisen stark einschränken. Zuerst wurde seine Frau an das Haus gebunden und nach ihrem Tode (1967) er selbst auch.

Er verschied am 3. Juni 1971 und wurde am 7. Juni unter Beteiligung fast aller Schweizer Mathematiker sowie vieler Freunde und Nachbarn in seiner Wahlheimat Zollikon beigesetzt.

In dem vorstehenden Bericht über das Leben von Heinz Hopf wurde nur gelegentlich auf seine mathematischen Arbeiten hingewiesen. Auch im folgenden können nur einige große Linien in seinem Lebenswerk aufgezeigt werden. Eine ausführlichere Würdigung sollte an anderer Stelle erscheinen.

Anschließend an Arbeiten von Brouwer löste Hopf das Problem der Homotopieklassifikation von Abbildungen der n -dimensionalen Sphäre auf sich. Eine Homotopieklasse wird durch den Abbildungsgrad gekennzeichnet. Allgemeiner klassifizierte Hopf die Homotopieklassen der Abbildungen n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten in die n -Sphäre. Der Satz über den Abbildungsgrad ist entscheidend für die Untersuchung von Vektorfeldern in n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten:

Eine isolierte Singularität eines solchen Feldes definiert nämlich eine Abbildung der $(n - 1)$ -Sphäre in sich, deren Abbildungsgrad per definitionem gleich dem Index der Singularität ist. Da der Abbildungsgrad die Homotopieklasse charakterisiert, verschwindet der Index genau dann, wenn sich die Singularität durch lokale stetige Veränderung des Vektorfeldes beseitigen läßt, eine erste Bemerkung für den Beweis des berühmten Hopfschen Satzes, wonach die Summe der Indices eines Vektorfeldes mit isolierten Singularitäten unabhängig von dem Feld, und zwar immer gleich der Euler-Poincaréschen Charakteristik der Mannigfaltigkeit ist. Die beiden fundamentalen Arbeiten über Abbildungen und Vektorfelder wurden am 11. August 1925 bei den Mathematischen Annalen (Bd. 96) eingereicht. Von diesen Arbeiten gehen mindestens drei Ent-

wicklungslinien aus, die sich vielfältig überkreuzen und ohne die die algebraische Topologie nicht mehr denkbar wäre.

1. Der Hopfsche Satz über Vektorfelder gehört zur heutigen Hindernistheorie: Das erste Hindernis gegen einen Schnitt in einem Faserbündel ist unabhängig von dem Schnitt. Hopf hat sich immer wieder mit Schnitten in Faserbündeln beschäftigt, dazu gehört seine Frage: „Wie viele überall linear-unabhängige Vektorfelder gibt es auf einer vorgegebenen n -dimensionalen Mannigfaltigkeit, insbesondere auf der n -dimensionalen Sphäre?“ Diese Frage führte zur Dissertation von Stiefel (1935), in der die Theorie der Stiefel-Whitneyschen Klassen begründet und das auch für Hopf überraschende Ergebnis erzielt wurde, daß jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit drei linear-unabhängige Vektorfelder zuläßt, also parallelisierbar ist. In diese Entwicklungslinie „Hindernistheorie“ gehören auch Hopfs Untersuchungen über die Existenz fast-komplexer Strukturen und über Felder von Ebenenelementen, wobei er die „zweiten Hindernisse“ entdeckte (ungefähr 1947). Inzwischen benutzte er die neue Sprache: Ein Hindernis ist eine Kohomologieklass mit Koeffizienten in einer Homotopiegruppe. Er bewies seine ersten großen Sätze aber zu einer Zeit, als weder Kohomologie- noch Homotopiegruppen bekannt waren. Trotzdem sind in ihnen schon die geometrischen Ideen der Hindernistheorie voll erkennbar.

In die Hindernistheorie kann man auch den Hopfschen Satz (1930) über die Homotopieklassen stetiger Abbildungen eines n -dimensionalen Polyeders in die n -dimensionale Sphäre einordnen, der heute so formuliert wird: Die Homotopieklassen entsprechen eindeutig den Elementen der n -dimensionalen Kohomologiegruppe des Polyeders mit ganzzahligen Koeffizienten. Dieser Satz ist sicher ein Vorläufer der Theorie der Eilenberg-MacLaneschen Räume.

Hopf erkannte klar, daß er die Abbildungen mittels algebraischer – wir würden heute sagen „homologie-theoretischer“ – Invarianten klassifiziert hatte. Bereits sehr früh begann Hopf, Abbildungen zu suchen, die wesentlich (d. h. nicht homotop zur konstanten Abbildung) sind, aber trotzdem algebraisch trivial sind. Hier setzt die zweite Entwicklungslinie ein, über die wir sprechen wollen.

2. Abbildungen der Sphäre S^m in die Sphäre S^n sind für $m > n$ stets algebraisch trivial. Hopf entdeckte, daß die bekannten hyperkomplexen Systeme (komplexe Zahlen, Quaternionen, Cayleysche Zahlen) Abbildungen $S^3 \rightarrow S^2$, $S^7 \rightarrow S^4$, $S^{15} \rightarrow S^8$ liefern, eine einfache Bemerkung aus der linearen Algebra und der projektiven Geometrie und zugleich eine folgenreiche Erkenntnis über die Zusammenhänge zwischen Algebra und Topologie (insbesondere Homotopietheorie). Um nachzuweisen, daß diese Abbildungen wesentlich sind, erfand Hopf seine Hopfsche Invariante (Verschlingungszahl der Urbilder zweier allgemeiner Punkte

des Bildraumes) und zeigte, daß die Invariante für die genannten Abbildungen gleich 1 und für gewisse Abbildungen $S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ gleich 2 ist.

Hopf beweist, daß zu jeder Abbildung $S^{2k-1} \times S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1}$ vom Doppelgrad (m, n) eine Abbildung $S^{4k-1} \rightarrow S^{2k}$ mit Hopfscher Invariante $m \cdot n$ gehört. Die charakteristische Abbildung des Tangentialbündels von S^{2k} liefert eine Abbildung $S^{2k-1} \times S^{2k-1} \rightarrow S^{2k-1}$ vom Doppelgrad $(2, 1)$.

Für welche k gibt es eine Abbildung der Hopfschen Invariante 1? Diese Frage hat eine jüngere Generation fasziniert und zur Entwicklung ganz neuer Methoden geführt.

Für Hopf war eine Abbildung vom Doppelgrad $(1, 1)$ eine Art Multiplikation auf S^{2k-1} . Sie existiert offensichtlich, wenn es ein hyperkomplexes System der Dimension $2k$ über den reellen Zahlen gibt. Wenn ein solches hyperkomplexes System existiert, dann ist die Sphäre S^{2k-1} parallelisierbar. Wir sind hier also an einem der Schnittpunkte der ersten mit der zweiten Entwicklungslinie.

Die Hopfschen Abbildungen $S^3 \rightarrow S^2$, $S^7 \rightarrow S^4$, $S^{15} \rightarrow S^8$ sind Faserungen. Deshalb ist Hopf auch Mitbegründer der Theorie der gefaserten Räume. Die Eckmannsche Dissertation (1942) ist hier einzuordnen. In ihr werden Homotopiegruppen verwandt und die exakte Homotopiesequenz von Faserungen aufgestellt. Die Hopfschen Untersuchungen über Abbildungen $S^3 \rightarrow S^2$ führen zu dem Satz, daß die dritte Homotopiegruppe von S^2 unendlich zyklisch ist und von der Hopfschen Faserabbildung $S^3 \rightarrow S^2$ erzeugt wird.

3. Die dritte Entwicklungslinie wollen wir so beginnen lassen: Hopf hat ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M immer auch als infinitesimale Abbildung $M \rightarrow M$ angesehen, wobei die Singularitäten des Feldes den Fixpunkten der Abbildung entsprechen. So kam er zu seinen Untersuchungen über den Lefschetzschen Fixpunktsatz, in denen die Hopfsche Spurformel eine entscheidende Rolle spielt. Diese Arbeit entstand in der Göttinger Zeit und wurde bereits erwähnt. Lefschetz betrachtete eine Abbildung $M \rightarrow M$, die auch mehrdeutig sein konnte, als Teilmenge T von $M \times M$ und betrachtete den Schnitt von T mit der Diagonalen von $M \times M$. In den Diskussionen mit Lefschetz während der Princeton Zeit wollte Hopf herausfinden, welche homologischen Eigenschaften eine (eindeutige) Abbildung $M \rightarrow M$ von den mehrdeutigen Abbildungen Lefschetz unterscheiden. Ergebnis dieser Überlegungen war der „Umkehrhomomorphismus“ für Abbildungen $M \rightarrow N$ von Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich um einen Homomorphismus des Homologie-Schnitttringes von N in den von M ; für den heutigen Topologen ist das einfach der Homomorphismus der Kohomologieringe (durch den Poincaréschen Isomorphismus auf die Homologieringe übertragen). Aber Kohomologietheorie war damals noch nicht bekannt. Zahlreiche An-

wendungen folgten, die uns noch heute begeistern. Beispiel: Ein hyperkomplexes System vom Grade n über \mathbf{R} liefert eine Abbildung $P_{n-1} \times P_{n-1} \rightarrow P_{n-1}$, wo P_{n-1} der $(n-1)$ -dimensionale reelle projektive Raum ist. Der Umkehrhomomorphismus zeigt, daß in Unbestimmten x, y die Gleichung $(x+y)^n = x^n + y^n \pmod{2}$ gelten und deshalb n eine Potenz von 2 sein muß.

Die Dissertation von Gysin (1942) gehört in diese Entwicklungslinie: Kohomologische Methoden für Abbildungen (bei Gysin insbesondere Faserabbildungen).

Die Auswahl dieser drei Entwicklungslinien mag willkürlich sein. Ihre Überkreuzungen sind so zahlreich, daß man einen komplizierten Graphen erhält, in dem man auch andere Linien auszeichnen könnte. Nur ein Teil des Hopfschen Werkes wurde damit erfaßt. Eine Arbeit von Hopf, die in besonderer Weise die Schlagkraft der von ihm entwickelten Methoden zeigt, mit allen drei von uns erwähnten Entwicklungslinien zusammenhängt und Anwendungen auf die Topologie der Lieschen Gruppen bringt, soll noch besonders erwähnt werden. Es handelt sich um die Arbeit „Über die Topologie der Gruppen-Mannigfaltigkeiten und ihrer Verallgemeinerungen“, die 1939 bei den *Compositio Mathematica* eingereicht und wegen der Kriegsverhältnisse an die *Annals of Mathematics* weitergeleitet wurde. Diese Arbeit hat Hopf besonders viel Freude gemacht. Eine orientierte kompakte Mannigfaltigkeit M wird von Hopf Γ -Mannigfaltigkeit genannt, wenn sie eine Abbildung $M \times M \rightarrow M$ von Doppelgrad (c, d) zuläßt, wobei $c > 0$ und $d > 0$ ist. Die Methoden des Umkehrhomomorphismus ergeben, daß der (rationale) Homologie-Schnitttring von M isomorph dem Schnitttring eines cartesischen Produktes von ungerade-dimensionalen Sphären ist. Für die vier großen Klassen von Lieschen Gruppen war dieser Satz vorher von mehreren Mathematikern bewiesen worden, es gab aber keine allgemeine Methode. Hopf benötigt noch nicht einmal das assoziative Gesetz. Mit den Γ -Mannigfaltigkeiten beginnt die Theorie der H -Räume und der Hopfschen Algebren. In der Dissertation von Samelson (1941) werden die Beziehungen des Schnitttringes einer Gruppenmannigfaltigkeit G zum Pontrjaginschen Ring von G geklärt.

Die Pontrjaginsche Multiplikation von eindimensionalen Homologieklassen einer Gruppenmannigfaltigkeit hat ein Analogon bei einer geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeit nirgends positiver Krümmung: Zwei geodätische Schleifen, die als Elemente der Fundamentalgruppe miteinander vertauschbar sind, spannen eine Torusfläche auf (Dissertation Preissmann). Hopf erkannte, daß beide Multiplikationen eindimensionaler Homologieklassen sich einem allgemeinen Prinzip unterordnen lassen „Einfluß der Fundamentalgruppe auf die zweite Bettische Gruppe eines Komplexes“. Ausgehend von dieser konkreten

Fragestellung entwickelte er (1941–1945) die algebraischen und topologischen Ideen der Homologietheorie diskreter Gruppen und begründete damit die Homologische Algebra.

Auch in einem ganz kurzen Bericht über das mathematische Werk Hopfs muß seine Liebe zur Differentialgeometrie besonders erwähnt werden. Schon 1931 war seine gemeinsame Arbeit mit W. Rinow über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche erschienen. In der Zeit nach dem 2. Weltkrieg wandte er sich besonders häufig differential-geometrischen Fragen zu. Nachdem die Idee der Stiefel-Whitneyschen Klassen von Chern für komplexe Mannigfaltigkeiten verwendet worden war, interessierte er sich z. B. für die Darstellung der Chernschen charakteristischen Klassen durch Differentialformen und für Sätze im Sinne des klassischen Gauß-Bonnetschen Theorems.

Viele der von Hopf gestellten Probleme sind inzwischen gelöst. Die mannigfachen Beziehungen seines Werkes zur heutigen mathematischen Forschung wurden in diesem Bericht nur implizit erwähnt, da sonst der gesetzte Rahmen gesprengt worden wäre.

Dem von Eckmann in der Neuen Zürcher Zeitung veröffentlichten Artikel „Zum Gedenken an Heinz Hopf“ wollen wir zum Schluß den folgenden Gedanken entnehmen:

„In einer Weise, die sicher schwer zu entwirren wäre – das gehört in das Gebiet der Heuristik –, hat er stets gleichzeitig die Lösung des Einzelproblems gegeben und die Methode zu seiner Bezwingung geschaffen, aus der die leitende Idee, der tiefere Grund, die weiteren Möglichkeiten klar wurden.“

Professor H. Behnke
Mathematisches Institut der Universität
D-4400 Münster, Roxelerstr. 64
Deutschland

Professor F. Hirzebruch
Mathematisches Institut der Universität
D-5300 Bonn, Wegelerstr. 10
Deutschland

(Eingegangen am 12. Februar 1972)