44.

Lösung einer Aufgabe von H. Hasse

Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. *72* (1970), 29–32

* **Lösung der Aufgabe 327.** Die Aufgabe (von H. Hasse, Jber. Deutsch. Math.-Verein. 53 (1943) 34 kursiv) lautet:

Für drei paarweise teilerfremde natürliche Zahlen $m_i > 2$ ist die Anzahl der Gitterpunkte mit je zu m_i teilerfremden Koordinaten x_i im Tetraeder

$$2 \operatorname{Max} \frac{x_i}{m_i} < \sum \frac{x_i}{m_i} < 1 \tag{1}$$

gerade.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen setzen wir $x_i/m_i = y_i$. Dann ist (1) äquivalent zu

$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 &> 0 \\ y_1 - y_2 + y_3 &> 0 \qquad\qquad y_1 + y_2 + y_3 < 1 \\ y_1 + y_2 - y_3 &> 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Aus den Ungleichungen (2) folgt

$$\begin{aligned} 0 < y_i &< 1 \qquad\qquad (i = 1, 2, 3) \\ y_1 + y_2 + y_3 &< 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Ein Gitterpunkt soll zulässig heißen, wenn $(x_i, m_i) = 1$ für $i = 1, 2, 3$. Wir bezeichnen für drei natürliche Zahlen $m_i \geqq 1$ mit $A = A(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der zulässigen Gitterpunkte, die (2) erfüllen. A ist die von Hasse betrachtete Anzahl. Entsprechend bezeichne $B = B(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der zulässigen Gitterpunkte, für die (3) gilt.

Lemma 1. *Wenn m_1, m_2, m_3 die Bedingungen in der Aufgabe von Hasse erfüllen, dann ist* $A(m_1, m_2, m_3) \equiv B(m_1, m_2, m_3) \bmod 2$.

Beweis: Setzt man (3) voraus, dann kann von den drei Summen

$$-y_1 + y_2 + y_3, \; y_1 - y_2 + y_3, \; y_1 + y_2 - y_3$$

höchstens eine kleiner als 0 sein. Wären nämlich zum Beispiel die beiden ersten kleiner als 0, dann würde folgen $y_3 < 0$, während jedoch $y_3 > 0$ vorausgesetzt ist. Wir betrachten jetzt die zulässigen Gitterpunkte, welche (3) und die Ungleichung

$$-y_1 + y_2 + y_3 < 0 \tag*{$(4)_1$}$$

erfüllen. Die Menge dieser Gitterpunkte geht bei der Involution

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &\to (m_1 - x_1, x_2, x_3) \quad \text{d. h.} \\ (y_1, y_2, y_3) &\to (1 - y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{5}$$

in sich über. Die Zulässigkeit bleibt nämlich erhalten, die Ungleichungen $0 < y_i < 1$ gehen in sich über, während $(4)_1$ in $y_1 + y_2 + y_3 < 1$ übergeht und $y_1 + y_2 + y_3 < 1$ in $(4)_1$ übergeht. Die Involution (5) hat auf der betrachteten Menge von Gitterpunkten keinen Fixpunkt, da $m_1 > 2$ und die Gitterpunkte zulässig sind. Deshalb ist die Anzahl der zulässigen Gitterpunkte, welche (3) und $(4)_1$ erfüllen, gerade. Diese Anzahl werde C_1 genannt. Entsprechend sind C_2

und C_3 definiert. Sie sind ebenfalls gerade. Wegen der am Anfang des Beweises gemachten Bemerkung ist

$$B = A + C_1 + C_2 + C_3. \tag{6}$$

Benutzt wird hier noch, daß $\pm y_1 \pm y_2 \pm y_3$ für zulässige Gitterpunkte wegen der paarweisen Teilerfremdheit der m_i nicht verschwinden kann.

Definition: *Für natürliche Zahlen m_1, m_2, m_3 mit $m_i \geqq 1$ sei $S^+(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der Gitterpunkte mit*

$$0 < x_i < m_i, \quad (x_i, m_i) = 1, \quad 0 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 1 \bmod 2\mathbf{Z} \tag{7}$$

und $S^-(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der Gitterpunkte mit

$$0 < x_i < m_i, \quad (x_i, m_i) = 1, \quad 1 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 2 \bmod 2\mathbf{Z}. \tag{8}$$

Wenn die m_i paarweise teilerfremd und $\geqq 2$ sind, dann ist

$$S^+(m_1, m_2, m_3) + S^-(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1) \cdot \varphi(m_2) \cdot \varphi(m_3), \tag{9}$$

wo φ die Eulersche Funktion ist. Beachte, daß wegen der paarweisen Teilerfremdheit der m_i die Summe $\sum \frac{x_i}{m_i}$ keine ganzzahligen Werte annehmen kann. Da stets

$$0 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 3,$$

kann man „mod $2\mathbf{Z}$" in (8) weglassen und in (7) schreiben

$$0 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 1 \qquad \text{oder} \qquad 2 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 3. \tag{10}$$

Bei der Abbildung $(x_1, x_2, x_3) \to (m_1 - x_1, m_2 - x_2, m_3 - x_3)$ geht die Menge der Gitterpunkte, welche (7) und die erste Ungleichung von (10) erfüllen in die Menge der Gitterpunkte über, welche (7) und die zweite Ungleichung von (10) erfüllen. Deshalb ist S^+ durch 2 teilbar und zwar ist

$$S^+(m_1, m_2, m_3) = 2 \cdot B(m_1, m_2, m_3). \tag{11}$$

Lemma 2. *Für drei paarweise teilerfremde natürliche Zahlen $m_i > 2$ ist die von Hasse betrachtete Anzahl $A(m_1, m_2, m_3)$ dann und nur dann gerade, wenn die Differenz*

$$S(m_1, m_2, m_3) = S^+(m_1, m_2, m_3) - S^-(m_1, m_2, m_3) \tag{12}$$

durch 8 teilbar ist. (Diese Differenz ist auch für beliebige $m_i \geqq 1$ wohldefiniert.)

Beweis: Aus (9), (11) und (12) folgt

$$4B(m_1, m_2, m_3) = \varphi(m_1) \cdot \varphi(m_2) \cdot \varphi(m_3) + S(m_1, m_2, m_3).$$

Da $\varphi(m)$ für $m > 2$ gerade ist, folgt die Behauptung aus Lemma 1.

Wir bezeichnen wie in [4], p. 99, für drei natürliche Zahlen $m_i \geqq 1$ mit $\tau^+(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der Gitterpunkte (x_1, x_2, x_3) mit

$$0 < x_i < m_i, \qquad 0 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 1 \bmod 2\mathbf{Z} \tag{13}$$

und mit $\tau^-(m_1, m_2, m_3)$ die Anzahl der Gitterpunkte mit

$$(14)\qquad 0 < x_i < m_i, \qquad 1 < \sum \frac{x_i}{m_i} < 2 \bmod 2\mathbf{Z}.$$

Die Bedingung „zulässig", d. h. $(x_i, m_i) = 1$, wurde hier weggelassen. Wir setzen

$$(15)\qquad \tau(m_1, m_2, m_3) = \tau^+(m_1, m_2, m_3) - \tau^-(m_1, m_2, m_3).$$

In [1] wurde im Anschluß an die Arbeit von Pham [6] gezeigt, daß

$$\tau(m_1, m_2, m_3)$$

die Signatur der affinen singularitätenfreien algebraischen Fläche

$$z_1^{m_1} + z_2^{m_2} + z_3^{m_3} = 1,$$

d. h. die Signatur der durch die Bildung der Schnittzahl über der 2-dimensionalen Homologiegruppe dieser algebraischen Fläche definierten quadratischen Form ist.

In [5] und in [4], p. 94 und 98, wurde diese quadratische Form wie folgt beschrieben. Es sei G_i die zyklische Gruppe der Ordnung m_i und w_i ein erzeugendes Element von G_i. Das direkte Produkt der G_i wird mit G bezeichnet. Im Gruppenring $\mathbf{Z}[G]$ wird das Element

$$\eta = (1 - w_1)\cdot(1 - w_2)\cdot(1 - w_3)$$

und über dem $\mathbf{Z}$-Modul $\eta\cdot\mathbf{Z}[G]$ folgende symmetrische Bilinearform eingeführt

$$s(x\eta, y\eta) = -\varepsilon(x\bar{y}(\eta + \bar{\eta})).$$

Hierbei ist für $x = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\cdot\sigma$ definiert: $\bar{x} = \sum_{\sigma\in G} a_\sigma\cdot\sigma^{-1}$, und ε ist die durch $\varepsilon(1) = 1$ und $\varepsilon(\sigma) = 0$ (für $\sigma \neq 1$) definierte Abbildung $\mathbf{Z}[G] \to \mathbf{Z}$.

$\eta\cdot\mathbf{Z}[G]$ ist ein freier $\mathbf{Z}$-Modul von $(m_1 - 1)(m_2 - 1)(m_3 - 1)$ Erzeugenden. Die über ihm definierte ganzzahlige quadratische Form s hat die Signatur $\tau(m_1, m_2, m_3)$, sie ist gerade, d. h. $s(x\eta, x\eta) \equiv 0 \bmod 2$ für alle $x\eta \in \eta\cdot\mathbf{Z}[G]$. Falls m_1, m_2, m_3 paarweise teilerfremd sind, dann ist $\det s = 1$.

Alle diese Aussagen werden in [1] und in [4], § 13, bewiesen. In [4] wird auch der Beweis von van der Blij für den bekannten Satz skizziert, daß eine ganzzahlige gerade quadratische Form der Determinante ± 1 eine durch 8 teilbare Signatur hat, und auf einen anderen Beweis in einer Arbeit von Serre hingewiesen. Aus diesem Satz folgt:

Lemma 3. *Für paarweise teilerfremde natürliche Zahlen $m_1, m_2, m_3 \geqq 1$ gilt für die in (15) definierte Zahl*

$$(16)\qquad \tau(m_1, m_2, m_3) \equiv 0 \bmod 8.$$

Wir stellen jetzt eine Beziehung zwischen $\tau(m_1, m_2, m_3)$ und $S(m_1, m_2, m_3)$ her [siehe (12)]. Wie leicht zu sehen, gilt für natürliche Zahlen m_1, m_2, m_3 $(m_i \geqq 1)$

$$(17)\qquad \tau(m_1, m_2, m_3) = \sum_{d_1|m_1, d_2|m_2, d_3|m_3} S(d_1, d_2, d_3),$$

wobei die Summe über alle Tripel von Teilern d_i von m_i zu erstrecken ist und per definitionem $\tau(m_1, m_2, m_3)$ und $S(d_1, d_2, d_3)$ verschwinden, wenn eines der m_i bzw. der d_i gleich 1 ist. Mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformel ([3], p. 51) folgt

$$(18)\qquad S(m_1, m_2, m_3) = \sum_{d_1|m_1, d_2|m_2, d_3|m_3} \mu\left(\frac{m_1}{d_1}\right)\cdot\mu\left(\frac{m_2}{d_2}\right)\cdot\mu\left(\frac{m_3}{d_3}\right)\cdot\tau(d_1, d_2, d_3).$$

Aus Lemma 3 und (18) folgt

Lemma 4. *Für paarweise teilerfremde natürliche Zahlen* $m_1, m_2, m_3 \geqq 1$ *gilt für die in* (12) *definierte Zahl*

$$S(m_1, m_2, m_3) \equiv 0 \bmod 8.$$

Wegen Lemma 2 ist damit die Hassesche Aufgabe gelöst.

Bemerkung: Nach einem Gespräch, in dem ich Herrn Hasse über Teilbarkeitsaussagen wie Lemma 3, die mit den Brieskornschen exotischen Sphären [1] zusammenhängen, berichtet hatte, wies er auf seine Aufgabe hin und erwähnte, er sei durch die Relativklassenzahlformel auf diese Aufgabe gekommen ([2], p. 89 Fußnote). Natürlich gibt die vorliegende Note keine „elementare" Lösung der Hasseschen Aufgabe. Wir haben die Behauptung der Aufgabe vielmehr auf den bekannten Satz zurückgeführt, daß die Signatur einer ganzzahligen geraden quadratischen Form der Determinante ± 1 durch 8 teilbar ist. Für einen Zusammenhang dieses Satzes mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz vgl. [4], p. 107, und [5], § 2 (3).

Literatur

[1] Brieskorn, E.: Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. Inventiones math. **2** (1966) 1–14.

[2] Hasse, H.: Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper. Berlin 1952.

[3] Hasse, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Auflage. Berlin-Heidelberg-New York 1964.

[4] Hirzebruch, F.; Mayer, K. H.: O(n)-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten (Lecture Notes in Mathematics Nr. 57). Berlin-Heidelberg-New York 1968.

[5] Hirzebruch, F.: Singularities and exotic spheres. Séminaire Bourbaki n° 314 (1966/67).

[6] Pham, F.: Formules de Picard-Lefschetz généralisées et ramification des intégrales. Bull. Soc. Math. France 93 (1965) 333–367.

(Eingegangen 20. 1. 1970)

Bonn F. Hirzebruch