36.

Bericht über Arbeiten am Mathematischen Institut der Universität Bonn

In: Landesamt für Forschung, Jahrbuch 1965, S. 311 – 326, Köln und Opladen:
Westdeutscher Verlag 1965

* Im Jahre 1964 promovierten an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn acht Mathematiker fast gleichzeitig, und zwar mit Forschungsaufgaben aus den Gebieten der Topologie und Geometrie[3, 4, 6, 7, 8], der homologischen Algebra[2], der Allgemeinen Algebra[1] und der mathematischen Logik[5].

Eine solche Häufung von mathematischen Dissertationen in einem Jahr und an einer Universität ist ungewöhnlich, und es dürfte wohl einige Zeit vergehen, bevor dieses Phänomen an unserer Universität wieder auftritt. Ein Mathematiker schließt ja nur im Ausnahmefall sein Studium mit der Promotion ab. Es sollte außerdem hervorgehoben werden, daß (mehr oder weniger zufälligerweise) ein großer Teil der untersuchten Probleme nahe verwandten Gebieten angehört und die Arbeiten während einer mehrjährigen guten Zusammenarbeit entstanden sind.

Jedenfalls scheint dieses seltene Ereignis ein geeigneter Anlaß zu sein, einmal über Leistungen des wissenschaftlichen Nachwuchses zu berichten, die wir als Erfolge sowohl der mathematischen Forschung als auch der Lehre an den Universitäten unseres Landes buchen dürfen.

Die Themen der Dissertationen liegen naturgemäß in der Richtung der Arbeitsgebiete der beteiligten Dozenten und der zahlreichen Gäste unseres Instituts, die jährlich zur Mathematischen Arbeitstagung oder zu anderen Gastaufenthalten nach Bonn kommen, so daß durch Bericht über Dissertationen ein, wenn auch nur kleiner, so doch charakteristischer Ausschnitt aus der Forschungstätigkeit des Instituts gegeben wird.

Es ist selbstverständlich, daß in anderen Jahren die Forschungsergebnisse, soweit sie sich in Dissertationen kristallisieren, auch auf ganz anderen Gebieten und unter Beteiligung anderer Dozenten gelegen haben. Es war ein glückliches Zusammentreffen, daß der Verfasser ausgerechnet für ein Jahr zur Mitarbeit an dem „Jahrbuch“ aufgefordert wurde, in dem besonders viele Untersuchungen, an denen er als Referent beteiligt war, zum Abschluß gebracht werden konnten.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Hasenjaeger und Herrn Prof. J. Schmidt und vor allem Herrn Dr. Jänich herzlich für Hilfestellung bei diesem Bericht danken.

Differentialoperatoren und Topologie[6, 4]

Im Jahre 1959 hatte der bekannte sowjetische Mathematiker Gelfand[14] in einem Artikel auf die Bedeutung der Tatsache aufmerksam gemacht, daß der Index eines elliptischen partiellen Differentialoperators – das ist die Differenz zwischen der Dimension seines Lösungsraumes und der Dimension des Lösungsraumes des adjungierten Operators – invariant gegenüber kleinen Änderungen des Operators ist. Diese Art Invarianz einer Größe ist immer ein Indiz dafür, daß die Untersuchung dieser Größe mit topologischen Methoden sinnvoll und erfolgversprechend ist. In der Sowjetunion erschienen mehrere Arbeiten über diesen Gegenstand, es sei darauf hingewiesen, daß sich Vekua[26] bereits 1952 mit dem Index elliptischer Differentialoperatoren befaßt hatte.

Eine wirklich umfassende Lösung gelang jedoch erst den Mathematikern M. F. Atiyah (Oxford) und I. M. Singer (Cambridge, USA)[11] bzw. M. F. Atiyah und R. Bott (Cambridge, USA)[9] durch ihre berühmte „*Indexformel*“, die den Index eines elliptischen Differential- oder Integro-Differentialoperators durch topologische Größen ausdrückt. Bereits im Juli 1962 hat Atiyah auf der jährlichen Bonner Arbeitstagung einen richtungweisenden Vortrag gehalten, in dem die Indexformel für den Spezialfall des Dirac-Operators zum ersten Male präzise (wenn auch nur als Vermutung) angegeben wurde. Bei diesen Untersuchungen trat zutage, daß zwischen der Theorie der elliptischen partiellen Differentialoperatoren und der algebraischen Topologie Beziehungen bestehen, die keineswegs oberflächlicher Art sind und deren Entdeckung angesichts der völlig getrennten Entwicklung dieser Gebiete nicht ohne weiteres zu erwarten stand.

Die Arbeiten an der Indexformel wurden am Mathematischen Institut der Universität Bonn in einem Seminar im Wintersemester 1962/63 an Hand von Veröffentlichungen verfolgt; auch in Princeton (USA), in Paris und an anderen Universitäten fanden und finden Seminare über dieses Thema statt.

Die von Atiyah und Singer verwendeten Methoden hängen eng mit früheren Arbeiten des Verfassers zusammen („Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie", Springer-Verlag 1956), insbesondere ergab sich, daß der in diesem Buch für algebraische Mannigfaltigkeiten bewiesene „Satz von Riemann-Roch" allgemein für kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten richtig ist. Entscheidend benutzt wird auch die sogenannte K-Theorie, die von M. F. Atiyah und dem Verfasser in einer gemeinsamen Arbeit[10] entwickelt wurde.

Die Indexformel gestattet interessante Anwendungen, z. B. auf „Ganzzahligkeitssätze", damit beschäftigt sich die Arbeit[6]: Man studiert in der algebraischen Topologie eine Vielzahl von Möglichkeiten, einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine rationale Zahl zuzuordnen. Sei einmal mit $M \to A(M) \in \mathbf{Q}$ eine solche Zuordnung bezeichnet. Man bemüht sich nun, Sätze vom folgenden Typ zu beweisen: „Hat M diese oder jene geometrische Eigenschaft (z. B.: Die Existenz einer Spin-Dirac-Struktur für das Tangentialbündel oder die Einbettbarkeit oder die Immersierbarkeit von M in gewisse Euklidische oder projektive Räume), dann muß $A(M)$ sogar eine ganze Zahl sein." Solche Sätze nennt man „Ganzzahligkeitssätze", mit ihrer Hilfe kann man oft ein differentialtopologisches Problem entscheiden, nämlich durch expliziten Nachweis, daß $A(M)$ im fraglichen Falle *keine* ganze Zahl ist. In der in Rede stehenden Arbeit[6] wurde nun die Atiyah-Singersche Indexformel dazu ausgenutzt, solche Ganzzahligkeitssätze zu gewinnen. Hat man auf M nämlich einen elliptischen Operator, so ist dessen Index, als Differenz zweier Dimensionen, natürlich eine ganze Zahl, die Indexformel übersetzt diese Zahl in Termini der algebraischen Topologie – man muß nun die Eigenschaften von M in so raffinierter Weise zur Konstruktion des elliptischen Differentialoperators ausnutzen, daß sich gerade $A(M)$ als Index ergibt. Daß das dem Autor der Arbeit in einer sehr allgemeinen Weise gelungen ist, wird schon daraus ersichtlich, daß er auf diese Weise *alle* bisher bekannten und auf andere Art bewiesenen Ganzzahligkeitssätze erhält. Zur Illustration der noch weiterreichenden Resultate sei der folgende, bisher unbewiesene Nicht-Immersierbarkeitssatz genannt, der in der Arbeit[6] als Folgerung aus den gewonnenen Ergebnissen erscheint:

Satz: *Der komplexe projektive Raum* $\mathbf{P}_{2m}(\mathbf{C})$ *kann nicht in den Euklidischen Raum* $\mathbf{R}^{8m-2\alpha(m)+1}$ *immersiert werden, wenn* $\alpha(m) \equiv 3 \bmod 4$, *dabei bezeichnet* $\alpha(m)$ *die Anzahl der Einsen in der dyadischen Entwicklung von* m.

Als Anwendung der Ganzzahligkeitssätze konnte auch der folgende Satz bewiesen werden:

1 *Es gibt keine Immersion des $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ in den $\mathbf{P}_{2m-\alpha(m)-1}(\mathbf{C})$, bei dem der Schnitt der Hyperebene des $\mathbf{P}_{2m-\alpha(m)-1}(\mathbf{C})$ mit dem immersierten $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ homolog einem geraden Vielfachen der Hyperebene des $\mathbf{P}_m(\mathbf{C})$ ist.*

Für gewisse anzustrebende Verallgemeinerungen der Indexformel ist es notwendig, statt eines einzelnen elliptischen partiellen Differentialoperators eine ganze Schar solcher Operatoren zu betrachten. Das ist eine Situation, die zum Beispiel auftritt, wenn man auf einer gefaserten Mannigfaltigkeit einen Differentialoperator studiert, der auf jeder Faser elliptisch ist. Ist etwa diese Mannigfaltigkeit zusammenhängend, so hängt der Index der einzelnen elliptischen „Faser-Operatoren" nicht von der Faser ab, es hat also einen Sinn, vom Index des ganzen Systems zu sprechen. Es ist aber angezeigt, hier auch den Indexbegriff zu verallgemeinern und statt der ganzen Zahl „Index" eine allgemeinere topologische Invariante zu definieren und zu untersuchen, die mehr Information über eine solche Schar elliptischer Operatoren enthält.

In der Arbeit[4] wurde die funktionalanalytische Seite dieses Problems analysiert. Bei der modernen Behandlung partieller Differentialoperatoren spielen gewissen Hilbert-Räume, die sogenannten „Sobolev-Räume" eine große Rolle. In diesen Räumen erweisen sich die elliptischen Differentialoperatoren als „Fredholm-Operatoren", d. h. sie haben endlich-dimensionalen Kern und Cokern, die Differenz dieser Dimensionen ist gerade der Index. Es sei nun H ein separabler Hilbertraum und F der Raum der Fredholm-Operatoren von H in sich. (Hilberträume sollen hier immer ∞-dimensional sein.) In[4] werden in F zwei Verknüpfungen eingeführt, die für einen kompakten Raum X die Menge $[X, F]$ der Homotopieklassen von Abbildungen $X \to F$ zu einem Ring und $[\ldots, F]$ zu einem Funktor von der Kategorie der kompakten Räume in die Kategorie der Ringe machen. Nun wird der verallgemeinerte Index als eine Abbildung $[X, F] \to KX$ definiert. KX bezeichnet dabei den aus dem Halbring der Vektorraumbündel über X entstehenden Ring[10]. Die Konstruktion der Abbildung geschieht durch den Nachweis, daß 1. in jeder Homotopieklasse eine Abbildung $f\colon X \to F$ enthalten ist, für die die Vektorräume Kern $f(x)$ und Cokern $f(x)$ in kanonischer Weise die Fasern je eines komplexen Vektorraumbündels über X sind und daß 2. die Differenz dieser beiden Bündel im Sinne der K-Theorie (d. h. in KX) nicht von der Auswahl des f abhängt. Als Index wird nun diese Differenz bezeichnet. Das Hauptresultat der Arbeit besagt, daß diese Indexkonstruktion $[X, F] \to KX$ einen Isomorphismus der Funktoren $[\ldots, F]$ und K darstellt. F ist also ein klassifizierender Raum für K (einschließlich Ringstruktur), und mit analoger Technik werden noch für eine Reihe anderer, in der K-Theorie eine Rolle spielender Funktoren mit funktionalanalytischen Mitteln klassifizierende Räume angegeben.

Die hier beschriebene endgültige Formulierung des Resultats war erst möglich geworden, nachdem N. Kuiper (Amsterdam) die Zusammenziehbarkeit der allgemeinen linearen Gruppe des Hilbertraumes bewiesen hatte. Diese Frage war 1963 auf einer Tagung über Differential- und algebraische Topologie in Seattle (USA) in einer Liste wichtiger ungelöster Probleme genannt worden. Die Lösung wurde erstmalig von N. Kuiper auf der Bonner Arbeitstagung im Juni 1964 vorgetragen[20].

Symmetrien[8]

Auch diese Arbeit beschäftigt sich mit Zahlen, die man differenzierbaren Mannigfaltigkeiten im Rahmen der algebraischen Topologie zuordnet, nämlich mit den Pontrjaginschen bzw. Chernschen charakteristischen Zahlen; ein Gegenstand, der eng mit der auf Thom (Straßburg) zurückgehenden Theorie des Cobordismus zusammenhängt. Die Amerikaner Conner und Floyd (University of Virginia, Charlottesville) untersuchten diese Zahlen in Zusammenhang mit Symmetrieeigenschaften einer Mannigfaltigkeit. Unter einer „*p-symmetrischen Mannigfaltigkeit*" versteht man eine kompakte orientierte Mannigfaltigkeit M ohne Rand zusammen mit einer nichttrivialen (orientierungserhaltenden) Selbstabbildung f von M, die bei p-facher Hintereinanderschaltung die Identität auf M ergibt. Dabei soll immer p eine Primzahl und $p \neq 2$ sein. Die Zusammenhangskomponenten der Menge der Fixpunkte von f sind Untermannigfaltigkeiten, man nennt sie „*Symmetrieachsen*".

Es kann der Sonderfall eintreten, daß die Abbildung f alle Punkte von M bewegt, so daß also gar keine Symmetrieachsen da sind. In dieser Situation definiert man für M zu den oben erwähnten charakteristischen Zahlen noch eine weitere Serie solcher Zahlen, die nur bis auf Vielfache von p bestimmt sind (also als Restklassen modulo p zu betrachten sind), und die außer von M auch noch von f abhängen. Diese sogenannten p-charakteristischen Zahlen spielen nun, wie Conner und Floyd gezeigt haben, eine bedeutende Rolle beim Studium der p-symmetrischen Mannigfaltigkeiten, die Symmetrieachsen *besitzen*.

Die Symmetrieachsen verlaufen nämlich innerhalb winziger Schläuche (Ränder gewisser Tubenumgebungen), die von f fixpunktfrei in sich übergeführt werden. Kennt man nun die p-charakteristischen Zahlen dieser Schläuche und gewisse topologische Daten der Symmetrieachsen selbst, so kann man nach Conner und Floyd bereits die charakteristischen Zahlen mod. p der ganzen Mannigfaltigkeit M berechnen. Abgesehen von den zu dieser Berechnung angegebenen Formeln liefert dieses Resultat die interessante Einsicht, daß man die charakteristischen Zahlen einer p-symmetrischen Mannigfaltigkeit mod. p schon kennt, wenn man die Symmetrieachsen und das Symmetrieverhalten in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft kennt.

In der vorliegenden Dissertation wird nun das für diesen Fragenkreis wichtige Problem untersucht: Wie berechnet man die p-charakteristischen Zahlen dieser Schläuche? Oder allgemeiner: Wie berechnet man überhaupt die p-charakteristischen Zahlen von p-symmetrischen Sphärenbündeln? Die Ergebnisse der Arbeit zeigen:

Die gesuchten Zahlen hängen ab von den charakteristischen Cohomologieklassen der Basis (also z. B. der Symmetrieachsen), den charakteristischen Cohomologieklassen des zugehörigen Vektorraumbündels und gewissen Invarianten, den „Rotationszahlen", die das Symmetrieverhalten des Sphärenbündels beschreiben.

Mit Spektralsequenz-Methoden wird außerdem der Cohomologiering des Quotientenraumes eines p-symmetrischen Sphärenbündels (es ist dies ein Linsenraumbündel) berechnet.

In Beispielen wird schließlich gezeigt, wie sich aus der Gestalt der Symmetrieachsen allein schon Aussagen über die gewöhnlichen charakteristischen Zahlen von M gewinnen lassen.

Abbildungsdefekt[7]

In dieser Arbeit wird der Defekt von stetigen Abbildungen $f\colon X \to Y$ von Mannigfaltigkeiten untersucht. Man versteht darunter folgendes: Haben X und Y dieselbe Dimension und ist $k > 0$ der Grad von f, so ist „fast" jedes $y \in Y$ Bildpunkt von wenigstens k verschiedenen Punkten von X. Es kann jedoch auch Punkte geben, die weniger als k Urbildpunkte haben, sie weisen also einen „*Defekt*" auf. Sind dagegen X^n und Y^m verschiedener Dimension und $n > m$, so ist als Normalfall zu betrachten, daß die Dimension des Urbilds eines Punktes $y \in Y$ nicht kleiner als $n - m$ ist.

Tritt dieser Fall dennoch ein, so sagt man, y habe „Defekt" oder genauer „*Dimensionsdefekt*".

Angeregt wurde das Studium der Defektmengen durch Heinz Hopf in Zürich, der bereits 1929 den Defekt von Abbildungen untersucht hat und 1962 in seinem Bericht[16] über Defektmengen auch eine Reihe noch offener Probleme nannte, die zum Teil in der vorliegenden Dissertation mit gelöst wurden.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß X und Y dieselbe Dimension haben. Hopf hatte bewiesen, daß für eine simpliziale Abbildung $f\colon S^m \to S^m$ von positivem Grad die Abschätzung $b_{m-2}(\Delta) \leqq 1$ gilt, wobei b_{m-2} die $(m-2)$-te Bettische Zahl und Δ den Komplex der Punkte mit nur einem Urbildpunkt bedeuten. Hopf sprach die Vermutung aus, daß sich eine ähnliche Abschätzung für den ganzen Defektkomplex finden ließe. Die vorliegende Arbeit widerlegt diese Vermutung. Der diesbezügliche Satz lautet:

> *Es gibt zu jeder ganzen Zahl $r \geqq 0$ eine Abbildung $f_r\colon S^3 \to S^3$ vom Grade 3, die simplizial und offen ist, so daß die Defektmenge aus genau $2r+2$ disjunkten Kreisen besteht.*

Interessanterweise läßt sich dieses Gegenbeispiel jedoch durch folgenden Satz ergänzen, der zeigt, in welcher Richtung noch weitere Untersuchungen möglich und lohnend sind:

> *Ist $f\colon S^m \to S^m$, $m > 2$, eine offene simpliziale Abbildung vom Grade k und besteht der Defektkomplex aus g disjunkten unverknoteten $(m-2)$-Sphären, die je eine Zelle beranden, die keine der übrigen Sphären des Defektkomplexes trifft, so ist $g < k$.*

Die Hauptresultate der Arbeit betreffen den Dimensionsdefekt. Hopf hatte darauf aufmerksam gemacht, daß es Sätze von folgendem Typ gibt: Ist die Abbildung $f\colon X \to Y$ wesentlich, d. h. ist jede zu f homotope Abbildung surjektiv, so kann der Defekt nicht allzu groß sein. Es handelt sich nun darum, präzise Aussagen darüber zu gewinnen. In der vorliegenden Arbeit wird statt mit Wesentlichkeit sogar meist nur mit gewissen (schwächeren) Stabilitätsvoraussetzungen gearbeitet, die durch Lokalisierung des Begriffes „wesentlich" entstehen. Eine genauere Diskussion der Stabilität ergibt insbesondere: *Zu jedem $m \geqq 2$ gibt es eine Abbildung $f_m\colon S^m \to S^2$, die in jedem Punkte von S^m und S^2 stabil ist*, und für $m \geqq 4$ kann man hierfür sogar unwesentliche Abbildungen wählen. Bei der Untersuchung des

Dimensionsdefektes stellte es sich heraus, daß die Dimension bzw. Codimension zwei eine besondere Rolle spielt. Unter Benutzung eines Satzes von Bruschlinsky und einer verallgemeinerten Form des Alexander-Pontrjaginschen Dualitätssatzes wird folgender Hauptsatz über den Dimensionsdefekt bewiesen:

> X^m *und* Y^n, $m > n \geqq 2$, *seien kombinatorische Mannigfaltigkeiten*, X *orientierbar.* $f\colon X \to Y$ *sei eine kompakte simpliziale Abbildung. Es sei* Z *ein simplizialer* $(n-2)$-*Zyklus in* Y, *und* f *sei stabil in einem Punkte* $q \in |Z|$. *Dann ist die* $(m-2)$-*te Bettische Zahl des Urbildes von* $|Z|$ *von Null verschieden.*

Als Spezialfall erhält man: Bei einer wesentlichen simplizialen Abbildung auf eine Fläche besitzt kein Punkt Dimensionsdefekt (da er ja nicht einmal Homologiedefekt hat).

Zum Schluß sei noch ein besonders interessantes und überraschendes Resultat genannt, in dem Y die 2-Sphäre ist: *Die simpliziale Abbildung* $f\colon X \to S^2$ *sei wesentlich, bilde aber jeden* 2-Zyklus *nullhomolog (also unwesentlich) auf die* S^2 *ab. Dann ist für jeden Punkt* $p \in S^2$ *die erste Bettische Zahl von* $f^{-1}(p)$ *nicht Null.*

Krümmung[3]

Es ist ein wichtiges Problem der globalen Riemannschen Geometrie, den Typ derjenigen zusammenhängenden differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu kennzeichnen, die eine Riemannsche Metrik positiver Krümmung zulassen. Unter „Typ“ versteht man dabei etwa Homotopietyp, Homöomorphietyp oder Diffeomorphietyp. In Richtung der ersten beiden Fragen brachten die letzten Jahre eine ganze Reihe von Resultaten, vor allem durch Rauch (New York)[25], Berger (Nizza)[12] und Klingenberg (Mainz)[19]. Insbesondere hat man den *Sphärensatz: Eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Riemannsche Krümmung* K δ-*beschränkt ist (d. h. für geeignetes* A *gilt* $\delta A \leqq K \leqq A$*) für* $1/4 < \delta \leqq 1$, *ist homöomorph zur Sphäre.* In der Arbeit von Klingenberg findet man auch einen guten historischen Überblick über die stufenweise Verbesserung des Satzes bis 1961.

Vom Standpunkt der Differentialgeometrie oder auch der Differentialtopologie interessiert man sich für eine Verschärfung des Sphärensatzes, die möglicherweise den *Diffeomorphietyp* der betrachteten Mannigfaltigkeit charakterisieren soll. Denn es ist heute wohlbekannt, daß auf Sphären im allgemeinen verschiedene Äquivalenzklassen differenzierbarer Strukturen existieren. (Bis zum Erscheinen von Milnors sensationeller Arbeit[21] „On manifolds homeomorphic to the 7-sphere" im Jahre 1956 schien allerdings jedermann vom Gegenteil überzeugt zu sein. Als wesentliche Beiträge für die weitere Erforschung dieses Strukturen-Problems seien die Arbeiten[22] und[18] genannt.)

Die Vermutung, daß differentialgeometrische Bedingungen – wie eben etwa die Existenz einer Riemannschen C^∞-Metrik mit gewissen Krümmungsbeschränkungen – die differenzierbare Struktur bereits festlegen müßten, ergibt sich unter anderem daraus, daß eine Riemannsche Metrik besonders gut bekannte differenzierbare Abbildungen (z. B. die Exponentialabbildung) von R^n in M an die Hand liefert, die zur Einführung spezieller Karten (z. B. Riemannscher Normalkoordinaten) Anlaß geben: Die Bedingungen für die Krümmung gestatten dann, die Größe der Karten-Definitionsbereiche sowie deren Überlappungsbereiche und Kartenwechsel für geeignet gewählte Atlanten näher zu beschreiben, wodurch eine Einordnung der auf M vorhandenen differenzierbaren Struktur in die durch Milnor-Smale-Thom klassifizierten C^∞-Strukturen auf S^n möglich erscheint.

So sehr dieses Problem auch in den letzten fünf Jahren von bekannten Differentialgeometern diskutiert wurde, scheiterten bisher alle Bearbeitungsversuche.

In der vorliegenden Dissertation wird nun ein höchst bemerkenswertes Resultat zu diesem Problem bewiesen:

Es gibt eine Folge positiver reeller Zahlen $1/4 = \delta_1 < \delta_2 < \ldots$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 1$ *(für die auch eine rekursiv zu berechnende Majorantenfolge angegeben und bis* $n = 10$ *auch berechnet wird), so daß, wenn die Riemannsche Krümmung von* M δ*-beschränkt ist, aus* $\delta_{n-2} < \delta$ *stets folgt:* M *ist diffeomorph zur Standard-*S^n.

Die wesentliche Idee, die großen technischen Schwierigkeiten zu meistern, die mit diesem Problem verbunden sind, liegt in einer rekursiven Konstruktion immer einfacher werdender Atlanten aus je zwei differenzierbaren Karten für M, wobei der Rekursionsschritt ein sehr weitgehendes Studium der Riemannschen Krümmung gewisser differenzierbarer Untermannigfaltigkeiten der Codimension 1 von M nötig macht. Dieser dem Krümmungsstudium gewidmete Teil der Arbeit, der äußerst scharfe Abschätzungen für die Riemannsche Krümmung besagter Untermannigfaltigkeiten liefert, erfordert den Einsatz schwieriger Werkzeuge der modernen Differentialgeometrie.

Inverser Limes[2]

Einer der wesentlichsten Begriffe in der homologischen Algebra ist der des *Funktors*. Ist zum Beispiel G eine Abelsche Gruppe und ordnet man jeder Abelschen Gruppe A die Abelsche Gruppe Hom (G, A) zu, so erhält man einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Abelschen Gruppen in sich. Eine kurze exakte Sequenz $0 \to A \to B \to C \to 0$ führt dieser Funktor in die exakte Sequenz $0 \to \operatorname{Hom}(G, A) \to \operatorname{Hom}(G, B) \to \operatorname{Hom}(G, C)$ über. Der letzte Homomorphismus dieser Sequenz ist im allgemeinen nicht surjektiv. Man führt nun Abelsche Gruppen $\operatorname{Ext}^n(G, A)$ ein für $n \geqq 1$ ($\operatorname{Ext}^n(G,\ )$ sind die „derivierten Funktoren" von $\operatorname{Hom}(G,\ )$) und erhält die exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \operatorname{Hom}(G, A) \to \operatorname{Hom}(G, B) \to \operatorname{Hom}(G, C) \\ &\to \operatorname{Ext}^1(G, A) \to \operatorname{Ext}^1(G, B) \to \operatorname{Ext}^1(G, C) \\ &\to \operatorname{Ext}^2(G, A) \to \dots \end{aligned}$$

In diesem allereinfachsten Beispiel der homologischen Algebra verschwinden die derivierten Funktoren $\operatorname{Ext}^n(G,\ )$ für $n \geqq 2$.

In der Arbeit[2] wird die Kategorie $\mathfrak{F}$ der R-links-Modul-Familien über der festen rechtsgerichteten Menge M betrachtet. Hierbei ist R ein fester Ring, und eine derartige Familie A ordnet jedem $i \in M$ einen R-links-Modul A_i und jedem Paar (i, j) von Elementen aus M mit $i < j$ einen Homomorphismus von A_j nach A_i zu. Für A ist der inverse Limes $\lim A$ erklärt. $\lim$ ist ein Funktor von der Kategorie $\mathfrak{F}$ in die Kategorie der R-links-Moduln. Der Funktor $\lim$ ist in der algebraischen Topologie von großem Interesse. Ein Raum X sei etwa Vereinigung von Teilräumen X_i ($i = 0, 1, 2, \dots$ mit $X_i \subset X_{i+1}$, z. B. Gerüste eines CW-Komplexes). Dann bilden die Cohomologiemoduln $H^*(X_i)$ eine Modulfamilie, und der Limes solcher Familien spielt in der axiomatischen Cohomologietheorie eine entscheidende Rolle (Milnor). Ein Schüler von Milnor hat die derivierten Funktoren $\lim^n$ betrachtet[27]. Siehe auch Nöbeling[23,24] (Vortrag auf der Bonner Arbeitstagung 1958). Die Untersuchung der derivierten Funktoren $\lim^n$ wird in dieser Arbeit weitergeführt, und zwar auch für den Fall, daß man an Stelle von Moduln (nicht notwendig Abelsche) Gruppen betrachtet. Wie in der Garbentheorie läßt sich dann allerdings nur $\lim^1$ einführen und es ist keine Gruppe mehr, sondern nur noch eine Menge mit ausgezeichnetem Element. Zentrales Resultat der Arbeit ist die Aufstellung einer Bedingung für das Verschwinden von $lim^1 A$. Damit hat der Verfasser von[2] ein Kriterium dafür gefunden, daß eine exakte Sequenz

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

von R-Modul- bzw. Gruppenfamilien im Limes wieder in eine exakte Sequenz übergeht. Diese Bedingung für das Verschwinden von $lim^1 A$ und damit für das Exaktbleiben läßt sich so formulieren, daß jede Gruppe bzw. jeder Modul der Familie A eine „*C-Gruppe*" bzw. ein „*C-Modul*" ist. Dieser C-Struktur-Begriff ist auch von selbständigem Interesse, für Gruppen besagt er: Hat ein Teilsystem des Systems aller möglichen Links-Nebenklassen von Untergruppen einen leeren Durchschnitt, so ist dies bereits für endlich viele Elemente des Teilsystems der Fall. Es handelt sich also um eine Art „Kompaktheitsbedingung" für das System aller Links-Nebenklassen. Die gruppentheoretische Diskussion des Begriffes ergab, daß z. B. alle Gruppen und Moduln mit Minimumbedingung C-Gruppen bzw. C-Moduln sind. Bei Abelschen Gruppen besagen die C-Bedingung und die Minimumbedingung sogar dasselbe.

Zerlegungen[1]

Die Arbeit[1] ist der „Allgemeinen Algebra" entnommen, die an der „Abteilung für Grundlagenforschung der Mathematik" unseres Institutes unter Leitung von Prof. Dr. J. Schmidt besonders gepflegt wird. Da es sich hierbei um ein recht junges Gebiet der Mathematik handelt, seien einige einführende Sätze gestattet.

Die Algebra ist die Theorie der Mengen mit Operationen, die gewissen Axiomen unterworfen sind; jede der algebraischen Strukturen (etwa die der Gruppen, Ringe, Körper, Moduln) ist durch ein Axiomensystem gekennzeichnet. Die Allgemeine Algebra studiert solche Begriffe und Sätze, die für alle algebraischen Strukturen gemeinsam gelten, d. h. die Gegenstände der Allgemeinen Algebra sind Mengen mit ganz beliebigen, keinen Axiomen unterworfenen Operationen. Die Stellung der Allgemeinen Algebra zur Algebra ist somit vergleichbar mit der Stellung der Allgemeinen (mengentheoretischen) Topologie zur Geometrie. Naturgemäß sind die Methoden der Allgemeinen Algebra weit mehr mengentheoretischer Natur als die der Algebra. Ein wesentlicher Impuls zur Ausbreitung der Allgemeinen Algebra ging von der mathematischen Logik aus, insbesondere seit man bemerkt hatte, daß sich die Formalen Sprachen der Logik und ihre Modelle algebraisch interpretieren lassen.

Über Allgemeine Algebra wird vor allem in den USA (insbesondere Tarski, Jónsson), der UdSSR (Kurosch) und Polen (Marczewski) gearbeitet. Die älteste und zugleich grundlegende Arbeit stammt von G. Birkhoff (Harvard, USA)[13] aus dem Jahre 1935; aber ein breites Interesse konnte sich erst später entfalten, besonders nach Vorträgen von Birkhoff in Montreal (1945) und von Tarski in Cambridge (USA) 1950. Im September 1964 hat die erste internationale Tagung über Allgemeine Algebra in Warschau stattgefunden, an der auch der Verfasser von[1] teilgenommen und über seine Dissertation vorgetragen hat.

Einer der Begriffe, die in allen algebraischen Strukturen eine wichtige Rolle spielen, ist der der Zerlegung. In[1] werden nun solche direkten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra studiert, die in natürlicher Weise eine direkte Zerlegung ihres Kongruenzverbandes induzieren, mit dem Ziel, die eindeutige Zerlegung einer Abelschen Torsionsgruppe in ihre Primärkomponenten, die eindeutige Zerlegung eines Hilbertraumes in die Eigenräume eines kompakten symmetrischen Operators und ähnliche Sätze über eindeutige Zerlegungen in Algebra und Funktionalanalysis unter diesem verbandstheoretisch-algebraischen Aspekt zu begreifen.

Diese Eindeutigkeit sollte – das war die Idee – auf die bekannte Erscheinung der Verbandstheorie zurückgeführt werden, daß es in einem vollständigen Verband H zu je zwei direkten Zerlegungen eine gröbste gemeinsame Verfeinerung gibt; daher gibt es höchstens eine nicht mehr verfeinerbare Zerlegung, und diese ist dann die feinste. Ausgangspunkt sollten also die direkten Zerlegungen einer Algebra A sein, die in natürlicher Weise ein direkte Zerlegung des Kongruenzrelationenverbandes $\mathfrak{H} = \mathfrak{C}(A)$ induzieren. Es zeigte sich aber, daß jede derartige „$\mathfrak{H}$-treue" direkte Zerlegung von A (A mit endlichen Operationen vorausgesetzt) automatisch endlich ist; dies machte deutlich, daß der Begriff der direkten Zerlegung zu eng war. Der Verfasser der Arbeit gelangte nun aus natürlichen Forderungen zu einem abgeschwächten Zerlegungsbegriff, seinen „*fastdirekten*" Zerlegungen, zu ihnen gehören insbesondere die beiden Arten von Zerlegungen, die Hashimoto[15] und Karolinskaya[17] studiert hatten. Hauptresultat der Arbeit, die mit ihren zahlreichen, z. T. recht komplizierten Gegenbeispielen keine Frage des Problems unbeantwortet läßt:

Die $\mathfrak{H}$-treuen fastdirekten Zerlegungen bilden eine beschränkt vollständig geordnete Menge $\mathfrak{M}$, d. h. zu jeder nichtleeren Teilmenge von $\mathfrak{M}$, die überhaupt *eine gemeinsame Verfeinerung besitzt, gibt es eine gröbste gemeinsame Verfeinerung. Allerdings ist $\mathfrak{M}$ kein Verband! Zwei Elemente von $\mathfrak{M}$ brauchen nämlich keine gemeinsame Verfeinerung zu besitzen. Dessen ungeachtet gibt es höchstens ein nicht mehr verfeinerbares Element von $\mathfrak{M}$, und dies ist dann das feinste. Dieses feinste Element von $\mathfrak{M}$ besteht (falls es existiert) genau aus den maximalen $\mathfrak{H}$-Zerlegungskongruenzen (den größten nichttrivialen Kongruenzrelationen, die in irgendwelchen $\mathfrak{H}$-treuen, fastdirekten Zerlegungen vorkommen).*

Unter gewissen Kettenbedingungen wird die Existenz dieser feinsten $\mathfrak{H}$-treuen fastdirekten Zerlegung gesichert; in der abschließenden Beispieldiskussion wird vor allem auch die verbandstheoretische Erscheinung, die der eine Ausgangspunkt dieser Untersuchungen war, durch die vorliegende Theorie „erklärt".

Nichtableitbarkeit[5]

Das Seminar für Logik und Grundlagenforschung unter Leitung von Prof. Dr. G. Hasenjaeger gehört der Philosophischen Fakultät an. Die Promotion eines Schülers von Prof. Hasenjaeger an der Math.-Nat. Fakultät mit einer Arbeit aus der mathematischen Logik ist ein Beispiel für die stets gute Zusammenarbeit zwischen diesem Seminar und unserem Institut.

Es ist bekannt, daß die Ordnungsstruktur ω der natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... in der Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe nicht unterscheidbar ist von Ordnungstypen $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \alpha$. Dabei ist ω^* der Ordnungstyp der negativen ganzen Zahlen, also $\omega^* + \omega$ der aller ganzen Zahlen. Durch Adjunktion weiterer Grundbegriffe ergeben sich zusätzliche Anforderungen an den Ordnungstyp α, ohne daß aber $\alpha = 0$ erzwungen werden könnte. (Ist z. B. die Addition in einem Modell gegeben, so ist $\alpha = 0$ oder aber α dicht, also unendlich.) Die Endlichkeit aller Abschnitte $A_y = \{x| \, x \leqq y\}$ kann also axiomatisch nicht adäquat erfaßt werden.

Die Arbeit[5] behandelt die vollständige Induktion *Ind* und das Schubfachprinzip *Sch* als Charakterisierungen der Endlichkeit der Abschnitte A_y. Ein Hauptresultat der Arbeit ist:

Bei Beschränkung auf ordnungstheoretische Einsetzungen erster Stufe ist Sch über Ind unabhängig.

Dies wird durch ein Modell vom Ordnungstypus $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot (\omega + \omega^*)$ gezeigt. (Ein geeignetes Gegenbeispiel zu *Sch* liefert kein Gegenbeispiel zu *Ind*, was durch ein Eliminationsverfahren kontrolliert wird.)

Damit ist gezeigt, daß das Schubfachprinzip ein Beispiel einer Aussage $\mathfrak{A}$ liefert, so daß weder $\mathfrak{A}$ noch die Negation von $\mathfrak{A}$ ableitbar ist in dem im Prädikatenkalkül erster Stufe formulierten System mit „0“ (*(Null)*, „s“ *(Nachfolger)* und „$<$“ *(kleiner)* als einzigen nichtlogischen Zeichen, wobei als Axiome die vollständige Induktion zusammen mit einigen anderen gelten. Nach dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz existiert bekanntlich in jedem hinreichend ausdrucksfähigen Formalismus eine nichtableitbare Aussage, deren Verneinung ebenfalls nichtableitbar ist. Gödel konstruiert diese Beispiele durch Anwendung des Cantorschen Diagonalverfahrens, wodurch sie immer recht „pathologisch“ werden. In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, die Unbeweisbarkeit für eine nicht ad hoc konstruierte, sondern sich durch ihren mathematischen Inhalt auszeichnende Aussage nachzuweisen. Zwar gilt diese Unbeweisbarkeit (wie angegeben) nur in der elementaren Wohlordnungstheorie, und es wäre vielleicht noch zu früh, Unableitbarkeitssätze für den gesamten Bereich der elementaren Zahlentheorie zu erwarten. Jedoch hofft man durch die Beschäftigung mit einfacheren Systemen die Mittel zu gewinnen, die später zur Lösung der „höheren“ Unbeweisbarkeitsprobleme dienen können. So wäre es z. B. für den Mathematiker von praktischer Bedeutung zu wissen, ob (wie man vielleicht vermuten könnte) der große Fermatsche Satz im Prädikatenkalkül erster Stufe (unter Zugrundelegung der üblichen Axiome) nicht ableitbar ist. Jedenfalls besteht in der Überprüfung solcher Unbeweisbarkeitsfragen sicherlich eine wichtige Aufgabe des Logikers.

Die hier gezeigte Unabhängigkeit von *Sch* über *Ind* erläutert die Rolle der Ausdrucksmittel, die für Einsetzungen in (hier) *Ind* zugelassen sind. Naheliegende Erweiterungen der Ausdrucksmöglichkeit zerstören die Unabhängigkeit; doch – späteres Resultat des Verfassers von[5] – Addition allein genügt nicht, obwohl $\alpha = \omega + \omega^*$ dadurch ausgeschlossen wird. Andererseits sind alle Ordnungs*aussagen* erster Stufe entscheidbar aus jedem „natürlichen“ Axiomensystem mit *Ind* für die Ordnung in ω. Dies ist ein Gegenstück einerseits zur Unabhängigkeit von *Sch*, andererseits zur ω-Unvollständigkeit von gewissen Axiomatisierungen für die Nachfolgerstruktur in ω.

2 LITERATURVERZEICHNIS

1 *Armbrust, M.*, „*Die fast direkten Zerlegungen einer allgemeinen Algebra*", Referenten: J. Schmidt, F. Hirzebruch. Erscheint in Colloquium Mathematicum 14 (1965).

2 *Brandenburg, J.*, „*Über die Rechtsderivierten des inversen Limes von Modul- und Gruppenfamilien*", Referenten: F. Hirzebruch, J. Schmidt. Erscheint in den Bonner Mathematischen Schriften.

3 *Gromoll, D.*, „*Differenzierbare Strukturen und Metriken positiver Krümmung auf Sphären*", Referenten: F. Hirzebruch, P. Dombrowski; auswärtiger Referent: W. Klingenberg, Mainz. Erscheint in den Math. Annalen.

4 *Jänich, K.*, „*Vektorraumbündel und der Raum der Fredholm-Operatoren*", Referenten: F. Hirzebruch, J. Tits. Erscheint in den Math. Annalen.

5 *Jensen, R. B.*, „*Unabhängigkeit in Teilsystemen der elementaren Zahlentheorie*", Referenten: G. Hasenjaeger, F. Hirzebruch. Erscheint in den Math. Annalen.

6 *Mayer, K. H.*, „*Einige Anwendungen von elliptischen Differentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten*", Referenten: F. Hirzebruch, P. Dombrowski. Erscheint in Topology.

7 *Olivier, R.*, „*Stabile Abbildungen von Mannigfaltigkeiten und Defekt*", Referenten: F. Hirzebruch, J. Tits; auswärtiger Referent: H. Hopf, Zürich. Erscheint in den Math. Annalen.

8 *Zelle, K. G.*, „*Symmetrien von Mannigfaltigkeiten und charakteristische Zahlen*", Referenten: F. Hirzebruch, P. Dombrowski. Erschienen als Bonner Mathematische Schrift Nr. 22.

9 *Atiyah, M. F., and R. Bott, The index problem for manifolds with boundary*, Differential Analysis (Papers presented at the Bombay Colloquium 1964).

10 *Atiyah, M. F., and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math. 3 (1961).

11 *Atiyah, M. F., and I. M. Singer, The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (1963).

12 *Berger, M., Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées*, C. R. Acad. Sci. Paris 250 (1960). – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14 (1960).

13 *Birkhoff, G., On the structure of abstract algebras*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 31 (1935).

14 *Gelfand, I. M., On elliptic equations*, Russ. Math. Surv. 15 (1960). – Usp. Mat. Nauk 14 (1959) (russisch).

15 *Hashimoto, J., Direct, subdirect decompositions and congruence relations*, Osaka Math. J. 9 (1957).

16 *Hopf, H., Über den Defekt stetiger Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Rendic. Mat. 21 (1962).

17 *Karolinskaya, L. N., Direkte Zerlegungen abstrakter Algebren mit ausgezeichneter Unteralgebra*, Usp. Mat. Nauk 14 (1959).

18 *Kervaire, M., and J. Milnor, Groups of homotopy spheres I*, Proc. Intern. Congr. Math. Edinburgh (1958).

19 *Klingenberg, W., Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Comm. Math. Helv. 35 (1961).

20 *Kuiper, N., The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, Topology 3 (1965).

21 *Milnor, J., On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. Math. 64 (1956).

22 *Milnor, J., Differentiable structures on spheres*, Amer. J. Math. 81 (1959).

[23] *Nöbeling, G., Cohomologie-Moduln über abelschen Halbgruppen. Bestimmung der Čechschen Homologie-Moduln eines Raumes X durch einen Funktionenring über X*, Bonner Math. Schriften 12 (1960).
[24] *Nöbeling, G., Über die Derivierten des Inversen und des direkten Limes einer Modulnfamilie*, Topology 1 (1962).
[25] *Rauch, H. E., A contribution to differential geometry in the large*, Ann. Math. 54 (1951).
[26] *Vekua, I. N., Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben*, Mat. Sbornik 31 (1952) (russisch).
[27] *Yeh, Z. Z., Higher inverse limits and homology theories*, Dissertation, Princeton University (1959).

Es mag von Interesse sein zu erfahren, welche beruflichen Wege die acht jungen Doktoren eingeschlagen haben. Herr Dr. Armbrust ist wissenschaftlicher Assistent an der Universität zu Köln, Herr Dr. Brandenburg ist mit der mathematischen Behandlung von Flatter-Problemen an Tragflächen bei den Vereinigten Flugtechnischen Werken in Bremen beschäftigt. Herr Dr. Gromoll ist wissenschaftlicher Assistent an der Universität Mainz, zur Zeit beurlaubt für einen Aufenthalt an der Princeton University (USA), Herr Dr. Jänich ist wissenschaftlicher Assistent an unserem Institut, zur Zeit beurlaubt für einen einjährigen Aufenthalt an der Cornell University (USA). Herr Dr. Jensen ist wissenschaftlicher Assistent am Seminar für Logik und Grundlagenforschung bei Prof. Hasenjaeger, Herr Dr. Mayer und Herr Dr. Olivier sind wissenschaftliche Assistenten an unserem Institut, und Herr Dr. Zelle ist wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Abteilung „Unternehmensforschung" der Klöckner-Werke AG in Duisburg.