

## Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.

Von

FRIEDRICH HIRZBRUCH in Münster (Westf.).

### Einleitung.

0. 1. Eine komplexe Mannigfaltigkeit  $M^{(n)}$  ist eine topologische Mannigfaltigkeit von  $2n$  (reellen) Dimensionen, die mit lokalen Systemen komplexer Koordinaten so überdeckt ist, daß der Übergang von einem System zu einem anderen in einem gemeinsamen Existenzbereich durch (komplex)-analytische Funktionen mit von 0 verschiedener Funktionaldeterminante erfolgt. Es ist sinnvoll, von regulären, meromorphen Funktionen in einer komplexen Mannigfaltigkeit, von analytischen Abbildungen einer komplexen Mannigfaltigkeit in eine andere usw. zu sprechen, da alle diese Begriffe nicht von speziellen komplexen Koordinatensystemen abhängen. Jede komplexe  $M^{(n)}$  ist durch die komplexen Koordinatensysteme in natürlicher Weise orientiert (vgl. zu 0.1. HOPF<sup>2)</sup>).

0. 2. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten heißen analytisch äquivalent, wenn sie topologisch und analytisch aufeinander abgebildet werden können. Wir sagen auch: Analytisch äquivalente komplexe Mannigfaltigkeiten  $M_1^{(n)}$ ,  $M_2^{(n)}$  bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$  dieselbe komplexe Struktur. Zwei komplexe Mannigfaltigkeiten  $M_1^{(n)}$ ,  $M_2^{(n)}$ , die nicht analytisch äquivalent sind, aber homöomorph sind, bestimmen auf der topologischen Mannigfaltigkeit  $M^{(n)} = M_1^{(n)} = M_2^{(n)}$  verschiedene komplexe Strukturen.

0. 3. H. HOPF hat die Frage gestellt, welche orientierbaren  $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch Einführung komplexer Koordinatensysteme zu einer komplexen Mannigfaltigkeit gemacht werden können und diese Frage z. B. für die Sphären  $S^4$  und  $S^8$  im verneinenden Sinne beantwortet<sup>3)</sup>. Für  $n = 1$  gilt bekanntlich: Alle orientierbaren Flächen können zu komplexen Mannigfaltigkeiten (= RIEMANNschen Flächen) gemacht werden. An diese Fragestellung von H. HOPF schließt sich die folgende Fragestellung an: Zu einer vorgegebenen  $2n$ -dim. orientierbaren Mannigfaltigkeit  $M^{2n}$  sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden, anders formuliert: es sollen alle Äquivalenzklassen von analytisch äquivalenten komplexen Mannigfaltigkeiten angegeben werden, die zu  $M^{2n}$  homöomorph sind. In dieser Arbeit wird ein spezieller Beitrag zu dieser Fragestellung gegeben.

0. 4. Für  $n = 1$  und für die geschlossenen Flächen  $M^2$  vom Geschlecht  $> 0$  wird die in 0. 3. angegebene Fragestellung mit Hilfe der Theorie der „Moduln“ behandelt. Die einzigen einfach zusammenhängenden orientierbaren

<sup>1)</sup> Obere Indices ohne Klammern: reelle Dimensionen, in Klammern: „komplexe“ Dimensionen.

<sup>2)</sup> HOPF, H.: Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays Presented to R. COURANT, S. 167—185, New York 1948.

<sup>3)</sup> Ein allgemeineres Resultat für die Sphären  $S^{2n}$  in A. KIRCHHOFF: C. R. Acad. Sci. Paris 225, 1258 (1947).

Flächen  $M^2$  sind die Sphäre  $S^2$  und die gewöhnliche Ebene  $E^2$ . Für  $S^2$  gibt es genau eine komplexe Struktur: die RIEMANNSCHE Zahlenkugel. Für  $E^2$  gibt es genau zwei komplexe Strukturen: die (offene)  $z$ -Ebene und das Innere des Einheitskreises.

0. 5. Wir spezialisieren die in 0. 3. angegebene Fragestellung jetzt folgendermaßen: zu einer vorgegebenen (orientierbaren) *einfach zusammenhängenden geschlossenen* 4-dim. Mannigfaltigkeit  $M^4$  sollen alle möglichen komplexen Strukturen angegeben werden. Diese Fragestellung ist meines Wissens z. B. unbeantwortet für  $M^4 = P^{(2)}$  (= komplex-projektive Ebene).

0. 6. In dieser Arbeit wird zu der spezialisierten Fragestellung 0. 5. der folgende spezielle Beitrag geliefert. Für jedes natürliche  $n \geq 0$  wird eine geschlossene komplexe Mannigfaltigkeit  $\Sigma_n$  angegeben.  $\Sigma_n$  ist gefasert mit der Faser  $S^2$  und dem Basisraum  $S^2$ , und zwar so, daß die Fasern analytische Flächen in  $\Sigma_n$  sind und daß die Faserabbildung eine analytische Abbildung von  $\Sigma_n$  auf die als Basisraum auftretende RIEMANNSCHE Zahlenkugel  $S^2$  ist. Für  $n \equiv m \pmod{2}$  sind  $\Sigma_n, \Sigma_m$  fasertreu homöomorph.  $\Sigma_0$  ist das cartesische Produkt  $S^2 \times S^2$  von zwei RIEMANNSCHEN Zahlenkugeln.  $\Sigma_1$  ist als topologische Mannigfaltigkeit topologische Summe  $P^{(2)} + P^{(2)}$ , 2. Art, von zwei Exemplaren der komplex-projektiven Ebene  $P^{(2)}$  (vgl. 2. 5.). Für  $n \neq m$  sind  $\Sigma_n, \Sigma_m$  nicht analytisch äquivalent. Es werden damit durch die komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  ( $n$  gerade) unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für  $S^2 \times S^2$  und durch  $\Sigma_n$  ( $n$  ungerade) für  $P^{(2)} + P^{(2)}$  angegeben.  $S^2 \times S^2$  und  $P^{(2)} + P^{(2)}$  sind geschlossen und einfach zusammenhängend. Es wird nicht die Aufgabe gelöst, alle komplexen Strukturen für  $S^2 \times S^2$  (bzw.  $P^{(2)} + P^{(2)}$ ) anzugeben. — Der Beweis, daß  $\Sigma_n, \Sigma_m$  ( $n \neq m, n \equiv m \pmod{2}$ ) nicht analytisch äquivalent sind, wird mit Hilfe der folgenden Tatsache geführt: Zwei analytische Flächen in einer geschlossenen komplexen  $M^{(2)}$ , die sich höchstens in isolierten Punkten schneiden, haben eine nicht negative Schnittzahl. Die durch diese analytischen Flächen repräsentierten (ganzzahligen) Homologieklassen haben daher ebenfalls eine nicht negative Schnittzahl. Mit Hilfe dieser Tatsache gelingt nämlich der Nachweis, daß sich die homöomorphen komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n, \Sigma_m$  ( $n \neq m$ ) in der Repräsentierbarkeit der 2-dimensionalen Homologieklassen durch analytische Flächen unterscheiden.

0. 7. Wir werden weiter zeigen, daß die komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  als algebraische Flächen, und zwar als Regelflächen auftreten und daß  $\Sigma_n, \Sigma_m$  als algebraische Flächen betrachtet birational äquivalent sind.  $\Sigma_n$  ( $n$  beliebig) ist mit der komplex-projektiven Ebene  $P^{(2)}$  birational äquivalent.

Zusammenfassung: In bezug auf *topologische* Äquivalenz (Homöomorphie) gehören die Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  zwei Äquivalenzklassen an. In bezug auf *analytische* Äquivalenz sind sie paarweise verschieden. In bezug auf *birationale* Äquivalenz gehören sie einer einzigen Äquivalenzklasse an.

## 1. Zusammenstellung von Hilfssätzen.

1. 1. Es werden im folgenden nur Homologiegruppen mit ganzen Zahlen als Koeffizienten betrachtet. BETTISCHE Gruppe: Homologiegruppe mit ganzzahligen Koeffizienten bei Vernachlässigung der Torsion. Falls, wie in den von uns zu betrachtenden Fällen, keine Torsion vorhanden ist, fallen ganzzahlige Homologiegruppe und BETTISCHE Gruppe zusammen. Eine Basis der

BETTSchen Gruppe heißt BETTSche Basis. In einer 4-dimensionalen geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeit, deren 2. BETTSche Zahl  $p$  sei, ist in bezug auf eine 2-dim. BETTSche Basis  $(\zeta_1, \dots, \zeta_p)$  die quadratische Matrix  $\mathfrak{S} = (s_{ik}) = (\zeta_i \circ \zeta_k)$  definiert. ( $\alpha \circ \beta$  = Schnitzzahl von  $\alpha$  mit  $\beta$ .)  $\mathfrak{S}$  ist symmetrisch, ganzzahlig, und es ist  $|\mathfrak{S}| = \pm 1$ . Die ganzzahligen symmetrischen Matrizen  $\mathfrak{S}, \tilde{\mathfrak{S}}$  ( $|\mathfrak{S}| = \pm 1, |\tilde{\mathfrak{S}}| = \pm 1$ ) heißen äquivalent, wenn es eine unimodulare Matrix  $\mathfrak{A}$  gibt, so daß  $\tilde{\mathfrak{S}} = \pm \mathfrak{A} \mathfrak{S} \mathfrak{A}'$ . Zwei homöomorphe 4-dim. Mannigfaltigkeiten besitzen Schnittmatrizen derselben Äquivalenzklasse.

1.2.  $M^{(2)}$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit.  $(u, v)$  sei ein lokales Koordinatensystem, das in einer Umgebung  $U$  des Punktes  $P$  zulässig ist. ( $P \in M^{(2)}, P = (0,0)$ ). In  $U$  seien durch  $f(u, v) = 0, g(u, v) = 0$  ( $f, g$  in  $U$  regulär) zwei analytische Flächenstücke  $F, G$  gegeben, die in  $U$  nur den Punkt  $P$  gemeinsam haben, d. h.  $f(u, v) = g(u, v) = 0$  genau dann, wenn  $u = v = 0$ . Die Schnittzahl von  $F$  mit  $G$  in  $P$  ist topologisch definiert. Sie ist kommutativ und stets größer als 0. Andeutung der topologischen Definition der Schnittzahl: (vgl. v. D. WAERDEN<sup>4</sup>) S. 349).

Die Orientierung von  $U, F, G$  ist durch die komplexe Struktur eindeutig bestimmt.  $F, G$  können in  $U$  stetig so verschoben werden, daß die verschobenen Flächenstücke sich in evtl. mehreren Punkten einfach schneiden. Die Anzahl dieser Punkte hängt nur von  $F, G$  ab und ist die Schnittzahl von  $F$  mit  $G$  in  $P$ .

1.3. In einer komplexen Mannigfaltigkeit  $M^{(2)}$  seien zwei geschlossene irreduzible analytische Flächen  $F_1, F_2$  gegeben.  $F_1, F_2$  schneiden sich höchstens in isolierten Punkten. Die Anzahl der Schnittpunkte ist endlich. Die Zyklen  $F_1, F_2$  repräsentieren ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen von  $M^{(2)}$ , deren Schnittzahl gleich der Summe der lokal definierten Schnittzahlen in den isolierten Schnittpunkten von  $F_1, F_2$  ist, also nach 1.2. nicht negativ ist. Es ergibt sich hieraus: Ist die Schnittzahl einer 2-dim. Homologieklassse von  $M^{(2)}$  mit sich selbst negativ, so kann diese Homologieklassse höchstens durch eine irreduzible geschlossene analytische Fläche repräsentiert werden.

1.4. Wir benutzen im folgenden meistens die Terminologie der Funktionentheorie, manchmal und zwar hauptsächlich im letzten Abschnitt aber die der algebraischen Geometrie, die die algebraischen Gebilde ihrer komplexen Dimension gemäß benennt. Eine algebraische Kurve ist eine analytische Fläche im Sinne der Terminologie der Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen, eine Gerade ist eine analytische Ebene. Durch diese Bemerkung werden Mißverständnisse wohl ausgeschlossen.

## 2. Topologische Untersuchung der Mannigfaltigkeiten $\Sigma_n$ .

$\Sigma_n, \Sigma_m$  sind dann und nur dann homöomorph, wenn  $n \equiv m \pmod{2}$ .

2.1.  $P^{(n)}$  bezeichne den projektiven Raum von  $n$  komplexen Dimensionen.  $(x) = (x_0, x_1, x_2)$  seien homogene Koordinaten für  $P^{(2)}$ ,  $(y) = (y_1, y_2)$  seien homogene Koordinaten für  $P^{(1)}$ . ( $P^{(1)}$  ist eine zweidimensionale Sphäre = RIEMANNSche Zahlenkugel  $S^2$ ). Für natürliche Zahlen  $n \geq 0$  werde das durch die Gleichung  $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$  im cartesischen Produkt  $P^{(2)} \times P^{(1)}$  gegebene Nullstellengebilde mit  $\Sigma_n$  bezeichnet. Da  $\Sigma_n$  zusammenhängend ist und die

<sup>4</sup>) VAN DER WAERDEN, B. L.: Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie, Math. Ann. 102, S. 337—362 (1929).

Einbettung von  $\Sigma_n$  in  $P^{(2)} \times P^{(1)}$  frei von (algebraischen) Singularitäten ist, ist  $\Sigma_n$  eine komplexe Mannigfaltigkeit.

2. 2.  $\Sigma_0$  ist das cartesische Produkt  $P^{(1)} \times P^{(1)}$  mit der üblichen komplexen Struktur. ( $\Sigma_0$  ist der „Raum der Funktionentheorie“, s. OSGOOD<sup>5</sup>).  $\Sigma_0$  ist homöomorph zu  $S^2 \times S^2$ .

2. 3. Durch  $\varphi_n(x, y) = x, (x, y) \in \Sigma_n$ , wird eine analytische Abbildung  $\varphi_n$  von  $\Sigma_n$  auf  $P^{(2)}$  bestimmt. Durch  $x_1 = x_2 = 0$  ist in  $\Sigma_n$  eine analytische Fläche  $T_n$  singularitätenfrei eingebettet.  $T_n$  ist ein  $P^{(1)}$ . Der Punkt  $(1, 0, 0)$  von  $P^{(2)}$  werde mit  $Q$  bezeichnet. Es ist  $\varphi_n(T_n) = Q$ . Wenn  $n = 1$ , dann gilt speziell folgendes:  $\varphi_1$  bildet  $\Sigma_1 - T_1$  topologisch und analytisch auf  $P^{(2)} - \{Q\}$  ab. Man kann daher anschaulich sagen:  $\Sigma_1$  entsteht aus  $P^{(2)}$  durch „Herausstechen“ von  $Q$  und „Einsetzen“ von  $T_1$ .

2. 4. Die Inversion  $I$  von  $P^{(2)}$ :  $I(x_0, x_1, x_2) = (|x_1|^2 + |x_2|^2, x_1 \bar{x}_0, x_2 \bar{x}_0)$  ist eine topologische Abbildung vom Grade  $-1$  von  $P^{(2)} - \{Q\} - E$  auf sich. ( $E$ : die „unendlichferne“ Ebene  $x_0 = 0$ .) Auf  $\Sigma_1$  übertragen wird  $I$  zur Abbildung  $\varphi_1^{-1} I \varphi_1$ , die sich zu einer topologischen Selbstabbildung  $I'$  von  $\Sigma_1$  vom Grade  $-1$  erweitern läßt. Es ist  $I' \varphi_1^{-1}(E) = T_1$ . Die durch  $T_1, \varphi_1^{-1}(E)$  repräsentierten ganzzahligen zweidimensionalen Homologieklassen von  $\Sigma_1$  sollen mit  $\tau_1, \varepsilon_1$  bezeichnet werden. Es ist  $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_1 = 1, \varepsilon_1 \circ \tau_1 = 0$ ; da  $I'$  vom Grade  $-1$  ist, gilt  $\tau_1 \circ \tau_1 = -1$ .

2. 5. Aus 2. 3. und 2. 4. erkennt man:  $\Sigma_1$  ist die topologische Summe 2. Art von zwei in natürlicher Weise orientierten Exemplaren von  $P^{(2)}$ <sup>6</sup>). Zur topologischen Summenbildung werde folgendes bemerkt: Für zwei orientierte Mannigfaltigkeiten  $M^n$  und  $\tilde{M}^n$  ist die topologische Summe (1. Art bzw. 2. Art) so definiert: Aus  $M^n$  und  $\tilde{M}^n$  wird je eine kleine Kugel ausgebohrt. Die beiden so entstehenden, durch in bestimmter Weise orientierte  $(n-1)$ -Sphären  $S^{n-1}$  bzw.  $\tilde{S}^{n-1}$  berandeten Mannigfaltigkeiten werden „aufeinandergeklebt“, indem man  $S^{n-1}$  topologisch mit Umkehr der Orientierung (1. Art), bzw. mit Erhaltung der Orientierung (2. Art) auf  $\tilde{S}^{n-1}$  abbildet und entsprechende Punkte identifiziert. Jede der beiden Summenmannigfaltigkeiten ist wieder orientierbar. Ihre topologische Struktur hängt nur von  $M^n$  und  $\tilde{M}^n$  ab. Die Summe 2. Art kann so orientiert werden, daß ihre Orientierung mit der von  $M^n$  übereinstimmt und der von  $\tilde{M}^n$  entgegengesetzt ist.

2. 6. Da  $\Sigma_1$  nach 2. 5. topologische Summe  $P^{(2)} + P^{(2)}$  (2. Art) ist, kann die Homologiestruktur von  $\Sigma_1$  (ganzzahlige Koeffizienten) so bestimmt werden: ( $H$  für Homologiegruppe,  $\dot{+}$  für direkte Summe im Sinne der Gruppentheorie). Es ist  $H^k(\Sigma_1) = 0$  für  $k = 1, 3$  und  $H^2(\Sigma_1) = (\tau_1) \dot{+} (\varepsilon_1)$ , wo  $(\tau_1), (\varepsilon_1)$  die durch  $\tau_1$  bzw.  $\varepsilon_1$  erzeugten unendlichen zyklischen Gruppen sind.

$(\tau_1, \varepsilon_1)$  ist eine ganzzahlige 2-dimensionale Homologiebasis für  $\Sigma_1$  mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (vgl. 2. 4.).

2. 7. Zu  $\Sigma_0$  gehört die Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Matrizen  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sind nicht äquivalent.  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_1$  sind daher nicht homöomorph.

2. 8.  $\pi_n$  sei diejenige Abbildung von  $\Sigma_n$  auf  $P^{(1)}$ , die den Punkt  $(x, y) \in \Sigma_n$  auf den Punkt  $(y) \in P^{(1)}$  abbildet (2. 1.).  $\pi_n$  ist eine Faserabbildung von  $\Sigma_n$  auf  $P^{(1)}$ . Jede Faser ist ein  $P^{(1)}$ , also durch stereographische Projektion homöo-

<sup>5</sup> OSGOOD, W. F.; Lehrbuch der Funktionentheorie II, 1., 2. Aufl., S. 56, (1929).

<sup>6</sup> Vgl. z. B. M. RUEFF: Compositio Math. 6 (1938), insbes. S. 185.

morph zu  $S^2$ . Es gilt:  $\Sigma_n$  ist eine gefaserte 4-dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Faser  $S^2$  und dem Basisraum  $S^2$ . (In Analogie zur Gruppentheorie schreiben wir:  $\Sigma_n/S^2 = S^2$ .)  $\Sigma_n$  ist sogar ein sphere bundle im Sinne von STEENROD<sup>7)</sup>.

Beweis:  $P_i$  ( $i = 1, 2$ ) sei das durch  $y_i \neq 0$  gegebene Gebiet von  $P^{(1)}$ , ( $P_i$  ist mit der gewöhnlichen offenen Ebene  $E^2$  homöomorph).  $P^{(1)}$  sei ein weiteres Exemplar des  $P_*^{(1)}$  mit den homogenen Koordinaten  $(\xi_0, \xi_1)$ . Es sei  $h(r) = (1 + r^n)^{-1}$ . Durch  $w''(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left( \xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right), \xi_1 h\left(\left|\frac{y_1}{y_2}\right|\right) \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^n; y_1, y_2 \right)$  wird eine fasertreue topologische Abbildung  $w''$  von  $P_*^{(1)} \times P_2$  auf  $\pi_n^{-1}(P_2)$  gegeben. Entsprechend wird durch  $w'(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left( \xi_0, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right) \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n, \xi_1 h\left(\left|\frac{y_2}{y_1}\right|\right); y_1, y_2 \right)$  eine fasertreue topologische Abbildung  $w'$  von  $P_*^{(1)} \times P_1$  auf  $\pi_n^{-1}(P_1)$  bestimmt. Für  $(y_1, y_2) \in P_1 \cap P_2$ , d. h.  $y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$ , ist  $w_n = (w'')^{-1} w'$  die durch  $w_n(\xi_0, \xi_1; y_1, y_2) = \left( \xi_0, \xi_1 \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^n \left|\frac{y_1}{y_2}\right|^n; y_1, y_2 \right)$  bestimmte Drehung von  $P_*^{(1)}$ . Die orthogonale Struktur von  $\Sigma_n$  wird durch die orthogonale Struktur von  $P_*^{(1)}$  gegeben, welche durch stereographische Projektion von  $P_*^{(1)}$  auf die RIEMANNsche  $\frac{\xi_1}{\xi_0}$ -Zahlenkugel oder gleichwertig durch das sphärische Linienelement  $\frac{|dz|}{1 + |z|^2} \left( z = \frac{\xi_1}{\xi_0} \right)$  bestimmt wird.

2.9. Aus dem Beweis zu 2.8. erkennt man: Die gefaserte Mannigfaltigkeit  $\Sigma_n$  kann so konstruiert werden:  $S$  sei auf  $P^{(1)}$  gegeben durch  $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = 1$ ,  $E'$  durch  $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| \leq 1$  und  $E''$  durch  $\left|\frac{y_1}{y_2}\right| \leq 1$ .  $S$  als Rand von  $E'$  werde mit  $S'$ ,  $S$  als Rand von  $E''$  werde mit  $S''$  bezeichnet.  $\Sigma_n$  entsteht durch „Verklebung“ aus den cartesischen Produkten  $P_*^{(1)} \times E'$ ,  $P_*^{(1)} \times E''$ , indem man durch  $w_n$  den Rand  $P_*^{(1)} \times S'$  auf  $P_*^{(1)} \times S''$  fasertreu topologisch abbildet und entsprechende Punkte identifiziert.

2.10. Nach STEENROD<sup>7)</sup> gibt es genau zwei Typen von sphere bundles  $A$  mit  $A/S^2 = S^2$ . Es entsteht die Frage, wie sich die gefaserten Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  auf diese beiden Typen verteilen. Die Antwort lautet: Wenn  $n \equiv m \pmod{2}$ , dann lassen sich  $\Sigma_n$  und  $\Sigma_m$  fasertreu topologisch aufeinander abbilden, und zwar so, daß die Fasern von  $\Sigma_n$  orthogonal auf die Fasern von  $\Sigma_m$  abgebildet werden.  $\Sigma_n, \Sigma_m$  repräsentieren dasselbe sphere bundle. Für gerades  $n$  ist also  $\Sigma_n$  fasertreu homöomorph zu  $\Sigma_0 = S^2 \times S^2$ , und es handelt sich um die triviale Faserung des cartesischen Produktes. Für ungerades  $n$  ist  $\Sigma_n$  fasertreu homöomorph zu  $\Sigma_1$ . Da  $\Sigma_1$  nicht zu  $S^2 \times S^2$  homöomorph ist (2.7.), werden die beiden Typen von sphere bundles  $A$  mit  $A/S^2 = S^2$  durch  $\Sigma_0$  und  $\Sigma_1$  repräsentiert.

Beweis: Es sei  $n > m$  und  $n - m$  gerade. Die Behauptung, daß  $\Sigma_n, \Sigma_m$  dasselbe sphere bundle repräsentieren, ergibt sich so:  $\Gamma_2$  sei der Raum der orthogonalen Drehungen von  $P_*^{(1)}$ , der bekanntlich zum 3-dimensionalen reellen projektiven Raum homöomorph ist. Die Abbildung  $w_k$  von  $P_*^{(1)} \times S'$  auf  $P_*^{(1)} \times S''$  bei der Konstruktion von  $\Sigma_k$  (2.9.) bestimmt einen Weg  $W_k$  in  $\Gamma_2$ . Da  $n - m$  gerade, ist der Weg  $W_{n-m}$  in  $\Gamma_2$  nullhomotop. Es gibt daher eine fasertreue, topologische, auf den Fasern orthogonale Abbildung von  $P_*^{(1)} \times E'$  auf sich, die für  $P_*^{(1)} \times S'$  mit  $w_{n-m}$  übereinstimmt.  $\Sigma_n$ , bzw.  $\Sigma_m$  entsteht durch Identifizierung von  $P_*^{(1)} \times S'$  und  $P_*^{(1)} \times S''$  mittels der Abbildung  $w_n$  bzw.  $w_m$ . Nun ist aber  $w_n = w_m w_{n-m}$ .

<sup>7)</sup> STEENROD, N. E.: Classification of sphere bundles, Ann. of Math. 45, S. 294—311 (1944).

**2. 11.** Es werde noch eine spezielle fasertreue topologische Abbildung von  $\Sigma_0 = P^{(1)} \times P^{(1)}$  auf  $\Sigma_n$  ( $n$  gerade) angegeben.  $(u_1, u_2; v_1, v_2)$  seien Koordinaten für  $P^{(1)} \times P^{(1)}$ , die in  $u_1, u_2$  und  $v_1, v_2$  homogen sind. Folgende Abbildung von  $P^{(1)} \times P^{(1)}$  in  $P^{(2)} \times P^{(1)}$  ist eine fasertreue topologische Abbildung von  $P^{(1)} \times P^{(1)}$  auf  $\Sigma_n$  ( $n$  gerade).

$$\begin{aligned} y_1 = v_1 & & x_0 &= (|v_1|^n + |v_2|^n) (v_1^{\frac{n}{2}} u_1 + v_2^{\frac{n}{2}} u_2) \\ & & x_1 &= v_2^n (-\bar{v}_2^{\frac{n}{2}} u_1 + \bar{v}_1^{\frac{n}{2}} u_2) \\ y_2 = v_2 & & x_2 &= v_1^n (-\bar{v}_1^{\frac{n}{2}} u_1 + \bar{v}_2^{\frac{n}{2}} u_2). \end{aligned}$$

Die Fasern  $\frac{v_2}{v_1} = \text{const}$  von  $P^{(1)} \times P^{(1)}$  sind mit einer orthogonalen Struktur versehen. Die Fasern von  $\Sigma_n$  sind nach 2.8. ebenfalls mit einer orthogonalen Struktur versehen. Man kann leicht nachrechnen, daß die angegebene Abbildung auf den einzelnen Fasern orthogonal ist.

### 3. Die Mannigfaltigkeiten $\Sigma_n$ sind als komplexe Mannigfaltigkeiten paarweise verschieden.

**3. 1.**  $\varphi_n^{-1} \varphi_n$  ist eine analytische Abbildung von  $\Sigma_n - T_n$  auf  $\Sigma_1 - T_1$  (vgl. 2.3.), die sich zu einer analytischen Abbildung  $\tilde{\varphi}_n$  von  $\Sigma_n$  auf  $\Sigma_1$  erweitern läßt. Es ist  $\tilde{\varphi}_n(T_n) = T_1$ . Wenn  $\Sigma_n$  durch  $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$  und  $\Sigma_1$  durch  $\tilde{x}_1 \tilde{y}_1 - \tilde{x}_2 \tilde{y}_2 = 0$  gegeben ist (vgl. 2.1.), dann wird  $\tilde{\varphi}_n$  durch  $\tilde{x}_0 = x_0, \tilde{x}_1 = x_1, \tilde{x}_2 = x_2, \tilde{y}_1 = y_1^n, \tilde{y}_2 = y_2^n$  gegeben.  $\Sigma_n$  ist eine  $n$ -blättrige verzweigte Überlagerung von  $\Sigma_1$  mit der zugehörigen Überlagerungsabbildung  $(\tilde{\varphi}_n^*)$ .

**3. 2.** Es werde gesetzt  $E_n = \varphi_n^{-1}(E)$  (vgl. 2.4.  $E$ : die „unendlich ferne“ Ebene  $x_0 = 0$  von  $P^{(2)}$ ). Durch  $E_n, T_n$  werden ganzzahlige 2-dim. Homologieklassen  $\varepsilon_n, \tau_n$  von  $\Sigma_n$  repräsentiert,  $\nu_n$  sei die Homologiekategorie der Fasern von  $\Sigma_n$ . Man beachte, daß  $E_n, T_n$  und die Fasern als analytische Flächen von  $\Sigma_n$  in natürlicher Weise orientiert sind.  $T_n, E_n$  sind Schnittflächen der Faserung von  $\Sigma_n$ . — Der zu  $\tilde{\varphi}_n$  gehörige Hopfsche Umkehrungshomomorphismus<sup>9)</sup> des Homologieringes von  $\Sigma_1$  in den von  $\Sigma_n$  werde mit  $\varphi_n^*$  bezeichnet.

Es ist  $\tilde{\varphi}_n^{-1}(T_1) = T_n, \tilde{\varphi}_n^{-1}(E_1) = E_n$  und  $\varphi_n^*(\tau_1) = \tau_n, \varphi_n^*(\varepsilon_1) = \varepsilon_n, \varphi_n^*(\nu_1) = n \nu_n$ . Es folgt  $\tau_n \circ \tau_n = \varphi_n^*(\tau_1) \circ \varphi_n^*(\tau_1) = \varphi_n(\tau_1 \circ \tau_1) = \varphi_n^*(-\text{Punkt}) = -n$  und ebenso  $\varepsilon_n \circ \varepsilon_n = n$ . Die Schnittzahl 1 ist dabei als die durch einen Punkt repräsentierte 0-dimensionale Homologiekategorie aufzufassen. Es ist  $\tau_n \circ \nu_n = \varepsilon_n \circ \nu_n = 1$ . Zu  $(\tau_n, \nu_n)$  gehört die Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ihre Determinante ist  $-1$ . Daher bilden  $(\tau_n, \nu_n)$  eine (ganzzahlige) 2-dim. Homologiebasis. Aus  $\varepsilon_n \circ \tau_n = 0, \varepsilon_n \circ \nu_n = 1$  berechnet man:  $\varepsilon_n = \tau_n + n \nu_n$ .

**3. 3.** Wir können zusammenfassend sagen:  $\Sigma_n$  besitzt eine 2-dim. Homologiebasis  $(\tau_n, \nu_n)$  mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Die Homologiekategorien  $\tau_n, \nu_n$  und  $\varepsilon_n = \tau_n + n \nu_n$  werden durch irreduzible analytische Flächen repräsentiert. Wir unterscheiden die beiden Fälle:

<sup>9)</sup> Für ungerades  $n$  gibt  $\tilde{\varphi}_n$  eine stetige Abbildung von  $P^{(2)} + P^{(2)}$  auf sich vom Grade  $n$  an, eine stetige Selbstabbildung von einem Grade  $k \equiv 2 \pmod{4}$  gibt es nicht. Vgl. <sup>8)</sup>, S. 185.

<sup>8)</sup> HOPF, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, J. ang. Math. 163, 71—88 (1930). Vgl. auch die bei RUFFE<sup>6)</sup> angegebene Literatur.

1.  $n$  gerade

$(\nu_n, \tau_n + \frac{n}{2} \nu_n)$  ist ebenfalls eine 2-dim. Homologiebasis. Die zugehörige Schnittmatrix ist  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  (vgl. 2.7., 2.10.).

2.  $n$  ungerade

$(\tau_n + \frac{n+1}{2} \nu_n, \tau_n + \frac{n-1}{2} \nu_n)$  ist eine Basis mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  (vgl. 2.6., 2.10.).

3.4. Aus den in 3.3. zusammengestellten Tatsachen läßt sich der folgende Satz ableiten:

Die komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n, \Sigma_m$  ( $n \neq m$ ) lassen sich nicht topologisch und analytisch aufeinander abbilden, d. h.  $\Sigma_n, \Sigma_m$  sind als komplexe Mannigfaltigkeiten verschieden.

Beweis: Da die Schnittmatrizen unter 3.3. Fall 1 und 2 nicht äquivalent sind, genügt es, die folgende Kontraposition zu beweisen: Wenn  $\Sigma_n, \Sigma_m$  topologisch und analytisch aufeinander abbildbar sind, wobei  $n \equiv m \pmod{2}$  und  $m \neq 0$  sein soll, dann ist  $n = m$ . Wir kommen nun zum Beweis dieser Kontraposition:

$\Sigma_n, \Sigma_m$  lassen sich als zwei Exemplare derselben komplexen Mannigfaltigkeit  $M^{(2)}$  auffassen. In  $M^{(2)}$  führen wir nach 3.3. eine feste 2-dimensionale Homologiebasis  $(\xi, \eta)$  mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  im Fall 1, bzw.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  im Fall 2, ein.

In  $M^{(2)}$  gibt es 2-dim. Homologieklassen  $\tau_n, \nu_n, \varepsilon_n, \tau_m, \nu_m, \varepsilon_m$ , die durch analytische Flächen repräsentiert werden. Diese analytischen Flächen sind irreduzibel. Zwei von ihnen sind deshalb identisch, oder schneiden sich in isolierten Punkten. Es folgt hieraus:

$$(*) \quad \tau_n \circ \varepsilon_m \geq 0, \tau_m \circ \varepsilon_n \geq 0, \nu_n \circ \tau_m \geq 0, \nu_n \circ \varepsilon_m \geq 0.$$

(Beweis: Da die jeweils zum Schnitt gebrachten Homologieklassen sicher verschieden sind, weil ihre Selbstschnittzahlen verschieden sind, können die repräsentierenden analytischen Flächen nicht identisch sein. Vgl. 0.6)

Fall 1.  $n, m$  gerade.

$(\xi, \eta)$  ist eine Basis mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$\tau_n, \nu_n$  lassen sich darstellen in der Form:

$$\tau_n = a \xi + b \eta$$

$\nu_n = c \xi + d \eta$  ( $a, b, c, d$  ganze Zahlen), es muß gelten:

$$\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ab & ad + bc \\ ad + bc & 2cd \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt: entweder  $c = 0$  oder  $d = 0$ .

Ist  $c = 0$ , so ist  $a = e, d = e, b = -e \frac{n}{2}$  ( $e = \pm 1$ )

Ist  $d = 0$ , so ist  $b = e', c = e', a = -e' \frac{n}{2}$  ( $e' = \pm 1$ )

Es ist also: (man beachte die Gleichung  $\varepsilon_n = \tau_n + n \nu_n$ ),

$$(1) \quad \begin{array}{l} \nu_n = e \eta \\ \tau_n = e \left( \xi - \frac{n}{2} \eta \right) \\ \varepsilon_n = e \left( \xi + \frac{n}{2} \eta \right) \end{array} \quad \text{oder} \quad (2) \quad \begin{array}{l} \nu_n = e' \xi \\ \tau_n = e' \left( -\frac{n}{2} \xi + \eta \right) \\ \varepsilon_n = e' \left( \frac{n}{2} \xi + \eta \right). \end{array}$$

Entsprechend gilt:  $(e'' = \pm 1, e''' = \pm 1)$

$$(3) \quad \begin{aligned} v_m &= e'' \eta & v_m &= e''' \xi \\ \tau_m &= e'' \left( \xi - \frac{m}{2} \eta \right) & \text{oder (4)} \quad \tau_m &= e''' \left( -\frac{m}{2} \xi + \eta \right) \\ \varepsilon_m &= e'' \left( \xi + \frac{m}{2} \eta \right) & \varepsilon_m &= e''' \left( \frac{m}{2} \xi + \eta \right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)“, so ist  $v_n \circ \tau_m = -e' e'' \frac{m}{2}$  und  $v_n \circ \varepsilon_m = e' e'' \frac{m}{2}$ , also  $v_n \circ \tau_m$  oder  $v_n \circ \varepsilon_m$  negativ. Das steht im Widerspruch zu (\*). „(2) und (3)“ trifft daher nicht zu. Ebenso wird „(1) und (4)“ zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)“ oder „(2) und (4)“. Nach evtl. Umbenennung von  $\xi$  in  $\eta$  und  $\eta$  in  $\xi$  können wir annehmen, daß „(1) und (3)“ gilt. Es ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \tau_n \circ \varepsilon_m &= e e'' \left( \frac{m}{2} - \frac{n}{2} \right) & \tau_n \circ \varepsilon_m &= -\varepsilon_n \circ \tau_m. \\ \varepsilon_n \circ \tau_m &= e e'' \left( \frac{n}{2} - \frac{m}{2} \right) \end{aligned}$$

Aus (\*) folgt weiter  $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$ , d. h.  $n = m$ .

Fall 2.  $n, m$  ungerade. Der Beweis verläuft analog:

$(\xi, \eta)$  ist eine Basis mit der Schnittmatrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

$\tau_n, v_n$  lassen sich darstellen in der Form:

$$\tau_n = a \xi + b \eta$$

$v_n = c \xi + d \eta$  ( $a, b, c, d$  ganze Zahlen), und es gilt:

$$\begin{pmatrix} -n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & ac - bd \\ ac - bd & c^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt: Entweder  $c = d$ , oder  $c = -d$ .

Ist  $c = d$ , so ist  $c = d = e, a - b = e, a + b = -en$ ,

$$a = -e \frac{n-1}{2}, b = -e \frac{n+1}{2} \quad (e = \pm 1).$$

Ist  $c = -d$ , so ist  $c = -e', d = e', a = e' \frac{n-1}{2}, b = -e' \frac{n+1}{2}$  ( $e' = \pm 1$ ).

Es ist also: (man beachte  $\varepsilon_n = \tau_n + n v_n$ )

$$(1) \quad \begin{aligned} v_n &= e (\xi + \eta) & v_n &= e' (-\xi + \eta) \\ \tau_n &= -e \left( \frac{n-1}{2} \xi + \frac{n+1}{2} \eta \right) & \text{oder (2)} \quad \tau_n &= e' \left( \frac{n-1}{2} \xi - \frac{n+1}{2} \eta \right) \\ \varepsilon_n &= e \left( \frac{n+1}{2} \xi + \frac{n-1}{2} \eta \right) & \varepsilon_n &= e' \left( -\frac{n+1}{2} \xi + \frac{n-1}{2} \eta \right). \end{aligned}$$

Entsprechend gilt:  $(e'' = \pm 1, e''' = \pm 1)$

$$(3) \quad \begin{aligned} v_m &= e'' (\xi + \eta) & v_m &= e''' (-\xi + \eta) \\ \tau_m &= -e'' \left( \frac{m-1}{2} \xi + \frac{m+1}{2} \eta \right) & \text{oder (4)} \quad \tau_m &= e''' \left( \frac{m-1}{2} \xi - \frac{m+1}{2} \eta \right) \\ \varepsilon_m &= e'' \left( \frac{m+1}{2} \xi + \frac{m-1}{2} \eta \right) & \varepsilon_m &= e''' \left( -\frac{m+1}{2} \xi + \frac{m-1}{2} \eta \right). \end{aligned}$$

Wenn „(2) und (3)“, so ist  $v_n \circ \tau_m = e' e'' m$  und  $v_n \circ \varepsilon_m = -e' e'' m$ , also  $v_n \circ \tau_m$  oder  $v_n \circ \varepsilon_m$  negativ. Das steht im Widerspruch zu (\*). Ebenso wird „(1) und (4)“ zum Widerspruch geführt. Es gilt daher: „(1) und (3)“ oder „(2) und (4)“.



Nach einer evtl. erlaubten Umbenennung von  $\xi$  in  $-\xi$  und  $-\xi$  in  $\xi$  können wir annehmen, daß „(1) und (3)“ gilt, es folgt dann:

$$\tau_n \circ \varepsilon_m = -\varepsilon_n \circ \tau_m = e e'' \left( \frac{m}{2} - \frac{n}{2} \right).$$

Aus (\*) folgt  $\tau_n \circ \varepsilon_m = \varepsilon_n \circ \tau_m = 0$ , d. h.  $n = m$ .

**3.5.** Wir wollen unser Resultat nochmals zusammenfassen: Die komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  ( $n$  gerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (einfach zusammenhängende, geschlossene) topologische Mannigfaltigkeit  $S^2 \times S^2$  dar.

Die komplexen Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$  ( $n$  ungerade) stellen unendlich viele paarweise verschiedene komplexe Strukturen für die (ebenfalls einfach zusammenhängende und geschlossene) topologische Summe 2. Art zweier Exemplare der komplex-projektiven Ebene  $P^{(2)}$  dar.

Die 2. BETTischen Zahlen dieser topologischen Mannigfaltigkeiten  $S^2 \times S^2$  und  $P^{(2)} + P^{(2)}$  sind beide gleich 2. Es bleibt die Frage offen, ob es einfach zusammenhängende, geschlossene, 4-dim. Mannigfaltigkeiten mit der 2. BETTischen Zahl 1 gibt, die verschiedene komplexe Strukturen zulassen. Meines Wissens ist nicht bekannt, ob  $P^{(2)}$  verschiedene komplexe Strukturen zuläßt.

#### 4. Die birationale Äquivalenz der Mannigfaltigkeiten $\Sigma_n$ mit der komplex-projektiven Ebene $P^{(2)}$ <sup>10)</sup>.

**4.0.**  $M^{(2)}$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $Q \in M^{(2)}$ . Die von  $Q$  verschiedenen Punkte von  $M^{(2)}$  und die analytischen Flächenelemente (= komplexe Linienelemente) von  $M^{(2)}$  in  $Q$  lassen sich in natürlicher Weise als Punkte einer neuen komplexen Mannigfaltigkeit  $M_Q^{(2)}$  auffassen. Die analytischen Flächenelemente von  $M^{(2)}$  in  $Q$  lassen sich als Punkte einer komplex-projektiven Geraden (= RIEMANNSche Zahlenkugel) auffassen, die Trägersphäre des Punktes  $Q$  genannt und mit  $T_Q$  bezeichnet werde.  $M_Q^{(2)}$  entsteht, anschaulich gesagt, aus  $M^{(2)}$  durch „Herausstechen“ von  $Q$  und darauf folgendes „analytisches Einsetzen“ von  $T_Q$ . Die Mannigfaltigkeit  $\Sigma_1$  (vgl. 2. 3.) entsteht durch Einsetzen einer Trägersphäre aus  $P^{(2)}$  <sup>11)</sup>.

**4.1.** Das cartesische Produkt  $P^{(2)} \times P^{(1)}$  (vgl. 2. 1.) kann singularitätenfrei als algebraische Mannigfaltigkeit in den  $P^{(5)}$  eingebettet werden. Durch  $z_{ik} = x_i y_k$  ( $i = 0, 1, 2; k = 1, 2; z_{ik}$  homogene Koordinaten des  $P^{(5)}$ ) wird eine eindeutige Parameterdarstellung dieser algebraischen Mannigfaltigkeit gegeben.  $\Sigma_n$  ist damit singularitätenfrei als algebraische Fläche im  $P^{(5)}$  eingebettet. Diese algebraische Fläche werde in den  $P^{(3)}$  projiziert.  $(z_1, z_2, z_3, z_4)$  seien homogene Koordinaten für  $P^{(3)}$ . Wir setzen:  $z_1 = z_{21} = x_2 y_1, z_2 = z_{12} = x_1 y_2, z_3 = z_{02} = x_0 y_2, z_4 = z_{01} = x_0 y_1$ . Diese Gleichungen stellen eine eindeutige Abbildung  $\psi_n$  von  $\Sigma_n$  (gegeben durch  $x_1 y_1^n - x_2 y_2^n = 0$ ) auf die algebraische Fläche  $\Sigma_n^*$  (gegeben durch  $z_1 z_3^{n+1} - z_2 z_4^{n+1} = 0$ ) dar. Die Gerade  $z_3 = 0, z_4 = 0$  von  $\Sigma_n^*$  werde mit  $E_n^*$  bezeichnet. Durch  $x_0 = 0$  wird in  $\Sigma_n$  die Gerade  $E_n$  bestimmt (vgl. 3. 2.). Man überzeugt sich leicht, daß  $\psi_n$  eine ein-

<sup>10)</sup> Man beachte 1. 4.

<sup>11)</sup> Dieser Einsetzungsprozeß ist aus der algebraischen Geometrie bekannt. Die Nützlichkeit dieses Prozesses für die Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten ist von Herrn H. HOPF in Vorträgen und Gesprächen wiederholt betont worden. Man vgl. auch BRENNKE, H. und STEIN, K., Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und RIEMANNScher Gebiete, Math. Ann. 124, 1—16 (1951), Nr. 3.

eindeutige Abbildung von  $\Sigma_n - E_n$  auf  $\Sigma_n^* - E_n^*$  ist und daß  $\psi_n(E_n) = E_n^*$ . Die Abbildung  $\psi_n$  wird für  $x_0 = 0$ , d. h. für  $E_n$ , gegeben durch:  $z_1 = y_1^{n+1}$ ,  $z_2 = y_2^{n+1}$ . Es folgt:  $\Sigma_n$  entsteht aus der algebraischen Fläche  $\Sigma_n^*$ , indem man jeden Punkt der  $(n+1)$ -fachen Geraden  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = 0$ , abgesehen von den „Verzweigungspunkten“  $(1, 0, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0, 0)$ , in  $n+1$  verschiedene Punkte „auflöst“.  $\Sigma_n$  (als algebraische Fläche in  $P^{(5)}$  aufgefaßt) und die algebraische Fläche  $\Sigma_n^*$  im  $P^{(3)}$  sind birational äquivalent.  $\Sigma_n^*$  ist eine „wind-schiefe Fläche“  $(n+2)$ -ter Ordnung mit einer  $(n+1)$ -fachen Geraden (vgl. zum Folgenden NOETHER<sup>12)</sup>, insbesondere S. 195).

4.2. Die Fasern von  $\Sigma_n$  werden durch  $\psi_n$  auf die Geraden abgebildet, die das Ebenenbüschel  $z_3 y_1 - z_4 y_2 = 0$  aus  $\Sigma_n^*$  herauschneidet.  $Q$  sei ein von den Verzweigungspunkten verschiedener Punkt der  $(n+1)$ -fachen Geraden; wir projizieren  $\Sigma_n^*$  von  $Q$  auf eine nicht durch  $Q$  gehende Ebene  $\tilde{P}^{(2)}$ . Diese Projektion  $\varrho_n$  stellt eine birationale Beziehung zwischen  $\Sigma_n^*$  und  $\tilde{P}^{(2)}$  her. Die algebraischen Flächen  $\Sigma_n$  im  $P^{(5)}$  sind also alle mit der Ebene  $\tilde{P}^{(2)}$  birational äquivalent.

4.3. Die birationale Beziehung zwischen  $\Sigma_n$  und  $\tilde{P}^{(2)}$  soll etwas näher untersucht werden.  $Q_1, \dots, Q_{n+1}$  seien die  $n+1$  Punkte von  $\Sigma_n$ , in die der Punkt  $Q$  von  $\Sigma_n^*$  „aufgelöst“ wird, d. h.  $\psi_n(Q_i) = Q$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ).  $\varrho_n \psi_n$  ist eine eindeutige Abbildung von  $\Sigma_n - \{Q_1, \dots, Q_{n+1}\}$  in  $\tilde{P}^{(2)}$ . Die durch  $Q_i$  gehende Faser von  $\Sigma_n$  wird auf einen einzigen Punkt  $A_i$  von  $\tilde{P}^{(2)}$  abgebildet,  $E_n$  entspricht der vielfachen Geraden von  $\Sigma_n$  und geht in einen einzigen Punkt  $B$  von  $\tilde{P}^{(2)}$  über. Die Punkte  $A_i$  liegen auf einer Geraden von  $\tilde{P}^{(2)}$ , auf der  $B$  nicht liegt. In  $Q_i$  ( $i = 1, \dots, n+1$ ) werde die Trägersphäre  $T_{Q_i}$  (vgl. 4.0.) eingesetzt. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit  $\Sigma_{n,Q}$  bezeichnet.  $\varrho_n \psi_n$  bildet  $\Sigma_{n,Q}$  eindeutig auf  $\tilde{P}^{(2)}$  ab, und zwar  $T_{Q_i}$  auf die Verbindungsgerade  $A_i B$ . In den Punkten  $A_i$  und  $B$  von  $\tilde{P}^{(2)}$  mögen die Trägersphären  $T_{A_i}, T_B$  eingesetzt werden. Die entstehende Mannigfaltigkeit werde mit  $\tilde{P}_{A,B}^{(2)}$  bezeichnet.  $\varrho_n \psi_n$  läßt sich als eineindeutige analytische Abbildung von  $\Sigma_{n,Q}$  auf  $\tilde{P}_{A,B}^{(2)}$  auffassen.

4.4. Die in 4.3. angegebenen Beziehungen lassen sich so formulieren:  $\Sigma_n$  kann folgendermaßen erhalten werden. In der komplex-projektiven Ebene  $P^{(2)}$  werden in  $n+1$  Punkten  $A_i$ , die auf einer Geraden liegen, und in einen Punkt  $B$ , der nicht auf dieser Geraden liegt, die Trägersphären eingesetzt. Man erhält eine Mannigfaltigkeit  $P_{A,B}^{(2)}$ . Die Verbindungsgeraden  $A_i B$  verhalten sich in  $P_{A,B}^{(2)}$  wie eingesetzte Trägersphären. Nimmt man sie aus  $P_{A,B}^{(2)}$  heraus und schließt durch jeweils einen einzigen Punkt wieder ab, dann erhält man  $\Sigma_n$ .

<sup>12)</sup> NOETHER, M.: Über Flächen, welche Scharen rationaler Kurven besitzen. Math. Ann. 3, S. 161—227 (1871).