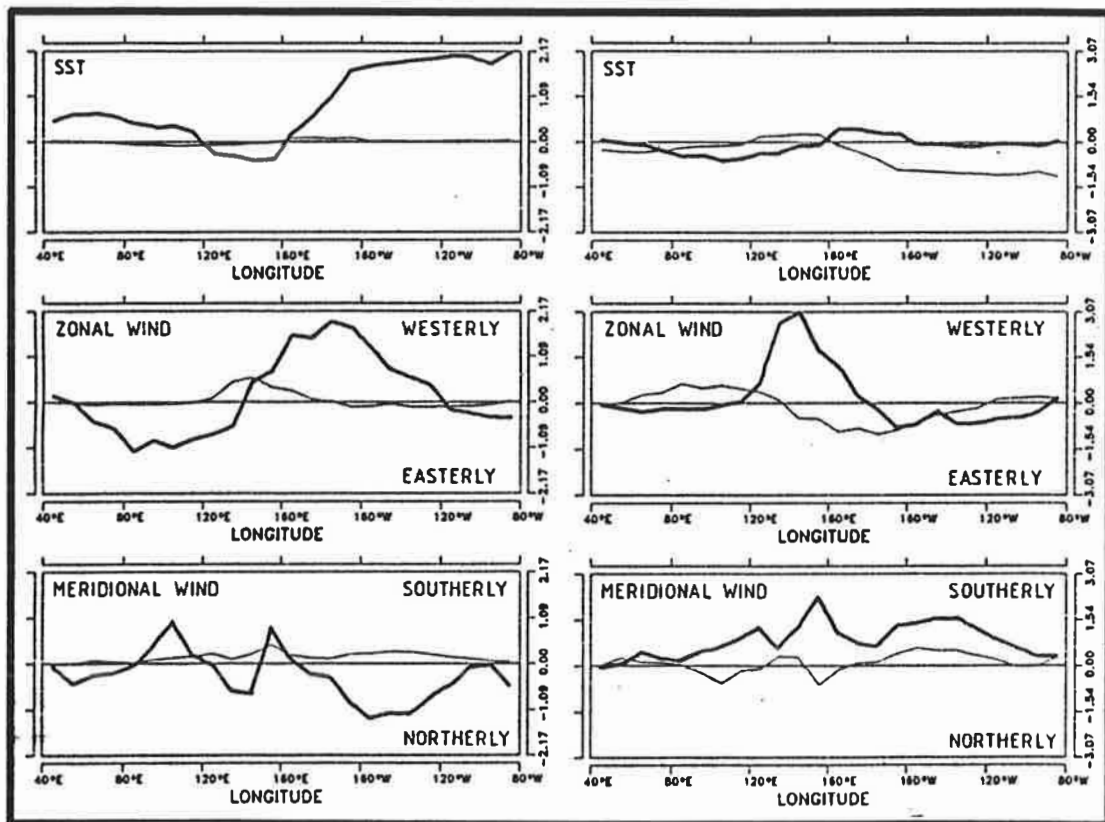




Max-Planck-Institut für Meteorologie

EXAMENSARBEIT Nr. 7



PRINCIPAL INTERACTION/OSCILLATION PATTERNS THEORIE UND ANALYSEN ZUM EL NIÑO/SOUTHERN OSCILLATION-PHÄNOMEN

von
UDO WEESE

HAMBURG, DEZEMBER 1990

DOKTORARBEIT

AUTOR:

UDO WEESE

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR METEOROLOGIE

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR METEOROLOGIE
BUNDESSTRASSE 55
D-2000 HAMBURG 13
F.R. GERMANY

Tel.: (040) 4 11 73-0
Telex: 211092 mpime d
Telemail: MPI.METEOROLOGY
Telefax: (040) 4 11 73-298

EXb 7

Principal Interaction/Oscillation Patterns

Theorie und Analysen
zum El Niño/Southern Oscillation-Phänomen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften im Fachbereich
Geowissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Udo Weese
aus Oerlinghausen

Hamburg
1990

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Geowissenschaften
der Universität Hamburg

aufgrund der Gutachten von Prof. Dr. J. Honerkamp
.....

und Prof. Dr. H. Graßl
.....

Hamburg, den 19. Dezember 1990
.....

Prof. Dr. M. Dunst
.....
(Sprecher des Fachbereichs Geowissenschaften)

Während der Zeit der Entstehung dieser Arbeit haben mich viele Menschen begleitet. Für all das, was ich durch sie erfahren habe und lernen durfte, bin ich dankbar. Diejenigen, die unmittelbaren Anteil am Entstehen dieser Arbeit haben, möchte ich namentlich erwähnen:

Ich danke Herrn Prof. Dr. K. Hasselmann für die Überlassung des Themas und die Möglichkeit am Max-Planck-Institut für Meteorologie arbeiten zu können. Die technischen Voraussetzungen und die Reisemöglichkeiten, die mir zur Verfügung standen, sind keineswegs selbstverständlich.

Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. J. Honerkamp, der mich auf meinem beruflichen Weg über viele Jahre begleitet hat. Die Zusammenarbeit mit ihm war stets ermutigend und anregend. Ich danke ihm auch für die Übernahme des ersten Gutachtens dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. H. Graßl danke ich dafür, daß er so kurzfristig das zweite Gutachten übernommen hat.

In meinen Dank schließe ich ein:

Herrn Prof. Dr. T. Barnett, der mir freundlicherweise die analysierten Daten zur Verfügung gestellt hat,

Herrn Dr. M. Latif, für die anregenden Diskussionen bei der Analyse der Daten, Herrn Dr. J. Oberhuber, dessen Programme und Beratung ich zur Erstellung der Abbildungen in Anspruch nehmen konnte,

Herrn Dipl.-Phys. C. Ganter, der mir das Programm zum Kalman-Verfahren überlassen hat,

Herrn Dipl.-Phys. J. Timmer, von dem ich die Programme zum Stationaritäts- und Linearitätstest übernehmen durfte,

Frau M. Grunert, die einige der Abbildungen erstellt hat und mir bei der Einarbeitung der Abbildungen in den Text behilflich war,

Herrn M. Luedicke, der die Illustration der Walker-Zirkulation anfertigte, meinen Bruder, Dipl.-Phys. J. Weese, und die Herren Dr. A. Sterl und Dr. J.-O. Wolff, deren sorgfältige Durchsicht des Manuskripts mir eine Hilfe war.

In meinen Dank schließe ich auch alle anderen Kollegen mit ein. Besonders herzlich ist meine Dankbarkeit gegenüber Dr. Ch. Heinze, der mit mir das Arbeitszimmer teilt. Für mich war es eine Hilfe, daß ich bei meiner Arbeit jemanden hatte, mit dem ich gute und schlechte Tage teilen konnte.

INHALT

1.	Einleitung - Principal Interaction/Oscillation Patterns	1
2.	Parameterschätzung für Zustandsraummodelle	4
2.1	Das Zustandsraummodell	5
2.2	Die Definition der Principal Interaction/Oscillation Patterns (PIPs/POPs)	7
2.3	Die Freiheit in der Darstellung des Zustandsraummodells	7
2.4	Die Schätzung der Zustandsvariablen	9
2.5	Die Schätzung der Parameter des Zustandsraummodells	10
2.6	Das ML- und das LSQ-Verfahren: zwei iterative Schätzverfahren ..	11
	a) <i>Das ML-Verfahren: die Maximum-Likelihood-Schätzer</i>	11
	b) <i>Das LSQ-Verfahren: die Least-Squares-Schätzer</i>	13
2.7	Das EOFML-Verfahren: die empirischen Orthogonalfunktionen (EOFs) als Muster	14
2.8	Die verallgemeinerten empirischen Funktionen (GEFs)	16
2.9	Der multivariate Durbin-Levinson-Algorithmus und das EOFMDL-Verfahren	17
2.10	Die Hierarchie der Schätzverfahren für Zustandsraummodelle	19
2.11	Das lineare Zustandsraummodell als ein System von Oszillatoren und Relaxatoren	21
2.12	Zur Äquivalenz von AR(p)- und AR(1)-Prozessen	24
3.	Statistische Tests	25
3.1	Ein Test auf Stationarität	25
	a) <i>Der Stationaritätstest nach Priestley und Subba Rao</i>	25
	b) <i>Die Analyse simulierter stationärer Prozesse</i>	28
	c) <i>Die Voraussetzungen des Tests</i>	32
	d) <i>Die Analyse simulierter nichtstationärer Prozesse</i>	34
3.2	Ein Test auf Linearität	38
	a) <i>Der Linearitätstest nach Subba Rao und Gabr</i>	38
	b) <i>Die Analyse simulierter linearer und nichtlinearer Prozesse</i>	41
3.3	Monte-Carlo-Simulationen	45
3.4	Vertrauensintervalle	47
3.5	Diagnostische Tests der geschätzten Rauschterme	48
	a) <i>Die erklärte Varianz</i>	48
	b) <i>Der multivariate Portmanteau-Test auf weißes Rauschen</i>	48

3.6	Die Vorhersagegüte des angepaßten Modells	50
	a) <i>Die Korrelationsgüte</i>	50
	b) <i>Die relative Abweichung</i>	51
4.	Analysen simulierter Daten	52
4.1	Ein Vergleich der EOFMDL-, EOFML-, LSQ- und ML-Verfahren an einem Beispiel ohne Beobachtungsrauschen	52
	a) <i>Die simulierten Daten</i>	52
	b) <i>Das EOFMDL-Verfahren</i>	53
	c) <i>Das EOFMDL- und das EOFML-Verfahren</i>	54
	d) <i>Das EOFML-, das LSQ- und das ML-Verfahren</i>	56
4.2	Ein Vergleich des LSQ- und des ML-Verfahrens und deren Abhängigkeit von den Anfangswerten an einem Beispiel mit Beobachtungsrauschen	57
	a) <i>Die simulierten Daten</i>	57
	b) <i>Das LSQ- und das ML-Verfahren</i>	58
	c) <i>Die Abhängigkeit des LSQ- und des ML-Verfahrens von den Anfangswerten</i>	60
	d) <i>Zusammenfassung</i>	64
4.3	Ein Vergleich von LSQ- und ML-Verfahren mit dem auf dem Kalman-Glättungsfilter aufbauenden Kalman-Verfahren und deren Abhängigkeit von dem Beobachtungsrauschen	64
	a) <i>Die simulierten Daten</i>	65
	b) <i>Das LSQ- und das ML-Verfahren</i>	66
	c) <i>Das Kalman-Verfahren</i>	69
	d) <i>Ein zweiter Satz simulierter Daten</i>	70
	e) <i>Zusammenfassung</i>	71
5.	Analysen zum El Niño/Southern Oscillation-Phänomen	74
5.1	Das El Niño/Southern Oscillation-Phänomen	76
5.2	Der SST-Index	79
	a) <i>Die Daten</i>	79
	b) <i>Klassifizierung warmer und kalter ENSO-Ereignisse</i>	79
	c) <i>Der Test auf Stationarität</i>	81
	d) <i>Der Test auf Linearität</i>	83
	e) <i>Der Verlauf warmer und kalter ENSO-Ereignisse</i>	84
	f) <i>Die Persistenz</i>	84

g)	Die Zeitskalen des ENSO-Phänomens	87
h)	Die Stabilität des Systems Ozean-Atmosphäre	88
i)	Die Vorhersagegüte des Modells mit monatlich variiender Dämpfungsrate	89
j)	Zusammenfassung	91
5.3	Äquatoriale monatliche Anomalien der Meeresoberflächentemperatur und der zonalen und meridionalen Komponente der bodennahen Windgeschwindigkeit über dem Indischen Ozean und dem Pazifik ...	93
a)	Die Daten	93
b)	Die EOF-Analyse	93
c)	Die POP-Analyse nach von Storch et al. (1988)	97
d)	Das Zustandsraummodell eines Oszillators	98
e)	Die Vorhersagegüte des Zustandsraummodells eines Oszillators	102
f)	Zusammenfassung: ENSO als System eines Oszillators?	102
g)	Das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren	103
h)	Das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren	104
i)	Die Vorhersagegüte des Zustandsraummodells zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren	110
j)	Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren	111
k)	Zusammenfassung	112
5.4	Globale monatliche Anomalien des Luftdruckes auf Meereshöhe zwischen 30°N und 30°S	115
a)	Die Daten	115
b)	Die EOF-Analyse	115
c)	Das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren	118
d)	Die Stabilität der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren	119
e)	Das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren	122
f)	Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren	126
g)	Zusammenfassung	127

5.5	Zusammenfassung der Ergebnisse der Kapitel 5.3 und 5.4	130
6.	Schlußbemerkungen	132
A.	Anhang	135
A.1	Gradienten der Schätzfunktionen $f(\mathbf{Y})$ und $f'(\mathbf{Y})$	135
A.2	Herleitung des multivariaten Durbin-Levinson-Algorithmus	136
A.3	Transformation einer quadratischen Matrix auf Blockdiagonal- gestalt	138
A.4	Eindeutige Darstellung von Oszillatoren und Relaxatoren	139
A.5	Beschreibung des verwendeten Filters	140
A.6	Ein univariater AR(2)-Prozeß mit konstanter und zeitabhängiger Dämpfungsrate	141
	Literaturverzeichnis	143

1. EINLEITUNG - PRINCIPAL INTERACTION/OSCILLATION PATTERNS

Das Ziel der Forschung im Bereich der Ozeanographie und der Meteorologie ist es, Einblick in das Verhalten der komplexen Systeme Ozean und Atmosphäre und deren Wechselwirkung zu erhalten. Dabei sind heute zwei Zielrichtungen von Bedeutung: Zum einen möchte man die natürlichen Klimaschwankungen verstehen, zum anderen interessieren die vom Menschen verursachten Einflüsse auf das Klima. In dieser Arbeit wird das Klimasignal des El Niño/Southern Oscillation-Phänomens untersucht.

Um die Dynamik des Systems Ozean-Atmosphäre zu modellieren, sind zwei grundsätzlich verschiedene Zugänge möglich:

- 1.) physikalische Modelle: Ausgehend von physikalischen Gleichungen wie z.B. der Massen-, der Energie- und der Impulserhaltung sowie des Wärme-, des Salz- oder des Feuchtetransportes werden Modelle formuliert, die die zeitliche Entwicklung von Ozean und/oder Atmosphäre simulieren.
- 2.) diagnostische Modelle: An die Beobachtungen des Systems Ozean-Atmosphäre werden Modelle mit wenig Freiheitsgraden angepaßt, die die vorherrschenden dynamischen Eigenschaften von Ozean und/oder Atmosphäre erfassen.

Physikalische Modelle sind recht umfangreich und komplex, weil eine Vielzahl von Prozessen berücksichtigt wird. Mit diesen Modellen können Hypothesen zum dynamischen Verhalten von Ozean und Atmosphäre durch die Simulation verschiedener Szenarien überprüft werden.

Diagnostische Modelle mit wenig Freiheitsgraden zeigen ein vergleichsweise einfaches dynamisches Verhalten. Dabei ist es wichtig, daß die offensichtlichen Eigenschaften einer untersuchten Erscheinung durch einen entsprechenden Modellansatz berücksichtigt werden. So wird z.B. das zeitliche Verhalten des Systems Ozean-Atmosphäre oft durch die Wechselwirkung einiger weniger räumlicher Strukturen oder „Muster“ bestimmt. Beispiele dafür sind das El Niño/Southern Oscillation-Phänomen und die Erscheinung der atmosphärischen Blockierung. Die Analysemethode der Principal Interaction/Oscillation Patterns (PIPs/POPs) [Hasselmann (1988)] bietet die Möglichkeit, solche Muster zu bestimmen und deren Dynamik zu beschreiben. Bisher wurde diese Analysemethode nur in einer vereinfachten Form angewendet, die auf von Storch et al. (1988) zurückgeht.

Das Modell, das durch die PIP/POP-Analyse an die Beobachtungen angepaßt wird, ist ein sogenanntes Zustandsraummodell. Die zeitliche Entwicklung der

Muster ist dabei durch eine dynamische Gleichung gegeben. Ist die Modellfunktion dieser Gleichung linear und zeitunabhängig, so beschreibt das Zustandsraummodell ein oszillierendes System. Die Muster werden dann *Principal Oscillation Patterns* (POPs) genannt. Umfaßt die Modellfunktion dagegen eine allgemeinere Form der Wechselwirkung, so heißen die Muster *Principal Interaction Patterns* (PIPs).

Die theoretischen Grundlagen der PIP/POP-Analyse werden in Kapitel 2 gelegt. Ausgehend von dem zentralen Begriff des Zustandsraummodells ergibt sich eine Hierarchie möglicher Verfahren zur Parameterschätzung. Die bekannten empirischen Orthogonalfunktionen (EOFs) sind ein Spezialfall der PIPs/POPs. Sie lassen sich außerdem in diesem Zusammenhang auf einfache Weise verallgemeinern.

Die Anpassung eines Modells ist nur ein Punkt bei der Analyse von Zeitreihen. Mit zusätzlichen Tests muß das Ergebnis der Modellanpassung erhärtet werden. Statistische Tests, die in dieser Arbeit zur Anwendung kommen, werden in Kapitel 3 bereitgestellt. Hervorzuheben sind der Test auf Stationarität (Kapitel 3.1) und der Test auf Linearität (Kapitel 3.2), deren Anwendbarkeit an Hand simulierter Daten ausführlich diskutiert wird. Ein solcher Test wird aufgrund eines Vergleichs der geschätzten Testgröße mit der asymptotischen Verteilung der Testgröße entschieden. Daher muß die Anwendbarkeit eines Tests auf kurze Zeitreihen, wie sie in der Klimaforschung oft nur vorliegen, untersucht werden.

Kapitel 4 beinhaltet die Analysen simulierter Daten. Durch einen Vergleich der Analyseergebnisse der verschiedenen Schätzverfahren für Zustandsraummodelle werden die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren deutlich.

Einen breiten Raum nehmen die Analysen zum El Niño/Southern Oscillation-Phänomen ein, die in Kapitel 5 zusammengefaßt sind. Im Mittelpunkt steht dabei die PIP/POP-Analyse. Das El Niño/Southern Oscillation- (ENSO-) Phänomen ist besonders gut geeignet für eine erste Anwendung der PIPs/POPs. ENSO ist auf den Zeitskalen von einigen Monaten bis zu einigen Jahren das vorherrschende globale Klimasignal. Vor allem ist es, wie schon erwähnt, ein Beispiel dafür, daß die komplexe Dynamik des Systems Ozean-Atmosphäre durch die zeitliche Entwicklung einiger weniger Muster wiedergegeben werden kann.

Ein warmes ENSO-Ereignis, das in Abständen von zwei bis sieben Jahren auftritt, ist gekennzeichnet durch eine einige Monate anhaltende anomale Erwärmung des Oberflächenwassers, die sich im äquatorialen Pazifik von der

Küste Südamerikas bis über die Datumsgrenze hinaus erstreckt. Diese großräumige Temperaturanomale hat Auswirkungen auf die Zirkulation der Atmosphäre und des Ozeans. So werden ENSO-Ereignisse begleitet von weiteren Anomalien z.B. in der bodennahen Windgeschwindigkeit und dem Luftdruck auf Meereshöhe. Analysiert werden Beobachtungsdaten der genannten Größen.

Der Ablauf von ENSO-Ereignissen und deren Auswirkungen auf das Klimasystem vor allem in den Tropen sind recht gut bekannt. Dagegen ist immer noch unklar, wie ein Ereignis zustande kommt. Mit der Analysemethode der PIPs/POPs ist ein neuer diagnostischer Zugang möglich.

Die Arbeit schließt mit den Schlußbemerkungen in Kapitel 6.

2. PARAMETERSCHÄTZUNG FÜR ZUSTANDSRAUMMODELLE

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen gelegt, die bei der Analyse von Zeitreihen mit Principal Interaction/Oscillation Patterns von Bedeutung sind.

Der zentrale Begriff im Zusammenhang mit den Principal Interaction/Oscillation Patterns (PIPs/POPs) ist das Zustandsraummodell, das in Kapitel 2.1 eingeführt wird. Eine dynamische Gleichung mit stochastischem Antrieb beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustandes eines Systems. Eine zweite Gleichung gibt den Zusammenhang zu den beobachteten Größen. Von besonderem Interesse, vor allem in der Ozeanographie und Meteorologie, ist die Modellierung komplexer Systeme, die durch die Wechselwirkung weniger „Muster“ bestimmt zu sein scheinen. Abhängig von der modellierten Dynamik heißen diese Muster Principal Interaction/Oscillation Patterns (PIPs/POPs) (Kapitel 2.2).

In Kapitel 2.3 wird erläutert, daß die Darstellung des Zustandsraummodells nicht eindeutig ist.

Auf die Schätzung des Zustands eines Systems wird in Kapitel 2.4 eingegangen. Kapitel 2.5 behandelt die Schätzung der Parameter des Zustandsraummodells. In Kapitel 2.6 werden diese beiden Schritte zusammengefaßt und das ML- und LSQ-Verfahren als zwei mögliche Schätzverfahren für Zustandsraummodelle vorgestellt.

Die bekannten empirischen Orthogonalfunktionen (EOFs) sind, wie in Kapitel 2.7 gezeigt wird, ein Spezialfall der PIPs/POPs. Das vereinfachte EOFML-Verfahren wird daraus abgeleitet. Das Konzept des Zustandsraummodells ermöglicht es, die empirischen Orthogonalfunktionen auf einfache Weise zu verallgemeinern. Dies wird in Kapitel 2.8 dargestellt.

Ein autoregressiver Prozeß p -ter Ordnung (AR(p)-Prozeß) als Modellfunktion der dynamischen Gleichung kennzeichnet die Klasse linearer Zustandsraummodelle. Der multivariate Durbin-Levinson-Algorithmus, der in Kapitel 2.9 angegeben ist, schätzt die Modellparameter eines AR(p)-Prozesses in sukzessiv aufsteigender Ordnung $p = 1, 2, 3, \dots$. Es ergibt sich damit das einfachste der vorgestellten Verfahren zur Schätzung der Parameter eines Zustandsraummodells, das EOFMDL-Verfahren.

Die Hierarchie der Schätzverfahren für Zustandsraummodelle wird in Kapitel 2.10 zusammengefaßt. Dabei wird auch das von Gantert (1989) entwickelte Schätzverfahren berücksichtigt, das auf dem Kalman-Glättungsfilter aufbaut.

Das lineare Zustandsraummodell läßt sich als ein System von Oszillatoren und Relaxatoren auffassen. Die zugehörigen Transformationen und eine eindeutige Darstellung der Principal Oscillation Patterns (POPs) werden in Kapitel 2.11 beschrieben.

Abschließend wird in Kapitel 2.12 dargelegt, daß ein m -variater $AR(p)$ -Prozeß im allgemeinen nicht äquivalent zu einem $(p \times m)$ -variater $AR(1)$ -Prozeß ist.

2.1 DAS ZUSTANDSRAUMMODELL

Der Ausgangspunkt aller diagnostischen Untersuchungen ist ein Satz von Beobachtungen $Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))^T$ zu den Zeiten t . Er faßt die Zeitreihen $Y_i(t)$, $i=1, \dots, n$, unterschiedlicher Meßgrößen zusammen, die an mehreren Orten gegeben sind. So werden in dieser Arbeit u.a. die Meeresoberflächentemperatur (SST) sowie die zonale und die meridionale Komponente der Windgeschwindigkeit (u und v) an 24 Punkten entlang des Äquators im Bereich des Indischen Ozeans und des Pazifik untersucht.

Die Beobachtungen $Y(t)$ liegen in der Regel als Mittelwerte eines gewissen Zeitintervalls Δt vor, die eben erwähnten SST-, u - und v -Daten z.B. als Monatsmittelwerte. Wählen wir die Zeiteinheit entsprechend als Δt , so sind die Beobachtungen $Y(t)$ zu den Zeiten $t=1, 2, \dots, t_{\max}$ gegeben. Dabei ist $Y(1)$ die erste und $Y(t_{\max})$ die letzte Beobachtung des zur Verfügung stehenden Beobachtungszeitraumes.

Wollen wir die zeitliche Entwicklung des Systems modellieren, von dem uns die Beobachtungen

$$Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))^T, \quad t=1, \dots, t_{\max}, \quad (2.1.1)$$

vorliegen, so muß dieses Modell unabhängig sein von der Anzahl der Orte, an denen die Beobachtungen gegeben sind. Der Zustand des betrachteten Systems hängt deshalb nicht direkt von $Y(t)$ ab, sondern wird durch die Zustandsvariablen

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))^T, \quad t=1, \dots, t_{\max}, \quad (2.1.2)$$

beschrieben. Die Zahl der Komponenten m ist unabhängig von der Anzahl n der beobachteten Zeitreihen.

Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen gibt die verrauschte

Beobachtungsgleichung

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \text{Rauschen.} \quad (2.1.3)$$

Die Spalten der $n \times m$ Matrix $\underline{C} = (c_1, \dots, c_m)$ können in dem Raum der Beobachtungen $Y(t)$ interpretiert werden. Wir bezeichnen die c_μ , $\mu=1, \dots, m$, deshalb auch als Muster. Das Rauschen symbolisiert z.B. die durch Meßfehler vorhandenen Unsicherheiten in den Daten.

Die zeitliche Entwicklung des Systems wird durch die stochastische dynamische Gleichung

$$X(t) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] + \text{Rauschen} \quad (2.1.4)$$

modelliert. Wir deuten hier den Fall an, daß das gewählte Modell F von den Zustandsvariablen $X(\tau)$ der vergangenen Zeitpunkte $\tau < t$, den zeitlich konstanten Parametern $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ und von der Zeit t selbst abhängt. In dem Rauschen wird die Entwicklung des Systems auf Zeitskalen zusammengefaßt, die verglichen mit den Zeitskalen des zu beschreibenden Phänomens sehr kurz sind.

Das Rauschen der Beobachtungsgleichung (2.1.3) sei ein weißes Rauschen $\varepsilon(t)$ mit dem Mittelwert $\langle \varepsilon(t) \rangle = 0$ und der Kovarianz $\langle \varepsilon(t) \varepsilon^T(t') \rangle = \underline{R} \delta_{tt'}$. Für diese Eigenschaft schreiben wir im folgenden $\varepsilon \sim \text{WN}(0, \underline{R})$. Die Klammern $\langle \dots \rangle$ stehen für eine Mittelung über die Zeit. Das Rauschen der dynamischen Gleichung sei ebenfalls ein weißes Rauschen $\eta(t)$ mit $\eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q})$. Setzen wir weiter voraus, daß die Zeitreihen $Y(t)$ und $X(t)$ stationär sind, d.h. alle ihre statistischen Eigenschaften in der Zeit konstant sind, und daß der Mittelwert von $Y(t)$ und $X(t)$ verschwindet, so ist das Modell

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{WN}(0, \underline{R}), \quad (2.1.5)$$

$$X(t) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q}), \quad (2.1.6)$$

konsistent formuliert.

Modelle dieser Struktur, bestehend aus einer Beobachtungsgleichung (2.1.5) und einer dynamischen Gleichung (2.1.6), heißen Zustandsraummodelle. Sie wurden zuerst im Bereich der Regeltechnik entwickelt. Eine typische Anwendung ist die Beschreibung der Position einer Rakete. Signale dieser Art sind meist nicht direkt beobachtbar, systematisch gestört und durch Rauschen verunreinigt. Ein Ansatz mit Beobachtungsgleichung und dynamischer Gleichung liegt nahe. Erst in den letzten Jahren wurden Zustandsraummodelle auch bei der Zeitreihenanalyse angewandt. Hier scheinen sie vor allem in der Ökonomie Eingang gefunden zu haben.

Einführungen in das Gebiet der Zustandsraummodelle finden sich in zahlreichen Lehrbüchern über Zeitreihenanalyse [z.B. Brockwell und Davis (1987), Harvey (1981a,b), Honerkamp (1990), Schlittgen und Streitberg (1987), Schneider (1986)]. Ausführlich behandelt werden sie in dem Buch von Aoki (1987). Bei der Analyse geophysikalischer Zeitreihen scheint Aokis Ansatz $\eta(t+1) = \underline{B}\varepsilon(t)$ für die Rauschterme jedoch nicht angebracht. Es kann vielmehr angenommen werden, daß die durch das Beobachtungsrauschen symbolisierten Unsicherheiten in den Daten unabhängig sind von dem stochastischen Antrieb des Systems. Es wird daher vorausgesetzt, daß das Beobachtungsrauschen und das Systemrauschen unkorreliert sind:

$$\langle \varepsilon(t+\tau)\eta^T(t) \rangle = \underline{0} \quad \text{für alle Zeitverschiebungen } \tau. \quad (2.1.7)$$

2.2 DIE DEFINITION DER PRINCIPAL INTERACTION/OSCILLATION PATTERNS (PIPs/POPs)

Oft erscheint das zeitliche Verhalten komplexer Systeme durch die Wechselwirkung einiger weniger Muster bestimmt zu sein. Zustandsraummodelle wie (2.1.5,6) mit nur wenigen Freiheitsgraden (d.h. $m \ll n$) können daher die wesentlichen dynamischen Eigenschaften des beobachteten komplexen Systems wiedergeben. In diesem Fall bilden die Spalten der Matrix $\underline{C} = (c_1, \dots, c_m)$ (2.1.5) eine Basis des Unterraumes, auf den die Dynamik des Systems beschränkt ist.

Ist die Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ der dynamischen Gleichung (2.1.6) linear und unabhängig von der Zeit t , so beschreibt das Zustandsraummodell (2.1.5,6) ein System von Oszillatoren und Relaxatoren (siehe Kapitel 2.11). Die Muster c_μ , $\mu=1, \dots, m$, werden dann Principal Oscillation Patterns (POPs) genannt. Ist die Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ dagegen nichtlinear oder zeitabhängig und umfaßt damit eine allgemeinere Form der Wechselwirkung, so heißen die Muster c_μ , $\mu=1, \dots, m$, Principal Interaction Patterns (PIPs) [Hasselmann (1988)]. Die Bezeichnungen PIPs und POPs sind dabei unabhängig von dem gewählten Verfahren zur Schätzung der Parameter des Zustandsraummodells.

2.3 DIE FREIHEIT IN DER DARSTELLUNG DES ZUSTANDSRAUMMODELLS

Es ist wichtig zu erwähnen, daß eine erhebliche Freiheit in der Darstellung des Zustandsraummodells (2.1.5,6) besteht. Für die mit der regulären $m \times m$ Matrix \underline{L} transformierten Zustandsvariablen

$$\underline{X}'(t) = \underline{L}\underline{X}(t), \quad (2.3.1)$$

kann das Zustandsraummodell ganz analog formuliert werden:

$$Y(t) = \underline{C}' X'(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim WN(0, \underline{R}), \quad (2.3.2)$$

$$X'(t) = \underline{F}' [X'(\tau < t), \alpha', t-1] + \eta'(t), \quad \eta' \sim WN(0, \underline{Q}') \quad (2.3.3)$$

mit

$$\underline{C}' = \underline{C} \underline{L}^{-1}, \quad (2.3.4)$$

$$\underline{F}' [X'(\tau \leq t), \alpha', t] = \underline{L} F[X(\tau \leq t), \alpha, t], \quad (2.3.5)$$

$$\underline{Q}' = \underline{L} \underline{Q} \underline{L}^T. \quad (2.3.6)$$

Die beiden Formulierungen (2.1.5,6) und (2.3.2,3) des Zustandsraummodells sind genau dann äquivalent, wenn die beiden Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ und $F'[X'(\tau \leq t), \alpha', t]$ zu derselben Klasse von Modellen gehören. Im Falle eines linearen Modells

$$F[X(t), \underline{A}] = \underline{A} X(t) \quad (2.3.7)$$

ist eine lineare Transformation \underline{L} zu einem äquivalenten Zustandsraummodell

$$F'[X'(t), \underline{A}'] = \underline{A}' X'(t), \quad (2.3.8)$$

immer möglich, weil mit (2.3.1) und

$$\underline{A}' = \underline{L} \underline{A} \underline{L}^{-1} \quad (2.3.9)$$

die Transformationsgleichung (2.3.5) erfüllt ist.

Um eine eindeutige Darstellung zu erhalten, sind deshalb Nebenbedingungen für die Muster \underline{C} , die Modellklasse F oder die Kovarianzmatrix \underline{Q} zu formulieren [z.B. Hasselmann (1988), Honerkamp und Weese (1989), Peña und Box (1987)]. So kann für das lineare Modell (2.3.7) angenommen werden, daß die Systemmatrix \underline{A} die Form

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} (:\ :) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & (:\ :) & \\ & & & (.) \end{pmatrix} \quad (2.3.10)$$

hat, denn eine quadratische Matrix kann unter geringen Voraussetzungen auf eine solche Gestalt gebracht werden. Doch auch in dieser speziellen Formulierung sind noch weitere Nebenbedingungen für eine eindeutige Darstellung notwendig.

Die in dieser Arbeit verwendete eindeutige Darstellung der Zustandsraummodelle (2.1.5,6) mit einer linearen, zeitunabhängigen Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha]$, wie sie auch das lineare Modell (2.3.7) darstellt, wird in Kapitel 2.11 vorgestellt. Zunächst aber werden in den folgenden Kapiteln verschiedene Schätzverfahren für Zustandsraummodelle entwickelt.

2.4 DIE SCHÄTZUNG DER ZUSTANDSVARIABLEN

Es ist nicht möglich, die Zustandsvariablen $X(t)$ zu beobachten. Sind jedoch neben den Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, auch die Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} des Zustandsraummodells (2.1.5,6) gegeben, so können die Zustandsvariablen $X(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, geschätzt werden.

Für ein Zustandsraummodell (2.1.5,6) mit der linearen Modellfunktion $F[X(t), \underline{A}] = \underline{A}X(t)$ erhält man mit Hilfe des Kalman-Glättungsfilters einen Schätzer $\hat{X}(t)$, der linear von allen Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, abhängt und den quadratischen Fehler $\langle \|X(t) - \hat{X}(t)\|^2 \rangle$ minimiert. Dabei steht $\|\dots\|^2$ für die Norm $\|x\|^2 = x^T x$ eines Vektors x . Verschiedene Herleitungen und Interpretationen der Filtergleichungen, sowie einige numerische Varianten finden sich z.B. in Schneider (1986). Ein auf dem Kalman-Glättungsfilter aufbauendes Verfahren zur Bestimmung der Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} des Zustandsraummodells wurde von Gantert (1989) entwickelt.

Ein Nachteil des Kalman-Glättungsfilters ist, daß die lineare Modellfunktion $F[X(t), \underline{A}] = \underline{A}X(t)$ unmittelbar eingeht. Verallgemeinerungen des Kalman-Filters für beliebige Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ sind zwar möglich [z.B. Jazwinski (1970)], jedoch scheint für die Aufgabe, verschiedene, auch nicht-lineare Modelle zu entwickeln, ein Schätzer wünschenswert, der unabhängig von der gewählten Modellfunktion ist.

Hier bietet es sich an, den linearen, erwartungstreuen Schätzer

$$X(t;t) = \underline{C}^+ Y(t), \quad \underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{M} \underline{C})^{-1} \underline{C}^T \underline{M}, \quad (2.4.1)$$

zu verwenden, der von Hasselmann (1988) vorgeschlagen wird. Dieser Schätzer hängt nur von der Beobachtung $Y(t)$ zu dem Zeitpunkt t , den Mustern \underline{C} (\underline{C} habe den Rang m) und der noch zu wählenden, symmetrischen und positiv definiten $n \times n$ Matrix \underline{M} ab. Das zweite Argument von $X(t;t)$ deutet dabei an, daß die Zustandsvariable $X(t)$ zur Zeit t geschätzt wird (vgl. (2.5.1)). \underline{C}^+ ist die Moore-Penrose-Pseudoinverse von \underline{C} [Stoer (1983)]. Die Beobachtung $Y(t)$ wird durch

$\underline{C}X(t;t)$ mit dem Fehler

$$\varepsilon'(t) = Y(t) - \underline{C}X(t;t) \quad (2.4.2)$$

approximiert. Der quadratische Fehler $\langle \varepsilon'^T(t) \underline{M} \varepsilon'(t) \rangle$ ist minimal in der Klasse linearer, erwartungstreuer Schätzer. Mit der Metrik $\underline{M} = \underline{R}^{-1}$ gilt dies auch für den quadratischen Fehler $\langle \|X(t) - X(t;t)\|^2 \rangle$ (Gauß-Markov-Theorem) [Jazwinski (1970)].

Ist die Beobachtungsgleichung (2.1.5) rauschfrei, d.h. $\underline{R} = \underline{0}$, so ist die Zustandsvariable $X(t)$ durch die Beobachtung $Y(t)$ gegeben und der Kalman-Glättungsfilter geht in den Schätzer (2.4.1) mit $\underline{M} = \underline{I}$ über [Honerkamp und Weese (1989), Honerkamp (1990)]. Der Fall einer rauschfreien Beobachtungsgleichung wird in Kapitel 2.7 behandelt.

2.5 DIE SCHÄTZUNG DER PARAMETER DES ZUSTANDSRAUMMODELLS

Wir betrachten nun das System des Zustandsraummodells (2.1.5,6) genauer. Es seien die Beobachtung $Y(\tau)$ und die Zustandsvariable $X(\tau)$ zu den Zeitpunkten $\tau < t$ sowie die Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} gegeben.

Aus der dynamischen Gleichung (2.1.6) folgt

$$X(t;t-1) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] \quad (2.5.1)$$

als Ein-Schritt-Vorhersage des Systemzustands mit dem Vorhersagefehler

$$\eta(t) = X(t) - X(t;t-1). \quad (2.5.2)$$

Das zweite Argument von $X(t;t-1)$ an, daß die Zustandsvariable $X(t)$ zur Zeit $t-1$ geschätzt wird (vgl. (2.4.1)). Aus der Beobachtungsgleichung (2.1.5) ergibt sich der zu erwartende Beobachtungswert

$$Y(t;t-1) = \underline{C}X(t;t-1) \quad (2.5.3)$$

mit dem Vorhersagefehler

$$\rho(t) = Y(t) - Y(t;t-1). \quad (2.5.4)$$

Sind die Rauschterme $\varepsilon(t)$ und $\eta(t)$ unkorreliert (2.1.7), so gilt für den Vorhersagefehler

$$\rho(t) = \varepsilon(t) + \underline{C}\eta(t), \quad \rho \sim WN(0, \underline{S}), \quad \underline{S} = \underline{C}\underline{Q}\underline{C}^T + \underline{R}. \quad (2.5.5)$$

Sind $\varepsilon(t)$ und $\eta(t)$ normalverteilt, so ist auch $\rho(t)$ normalverteilt. Dann gibt

$$p(Y) = \prod_{t=1}^t \left([(2\pi)^n \det(\underline{S})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \rho^T(t) \underline{S}^{-1} \rho(t)\right] \right), \quad (2.5.6)$$

die Wahrscheinlichkeit an, die Zeitreihe $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, als eine Realisierung des Modells (2.1.5,6) zu beobachten. Dabei steht $\rho(t)$ als Abkürzung für (2.5.1,3,4)

$$\rho(t) = Y(t) - \underline{C}F[X(\tau < t), \alpha, t-1]. \quad (2.5.7)$$

Je größer die Wahrscheinlichkeit $p(Y)$ ist, desto besser ist offensichtlich das Modell geeignet, die wirklichen Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, zu beschreiben. Die Parameter \underline{C} , α , \underline{S} sind daher so zu wählen, daß $p(Y)$ maximal bzw. die Funktion

$$\begin{aligned} f(Y) &= \frac{-2}{t_{\max} n} \ln[p(Y)] - \ln[2\pi] \\ &= \frac{1}{n} \left(\text{tr}[\langle \rho(t) \rho^T(t) \rangle \underline{S}^{-1}] + \ln[\det(\underline{S})] \right) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

minimal ist.

2.6 DAS ML- UND DAS LSQ-VERFAHREN: ZWEI ITERATIVE SCHÄTZVERFAHREN

Die beiden Schritte der Schätzung der Zustandsvariablen (Kapitel 2.4) und der Parameter des Zustandsraummodells (Kapitel 2.5) werden nun zusammengefaßt. Dabei werden zwei mögliche Verfahren vorgestellt. Das ML-Verfahren ist ein Schätzverfahren zur Minimierung der Funktion $f(Y)$ (2.5.8). Man erhält die Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} . Das LSQ-Verfahren bestimmt die Parameter \underline{C} und α als die Least-Squares-Schätzer. Der Aufwand dieses einfacheren Schätzverfahrens ist erheblich geringer, wodurch die Analyse von Systemen mit einer großen Anzahl n beobachteter Zeitreihen $Y(t)$ erst möglich wird.

a) Das ML-Verfahren: die Maximum-Likelihood-Schätzer

Zur Bestimmung der Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} bietet sich ein iteratives Verfahren an:

- 1.) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t; t)$ bestimme man die Parameter $\tilde{\underline{C}}^{(i)}$, $\tilde{\alpha}^{(i)}$, $\tilde{\underline{S}}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8).
- 2.) Für gegebene Parameter $\tilde{\underline{C}}^{(i)}$, $\tilde{\underline{R}}^{(i)}$ schätze man die Systemzustände $\tilde{X}^{(i)}(t; t)$ gemäß der Beziehung (2.4.1) mit $\underline{M} = [\tilde{\underline{R}}^{(i)}]^{-1}$.

Unter der Annahme, daß die Parameter \underline{C} und \underline{S} unabhängig sind von den Modellparametern α , kann der erste Iterationsschritt aufgespalten werden:

- 1.1) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Parameter $\tilde{C}^{(i-1)}$, $\tilde{S}^{(i-1)}$ bestimme man die Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8).
- 1.2) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ bestimme man die Parameter $\tilde{C}^{(i)}$, $\tilde{S}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8).

Man erhält durch Minimierung der Funktion $f(Y)$ (2.5.8) nur die Kovarianzmatrix \underline{S} . Ist die Matrix \underline{Q} bekannt, so kann aufgrund der Beziehung $\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}$ (2.5.5) auch \underline{R} bestimmt werden. Jedoch ist $\underline{R} = \underline{S} - \underline{CQC}^T$ möglicherweise nicht positiv semidefinit. Deshalb ist $f(Y)$ mit $\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}$ bzgl. der Kovarianz \underline{R} zu minimieren. Der Iterationsschritt 1.2) wird ersetzt durch:

- 1.2.1) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ schätze man den Vorhersagefehler der Zustandsgrößen $\eta(t)$ (2.5.1,2) und bestimme $\tilde{Q}^{(i)}$ als das Maximum der Funktion

$$p(X) = \prod_{t=1}^t \left[[(2\pi)^m \det(\underline{Q})]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \eta^T(t) \underline{Q}^{-1} \eta(t)\right] \right], \quad (2.6.1)$$

bzw. als Minimum der Funktion

$$g(X) = \frac{1}{m} \left(\text{tr}[\langle \eta(t) \eta^T(t) \rangle \underline{Q}^{-1}] + \ln[\det(\underline{Q})] \right). \quad (2.6.2)$$

- 1.2.2) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Parameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$, $\tilde{Q}^{(i)}$ bestimme man die Parameter $\tilde{C}^{(i)}$, $\tilde{R}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8) mit $\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}$ (2.5.5).

Die positiv semidefiniten Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} sind eindeutig durch die Dreiecksmatrizen \underline{B}_R und \underline{B}_Q bestimmt:

$$\underline{R} = \underline{B}_R \underline{B}_R^T \quad \text{und} \quad \underline{Q} = \underline{B}_Q \underline{B}_Q^T. \quad (2.6.3)$$

In das Verfahren gehen deshalb nur \underline{B}_R und \underline{B}_Q ein.

Fassen wir das Iterationsverfahren zusammen:

- 1.1) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Parameter $\tilde{C}^{(i-1)}$, $\tilde{R}^{(i-1)}$, $\tilde{Q}^{(i-1)}$ bestimme man die Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8).
- 1.2.1) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ schätze man den Vorhersagefehler der Zustandsgrößen $\eta(t)$ (2.5.1,2) und bestimme $\tilde{Q}^{(i)} = [\tilde{B}_Q^{(i)}][\tilde{B}_Q^{(i)}]^T$ als das Minimum der Funktion $g(X)$ (2.6.2).

- 1.2.2) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Parameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$, $\tilde{Q}^{(i)}$ bestimme man die Parameter $\tilde{C}^{(i)}$, $\tilde{R}^{(i)} = [\tilde{B}_R^{(i)}][\tilde{B}_R^{(i)}]^T$ als Minimum der Funktion $f(Y)$ (2.5.8).
- 2.) Für gegebene Parameter $\tilde{C}^{(i)}$ und $\tilde{R}^{(i)}$ schätze man die Systemzustände $\tilde{X}^{(i)}(t;t)$ gemäß der Beziehung (2.4.1) mit $\underline{M} = [\tilde{R}^{(i)}]^{-1}$.

Die Iterationsschritte 1.1), 1.2.1) und 1.2.2) beinhalten jeweils ein Minimierungsproblem, das durch Routinen einer Programmbibliothek gelöst werden kann. Sind die Dimension m des Zustandsraumes und die Zahl p der Modellparameter α klein, so genügt für die Schritte 1.1) und 1.2.1) z.B. ein Quasi-Newton-Verfahren (wie die Routine E04JAF der NAG-Bibliothek). Da die Anzahl n der Beobachtungszeitreihen $Y(t)$ i.a. groß ist, empfiehlt es sich, für den Schritt 1.2.2) ein Konjungierte-Gradienten-Verfahren zu verwenden (z.B. die Routine E04DGF der NAG-Bibliothek; siehe Anhang A.1 für die ersten Ableitungen der Funktion $f(Y)$ bzgl. \underline{C} und \underline{B}_R).

Ist bei allen drei Iterationsschritten 1.1), 1.2.1) und 1.2.2) keine weitere Minimierung der Funktionen $f(Y)$ bzw. $g(X)$ möglich, so ist eine selbstkonsistente Lösung des Iterationsverfahrens gefunden.

b) Das LSQ-Verfahren: die Least-Squares-Schätzer

Bei der Analyse einer größeren Anzahl n von Beobachtungszeitreihen $Y(t)$ dominiert die Anpassung der $n \times (n+1)/2$ Koeffizienten der Matrix \underline{B}_R ($\underline{R} = \underline{B}_R \underline{B}_R^T$) im Iterationsschritt 1.2.2) den Aufwand des soeben beschriebenen iterativen Verfahrens zur Bestimmung der Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} . Um auch für große n eine Analyse zu ermöglichen, ist ein einfacheres Schätzverfahren notwendig.

Wir wählen deshalb die Parameter \underline{C} und α so, daß das quadratische Mittel

$$f'(Y) = \frac{1}{n} \langle \rho^T(t) \rho(t) \rangle \quad (2.6.4)$$

des Vorhersagefehlers $\rho(t)$ (2.5.7) minimal ist. Die Gütefunktion $f'(Y)$ ist unabhängig von den Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} .

Zur Lösung bietet sich wiederum ein Iterationsverfahren an:

- 1.1) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Muster $\tilde{C}^{(i-1)}$ bestimme man die Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f'(Y)$ (2.6.4).
- 1.2) Für gegebene Zustandsvariablen $\tilde{X}^{(i-1)}(t;t)$ und Modellparameter $\tilde{\alpha}^{(i)}$ bestimme man die Muster $\tilde{C}^{(i)}$ als Minimum der Funktion $f'(Y)$ (2.6.4).
- 2.) Für gegebene Muster $\tilde{C}^{(i)}$ schätze man die Systemzustände $\tilde{X}^{(i)}(t;t)$ gemäß der Beziehung (2.4.1) mit $\underline{M} = \underline{I}$.

Das Minimierungsproblem in Iterationsschritt 1.1) kann durch ein Quasi-Newton-Verfahren (z.B. der Routine E04JAF der NAG-Bibliothek) gelöst werden. Das Minimierungsproblem in Iterationsschritt 1.2) wird, da die Muster \underline{C} in die Funktion $f'(Y)$ nur quadratisch eingehen, auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zurückgeführt (siehe Anhang A.1).

Eine selbstkonsistente Lösung des Iterationsverfahrens ist gefunden, wenn in den beiden Iterationsschritten 1.1) und 1.2) keine weitere Minimierung der Funktion $f'(Y)$ möglich ist. Abschließend schätzen wir die Kovarianzmatrix \underline{Q} des Systemrauschens als die Kovarianzmatrix $\langle \eta(t)\eta^T(t) \rangle$ des Vorhersagefehlers der Systemzustände $\eta(t)$ (2.5.1,2) und die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsruschens als die Kovarianzmatrix $\langle \varepsilon'(t)\varepsilon'^T(t) \rangle$ des Approximationsfehlers $\varepsilon'(t)$ (2.4.1,2).

2.7 DAS EOFML-VERFAHREN:

DIE EMPIRISCHEN ORTHOGONALFUNKTIONEN (EOFs) ALS MUSTER

In diesem Kapitel wird der spezielle Fall einer rauschfreien Beobachtungsgleichung ((2.1.5) mit $\underline{R} = \underline{0}$)

$$Y(t) = \underline{C}X(t) \quad (2.7.1)$$

betrachtet. Außerdem seien die Muster \underline{C} orthonormal ($\underline{C}^T \underline{C} = \underline{I}$). Wegen der Freiheit in der Darstellung des Zustandsraummodells (siehe Kapitel 2.3) ist diese Wahl z.B. für lineare Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ wie (2.3.7) möglich.

Es sei

$$C_{xx} = \langle X(t)X^T(t) \rangle = \underline{L}\underline{\Lambda}\underline{L}^T \quad (2.7.2)$$

mit $\underline{L} = (l_1, \dots, l_m)$ und $\underline{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ die Zerlegung der Kovarianzmatrix C_{xx} der Zustandsvariablen $X(t)$ in die orthonormalen Eigenvektoren l_μ und die positiven Eigenwerte λ_μ (C_{xx} habe den Rang m). Die Reihenfolge der Eigenpaare $[\lambda_\mu, l_\mu]$ sei durch

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \quad (2.7.3)$$

gegeben. Aus der Beobachtungsgleichung (2.7.1) folgt für die Kovarianzmatrix der Beobachtungen $Y(t)$ die Zerlegung

$$C_{yy} = \langle Y(t)Y^T(t) \rangle = \underline{C}C_{xx}\underline{C}^T = (\underline{C}\underline{L})\underline{\Lambda}(\underline{C}\underline{L})^T = \underline{E}\underline{A}\underline{E}^T, \quad (2.7.4)$$

$$\underline{E} = \underline{C}\underline{L}, \quad (2.7.5)$$

mit den Spaltenvektoren e_μ von $\underline{E} = (e_1, \dots, e_m)$ als den orthonormalen Eigenvektoren der Kovarianzmatrix C_{yy} zu den Eigenwerten λ_μ . Die übrigen $(n-m)$ Eigenwerte von C_{yy} sind Null. Die e_μ sind die bekannten empirischen Orthogonalfunktionen (EOFs) der Beobachtungen $Y(t)$ [z.B. von Storch und Hannoschöck (1985)].

Daraus folgt, daß die PIPs/POPs c_μ Linearkombinationen der EOFs e_μ (2.7.5) sind. Die schon erwähnte Freiheit in der Darstellung des Zustandsraummodells ermöglicht es, die PIPs/POPs gleich den EOFs zu wählen.

Mit den Beobachtungen $Y(t)$ und den Mustern \underline{C} sind auch die Zustandsvariablen

$$X(t) = \underline{C}^+ Y(t), \quad \underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{C})^{-1} \underline{C}^T \quad (2.7.6)$$

gegeben (vgl. (2.4.1)). Sind wie in diesem Abschnitt die Muster \underline{C} als orthonormal vorausgesetzt ($\underline{C}^T \underline{C} = \underline{I}$), ist die Pseudoinverse \underline{C}^+ gleich der Transponierten der Muster, $\underline{C}^+ = \underline{C}^T$.

Die noch unbestimmten Parameter α und \underline{Q} sind so zu wählen, daß die Wahrscheinlichkeit

$$p(X) = \prod_{t=1}^{t_{\max}} \left[((2\pi)^m \det(\underline{Q}))^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \eta^T(t) \underline{Q}^{-1} \eta(t)\right] \right], \quad (2.7.7)$$

$$\eta(t) = X(t) - F[X(\tau < t), \alpha, t-1], \quad (2.7.8)$$

die gegebene Zeitreihe $X(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, als eine Realisierung des stochastischen dynamischen Modells (2.1.6) zu beobachten, maximal ist.

Die Wahl der Muster \underline{C} als die EOFs der Beobachtungen $Y(t)$ und die anschließende Bestimmung der Parameter α und \underline{Q} als Maximum-Likelihood-Schätzer wird im folgenden als EOFML-Verfahren bezeichnet.

Es seien noch einige bekannte Eigenschaften der EOFs genannt. Wählen wir $\underline{E} = \underline{C}$ in (2.7.5), so folgt aus (2.7.2), daß die Koeffizienten $X_\mu(t)$ der EOFs e_μ statistisch unabhängig sind und ihre Varianz gleich dem dazugehörigen Eigenwert λ_μ ist. Für die Varianz der Beobachtungen gilt

$$\text{var}[Y(t)] = \text{tr}[C_{yy}] = \text{tr}[C_{xx}] = \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu. \quad (2.7.9)$$

Summiert wird hier nur über m Eigenwerte λ_μ , da wir in diesem Kapitel den speziellen Fall einer rauschfreien Beobachtungsgleichung (2.7.1) betrachten und die übrigen $(n-m)$ Eigenwerte von C_{yy} gleich Null sind. Die zeitliche Entwicklung $e_\mu X_\mu(t)$ der μ -ten EOF beschreibt im Mittel $100 \times \left(\lambda_\mu / \text{var}[Y(t)] \right) \%$ der Varianz der Beobachtungen $Y(t)$. Die gewählte Reihenfolge der Eigenwerte λ_μ (2.7.3) sortiert die EOFs entsprechend dieser erklärten Varianz.

2.8 DIE VERALLGEMEINERTEN EMPIRISCHEN FUNKTIONEN (GEFS)

Im letzten Kapitel haben wir gezeigt, daß für ein Zustandsraummodell mit rauschfreier Beobachtungsgleichung ((2.1.6), (2.7.1)) der Unterraum, auf den die Dynamik des Systems beschränkt ist, durch die EOFs der Kovarianzmatrix C_{yy} der Beobachtungen $Y(t)$ gegeben ist (2.7.5). Dieser Zugang kann auf natürliche Weise verallgemeinert werden, indem die Singuläre-Werte-Zerlegung der Kovarianzmatrix $C_{yy}(\tau)$ mit einer Zeitverschiebung τ betrachtet wird.

Bezeichnen wir mit

$$C_{xx}(\tau) = \langle X(t+\tau)X^T(t) \rangle \quad (2.8.1)$$

die Kovarianzmatrix der Zustandsvariablen $X(t)$ mit der Zeitverschiebung τ , so ist

$$C_{xx}(\tau) = \underline{S}(\tau)\Lambda(\tau)\underline{I}^T(\tau) \quad (2.8.2)$$

mit $\underline{S}(\tau) = (s_1(\tau), \dots, s_m(\tau))$, $\underline{I}(\tau) = (t_1(\tau), \dots, t_m(\tau))$ und $\Lambda(\tau) = \text{diag}(\lambda_1(\tau), \dots, \lambda_m(\tau))$ die Singuläre-Werte-Zerlegung (singular value decomposition, SVD) in die orthonormalen Vektoren $s_\mu(\tau)$ und $t_\mu(\tau)$ und die nicht negativen singulären Werte $\lambda_\mu(\tau)$ [z.B. Stoer und Bulirsch (1978), Press et al. (1986)]. Hat $C_{xx}(0)$, wie auch im letzten Kapitel 2.7 vorausgesetzt, den Rang m , so ist der Rang der Kovarianzmatrix $C_{xx}(\tau)$ mit einer Zeitverschiebung τ ebenfalls m , d.h. die singulären Werte $\lambda_\mu(\tau)$ sind positiv. Es ist unmittelbar einsichtig, daß dies nur für kleine Zeitverschiebungen τ gelten kann, weil Kovarianzen abhängig von der Dynamik mit zunehmendem τ kleiner werden, d.h. die Kovarianzmatrix $C_{yy}(\tau)$ nur für kleine τ gut konditioniert ist. Die Reihenfolge der Tripel $[\lambda_\mu(\tau), s_\mu(\tau), t_\mu(\tau)]$ ist durch

$$\lambda_1(\tau) \geq \lambda_2(\tau) \geq \dots \geq \lambda_m(\tau) \quad (2.8.3)$$

gegeben. Aus der Beobachtungsgleichung (2.7.1) folgt für die Kovarianzmatrix

$$C_{yy}(\tau) = \langle Y(t+\tau)Y^T(t) \rangle \quad (2.8.4)$$

der Beobachtungen $Y(t)$ mit der Zeitverschiebung τ

$$C_{yy}(\tau) = \underline{C}C_{xx}(\tau)\underline{C}^T = (\underline{C}\underline{S}(\tau))\Lambda(\tau)(\underline{C}\underline{I}(\tau))^T = \underline{U}(\tau)\Lambda(\tau)\underline{V}^T(\tau), \quad (2.8.5)$$

$$\underline{U}(\tau) = \underline{C}\underline{S}(\tau), \quad \underline{V}(\tau) = \underline{C}\underline{I}(\tau), \quad (2.8.6)$$

mit den Sätzen orthonormaler Vektoren $\underline{U}(\tau) = (u_1(\tau), \dots, u_m(\tau))$ und $\underline{V}(\tau) = (v_1(\tau), \dots, v_m(\tau))$ (es gelte wie im letzten Kapitel $\underline{C}^T\underline{C} = \underline{I}$). Dies ist gerade die SVD der Kovarianzmatrix $C_{yy}(\tau)$ zu den positiven singulären Werten $\lambda_\mu(\tau)$.

Die übrigen $(n-m)$ singulären Werte von $C_{yy}(\tau)$ sind Null.

Für den Fall $\tau = 0$ erhalten wir die bekannten Ergebnisse (2.7.2,4,5) aus dem vorigen Kapitel:

$$\underline{L} = \underline{S}(0) = \underline{I}(0), \quad \underline{\Lambda} = \underline{\Lambda}(0), \quad \underline{E} = \underline{U}(0) = \underline{V}(0). \quad (2.8.7)$$

Es sind also neben den Mustern \underline{C} auch deren Linearkombinationen $\underline{U}(\tau)$ oder $\underline{V}(\tau)$ (2.8.6) zu kleinen Zeitverschiebungen τ Basen des Unterraumes, auf den die Dynamik des Systems beschränkt ist.

Mit diesem erweiterten Zugang können wir nun die verallgemeinerten empirischen Funktionen (generalized empirical functions, GEFs) einführen. Das bisher vernachlässigte Beobachtungsrauschen führt dazu, daß die Unterräume, die durch die Basen $\underline{U}(0), \underline{V}(0), \underline{U}(1), \underline{V}(1), \underline{U}(2), \underline{V}(2), \dots$ aufgespannt werden, alle etwas voneinander abweichen. Um diesen Einfluß des Rauschens auszuschließen, suchen wir einen „gemittelten“ Unterraum, d.h. eine orthonormale Basis $\underline{G} = (\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_m)$, die den von der Gesamtheit aller Vektoren $(\underline{U}(0), \underline{V}(0), \underline{U}(1), \underline{V}(1), \underline{U}(2), \underline{V}(2), \dots)$ aufgespannten Raum am besten erfaßt, so daß die quadratische Abweichung

$$\sum_{\tau=1}^m \sum_{\mu=1}^m \left(\left\| \underline{u}_{\mu}(\tau) - \sum_{\nu=1}^m \underline{g}_{\nu} \underline{g}_{\nu}^T \underline{u}_{\mu}(\tau) \right\|^2 + \left\| \underline{v}_{\mu}(\tau) - \sum_{\nu=1}^m \underline{g}_{\nu} \underline{g}_{\nu}^T \underline{v}_{\mu}(\tau) \right\|^2 \right) \quad (2.8.8)$$

minimal ist. Dabei steht $\|\dots\|^2$ für die Norm $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$ eines Vektors \mathbf{x} . Die Basisvektoren \underline{g}_{μ} nennen wir die verallgemeinerten empirischen Funktionen (generalized empirical functions, GEFs).

2.9 DER MULTIVARIATE DURBIN-LEVINSON-ALGORITHMUS UND DAS EOFMDL-VERFAHREN

Ein autoregressiver Prozeß p -ter Ordnung (AR(p)-Prozeß)

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^p \underline{A}_j \mathbf{X}(t-j) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q}), \quad (2.9.1)$$

wie er als Modellfunktion eines Zustandsraummodells (2.1.5,6) vorliegen kann, erfüllt die Yule-Walker-Gleichungen

$$\underline{Q} = C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k) - \sum_{j=1}^p \underline{A}_j C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k-j), \quad k=1, \dots, p, \quad (2.9.2)$$

$$\underline{Q} = C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(0) - \sum_{j=1}^p \underline{A}_j C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(-j). \quad (2.9.3)$$

Dabei ist

$$C_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k) = \langle \mathbf{X}(t+k) \mathbf{X}^T(t) \rangle \quad (2.9.4)$$

die Kovarianzmatrix der Variablen $X(t)$ mit der Zeitverschiebung k . Man erhält die Yule-Walker-Gleichungen, indem man die dynamische Gleichung (2.9.1) von rechts mit $X^T(t-k)$, $k=0, \dots, p$, multipliziert und über die Zeit mittelt.

Kennt man die Kovarianzmatrizen $C_{xx}(k)$, so bilden die Yule-Walker-Gleichungen ein Gleichungssystem, um die Systemmatrizen A_j zu bestimmen. Der multivariate Durbin-Levinson-Algorithmus löst dieses Problem in sukzessiv aufsteigender Ordnung $p = 1, 2, 3, \dots$. Neben dem $AR(p)$ -Prozeß (2.9.1) mit den Yule-Walker-Gleichungen (2.9.2,3) muß dabei gleichzeitig ein $AR^-(p)$ -Prozeß in negativer Zeitrichtung

$$X(t) = \sum_{j=1}^p A_j^- X(t+j) + \eta^-(t), \quad \eta^- \sim WN(0, Q^-), \quad (2.9.5)$$

mit den Yule-Walker-Gleichungen

$$Q = C_{xx}(-k) - \sum_{j=1}^p A_j^- C_{xx}(-k+j), \quad k=1, \dots, p, \quad (2.9.6)$$

$$Q^- = C_{xx}(0) - \sum_{j=1}^p A_j^- C_{xx}(j) \quad (2.9.7)$$

betrachtet werden. Im univariaten Fall vereinfacht sich die Beziehung $C_{xx}(k) = C_{xx}^T(-k)$ der Kovarianzmatrizen (2.9.4) zu $C_{xx}(k) = C_{xx}(-k)$, und die beiden Prozesse (2.9.1,5) sind identisch.

Sind die Modellparameter des $AR(p-1)$ - und des $AR^-(p-1)$ -Prozesses bekannt, so ergeben sich die Größen der Prozesse in p -ter Ordnung aus

$$A_j^{(p)} = A_j^{(p-1)} - A_p^{(p)} A_{p-j}^{-(p-1)}, \quad j=1, \dots, p-1, \quad (2.9.8)$$

$$A_j^{-(p)} = A_j^{-(p-1)} - A_p^{-(p)} A_{p-j}^{(p-1)}, \quad j=1, \dots, p-1, \quad (2.9.9)$$

$$A_p^{(p)} = \Delta^{(p-1)} [Q^{-(p-1)}]^{-1}, \quad (2.9.10)$$

$$A_p^{-(p)} = \Delta^{-(p-1)} [Q^{(p-1)}]^{-1}. \quad (2.9.11)$$

Die Rauschterme $\eta^{(p)}(t)$ und $\eta^{-(p)}(t)$ erhält man aus den Modellfunktionen (2.9.1) und (2.9.5), ihre Kovarianzmatrizen aus

$$Q^{(p)} = \langle \eta^{(p)}(t) [\eta^{(p)}(t)]^T \rangle, \quad (2.9.12)$$

$$Q^{-(p)} = \langle \eta^{-(p)}(t) [\eta^{-(p)}(t)]^T \rangle \quad (2.9.13)$$

und die verwendeten Hilfsgrößen $\Delta^{(p)}$ und $\Delta^{-(p)}$ aus

$$\Delta^{(p)} = \langle \eta^{(p)}(t) [\eta^{-(p)}(t-p-1)]^T \rangle, \quad (2.9.14)$$

$$\Delta^{-(p)} = \langle \eta^{-(p)}(t) [\eta^{(p)}(t+p+1)]^T \rangle. \quad (2.9.15)$$

Gibt man als Startwerte

$$\underline{Q}^{(0)} = \underline{Q}^{-{(0)}} = C_{xx}^{(0)}, \quad \Delta^{(0)} = [\Delta^{-(0)}]^T = C_{xx}^{(1)} \quad (2.9.16)$$

vor, so folgt für einen AR(1)- und AR⁻(1)-Prozeß aus (2.9.10,11) das bekannte Ergebnis

$$\underline{A}_1^{(1)} = C_{xx}^{(1)} C_{xx}^{-1}(0), \quad \underline{A}_1^{-(1)} = C_{xx}^{(-1)} C_{xx}^{-1}(0). \quad (2.9.17)$$

In Anhang A.2 wird der multivariate Durbin-Levinson-Algorithmus (2.9.8-15), aus den Yule-Walker-Gleichungen (2.9.2,3,6,7) hergeleitet. Die multivariate Formulierung des Durbin-Levinson-Algorithmus geht auf Whittle (1963, 1983) zurück und findet sich auch in dem Lehrbuch von Honerkamp (1990).

Die Zustandsvariablen $X(t)$ eines Zustandsraummodells sind nicht beobachtbar. Im speziellen Falle einer rauschfreien Beobachtungsgleichung (2.7.1) können für lineare Modellfunktionen (2.9.1) die Muster \underline{C} als die EOFs gewählt werden (siehe Kapitel 2.7). Mit den Mustern \underline{C} sind dann auch die Zustandsvariablen $X(t)$ gegeben (2.7.6).

Die Wahl der Muster \underline{C} als die EOFs der Beobachtungen $Y(t)$ und die Bestimmung der Parameter eines AR(p)-Prozesses (2.9.1) als Yule-Walker-Schätzer mit Hilfe des multivariaten Durbin-Levinson-Algorithmus (2.9.8-16) wird im folgenden als EOFMDL-Verfahren bezeichnet. Die POP-Analyse, die auf von Storch et al. (1988) zurückgeht, beruht auf dem EOFMDL-Verfahren. Dabei werden meist ca. zehn EOFs berücksichtigt und mit (2.9.17) die Systemmatrix eines AR(1)-Prozesses geschätzt.

2.10 DIE HIERARCHIE DER SCHÄTZVERFAHREN FÜR ZUSTANDSRAUMMODELLE

Das EOFMDL- (Kapitel 2.9), das EOFML- (Kapitel 2.7), das LSQ- und das ML-Verfahren (Kapitel 2.6) schätzen die Parameter eines Zustandsraummodells (2.1.5,6)

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim WN(0, \underline{R}), \quad (2.10.1)$$

$$X(t) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] + \eta(t), \quad \eta \sim WN(0, \underline{Q}), \quad (2.10.2)$$

mit zunehmender Genauigkeit.

Das EOFMDL- und das EOFML-Verfahren setzen beide die Muster \underline{C} als die

EOFs der Beobachtungen $Y(t)$. Mit dieser Wahl sind die Schätzwerte der Zustandsvariablen (2.7.6)

$$X(t) = \underline{C}^+ Y(t), \quad \underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{C})^{-1} \underline{C}^T, \quad (2.10.3)$$

gegeben, an die die jeweilige Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ angepaßt wird. Das EOFMDL-Verfahren bestimmt die Yule-Walker-Schätzer der Modellparameter eines AR(p)-Prozesses (2.9.1)

$$F[X(\tau=t-1, \dots, t-p), (\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_p)] = \sum_{j=1}^p \underline{A}_j X(t-j) \quad (2.10.4)$$

beliebiger Ordnung p mittels des multivariaten Durbin-Levinson-Algorithmus, das EOFML-Verfahren dagegen bestimmt die Maximum-Likelihood-Schätzer der Modellparameter α und der Kovarianzmatrix \underline{Q} für beliebige Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$.

Der wesentliche Unterschied dieser beiden Verfahren zu dem LSQ- und ML-Verfahren ist, daß jene die Muster \underline{C} gemeinsam mit den Modellparametern α für beliebige Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ schätzen. Das LSQ-Verfahren bestimmt die Least-Squares-Schätzer für \underline{C} und α , während das ML-Verfahren die Maximum-Likelihood-Schätzer für \underline{C} und α zusammen mit den Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} ermittelt.

Beide verwenden den linearen, erwartungstreuen Schätzer (2.4.1)

$$X(t; t) = \underline{C}^+ Y(t), \quad \underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{M} \underline{C})^{-1} \underline{C}^T \underline{M}, \quad (2.10.5)$$

für die nicht zu beobachtenden Zustandsvariablen $X(t)$ (Kapitel 2.4; $\underline{M} = \underline{I}$ für das LSQ-Verfahren und $\underline{M} = \underline{R}^{-1}$ für das ML-Verfahren). Dieser Schätzer hängt nur von der Beobachtung $Y(t)$ zu dem Zeitpunkt t ab. D.h. aber auch, daß er nur einen geringen Teil der zur Verfügung stehenden Information der gesamten Zeitreihe der Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, nutzt.

Für ein Zustandsraummodell mit einem AR(1)-Prozeß

$$F[X(t-1), \underline{A}] = \underline{A} X(t-1), \quad (2.10.6)$$

als Modellfunktion erhält man mit Hilfe des Kalman-Glättungsfilters einen Schätzer $\hat{X}(t)$, der linear von allen Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, abhängt und den quadratischen Fehler $\langle \|X(t) - \hat{X}(t)\|^2 \rangle$ minimiert (siehe Kapitel 2.4). Ein auf dem Kalman-Glättungsfilter aufbauendes Verfahren zur Bestimmung der Maximum-Likelihood-Schätzer der Parameter des Zustandsraummodells wurde von Gantert (1989) entwickelt. Zunächst wird der aus einem Erwartungsschritt und einem Maximierungsschritt bestehende EM-Algorithmus angewandt [z.B. Shumway

und Stoffer (1982), Schneider (1986), Kirchen (1988)]. In der Nähe des gesuchten Maximums der Maximum-Likelihood-Funktion wird zu einem Quasi-Newton-Verfahren übergegangen. Auf diese Weise wird die Konvergenzrate gegenüber der alleinigen Verwendung nur eines der beiden Verfahren verbessert. Dieses auf dem Kalman-Glättungsfilter aufbauende Schätzverfahren ist also noch genauer als das ML-Verfahren.

Eine Übersicht über diese Hierarchie der verschiedenen Schätzverfahren für Zustandsraummodelle gibt Tabelle 2.10.1.

Schätzverfahren	Modellfunktionen	Schätzer der $X(t)$	\underline{C}	α
EOFMDL	AR(p)-Prozeß	(2.10.3)	EOF	multivariater Durbin-Levinson-Algorithmus
EOFML	beliebig	(2.10.3)	EOF	Maximum-Likelihood-Schätzer
LSQ	beliebig	(2.10.5) mit $\underline{M} = \underline{I}$	Kleinst-Quadrate-Schätzer	
ML	beliebig	(2.10.5) mit $\underline{M} = \underline{R}^{-1}$	Maximum-Likelihood-Schätzer	
Kalman	AR(1)-Prozeß	Kalman-Glättungsfilter	Maximum-Likelihood-Schätzer	

Tabelle 2.10.1: Überblick über die Hierarchie der Schätzverfahren für Zustandsraummodelle, wie sie in diesem Kapitel zusammengefaßt sind. In der ersten Spalte steht die Bezeichnung des Verfahrens, in der zweiten die möglichen Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$, die mit dem jeweiligen Verfahren angepaßt werden können. Der entsprechende Schätzer der Zustandsvariablen $X(t)$ wird in der dritten Spalte angegeben. Die beiden letzten Spalten fassen zusammen, wie die Muster \underline{C} und die Modellparameter α bestimmt werden.

2.11 DAS LINEARE ZUSTANDSRAUMMODELL ALS EIN SYSTEM VON OSZILLATOREN UND

RELAXATOREN

Das Zustandsraummodell mit einem AR(p)-Prozeß (2.9.1) als Modellfunktion ist das allgemeinste lineare Zustandsraummodell der Form (2.1.5,6) mit einer zeitunabhängigen Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha]$. Es kann als ein System von Oszillatoren und Relaxatoren aufgefaßt werden.

Um dies zu sehen, muß der m-variate AR(p)-Prozeß (2.9.1) zunächst in einen (pxm)-variaten AR(1)-Prozeß

$$\underline{Z}(t) = \underline{A}\underline{Z}(t-1) + \underline{\zeta}(t), \quad \underline{\zeta} \sim \text{WN}(0, \underline{\beta}), \quad (2.11.1)$$

umgeschrieben werden. Dabei ist

$$\underline{Z}(t) = \begin{pmatrix} \underline{X}(t) \\ \underline{X}(t-1) \\ \vdots \\ \underline{X}(t-p+1) \end{pmatrix}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 & \dots & \underline{A}_p \\ \underline{1} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{0} & \dots & \underline{1} & \underline{0} \end{pmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \dots & \underline{0} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ \underline{0} & \dots & \underline{0} & \underline{0} \end{pmatrix}. \quad (2.11.2)$$

Dieser $(p \times m)$ -variate AR(1)-Prozeß kann nun als Linearkombination

$$\underline{Z}(t) = \underline{L}\underline{Z}'(t), \quad \underline{A} = \underline{L}\underline{A}'\underline{L}^{-1}, \quad \underline{\beta} = \underline{L}\underline{\beta}'\underline{L}^T \quad (2.11.3)$$

von stochastisch angeregten Oszillatoren und Relaxatoren

$$\underline{Z}'(t) = \underline{A}'\underline{Z}'(t-1) + \underline{\zeta}'(t), \quad \underline{\zeta}' \sim \text{WN}(0, \underline{\beta}'), \quad (2.11.4)$$

aufgefaßt werden, denn die Matrix \underline{A} läßt sich auf Blockdiagonalgestalt

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) & \\ 0 & & & \left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) \end{pmatrix} \quad (2.11.5)$$

bringen. Voraussetzung dafür ist, daß alle (komplexen) Eigenwerte der Matrix \underline{A}' verschieden sind. Die Blöcke stehen dabei für

$$\left(\begin{smallmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, r, \quad (2.11.6)$$

$$\left(\cdot \right) = \gamma_i, \quad i=1, \dots, p \times m - 2r. \quad (2.11.7)$$

Mit $(\alpha_i \pm i\beta_i)$ werden die $2r$ komplexen Eigenwerte der Matrix \underline{A} und mit γ_i die $p \times m - 2r$ reellen Eigenwerte bezeichnet. In Anhang A.3 wird die zugehörige Transformationsmatrix \underline{L} hergeleitet.

Als deterministische Lösung von (2.11.4) erhält man die Oszillatoren

$$\left. \begin{aligned} z_{2i-1}^d(t) &= z_i \exp(\kappa_i t) \cos(\omega_i t + \varphi_i), \\ z_{2i}^d(t) &= -z_i \exp(\kappa_i t) \sin(\omega_i t + \varphi_i), \end{aligned} \right\} \quad i=1, \dots, r, \quad (2.11.8)$$

mit der Dämpfungsrate $\kappa_i = \ln \left[\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \right]$, der $1/e$ -Abklingzeit $\tau_i = -1/\kappa_i$, der Schwingungsfrequenz $\omega_i = \arctan(\beta_i/\alpha_i)$ und der Periode $T_i = 2\pi/\omega_i$ sowie die Relaxatoren

$$z_{2r+i}^d(t) = z_i \exp[\kappa_i t], \quad i=1, \dots, p \times m - 2r, \quad (2.11.9)$$

mit der Dämpfungsrate $\kappa_i = \ln[|\gamma_i|]$ und der 1/e-Abklingzeit $\tau_i = -1/\kappa_i$. Physikalisch sinnvoll sind nur stabile Oszillatoren und Relaxatoren mit einer Dämpfungsrate $\kappa_i < 0$.

Diese Oszillatoren und Relaxatoren können auch im Raum der Beobachtungen $Y(t)$ veranschaulicht werden. Unter Berücksichtigung der Beobachtungsgleichung (2.1.5) und der Transformationen (2.11.2,3) ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^m c_{\mu} X_{\mu}(t) = \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} Z_{\mu}(t) = \sum_{\mu=1}^m \sum_{m=1}^{p \times m} c_{\mu}^{1, \mu m} Z'_m(t). \quad (2.11.10)$$

Man beachte, daß die Zustandsvariable $X(t)$ nur aus den ersten m -Komponenten des $(p \times m)$ -komponentigen Vektors $Z(t)$ besteht (2.11.2). Faßt man die Linearkombination der Muster zu

$$c'_m = \sum_{\mu=1}^m c_{\mu}^{1, \mu m}, \quad m=1, \dots, p \times m, \quad (2.11.11)$$

zusammen, so erhält man

$$\sum_{\mu=1}^m c_{\mu} X_{\mu}(t) = \sum_{m=1}^{p \times m} c'_m Z'_m(t). \quad (2.11.12)$$

Für die einzelnen Oszillatoren und Relaxatoren (2.11.8,9) folgt dann als deterministische Lösung des Zustandsraummodells (2.1.5,6):

$$Y_i^d(t) = c'_{2i-1} z_i \exp[\kappa_i t] \cos[\omega_i t + \varphi_i] - c'_{2i} z_i \exp[\kappa_i t] \sin[\omega_i t + \varphi_i], \quad i=1, \dots, r, \quad (2.11.13)$$

$$Y_i^d(t) = c'_{2r+i} z_i \exp[\kappa_i t], \quad i=1, \dots, p \times m - 2r. \quad (2.11.14)$$

Der i -te Oszillator beschreibt demnach im Beobachtungsraum einen Zyklus

$$\begin{array}{ccc} c'_{2i-1} & \longrightarrow & -c'_{2i} \\ \uparrow & & \downarrow \\ c'_{2i} & \longleftarrow & -c'_{2i-1} \end{array}$$

bei dem in Abständen von einer viertel Periode, $T_i/4$, die POPs c'_{2i-1} , $-c'_{2i}$, $-c'_{2i-1}$ und c'_{2i} als „reine“ Zustände auftreten.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß trotz der gewählten speziellen Form der Systemmatrix \mathcal{A}' (2.11.5) und der POPs $\underline{c}' = (c'_1, \dots, c'_{p \times m})$ (2.11.11) noch immer eine Freiheit in der Wahl der Darstellung besteht. Um diese auszuschließen, sind weitere Nebenbedingungen notwendig, die im Anhang A.4 zusammengefaßt sind.

2.12 ZUR ÄQUIVALENZ VON AR(p)- UND AR(1)-PROZESSEN

Aus dem vorhergehenden Kapitel wissen wir, daß der zu dem m-variaten AR(p)-Prozeß (2.9.1) äquivalente (p×m)-variante AR(1)-Prozeß (2.11.1) eine spezielle Gestalt hat (2.11.2). Man beachte dabei besonders die Beziehung zwischen den Komponenten der Vektoren X(t) und Z(t):

$$Z_{\tau \times m + \mu} = X_{\mu}(t - \tau), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \tau = 0, \dots, p-1. \quad (2.12.1)$$

Wesentlich ist außerdem, daß der Rang der Kovarianzmatrix des Rauschens der beiden äquivalenten Prozesse gleich ist:

$$\text{rg}[Q] = \text{rg}[\beta]. \quad (2.12.2)$$

Es gilt demnach festzuhalten, daß ein Zustandsraummodell (2.1.5,6) mit einem m-variaten AR(p)-Prozeß als Modellfunktion (2.9.1) im allgemeinen einen anderen stochastischen Prozeß beschreibt als ein Zustandsraummodell mit einem (p×m)-variaten AR(1)-Prozeß (2.11.1).

3. STATISTISCHE TESTS

Die Anpassung eines Modells ist nur ein Punkt bei der Analyse von Zeitreihen. Es sind zusätzliche Tests notwendig, die das Ergebnis der Modellanpassung erhärten. In diesem Kapitel werden einige Hilfsmittel der Statistik bereitgestellt, die bei den Anwendungen in den Kapiteln 4 und 5 benötigt werden.

Grundlegend im Bereich der Zeitreihenanalyse ist die Annahme, daß der beobachtete Prozeß stationär ist. Als erstes wird deshalb in Kapitel 3.1 ein Stationaritätstest eingeführt. An Hand von Simulationen wird die Anwendbarkeit dieses Tests diskutiert. Eine weitere, häufig gemachte Annahme ist, daß die Beobachtungen von einem linearen Prozeß stammen. Ein Test auf Linearität wird in Kapitel 3.2 beschrieben und diskutiert.

Wird an eine Zeitreihe ein Modell angepaßt, ist es wichtig, neben den geschätzten Modellparametern auch deren Vertrauensintervalle (Kapitel 3.4) als Maß für die Verlässlichkeit der Schätzung anzugeben. Diagnostische Tests der geschätzten Rauschterme (Kapitel 3.5) geben Hinweise darauf, ob das Modell die Informationen des beobachteten Prozesses vollständig beschreibt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Modellparameter und der Testgrößen werden in dieser Arbeit durch Monte-Carlo-Simulationen approximiert. In Kapitel 3.3 sind die Voraussetzungen genannt, die dabei eingehen.

Ein sehr wichtiges Kriterium für die Aussagefähigkeit eines angepaßten Modells ist die Vorhersagbarkeit des modellierten Prozesses. Abschließend werden deshalb in Kapitel 3.6 zwei Maße vorgestellt, die zusammen die Vorhersagegüte eines angepaßten Modells charakterisieren.

3.1 EIN TEST AUF STATIONARITÄT

a) Der Stationaritätstest nach Priestley und Subba Rao

Eine der grundlegenden Annahmen bei der Zeitreihenanalyse ist, daß der beobachtete Prozeß stationär ist, d.h. daß alle seine statistischen Eigenschaften in der Zeit konstant sind. Bei der Einführung des Zustandsraummodells (2.1.5,6) haben wir dies ebenfalls vorausgesetzt. Soll die Anpassung eines Zustandsraummodells an die Beobachtungen sinnvoll sein, so müssen bei linearen Modellfunktionen zumindest deren erste und zweite Momente (Mittelwert, Varianz) zeitlich konstant sein.

Der Test auf Stationarität, der in diesem Kapitel beschrieben wird, geht auf eine Arbeit von Priestley und Subba Rao (1969) zurück. Timmer (1990) griff die Idee des Tests kürzlich wieder auf. Geprüft wird die Hypothese, daß die zu verschiedenen Zeitpunkten bestimmten Spektren einer Zeitreihe $Z(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, gleich sind. Es werden nur die wesentlichen Punkte des Tests erwähnt, für weitere Einzelheiten sei auf die beiden zitierten Arbeiten verwiesen. Voraussetzung für diesen Test ist, daß der Mittelwert der Zeitreihe $Z(t)$ stets verschwindet und die zweiten Momente zu allen Zeiten endlich sind, da sonst die Spektren nicht berechnet werden können.

Um die Spektren zu verschiedenen Zeitpunkten zu erhalten, gehen wir von den Fourier-Transformierten kurzer Ausschnitte der Zeitreihe $Z(t)$ aus:

$$\tilde{U}(t, \omega) = (1/2\sqrt{\pi h}) \sum_{\tau=t-h}^{t+h} Z(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (3.1.1)$$

Für einen größeren Abschnitt der Zeitreihe $Z(t)$, $t=t_1-T/2, \dots, t_1+T/2$, der durch die Zeit t_1 gekennzeichnet wird, erhält man durch Mittelung

$$\tilde{f}(t_1, \omega) = \frac{1}{T+1} \sum_{\tau=-T/2}^{T/2} |\tilde{U}(t_1 - \tau, \omega)|^2 \quad (3.1.2)$$

einen konsistenten Schätzer für das Spektrum dieses Abschnittes. Asymptotisch gilt für den Erwartungswert und die Varianz des Schätzers

$$E[\tilde{f}(t, \omega)] = f(t, \omega), \quad \text{var}[\tilde{f}(t, \omega)] = \frac{4h}{3T} f^2(t, \omega). \quad (3.1.3)$$

Die Schätzwerte $\tilde{f}(t_1, \omega_1)$ und $\tilde{f}(t_2, \omega_2)$ sind statistisch unabhängig, wenn eine der beiden Bedingungen

$$|\omega_1 - \omega_2| \gg \frac{\pi}{h}, \quad |t_1 - t_2| \gg T \quad (3.1.4)$$

gültig ist. Durch eine logarithmische Transformation

$$Y(t, \omega) = \log[f(t, \omega)] \quad (3.1.5)$$

erhalten wir einen Schätzer $\tilde{Y}(t, \omega)$ mit den asymptotischen Eigenschaften

$$E[\tilde{Y}(t, \omega)] = Y(t, \omega), \quad \text{var}[\tilde{Y}(t, \omega)] = \frac{4h}{3T} \quad \text{mit } \omega \neq 0, \pi. \quad (3.1.6)$$

Die Varianz dieses transformierten Schätzers ist unabhängig von t und ω . Es ist auch möglich,

$$\tilde{Y}(t, \omega) = Y(t, \omega) + \varepsilon(t, \omega) \quad (3.1.7)$$

zu schreiben, wobei der Fehler $\varepsilon(t, \omega)$ mit den Eigenschaften

$$E[\varepsilon(t, \omega)] = 0, \quad \text{var}[\varepsilon(t, \omega)] = \frac{4h}{3T} \quad \text{mit } \omega \neq 0, \pi, \quad (3.1.8)$$

die Abweichung des Schätzwertes $\tilde{Y}(t, \omega)$ von seinem asymptotisch zu erwartenden Wert $Y(t, \omega)$ erfaßt. Wählen wir Zeiten t_1 und Frequenzen ω_j , zu denen $Y(t, \omega)$ geschätzt wird, so daß beide Bedingungen aus (3.1.4) erfüllt sind, ist der Fehler $\varepsilon(t_1, \omega_j)$ für verschiedene Zeiten t_1 und Frequenzen ω_j unkorreliert. Wir können davon ausgehen, daß $\varepsilon(t_1, \omega_j)$ (zumindest asymptotisch) unabhängig und normalverteilt ist.

Das Spektrum $f(\omega)$ eines stationären Prozesses $Z_0(t)$ ist unabhängig von der Zeit. Die Beziehung (3.1.7) ist in diesem Fall von der Form

$$\tilde{Y}(t, \omega) = \mu + \beta(\omega) + \varepsilon(t, \omega). \quad (3.1.9)$$

Das Spektrum eines gleichförmig modulierten Prozesses $Z(t) = c(t)Z_0(t)$ ist $f(t, \omega) = c^2(t)f(\omega)$. Wir erhalten für solche Prozesse mit (3.1.5) eine Verallgemeinerung von (3.1.9),

$$\tilde{Y}(t, \omega) = \mu + \alpha(t) + \beta(\omega) + \varepsilon(t, \omega). \quad (3.1.10)$$

Die allgemeinste Form

$$\tilde{Y}(t, \omega) = \mu + \alpha(t) + \beta(\omega) + \gamma(t, \omega) + \varepsilon(t, \omega). \quad (3.1.11)$$

enthält außerdem einen Term $\gamma(t, \omega)$, der von der Zeit t und der Frequenz ω abhängt. Mit den Nebenbedingungen

$$\int_t \alpha(t) = 0, \quad \int_\omega \beta(\omega) = 0, \quad \int_t \gamma(t, \omega) = 0, \quad \int_\omega \gamma(t, \omega) = 0 \quad (3.1.12)$$

sind (3.1.9-11) eindeutig formuliert.

Der Test auf Stationarität ist demnach zweiteilig. Zuerst gilt es festzustellen, ob die Behauptung zurückgewiesen werden muß, den Beobachtungen liege ein gleichförmig modulierter Prozeß zugrunde. In einem zweiten Schritt kann dann gegebenenfalls geprüft werden, ob die Behauptung verworfen werden muß, der beobachtete Prozeß sei stationär. Der eigentliche Test wird mit Hilfe der Varianzanalyse durchgeführt, wie sie z.B. Hartung (1982) oder Pruscha (1989) ausführlich beschreiben. Obwohl nur eine Beobachtung pro „Zelle“ vorliegt, ist es möglich, auch den „Wechselwirkungsterm“ $\gamma(t, \omega)$ zu testen, da die asymptotisch zu erwartende Varianz $\sigma^2 = \text{var}[\varepsilon(t, \omega)] = \frac{4h}{3T}$ aus (3.1.8) bekannt ist. Die benötigten Testgrößen sind

$$S_{\alpha} = n_{\omega} \sum_{\tau} \left(Y(t, \cdot) - Y(\cdot, \cdot) \right)^2, \quad (3.1.13)$$

$$S_{\gamma} = \sum_{\tau} \sum_{\omega} \left(Y(t, \omega) - Y(t, \cdot) - Y(\cdot, \omega) + Y(\cdot, \cdot) \right)^2 \quad (3.1.14)$$

mit

$$Y(t, \cdot) = (1/n_{\omega}) \sum_{\omega} Y(t, \omega), \quad (3.1.15)$$

$$Y(\cdot, \omega) = (1/n_t) \sum_{\tau} Y(t, \omega), \quad (3.1.16)$$

$$Y(\cdot, \cdot) = (1/n_t n_{\omega}) \sum_{\tau} \sum_{\omega} Y(t, \omega). \quad (3.1.17)$$

Die Summen in (3.1.13-17) erstrecken sich über die Zeiten t_i und Frequenzen ω_j , zu denen $Y(t, \omega)$ geschätzt wird. Deren Anzahl bezeichnen wir mit n_t und n_{ω} .

Unter der Nullhypothese, daß der beobachtete Prozeß gleichförmig moduliert ist, d.h. daß $\gamma(t, \omega)$ aus (3.1.11) konstant ist, ist die Größe S_{γ}/σ^2 (3.1.14) eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit $(n_t - 1)(n_{\omega} - 1)$ Freiheitsgraden. Ist der Term $\gamma(t, \omega)$ nicht signifikant, so können wir prüfen, ob es sich um einen stationären Prozeß handelt, d.h. ob $\alpha(t)$ aus (3.1.10) konstant ist. Die geeignete Testgröße S_{α}/σ^2 (3.1.13) ist eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit $(n_t - 1)$ Freiheitsgraden. Ist der Term $\gamma(t, \omega)$ jedoch signifikant, kann man testen, ob sich die Nichtstationarität auf eine bestimmte Frequenz ω beschränkt. Die geeignete Testgröße $S(\omega)/\sigma^2$ mit

$$S(\omega) = \sum_{\tau} \left(Y(t, \omega) - Y(\cdot, \omega) \right)^2 \quad (3.1.18)$$

ist ebenfalls eine χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit $(n_t - 1)$ Freiheitsgraden.

b) Die Analyse simulierter stationärer Prozesse

In die Formulierung des Stationaritätstests gehen verschiedene Voraussetzungen ein. Es bietet sich von daher an, die asymptotisch zu erwartenden Verteilungen der Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 durch die Analyse simulierter stationärer Prozesse zu approximieren.

Betrachten wir zunächst den einfachsten stationären Prozeß, ein Gaußsches weißes Rauschen

$$Z(t) = \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,25), \quad (3.1.19)$$

mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz 25. Die simulierte Zeitreihe sei $t_{\max} = 480$ Zeitschritte lang. Die bei dem Stationaritätstest verwendeten Parameter sind in Tabelle 3.1.1 zusammengefaßt. Der Parameter h aus (3.1.1) wurde gleich der Anzahl der Frequenzpunkte n_{ω} gewählt. Der Abstand der Zeitpunkte t_i ist gleich der Länge der Zeitabschnitte T , der der Frequenzen ist π/h (siehe (3.1.4)).

Die asymptotisch zu erwartenden χ^2 -Verteilungen und die durch die Analyse von 500 Simulationen approximierten Verteilungen der Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 sind in den Abbildungen 3.1.1 gezeigt. In beiden Fällen ist eine gute Übereinstimmung festzustellen.

Betrachten wir als einen weiteren stationären Prozeß den AR(2)-Prozeß

$$Z(t) = a_1 Z(t-1) + a_2 Z(t-2) + \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,1), \quad (3.1.20)$$

mit einer Periode von 10 Zeitschritten und einer $1/e$ -Abklingzeit von 20 Zeitschritten, der durch ein Gaußsches weißes Rauschen $\zeta(t)$ mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz 1 angetrieben wird. Die simulierte Zeitreihe sei wiederum $t_{\max} = 480$ Zeitschritte lang. Die Parameter des Stationaritätstest seien dieselben wie zuvor (Tabelle 3.1.1). Die durch die Analyse von 500 Simulationen approximierten Verteilungen der Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 weichen erheblich von den asymptotischen Verteilungen ab, wie in den Abbildungen 3.1.2 zu sehen ist. Die Testgröße S_{α}/σ^2 nimmt viel höhere Werte an, die Werte der Testgröße S_{γ}/σ^2 sind dagegen zu klein.

Länge der Zeitreihe	$t_{\max} = 480$
Anzahl der Zeitabschnitte	$n_t = 4$
Anzahl der Frequenzen	$n_{\omega} = h = 6$
Länge der Zeitabschnitte	$T = 117$
Zeitabschnitte	$t_i = 65 + (i-1)T, \quad i=1, \dots, n_t$
Frequenzen	$\omega_j = \pi/2h + (j-1)\pi/h, \quad j=1, \dots, n_{\omega}$
Varianz	$\sigma^2 = 4h/3T = 0.068$

Tabelle 3.1.1: Die bei dem Stationaritätstest einer Zeitreihe von $t_{\max} = 480$ Zeitschritten Länge verwendeten Parameterwerte.

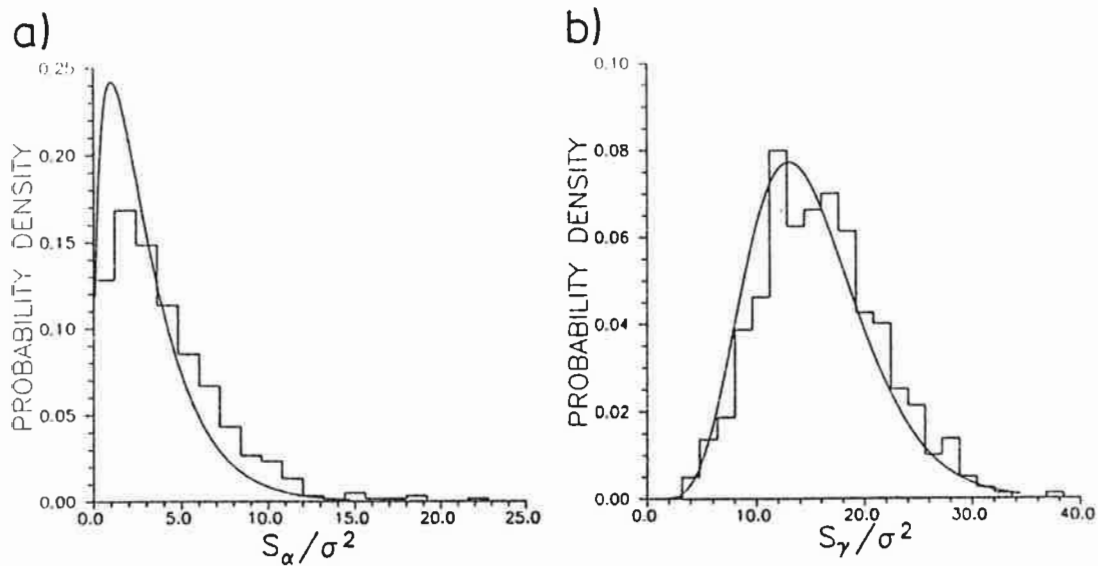


Abbildung 3.1.1: Die asymptotischen und die simulierten Verteilungen der Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 . Die simulierten Verteilungen beruhen auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 480$ eines Gaußschen weißen Rauschens.

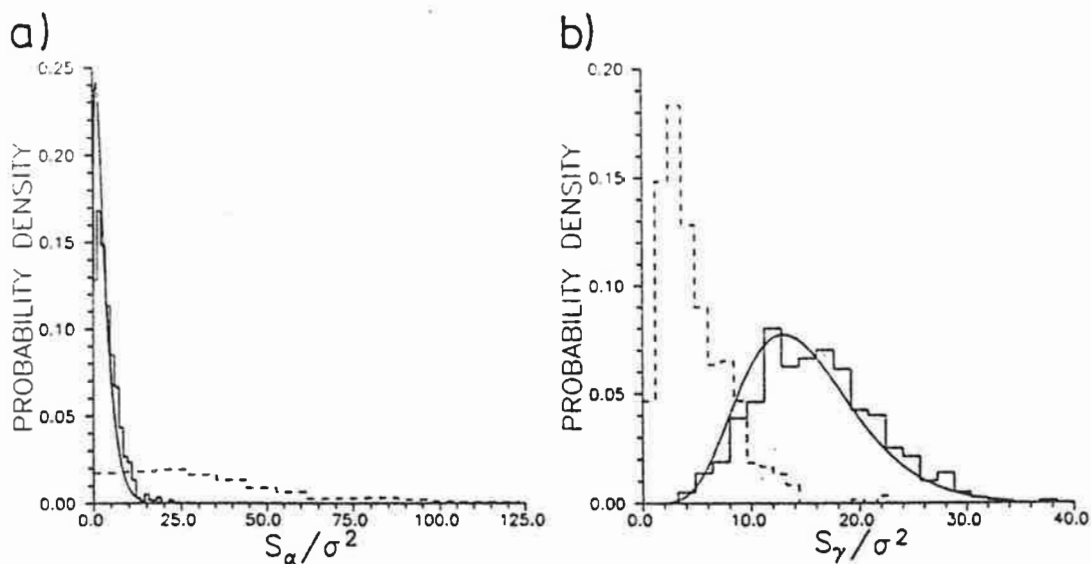


Abbildung 3.1.2: Für die Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 sind neben den in den Abbildungen 3.1.1 gezeigten Verteilungen diejenigen Verteilungen dargestellt, die auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 480$ eines AR(2)-Prozesses beruhen (gestrichelte Linien). Der AR(2)-Prozeß hat eine Periode von 10 Zeitschritten und eine $1/e$ -Abklingzeit von 20 Zeitschritten.

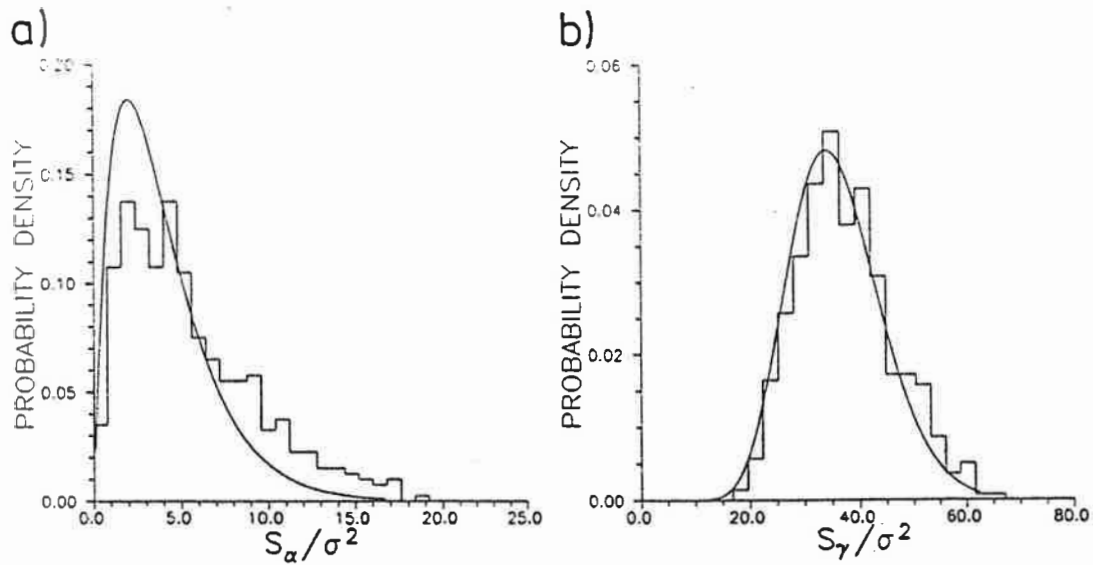


Abbildung 3.1.3: Die asymptotischen und die simulierten Verteilungen der Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 . Die simulierten Verteilungen beruhen auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 5000$ eines Gaußschen weißen Rauschens.

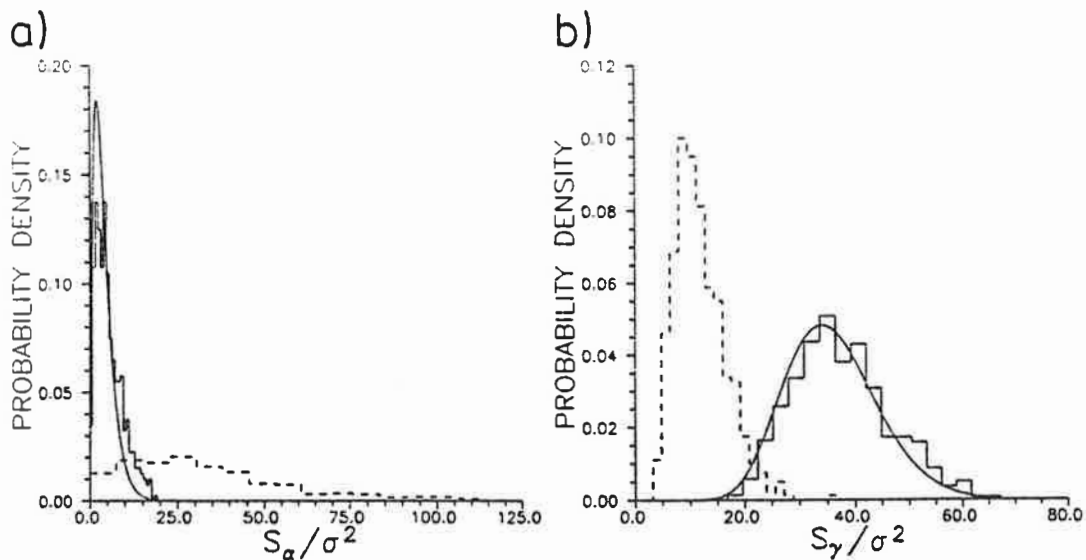


Abbildung 3.1.4: Für die Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 sind neben den in den Abbildungen 3.1.3 gezeigten Verteilungen diejenigen Verteilungen dargestellt, die auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 5000$ eines AR(2)-Prozesses beruhen (gestrichelte Linien). Der AR(2)-Prozeß hat eine Periode von 10 Zeitschritten und eine $1/e$ -Abklingzeit von 20 Zeitschritten.

Auch bei der Analyse von Zeitreihen mit $t_{\max} = 5000$ Zeitschritten Länge und den Parametern aus Tabelle 3.1.2 für den Stationaritätstest ergibt sich dasselbe Bild, wie aus den Abbildungen 3.1.3 und 3.1.4 zu entnehmen ist.

Länge der Zeitreihe	$t_{\max} = 5000$
Anzahl der Zeitabschnitte	$n_t = 5$
Anzahl der Frequenzen	$n_\omega = h = 10$
Länge der Zeitabschnitte	$T = 997$
Zeitabschnitte	$t_i = 509 + (i-1)T, i=1, \dots, n_t$
Frequenzen	$\omega_j = \pi/2h + (j-1)\pi/h, j=1, \dots, n_\omega$
Varianz	$\sigma^2 = 4h/3T = 0.013$

Tabelle 3.1.2: Die bei dem Stationaritätstest einer Zeitreihe von $t_{\max} = 5000$ Zeitschritten Länge verwendeten Parameterwerte.

c) Die Voraussetzungen des Tests

Offenbar sind die Voraussetzungen, die bei dem Stationaritätstest gemacht werden, im Falle des AR(2)-Prozesses nicht erfüllt. Eine der Voraussetzungen ist, daß die Schätzwerte $\tilde{Y}(t_i, \omega_j)$ und damit die Fehler $\varepsilon(t_i, \omega_j)$ normalverteilt sind. Die aus den Simulationen berechneten dritten und vierten Momente von $\tilde{Y}(t_i, \omega_j)$ sind in allen vier Beispielen mit dieser Voraussetzung verträglich. Eine weitere Voraussetzung ist, daß die Varianz der Schätzwerte $\tilde{Y}(t_i, \omega_j)$ unabhängig von der Frequenz ω_j ist (3.1.6). Es zeigt sich aber, daß dies nur für den Prozeß des Gaußschen weißen Rauschens zutrifft.

In Tabelle 3.1.3 sind die aus den Analysen des simulierten Gaußschen weißen Rauschens mit $t_{\max} = 480$ berechneten Varianzen der Schätzwerte $\tilde{Y}(t_i, \omega_j)$ und die über die Zeitpunkte t_i gemittelten Varianzen zusammengefaßt. Die Abweichungen voneinander sind zufällig. Die Varianzen von $\tilde{Y}(t_i, \omega_j)$, die auf der Analyse des simulierten AR(2)-Prozesses beruhen und in Tabelle 3.1.4 zu finden sind, zeigen dagegen eine deutliche Abhängigkeit von den Frequenzen ω_j . Alle berechneten Varianzen sind größer als der asymptotische Wert $\sigma^2 = 0.068$.

$t_i \backslash \omega_j$	0.262	0.785	1.309	1.833	2.356	2.880
65	0.070	0.070	0.076	0.078	0.073	0.077
182	0.089	0.078	0.076	0.068	0.070	0.083
299	0.091	0.068	0.075	0.076	0.073	0.083
416	0.080	0.076	0.076	0.071	0.072	0.086
$\frac{1}{n_t} \sum_t$	0.083	0.073	0.076	0.073	0.072	0.082

Tabelle 3.1.3: Die Varianzen der Schätzwerte $\check{Y}(t_i, \omega_j)$ und die über die Zeitpunkte gemittelten Varianzen, die aus den Analysen des simulierten Gaußschen weißen Rauschens mit $t_{\max} = 480$ berechnet wurden. Die asymptotisch erwartete Varianz hat den Wert $\sigma^2 = 4h/3T = 0.068$.

$t_i \backslash \omega_j$	0.262	0.785	1.309	1.833	2.356	2.880
65	0.096	0.226	0.148	0.151	0.161	0.166
182	0.089	0.195	0.125	0.131	0.141	0.146
299	0.093	0.190	0.124	0.131	0.137	0.142
416	0.112	0.224	0.150	0.155	0.158	0.165
$\frac{1}{n_t} \sum_t$	0.098	0.208	0.137	0.142	0.149	0.155

Tabelle 3.1.4: Die Varianzen der Schätzwerte $\check{Y}(t_i, \omega_j)$ und die über die Zeitpunkte gemittelten Varianzen, die aus den Analysen des simulierten AR(2)-Prozesses mit $t_{\max} = 480$ berechnet wurden. Die asymptotisch erwartete Varianz hat den Wert $\sigma^2 = 4h/3T = 0.068$.

Für die Zeitreihen mit $t_{\max} = 5000$ erwarten wir, daß die asymptotisch geltenden Aussagen besser erfüllt sind. Im Falle des Gaußschen weißen Rauschens (Tabelle 3.1.5) streuen die Varianzen sehr viel weniger und liegen nur unwesentlich über dem asymptotischen Wert von $\sigma^2 = 0.013$. Für den AR(2)-Prozeß (Tabelle 3.1.6) besteht die Abhängigkeit der Varianzen von den Frequenzen ω_j jedoch immer noch.

$t_i \backslash \omega_j$	0.157	0.471	0.785	1.100	1.414	1.728	2.042	2.356	2.670	2.985
509	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.014	0.014	0.013	0.013	0.017
1506	0.017	0.015	0.014	0.014	0.014	0.013	0.014	0.015	0.013	0.018
2503	0.016	0.014	0.015	0.015	0.013	0.015	0.014	0.013	0.013	0.015
3500	0.015	0.015	0.013	0.014	0.014	0.013	0.014	0.013	0.014	0.017
4497	0.016	0.014	0.014	0.014	0.015	0.015	0.014	0.014	0.016	0.015
$\frac{1}{n_t} \sum_t$	0.016	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.016

Tabelle 3.1.5: Die Varianzen der Schätzwerte $\tilde{Y}(t_1, \omega_j)$ und die über die Zeitpunkte gemittelten Varianzen, die aus den Analysen des simulierten Gaußschen weißen Rauschens mit $t_{\max} = 5000$ berechnet wurden. Die asymptotisch erwartete Varianz hat den Wert $\sigma^2 = 4h/3T = 0.013$.

$t_i \backslash \omega_j$	0.157	0.471	0.785	1.100	1.414	1.728	2.042	2.356	2.670	2.985
509	0.013	0.029	0.032	0.021	0.018	0.016	0.014	0.011	0.010	0.010
1506	0.012	0.025	0.026	0.016	0.015	0.014	0.011	0.010	0.009	0.009
2503	0.013	0.023	0.027	0.017	0.015	0.014	0.012	0.010	0.010	0.009
3500	0.013	0.025	0.028	0.017	0.016	0.015	0.013	0.011	0.010	0.009
4497	0.012	0.025	0.026	0.016	0.015	0.014	0.012	0.010	0.010	0.010
$\frac{1}{n_t} \sum_t$	0.013	0.025	0.028	0.017	0.016	0.015	0.012	0.010	0.010	0.009

Tabelle 3.1.6: Die Varianzen der Schätzwerte $\tilde{Y}(t_1, \omega_j)$ und die über die Zeitpunkte gemittelten Varianzen, die aus den Analysen des simulierten AR(2)-Prozesses mit $t_{\max} = 5000$ berechnet wurden. Die asymptotisch erwartete Varianz hat den Wert $\sigma^2 = 4h/3T = 0.068$.

d) *Die Analyse simulierter nichtstationärer Prozesse*

In der Klimaforschung liegen oft nur kurze Zeitreihen ($t_{\max} < 1000$) vor. Um zu sehen, ob der Stationaritätstest trotz der aufgezeigten Mängel auf solche kurze Zeitreihen anwendbar ist, werden noch einige Prozesse mit $t_{\max} = 480$ untersucht. Insbesondere interessiert uns die Frage, ob nichtstationäre Prozesse als solche erkannt werden können.

Das erste Beispiel eines nichtstationären Prozesses sei ein gleichförmig modulierter Prozeß

$$Z(t) = c(t)Z_0(t). \quad (3.1.21)$$

$Z_0(t)$ ist dabei wiederum der AR(2)-Prozeß (3.1.20) mit der Periode 10 und der $1/e$ -Abklingzeit 20. Die Funktion $c(t)$ steigt in dem beobachteten Zeitraum linear von 0.0 auf 1.0 an. Wir wollen den Stationaritätstest durch einen Vergleich der Testgrößen S_α/σ^2 und S_γ/σ^2 mit den Verteilungen der Testgrößen des AR(2)-Prozesses $Z_0(t)$ entscheiden. Die Abbildungen 3.1.5 zeigen die Verteilungen der Testgrößen des Prozesses $Z(t)$ (durchgezogene Linien) und $Z_0(t)$ (gestrichelte Linien). Die beiden Verteilungen der Testgröße S_γ/σ^2 unterscheiden sich nur wenig voneinander (Abbildung 3.1.5b). Die Behauptung, der simulierte Prozeß sei gleichförmig moduliert, wird auf dem 5%-Signifikanzniveau nur in 1% der Fälle fälschlich abgelehnt. Bei dem zweiten Teil des Testes, der sich auf die Testgröße S_α/σ^2 bezieht (Abbildung 3.1.5a), wird der Prozeß $Z(t)$ eindeutig als nichtstationär erkannt.

Ein gleichförmig modulierter Prozeß $Z(t)$ (3.1.21), dessen Funktion $c(t)$ in dem Beobachtungszeitraum linear nur wenig von 0.75 bis 1.25 ansteigt, ist ein wesentlich realistischerer Fall. Die Abbildungen 3.1.6 zeigen die entsprechenden Verteilungen der beiden Testgrößen. Auf dem 5%-Signifikanzniveau wird der Prozeß nur in 1% der Fälle als nicht gleichförmig moduliert erkannt (Abbildung 3.1.6b). Allerdings wird auf dem 5%-Signifikanzniveau die Behauptung, der Prozeß sei stationär, in 30% der Fälle nicht abgelehnt.

Als letztes Beispiel betrachten wir einen AR(2)-Prozeß

$$Z(t) = a_1(t)Z(t-1) + a_2(t)Z(t-2) + \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,1), \quad (3.1.22)$$

mit zeitabhängigen Parametern $a_1(t)$ und $a_2(t)$, der durch ein Gaußsches weißes Rauschen $\zeta(t)$ mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz 1 angetrieben wird. Während des Beobachtungszeitraumes steigen die Periode des Prozesses und die $1/e$ -Abklingzeit linear von 10 auf 30 Zeitschritte bzw. von 20 auf 60 Zeitschritte an. In den Abbildungen 3.1.7 sind neben den Verteilungen der Testgrößen S_α/σ^2 und S_γ/σ^2 dieses Prozesses (durchgezogene Linien), auch die des AR(2)-Prozesses (3.1.20) mit der Periode 10 und der $1/e$ -Abklingzeit 20 (lang gestrichelte Linien), sowie des AR(2)-Prozesses mit der Periode 30 und der $1/e$ -Abklingzeit 40 (kurz gestrichelte Linien) gezeigt. Im Vergleich zu

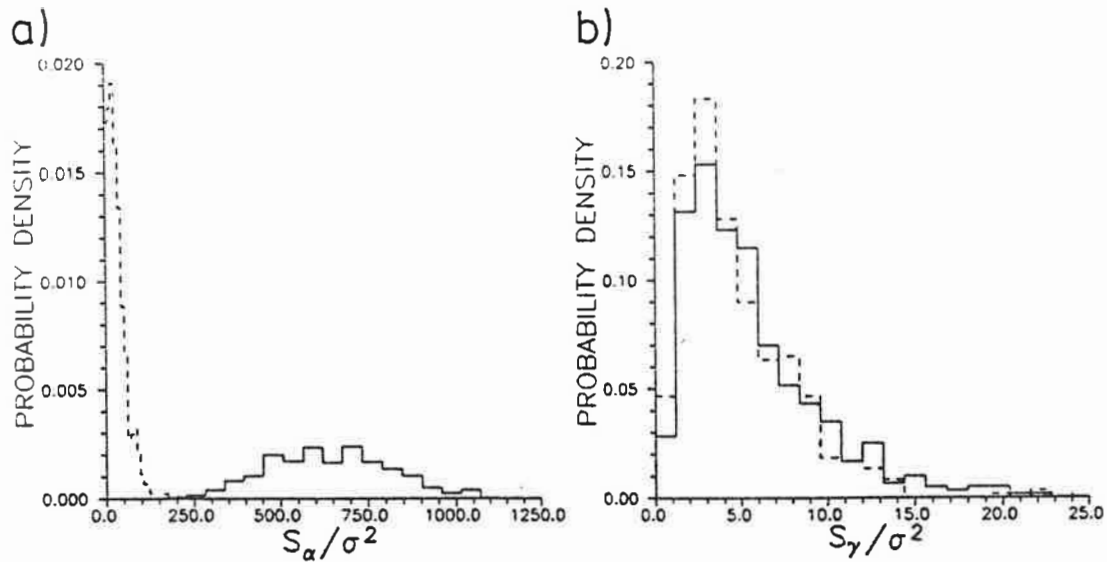


Abbildung 3.1.5: Die durchgezogenen Linien stehen für die simulierten Verteilungen der Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 eines gleichförmig modulierten Prozesses $Z(t) = c(t) Z_0(t)$, die gestrichelten für die des AR(2)-Prozesses $Z_0(t)$. Die Funktion $c(t)$ steigt in dem beobachteten Zeitraum von $t_{\max} = 480$ Zeitschritten linear von 0.0 auf 1.0 an. Der AR(2)-Prozeß hat eine Periode von 10 Zeitschritten und eine $1/e$ -Abklingzeit von 20 Zeitschritten.

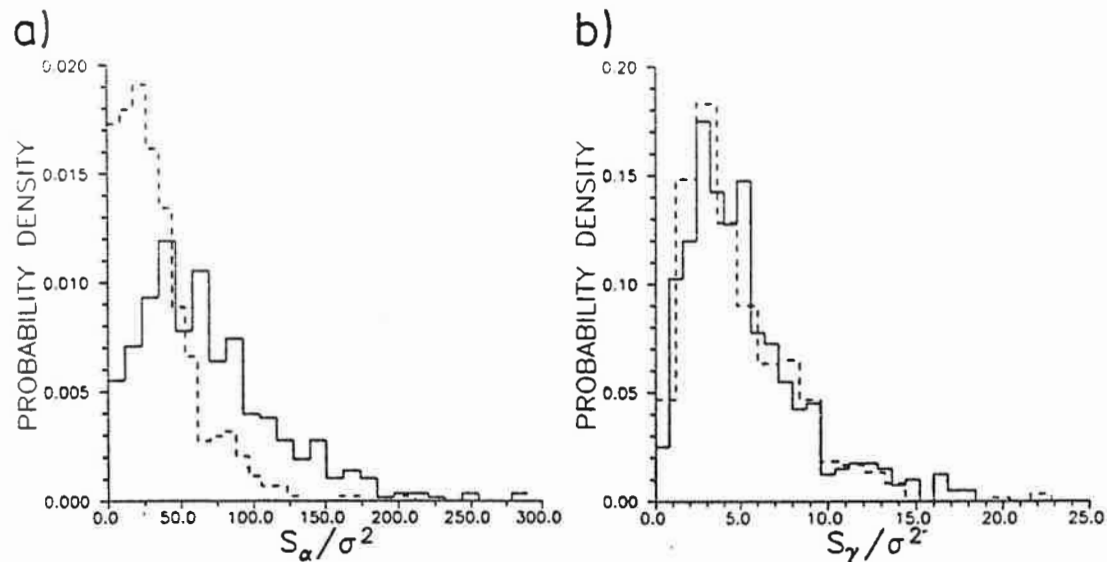


Abbildung 3.1.6: Wie in Abbildung 3.1.5 sind die simulierten Verteilungen der Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 eines gleichförmig modulierten Prozesses $Z(t) = c(t) Z_0(t)$ (durchgezogene Linien) und die des AR(2)-Prozesses $Z_0(t)$ (gestrichelte Linie) zu sehen. In diesem Fall steigt die Funktion $c(t)$ in dem beobachteten Zeitraum ($t_{\max} = 480$) linear nur wenig von 0.75 auf 1.25 an.

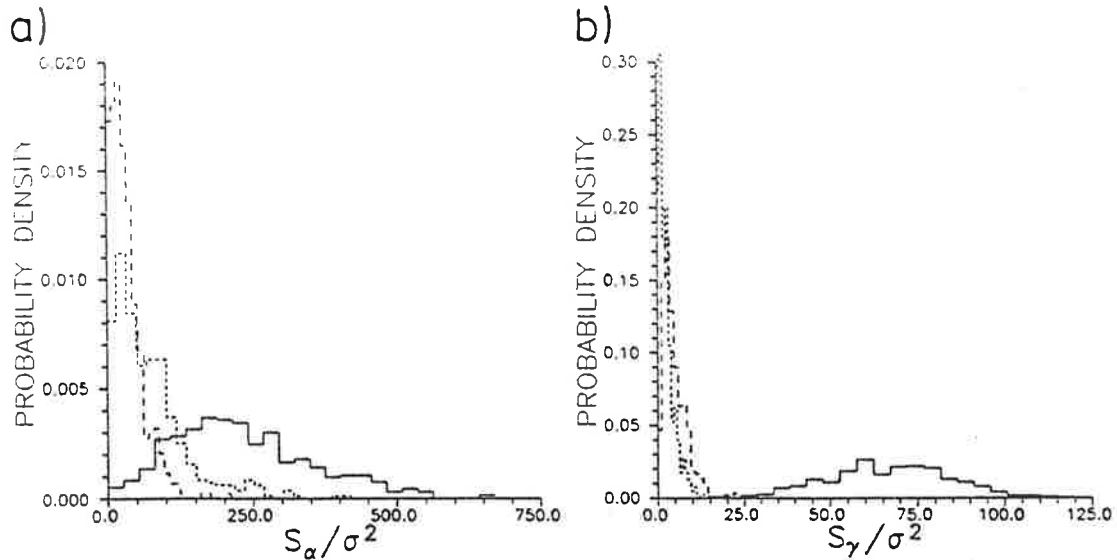


Abbildung 3.1.7: Den simulierten Verteilungen der Testgrößen a) S_α/σ^2 und b) S_γ/σ^2 eines AR(2)-Prozesses, bei dem während des Beobachtungszeitraumes von $t_{\max} = 480$ die Periode von 10 auf 20 Zeitschritte und die $1/e$ -Abklingzeit von 20 auf 60 Zeitschritte linear ansteigt (durchgezogene Linien), sind die Verteilungen zweier AR(2)-Prozesse mit konstanten Parametern gegenübergestellt. Die Periode und die $1/e$ -Abklingzeit dieser beiden AR(2)-Prozesse (3.1.20) beträgt 10 und 20 (lang gestrichelte Linien) bzw. 30 und 40 Zeitschritte (kurz gestrichelte Linien).

diesen beiden Prozessen wird $Z(t)$ (3.1.22) durch die Verteilung der Testgröße S_γ/σ^2 eindeutig als nicht gleichförmig moduliert und damit nichtstationär erkannt. Die Testgröße S_γ/σ^2 nimmt im Falle eines Gaußschen weißen Rauschens (3.1.19) bekanntlich höhere Werte an als bei einem AR(2)-Prozeß (Abbildung 3.1.2). Aber auch im Vergleich zu dieser Verteilung wird der Prozeß als nichtstationär eingestuft.

Obwohl die simulierten Verteilungen teilweise deutlich von den asymptotischen Verteilungen abweichen (Abbildung 3.1.2), zeigen die Beispiele, daß der Stationaritätstest recht gut zwischen stationären und nichtstationären Prozessen unterscheidet. Bei schwach instationären Prozessen, wie dem Beispiel des gleichförmig modulierten Prozesses (3.1.21) ($c(t)$ steigt linear nur von 0.75 bis 1.25 an), ist der Test wenig zuverlässig. Als Entscheidungskriterium dienen die 5%-Signifikanzniveaus der simulierten Verteilungen eines entsprechenden stationären AR(2)-Prozesses (3.1.20).

3.2 EIN TEST AUF LINEARITÄT

a) Der Linearitätstest nach Subba Rao und Gabr

Eine weitere häufig gemachte Annahme ist, daß die Beobachtungen $Z(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, von einem linearen Prozeß stammen. Der Linearitätstest, der in diesem Kapitel beschrieben wird, geht auf eine Arbeit von Subba Rao und Gabr (1980) zurück. Es werden wieder nur die wesentlichen Punkte des Tests erwähnt, für die Einzelheiten sei auf Subba Rao und Gabr (1980) und Timmer (1990) verwiesen. Voraussetzung für diesen Test ist, daß der betrachtete Prozeß stationär ist, daß der Mittelwert der Zeitreihe $Z(t)$ verschwindet und die zweiten und dritten Momente zu allen Zeiten endlich sind.

Wird der beobachtete lineare Prozeß durch ein Gaußsches weißes Rauschen angetrieben, sind die Beobachtungen $Z(t)$ ebenfalls normalverteilt. Hat der Prozeß einen verschwindenden Mittelwert

$$\langle Z(t) \rangle = 0, \quad (3.2.1)$$

so ist alle Information in der Autokovarianzfunktion 2. Ordnung

$$\gamma(\tau) = \langle Z(t+\tau)Z(t) \rangle \quad (3.2.2)$$

enthalten. Insbesondere ist die Autokovarianzfunktion 3. Ordnung

$$c(\tau_1, \tau_2) = \langle Z(t+\tau_1)Z(t+\tau_2)Z(t) \rangle \quad (3.2.3)$$

identisch Null. Ganz analog beinhaltet im Frequenzraum das Spektrum

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (3.2.4)$$

die gesamte Information des Prozesses und das Bispektrum

$$f(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\tau_1=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau_2=-\infty}^{\infty} c(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1 - i\omega_2\tau_2} \quad (3.2.5)$$

verschwindet identisch.

Allgemein gelten für die Autokovarianzfunktionen (3.2.2,3) die Symmetriebedingungen

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau), \quad (3.2.6)$$

$$c(\tau_1, \tau_2) = c(\tau_2, \tau_1) = c(-\tau_1, \tau_2 - \tau_1) = c(\tau_1 - \tau_2, -\tau_2). \quad (3.2.7)$$

Für das Spektrum und das Bispektrum (3.2.4,5) folgt daraus:

$$f(\omega) \text{ ist reell,} \quad (3.2.8)$$

$$f(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_2, \omega_1) = f(\omega_1, -\omega_1 - \omega_2) = f^*(-\omega_1, -\omega_2), \quad (3.2.9)$$

wobei * die komplexe Konjugation bezeichnet. Das normierte Bispektrum ist definiert durch

$$X(\omega_1, \omega_2) = \frac{|f(\omega_1, \omega_2)|^2}{f(\omega_1)f(\omega_2)f(\omega_1 + \omega_2)}. \quad (3.2.10)$$

Während das normierte Bispektrum für einen durch Gaußsches weißes Rauschen angetriebenen linearen Prozeß gleich Null ist, hat es einen konstanten nicht-verschwindenden Wert bei einem linearen Prozeß, der durch ein weißes Rauschen angetrieben wird, das nicht Gaußsch ist. Ein nicht konstantes normiertes Bispektrum ist ein Anzeichen dafür, daß der beobachtete Prozeß nichtlinear ist. Es gilt demnach zu prüfen, ob die Hypothese verworfen werden muß, daß das normierte Bispektrum konstant ist.

Die Konstanz des normierten Bispektrums ist allerdings nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung dafür, daß der beobachtete Prozeß linear ist. So ist z.B. das normierte Bispektrum des durch die Duffinggleichung gegebenen Prozesses konstant [Perrochaud (1982)]. Die Duffinggleichung ist die diskretisierte Version des linearen Oszillators mit einer kubischen Störung.

In diesem Linearitätstest verwenden wir

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M w(\tau) \tilde{y}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (3.2.11)$$

als konsistenten Schätzer für das Spektrum (3.2.4) und analog dazu

$$\tilde{f}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\tau_1=-M}^M \sum_{\tau_2=-M}^M w(\tau_1, \tau_2) \tilde{c}(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_1\tau_1 - i\omega_2\tau_2} \quad (3.2.12)$$

als Schätzer für das Bispektrum (3.2.5). Dabei ist

$$w(\tau) = \frac{\sin(\pi\tau/M_w)}{\pi\tau/M_w} \quad (3.2.13)$$

das Daniell-Fenster und

$$w(\tau_1, \tau_2) = w(\tau_1) w(\tau_2) w(\tau_1 - \tau_2) \quad (3.2.14)$$

die entsprechende Verallgemeinerung.

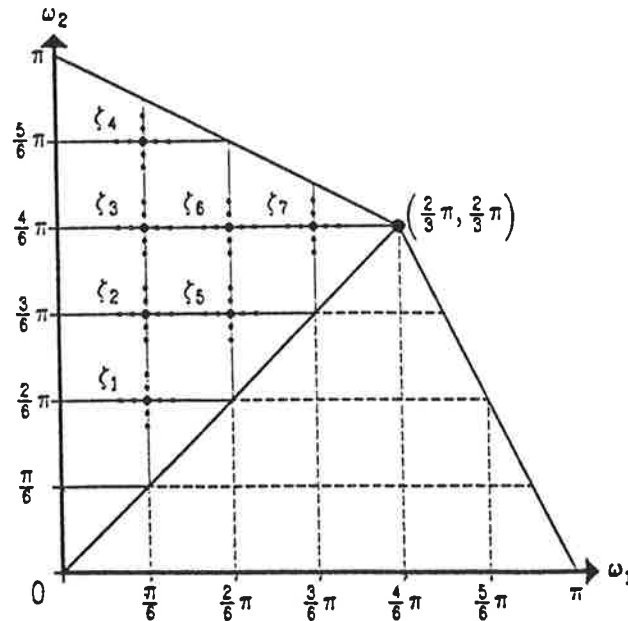


Abbildung 3.2.1: Darstellung des groben und feinen Gitters zur Berechnung des Bisppektrums. Die für die Abbildung gewählten Parameter sind $K = 6$, $L = 4$, $p = 7$, $r = 2$ und $n = 9$.

Wegen den Symmetriebedingungen (3.2.9) muß das Bisppektrum nicht auf der gesamten Fläche $-\pi < \omega_1, \omega_2 < \pi$ ausgewertet werden, sondern nur in dem in Abbildung 3.2.1 dargestellten Dreieck. Für den Test benötigt man ein konsistent geschätztes Bisppektrum und dessen Kovarianz als Maß für die Genauigkeit der Schätzung. Man schätzt daher das Bisppektrum auf dem groben Gitter der Punkte ζ_i , $i=1, \dots, p$ dadurch, daß man von dem auf einem feinen Gitter von n Punkten ζ_{ik} , $k=1, \dots, n$, um jeden dieser Punkte ζ_i herum geschätzten normierten Bisppektrum den Mittelwert und die Varianz bestimmt. Das grobe Gitter ist durch die Punkte $(\omega_i, \omega_j) = (i\pi/K, j\pi/K)$ mit $i=1, \dots, L$, $j=i+1, \dots, \gamma(i)$ gegeben, wobei $L = [2K/3]$ und $\gamma(i) = K - [i/2] - 1$ und $K \ll t_{\max}$. Das feine Gitter um den Punkt (ω_i, ω_j) ist durch (ω_{ip}, ω_j) mit $\omega_{ip} = \omega_i + p d \pi / t_{\max}$, $p = -r, \dots, -1, 0, 1, \dots, r$, und (ω_i, ω_{jq}) mit $\omega_{jq} = \omega_j + q d \pi / t_{\max}$, $q = -r, \dots, -1, 1, \dots, r$, gegeben. Dabei ist der Abstand d so zu wählen, daß die Werte des normierten Bisppektrums auf benachbarten Punkten des feinen Gitters unabhängig voneinander sind.

Wir bezeichnen mit Y_{ik} den Wert des normierten Bisppektrums $X(\omega_1, \omega_2)$ an den Punkten ζ_{ik} , mit $Y = (\bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_p)^T$ fassen wir die gemittelten Werte

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_{ik}, \quad (3.2.15)$$

an dem Punkt ζ_1 zusammen. Die Kovarianzmatrix \underline{S}_Y für Y ist durch

$$(\underline{S}_Y)_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_{1k} - \bar{Y}_1)(Y_{jk} - \bar{Y}_j) \quad (3.2.16)$$

gegeben. Die Schätzungen von \bar{Y}_1 sind asymptotisch normalverteilt. Sind die Werte \bar{Y}_1 alle gleich, wie wir es für einen linearen Prozeß erwarten, so ist der Vektor

$$Z = \underline{B}Y \quad (3.2.17)$$

mit der $(p-1) \times p$ Matrix

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

identisch Null. Die Kovarianzmatrix des Vektors Z lautet

$$\underline{S}_Z = \underline{B} \underline{S}_Y \underline{B}^T. \quad (3.2.19)$$

und man erhält

$$T^2 = \frac{n-p-1}{p-1} Z^T \underline{S}_Z^{-1} Z \quad (3.2.20)$$

als Testgröße.

Unter der Nullhypothese, daß der beobachtete Prozeß linear ist, d.h. $X(\omega_1, \omega_2)$ konstant ist, ist T^2 eine asymptotisch F-verteilte Zufallsvariable mit $(p-1)$ und $(n-p-1)$ Freiheitsgraden.

b) Die Analyse simulierter linearer und nichtlinearer Prozesse

Wie schon bei dem Stationaritätstest (Kapitel 3.1) wird die asymptotisch zu erwartende Verteilung der Testgröße T^2 mit den durch die Analyse simulierter stationärer, linearer und nichtlinearer Prozesse approximierten Verteilungen verglichen. Alle simulierten Zeitreihen, die hierzu analysiert wurden, waren $t_{\max} = 480$ Zeitschritte lang. Das grobe und feine Gitter wurde mit den Parameterwerten $K = 6$, $L = 4$, $p = 7$, $r = 2$, $n = 9$ und dem Abstand $d=20$ bestimmt und ist in Abbildung 3.2.1 veranschaulicht. Für die Schätzung des Spektrums und des Bispektrums (3.2.11-13) wurde $M = 20$ und $M_w = 20$ gewählt.

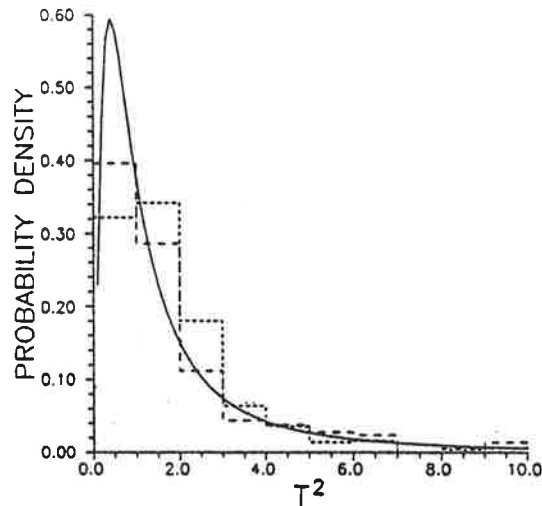


Abbildung 3.2.2: Die asymptotische und die simulierte Verteilung der Testgröße T^2 . Die simulierten Verteilungen beruhen auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 480$ eines AR(2)-Prozesses. Die Periode und die $1/e$ -Abklingzeit der beiden Prozesse beträgt 10 und 20 Zeitschritte (lang gestrichelte Linie) bzw. 30 und 40 Zeitschritte (kurz gestrichelte Linie).

In der Abbildung 3.2.2 sind neben der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 zwei Verteilungen gezeigt, die auf die Analyse von jeweils 500 Simulationen eines AR(2)-Prozesses

$$Z(t) = a_1 Z(t-1) + a_2 Z(t-2) + \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,1), \quad (3.2.21)$$

zurückgehen. Der AR(2)-Prozeß der lang gestrichelten Linie hat eine Periode von 10 Zeitschritten und eine $1/e$ -Abklingzeit von 20 Zeitschritten, der der kurz gestrichelten Linie eine Periode von 30 Zeitschritten und eine $1/e$ -Abklingzeit von 40 Zeitschritten. Beide Male treibt ein Gaußsches weißes Rauschen $\zeta(t)$ mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz 1 den Prozeß an. Die Übereinstimmung zwischen den drei Verteilungen ist recht gut. Insbesondere scheint die Verteilung der Testgröße unabhängig von den Zeitskalen des betrachteten AR(2)-Prozesses zu sein. Der Linearitätstest kann offenbar unter Verwendung der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 durchgeführt werden.

Vergleichen wir die asymptotische Verteilung mit der, die auf 500 Simulationen eines bilinearen Prozesses

$$Z(t) = aZ(t-1) + bZ(t-1)\zeta(t-1) + \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,1) \quad (3.2.22)$$

beruht. Die Parameter sind $a = b = 0.4$. Das weiße Rauschen $\zeta(t)$ ist wiederum normalverteilt mit verschwindendem Mittelwert und der Varianz 1. Wie wir in Abbildung 3.2.3 sehen, unterscheidet sich die simulierte Verteilung recht gut von der asymptotischen. So wird auf dem 5%-Signifikanzniveau in nur 19% der Fälle der bilineare Prozeß fälschlich als linear eingestuft. Für einen Prozeß, der durch die stochastisch angetriebene logistische Gleichung

$$Z(t) = aZ(t-1) [1-Z(t-1)] + \zeta(t), \quad \zeta \sim \text{GWN}(0,0.02^2) \quad (3.2.23)$$

mit $a = 3.7$ gegeben ist, wird auf dem 5%-Signifikanzniveau die Nullhypothese, der Prozeß sei linear, lediglich in weniger als 2% der Fälle nicht abgelehnt (Abbildung 3.2.4).

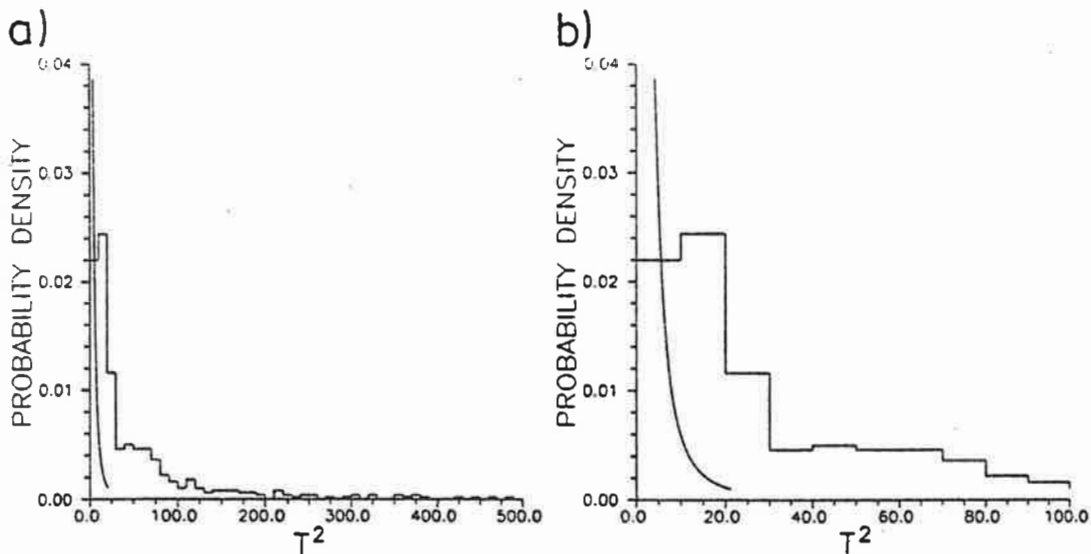


Abbildung 3.2.3: Die asymptotische und die simulierte Verteilung der Testgröße T^2 . Die simulierte Verteilung beruht auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 480$ eines bilinearen Prozesses. Die beiden Abbildungen unterscheiden sich nur durch die Skalierung der T^2 -Achse.

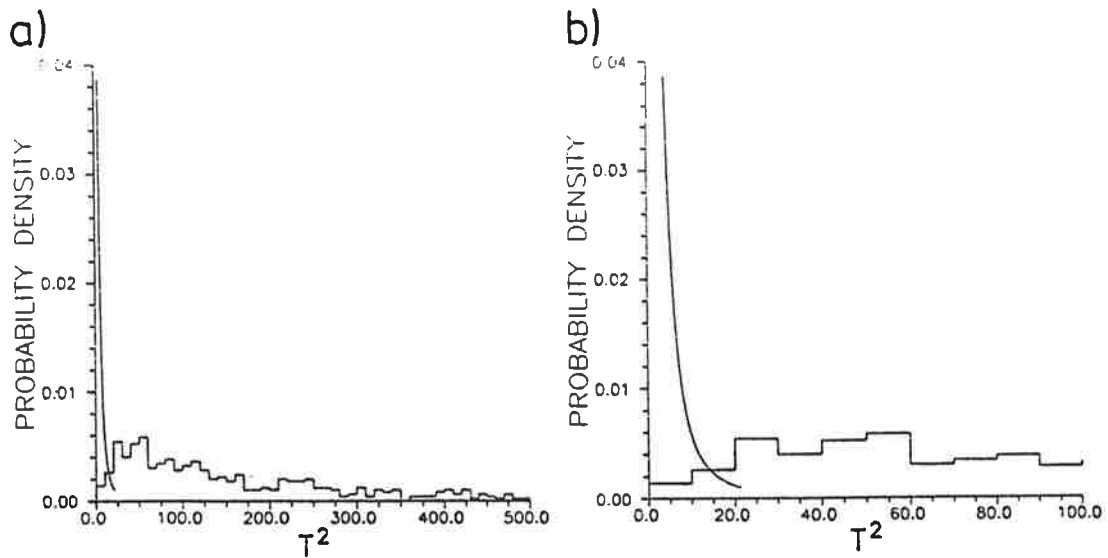


Abbildung 3.2.4: Die asymptotische und die simulierte Verteilung der Testgröße T^2 . Die simulierte Verteilung beruht auf der Analyse von 500 Zeitreihen der Länge $t_{\max} = 480$ der stochastisch angetriebenen logistischen Gleichung. Die beiden Abbildungen unterscheiden sich nur durch die Skalierung der T^2 -Achse.

3.3 MONTE-CARLO-SIMULATIONEN

Paßt man an eine beobachtete Zeitreihe $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, z.B. ein Zustandsraummodell (2.1.5,6)

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{WN}(0, \underline{R}), \quad (3.3.1)$$

$$X(t) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q}), \quad (3.3.2)$$

an, so ist dieses Vorgehen nur sinnvoll, wenn das beobachtete System auch als ein Zustandsraummodell formuliert werden kann. Man geht also von folgender Nullhypothese aus:

H_0 : Der wahre Prozeß, der der Zeitreihe der $Y(t)$ zugrunde liegt, ist ein Zustandsraummodell der Form (3.3.1,2).

Die Parameter des Zustandsraummodells \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} und evtl. weitere abgeleitete Größen seien zu dem Vektor $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$ zusammengefaßt.

Die Parameterwerte Θ^{wahr} des beobachteten Prozesses sind unbekannt. Die beobachtete Zeitreihe $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, ist eine spezielle Realisierung des stochastischen Prozesses und als Ergebnis der Analyse erhält man die „beobachteten“ Schätzwerte $\tilde{\Theta}$. Wären neben der vorliegenden Realisierung $Y(t)$ des stochastischen Prozesses noch weitere Datensätze $Y^{(1)}(t)$, $Y^{(2)}(t), \dots$, $t=1, \dots, t_{\max}$, beobachtet worden, so hätten diese zu den Schätzwerten $\tilde{\Theta}^{(1)}$, $\tilde{\Theta}^{(2)}, \dots$ geführt (Abbildung 3.3.1).

All diese Parameter $\tilde{\Theta}$, $\tilde{\Theta}^{(1)}$, $\tilde{\Theta}^{(2)}, \dots$ sind um Θ^{wahr} verteilt. Die Abweichungen $\Theta - \Theta^{\text{wahr}}$ treten mit einer Wahrscheinlichkeit $P(\Theta - \Theta^{\text{wahr}})$ auf. Ebenso wie die Parameter Θ^{wahr} ist diese Wahrscheinlichkeitsverteilung unbekannt.

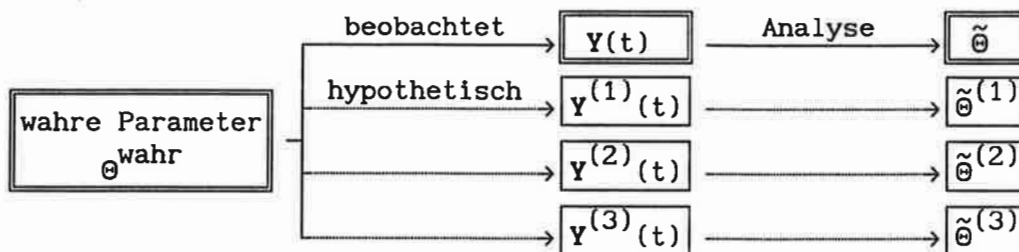


Abbildung 3.3.1: Die Analyse einer beobachteten Zeitreihe $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, eines Prozesses mit den Parametern Θ^{wahr} führt zu den Schätzwerten $\tilde{\Theta}$. Würde dieses Experiment wiederholt, so erhielte man neue Zeitreihen $Y^{(1)}(t)$ mit neuen Schätzwerten $\tilde{\Theta}^{(1)}$ [nach Press et al. (1986)].

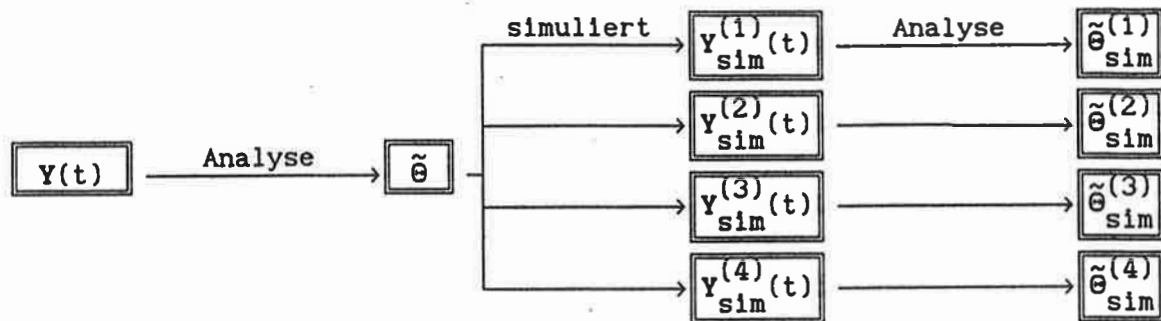


Abbildung 3.3.2: Die geschätzten Parameter $\tilde{\theta}$ der beobachteten Zeitreihe $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$ sind der Ausgangspunkt für die Simulation von beliebig vielen Zeitreihen $Y_{\text{sim}}^{(s)}(t)$. Die Analyse dieser Monte-Carlo-Simulationen ergeben ein Ensemble von Parametern $\theta_{\text{sim}}^{(s)}$ [nach Press et al. (1986)].

In dem Fall, daß die Nullhypothese H_0 gilt und die Parameter durch die beobachteten Parameterwerte $\tilde{\theta}$ gegeben sind, ist es möglich, die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$ zu bestimmen. Ausgehend von den Parametern $\tilde{\theta}$ kann eine beliebige Anzahl von Zeitreihen $Y_{\text{sim}}^{(1)}(t), Y_{\text{sim}}^{(2)}(t), \dots, t=1, \dots, t_{\max}$, simuliert werden. Die Analyse dieser Monte-Carlo-Simulationen führt zu einem Ensemble von Parametern $\tilde{\theta}_{\text{sim}}^{(1)}, \tilde{\theta}_{\text{sim}}^{(2)}, \dots$, von dem die Eigenschaften der Verteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$ geschätzt werden kann. Abbildung 3.3.2 skizziert dieses Vorgehen.

Mit Hilfe der Annahme, daß die simulierte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$ gleich der unbekanntenen wahren Verteilung $P(\theta - \theta^{\text{wahr}})$ ist, wie es Abbildung 3.3.3 für einen einzelnen Parameter θ_1 andeutet, können quantitative Aussagen über die Verlässlichkeit der Schätzwerte gemacht werden.

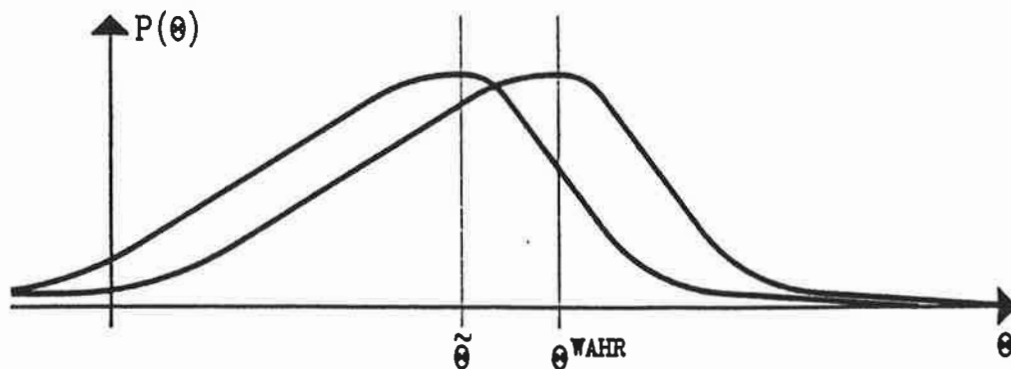


Abbildung 3.3.3: Die unbekanntene Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \theta^{\text{wahr}})$ des Parameters θ sei gleich der Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$.

3.4 VERTRAUENSINTERVALLE

Wir betrachten nicht die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$ im multi-dimensionalen Raum aller Parameter $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, sondern die Verteilung $P(\theta_1 - \tilde{\theta}_1)$ eines einzelnen Parameters θ_1 (Abbildung 3.4.1).

Um zu beantworten, ob ein bestimmter Schätzwert typisch für den betrachteten Prozeß ist oder nicht, eignet sich die Angabe der Wahrscheinlichkeit $P(\theta_1 < \tilde{\theta}_1)$, mit der Werte θ_1 auftreten können, die kleiner sind als der Schätzwert $\tilde{\theta}_1$. Ist z.B. die Wahrscheinlichkeit $P(\theta_1 < \tilde{\theta}_1) = 99\%$, ist der Schätzwert $\tilde{\theta}_1$ zu groß, denn größere Werte θ_1 kommen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% vor.

Wichtig im Rahmen der Modellanpassung ist vor allem ein Maß für die Verlässlichkeit eines Schätzwertes $\tilde{\theta}_1$. Zu einem Schätzwert $\tilde{\theta}_1$ werden deshalb die 90%-Vertrauensintervalle bestimmt, wie es in Abbildung 3.4.1 skizziert ist. Der wahre Parameterwert θ_1^{wahr} liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% innerhalb dieses Intervalls. Liegt der Schätzwert $\tilde{\theta}_1$ außerhalb des 90%-Vertrauensintervalls, so ist sein Wert untypisch für den untersuchten Prozeß mit den Parametern $\tilde{\theta}$. Sehr weite Vertrauensintervalle lassen auf ein schlechtes Signal-zu-Rausch-Verhältnis oder auf eine zu große Anzahl von angepaßten Parametern schließen. Parameter θ_1 , deren Vertrauensintervall mit Null verträglich ist, sollten evtl. Null gesetzt werden. Meistens ergibt sich dann eine Verbesserung der Ergebnisse.

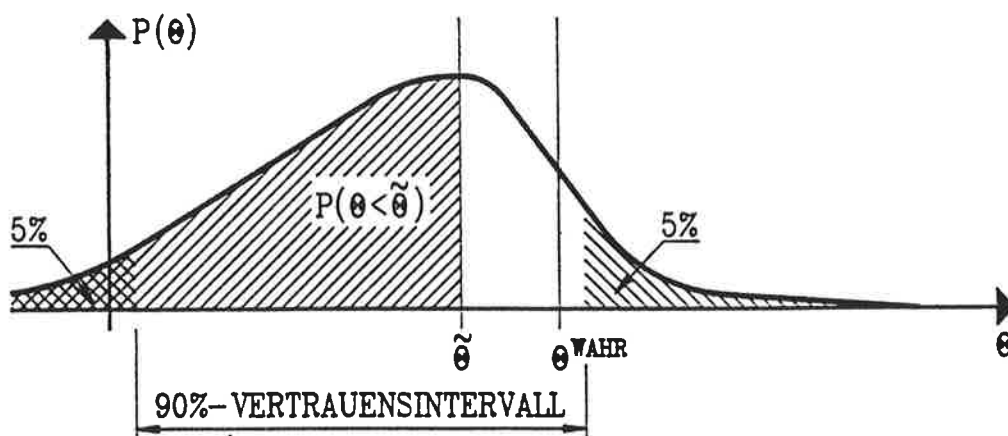


Abbildung 3.4.1: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(\theta - \tilde{\theta})$ des Parameters θ . Der Wert $P(\theta < \tilde{\theta})$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der Werte θ auftreten können, die kleiner sind als der Schätzwert $\tilde{\theta}$. Das 90%-Vertrauensintervall ist ein Maß für die Verlässlichkeit des Schätzwertes $\tilde{\theta}$.

3.5 DIAGNOSTISCHE TESTS DER GESCHÄTZTEN RAUSCHTERME

Um die Gültigkeit der Nullhypothese H_0 aus Kapitel 3.3 zu prüfen, sind sogenannte diagnostische Tests notwendig. Bei diesen Tests werden die unerklärten Reste betrachtet, die sich aus der Beobachtungsgleichung (3.3.1) zu

$$\varepsilon(t) = Y(t) - \underline{C}X(t), \quad (3.5.1)$$

aus der dynamischen Gleichung (3.3.2) zu

$$\eta(t) = X(t) - F[X(\tau < t), \alpha, t-1], \quad (3.5.2)$$

oder aus der Ein-Schritt-Vorhersage des gesamten Systems (2.5.7) zu

$$\rho(t) = Y(t) - \underline{C}F[X(\tau < t), \alpha, t-1], \quad (3.5.3)$$

ergeben (siehe Kapitel 2.4,5).

a) Die erklärte Varianz

Eine Kenngröße, die wir betrachten können, ist die durch die Beobachtungsgleichung (3.3.1) oder auch die Ein-Schritt-Vorhersage des Gesamtsystems (3.3.1,2) erklärte Varianz

$$S = \frac{\text{var}[Y(t)] - \text{var}[\xi(t)]}{\text{var}[Y(t)]}. \quad (3.5.4)$$

Im ersten Fall steht $\xi(t)$ für den unerklärten Rest $\varepsilon(t)$ (3.5.1), im zweiten für den Vorhersagefehler $\rho(t)$ (3.5.3). Gilt die Nullhypothese H_0 , so erwarten wir einen typischen Wert \tilde{S} . Ist dagegen \tilde{S} und damit auch die Wahrscheinlichkeit $P(S < \tilde{S})$ sehr klein oder sehr groß, so muß die Nullhypothese H_0 abgelehnt werden.

b) Der multivariate Portmanteau-Test auf weißes Rauschen

Wenn die Nullhypothese H_0 richtig ist, so sind die unerklärten Reste $\varepsilon(t)$, $\eta(t)$ und $\rho(t)$ ein weißes Rauschen. Dies ergibt eine weitere Möglichkeit des diagnostischen Tests. Es stellt sich also die Frage, ob eine multivariate Zeitreihe $\xi(t)$ mit weißem Rauschen verträglich ist. Eine der wenigen bekannten multivariaten Tests beruht auf der Portmanteau-Statistik

$$p_1 = t_{\max} \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} \text{tr}[\underline{R}(\tau)\underline{R}(-\tau)], \quad \tau_{\max} = [\sqrt{t_{\max}}], \quad (3.5.5)$$

mit

$$\underline{R}(\tau) = C_{\xi\xi}(\tau)C_{\xi\xi}^{-1}(0), \quad C_{\xi\xi}(\tau) = \langle \xi(t+\tau)\xi^T(t) \rangle. \quad (3.5.6)$$

Die univariate Formulierung der Portmanteau-Statistik p_1 geht auf Box und Pierce (1970) zurück. Sie wird im Rahmen der Anpassung univariater Autoregressiver-Moving-Average- (ARMA-) Prozesse vorgestellt und hat auch Eingang in neuere Lehrbücher zur Zeitreihenanalyse gefunden [z.B. Brockwell und Davis (1987), Schlittgen und Streitberg (1987), Honerkamp (1990)]. Chitturi (1974) erweiterte diesen Test auf multivariate autoregressive (AR-) Prozesse, Hosking (1980) auf multivariate ARMA-Prozesse.

Die Matrizen $\underline{R}(\tau)$ (3.5.6) sind nicht die Korrelationsmatrizen der Zeitreihen $\xi(t)$ zur Zeitverschiebung τ , wie sie üblicherweise definiert werden. Sie sind aber eine natürliche Verallgemeinerung der Autokorrelationen univariater Zeitreihen. Betrachtet man einen m -variater ARMA(p, q)-Prozeß, so ist die Portmanteau-Statistik p_1 eine asymptotisch χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit $m^2 \times (\tau_{\max} - p - q)$ Freiheitsgraden [Hosking, (1980)]. Wir bestimmen auch die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(p_1)$ durch Monte-Carlo-Simulationen und können so, unabhängig von der Wahl der Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$, die Portmanteau-Statistik p_1 als Teststatistik verwenden.

Bei der Anpassung univariater ARMA-Modelle wurde mehrfach beobachtet, daß der unerklärte Rest $\xi(t)$ unkorreliert ist, die quadrierten Reste $\xi^2(t)$ dagegen nicht [McLeod und Li (1983) und Zitate darin]. Mit zusätzlichen nichtlinearen Termen konnte diese Schwierigkeit umgangen werden. Es ist daher zweckmäßig, neben der Portmanteau-Statistik p_1 (3.5.5,6) auch die Portmanteau-Statistik p_2 des quadrierten Restes $\xi^2(t) - \langle \xi^2(t) \rangle$ zu betrachten. McLeod und Li (1983) zeigten, daß p_2 eine asymptotisch χ^2 -verteilte Zufallsvariable mit τ_{\max} Freiheitsgraden ist. Neben der Portmanteau-Statistik p_1 (3.5.5,6) betrachten wir deshalb auch die Portmanteau-Statistik p_2 der multivariaten quadrierten Reste

$$(\xi_1^2(t) - \langle \xi_1^2(t) \rangle, \xi_2^2(t) - \langle \xi_2^2(t) \rangle, \dots)^T. \quad (3.5.7)$$

Gilt die Nullhypothese H_0 , so erwarten wir typische Werte \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 . Ist aber der Wert \tilde{p}_1 (\tilde{p}_2) und damit auch die Wahrscheinlichkeit $P(p_1 < \tilde{p}_1)$ ($P(p_2 < \tilde{p}_2)$) sehr groß, so muß die Nullhypothese H_0 mit einer Signifikanz von $1 - P(p_1 < \tilde{p}_1)$ ($1 - P(p_2 < \tilde{p}_2)$) abgelehnt werden.

3.6 DIE VORHERSAGEGÜTE DES ANGEPASTEN MODELLS

Die Frage der Güte eines bestimmten Zustandsraummodells (3.3.1,2) kann auch durch den Vergleich von Vorhersagen $Y(t+\tau;t)$ mit den Beobachtungen $Y(t+\tau)$ beantwortet werden.

Wir beginnen die Vorhersage zum Zeitpunkt t . Die benötigten Anfangswerte der Systemzustände $X(t')$ mit $t' \leq t$ werden als (2.4.1)

$$X(t';t') = \underline{C}^+ Y(t'), \quad \underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{M} \underline{C})^{-1} \underline{C}^T \underline{M}, \quad \underline{M} = \underline{I} \text{ oder } \underline{R}^{-1}, \quad (3.6.1)$$

geschätzt. Durch Iteration der Ein-Schritt-Vorhersage (2.5.1)

$$X(t;t-1) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1], \quad (3.6.2)$$

erhalten wir so die Zeitserie $X(t+\tau;t)$, $\tau=0,1,\dots$, und die Vorhersagen (2.5.3)

$$Y(t+\tau;t) = \underline{C} X(t+\tau;t) \quad (3.6.3)$$

der Beobachtungsgrößen $Y(t)$.

Die Menge der Zeiten t , zu denen eine Vorhersage gestartet wird, bezeichnen wir mit \mathfrak{I} . So kann \mathfrak{I} alle Zeitpunkte $t=1,\dots,t_{\max}$ umfassen. Dabei sind aber z.B. die Zeiten der benötigten Anfangswerte zu vernachlässigen. Handelt es sich bei den Beobachtungen $Y(t)$ um monatliche Werte, kann die Menge \mathfrak{I} auch diejenigen Zeiten beinhalten, die nur einem bestimmten Monat entsprechen.

a) Die Korrelationsgüte

Als Maß der Güte einer τ -Schritt-Vorhersage $Y(t+\tau;t)$, $t \in \mathfrak{I}$, bietet sich die Korrelationsgüte der Vorhersagen $Y(t+\tau;t)$ mit den Beobachtungen $Y(t+\tau)$

$$S_{\text{cor}}(\tau; \mathfrak{I}) = \frac{1}{n} \text{tr}[\text{cor}[Y(t+\tau); Y(t+\tau;t)]_{t \in \mathfrak{I}}] \quad (3.6.4)$$

an. Die Korrelationsmatrix $\text{cor}[Z(t); Z'(t)]_{t \in \mathfrak{I}}$ zweier multivariater Zeitreihen $Z(t)$ und $Z'(t)$ mit je n Komponenten ist wie gewöhnlich mit Hilfe der Kovarianzmatrix

$$C_{zz'} = \langle Z(t) Z'^T(t) \rangle_{t \in \mathfrak{I}} \quad (3.6.5)$$

als

$$\text{cor}[Z(t); Z'(t)]_{t \in \mathfrak{I}} = \left[\frac{[C_{zz'}]_{ij}}{\sqrt{[C_{zz'}]_{ii} [C_{zz'}]_{jj}}} \right]_{i,j=1}^n \quad (3.6.6)$$

definiert. Die Klammern $\langle \dots \rangle_{t \in \mathfrak{I}}$ stehen für eine Mittelung über die Zeiten t , die in der Menge \mathfrak{I} enthalten sind. Das Gütemaß $S_{\text{cor}}(\tau; \mathfrak{I})$ kann Werte zwischen

-1 und 1 annehmen. Mit $S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X}) = \pm 1$ wird angedeutet, daß die Vorhersagen $Y(t+\tau; t)$ und die Beobachtungen $Y(t+\tau)$ bis auf einen additiven Term oder einen beliebigen Faktor identisch sind. Mit zunehmender Vorhersagezeit τ werden die Vorhersagen schlechter, ihr zeitlicher Verlauf weicht mehr und mehr voneinander ab, der Betrag von $S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X})$ wird kleiner. $S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X}) = 0$ bedeutet, daß die Vorhersagen und die Beobachtungen statistisch unabhängig sind.

b) Die relative Abweichung

Die relative Abweichung der Vorhersagen $Y(t+\tau; t)$ von den Beobachtungen $Y(t+\tau)$ ist als

$$S_{\text{rrmse}}(\tau; \mathcal{X}) = \sqrt{\frac{\text{var}[Y(t+\tau) - Y(t+\tau; t)]_{t \in \mathcal{X}}}{\text{var}[Y(t+\tau)]_{t \in \mathcal{X}}}} \quad (3.6.7)$$

definiert. Die Varianz einer multivariaten Zeitreihe $Z(t)$ ist durch die Spur der Kovarianzmatrix C_{ZZ} (3.6.5)

$$\text{var}[Z(t)]_{t \in \mathcal{X}} = \text{tr}[C_{ZZ}] = \langle Z^T(t)Z(t) \rangle_{t \in \mathcal{X}} \quad (3.6.8)$$

gegeben. Die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau; \mathcal{X})$ und die erklärte Varianz S (3.5.4) aus Abschnitt 3.5a) hängen unmittelbar zusammen:

$$S_{\text{rrmse}}(\tau=0; \mathcal{X}=\{1, \dots, t_{\text{max}}\}) = \sqrt{1-S} \quad \text{für} \quad \xi(t) = \varepsilon(t), \quad (3.6.9)$$

$$S_{\text{rrmse}}(\tau=1; \mathcal{X}=\{1, \dots, t_{\text{max}}\}) = \sqrt{1-S} \quad \text{für} \quad \xi(t) = \rho(t). \quad (3.6.10)$$

Sind die Vorhersagen $Y(t+\tau; t)$ und die Beobachtungen $Y(t+\tau)$ identisch, so ist $S_{\text{rrmse}}(\tau; \mathcal{X}) = 0$. Mit wachsender Vorhersagezeit τ werden die Vorhersagen mehr und mehr von den Beobachtungen abweichen und die Varianz $\text{var}[Y(t+\tau) - Y(t+\tau; t)]_{t \in \mathcal{X}}$ wird zunehmen. Für $S_{\text{rrmse}}(\tau; \mathcal{X}) \geq 1$ ist dann die Varianz der Abweichungen ebenso groß wie oder größer als die Varianz der Beobachtungen.

Die beiden Maße $S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X})$ und $S_{\text{rrmse}}(\tau; r)$, als Funktionen der Vorhersagezeit τ betrachtet, geben zusammen ein gutes Kriterium, um unterschiedliche Zustandsraummodelle (3.3.1,2) miteinander zu vergleichen. Allerdings wird ein zu gutes Modell vorgetäuscht, wenn man die Güte der Vorhersagen $Y(t+\tau; t)$ bzgl. der Beobachtungen $Y(t+\tau)$ betrachtet, an die das Zustandsraummodell angepaßt wurde. Dieser künstlichen Erhöhung der Vorhersagegüte ist in besonderer Weise Rechnung zu tragen. Für eine ausführliche Diskussion des Verhältnisses von „wahrer“ zu „künstlicher“ Vorhersagegüte sei auf die Arbeit von Barnett und Hasselmann (1979) hingewiesen.

4. ANALYSEN SIMULIRTER DATEN

In dem Kapitel 2 wurde eine Hierarchie von Schätzverfahren für Zustandsraummodelle vorgestellt. Die Analyse simulierter Daten bietet die Möglichkeit, die Schätzwerte und ihre Vertrauensintervalle mit den vorgegebenen und daher bekannten Werten des simulierten Modells zu vergleichen. Auf diese Weise werden die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren einander gegenübergestellt. Als Beispiele dienen niederdimensionale Zustandsraummodelle ($n \leq 4$) mit und ohne Beobachtungsrauschen. Die gewählten Modellfunktionen sind linear (AR(1)- und AR(2)-Prozesse).

Für Zustandsraummodelle ohne Beobachtungsrauschen können die POPs gleich den EOFs gewählt werden (siehe Kapitel 2.7). Ein solches Zustandsraummodell ohne Beobachtungsrauschen mit einem AR(2)-Prozeß als Modellfunktion dient in Kapitel 4.1 als erstes Beispiel, um die Schätzung der Modellparameter durch das EOFMDL-, das EOFML-, das LSQ- und das ML-Verfahren miteinander zu vergleichen.

Bei dem zweiten Beispiel in Kapitel 4.2 handelt es sich um ein Zustandsraummodell mit einem AR(2)-Prozeß als Modellfunktion, das auch das Beobachtungsrauschen einschließt. Verglichen werden das LSQ- und das ML-Verfahren. Insbesondere wird die Abhängigkeit der Schätzungen von den gewählten Anfangswerten untersucht.

In dem Kapitel 4.3 findet sich ein Vergleich des LSQ- und des ML-Verfahrens mit dem von Gantert (1989) entwickelten Kalman-Verfahren. Die Modellfunktion ist bei diesem dritten Beispiel ein AR(1)-Prozeß. Der Einfluß des Beobachtungsrauschens auf die Analyseergebnisse wird behandelt.

4.1 EIN VERGLEICH DER EOFMDL-, EOFML-, LSQ- UND ML-VERFAHREN AN EINEM

BEISPIEL OHNE BEOBACHTUNGSRASCHEN

Das EOFMDL-, das EOFML-, das LSQ- und das ML-Verfahren, die in den Kapiteln 2.6,7,9 definiert wurden, werden hier an Hand simulierter Daten verglichen.

a) Die simulierten Daten

Den simulierten Daten liegt ein Zustandsraummodell (2.1.5,6) mit gleichen Dimensionen ($n = m = 2$) für den Raum der $Y(t)$ und $X(t)$, ohne Beobachtungsrauschen ($R = 0$) und mit einem AR(2)-Prozeß als Modellfunktion zugrunde:

$$Y(t) = \underline{C}X(t), \quad (4.1.1)$$

$$X(t) = \underline{A}_1 X(t-1) + \underline{A}_2 X(t-2) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{GWN}(0, \underline{Q}). \quad (4.1.2)$$

Das Rauschen $\eta(t)$ ist ein Gaußsches weißes Rauschen mit verschwindendem Mittelwert und der Kovarianzmatrix \underline{Q} . Mit den Parametern

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}, \quad (4.1.3)$$

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.9250 & -0.1070 \\ 0.0021 & 1.8180 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -0.9604 & 0.0790 \\ -0.0043 & -0.9023 \end{pmatrix}, \quad (4.1.4)$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 7.846 & 1.500 \\ 1.500 & 2.177 \end{pmatrix} \quad (4.1.5)$$

ist dieses Modell ein System aus zwei Oszillatoren. Die Periode und die $1/e$ -Abklingzeit des einen Oszillators sind $T_1 = 34$ und $\tau_1 = 49$, die des anderen sind $T_2 = 21$ und $\tau_2 = 20$. Die Zeitreihe der simulierten Beobachtungen $Y(t)$ ist $t_{\max} = 1000$ Zeitschritte lang.

b) Das EOFMDL-Verfahren

Der multivariate Durbin-Levinson-Algorithmus berechnet die Yule-Walker-Schätzer eines $\text{AR}(p)$ -Prozesses in sukzessiv aufsteigender Ordnung $p = 1, 2, 3, \dots$ (Kapitel 2.9). Deshalb ist das EOFMDL-Verfahren ein geeignetes Mittel, $\text{AR}(p)$ -Prozesse verschiedener Ordnung p anzupassen, um so Hinweise auf die Ordnung des $\text{AR}(p)$ -Prozesses des linearen Zustandsraummodells (4.1.1-5) zu erhalten, mit dem die Daten $Y(t)$ erzeugt wurden.

Alle mit dem EOFMDL-Verfahren angepaßten bivariaten ($m = 2$) $\text{AR}(p)$ -Prozesse der Ordnungen $p=2, \dots, 10$ zeigen zwei dominante Oszillatoren mit den Zeitkonstanten $\tilde{T}_1 \approx 36$, $\tilde{\tau}_1 \approx 54$ und $\tilde{T}_2 \approx 21$, $\tilde{\tau}_2 \approx 22$. Die weiteren Oszillatoren und Relaxatoren klingen sehr schnell ab ($\tilde{\tau} \leq 5$). Zusammen mit dem Verhalten der Varianz des unerklärten Restes $\tilde{\eta}(t)$ und den Portmanteau-Statistiken \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 von $\tilde{\eta}(t)$ (siehe Kapitel 3.5) in Abhängigkeit von der Ordnung p , die in Tabelle 4.1.1 zusammengefaßt sind, kann man $p = 2$ als Ordnung des $\text{AR}(p)$ -Prozesses (4.1.1-5) folgern.

p	var[$\tilde{\eta}(t)$]	\tilde{p}_1	\tilde{p}_2
1	94.6	14060.	3633.
2	9.7	141.1	103.3
3	9.7	130.7	103.9
4	9.6	130.8	105.0
5	9.6	129.4	106.7
6	9.6	126.3	105.1
7	9.5	121.7	104.9
8	9.5	113.0	103.9
9	9.4	106.6	108.7
10	9.4	107.6	109.2

Tabelle 4.1.1: Die Varianz des un-
erklärten Restes $\tilde{\eta}(t)$ und die Port-
manteau-Statistiken \tilde{p}_1 und \tilde{p}_2 von
 $\tilde{\eta}(t)$ für die mittels des EOFMDL-
Verfahrens angepaßten AR(p)-Prozesse
mit $p=1, \dots, 10$.

c) *Das EOFMDL- und das EOFML-Verfahren*

Das EOFMDL- und das EOFML-Verfahren (Kapitel 2.7,9) schätzen beide die Muster \underline{C} als die EOFs der Beobachtungen $Y(t)$. Mit dieser Wahl sind Schätzwerte der Zustandsvariablen $X(t)$ gegeben, an die die jeweilige Modellfunktion $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$ angepaßt wird. Das EOFMDL-Verfahren bestimmt die Yule-Walker-Schätzer der Modellparameter eines AR(p)-Prozesses beliebiger Ordnung p mittels des multivariaten Durbin-Levinson-Algorithmus, das EOFML-Verfahren dagegen bestimmt die Maximum-Likelihood-Schätzer der Modellparameter α für beliebige Modellfunktionen $F[X(\tau \leq t), \alpha, t]$. Ist wie in diesem Beispiel die Modellfunktion ein AR(p)-Prozeß, so dienen die Yule-Walker-Schätzer der Modellparameter als Anfangswerte für die Maximierung.

Die Analysen der simulierten Daten $Y(t)$ mit den beiden Verfahren schätzen die Muster \underline{C} als

$$\tilde{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 0.9999 & 0.0139 \\ -0.0139 & 0.9999 \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

Die Ergebnisse der EOFMDL- und der EOFML-Analyse mit einem bivariaten ($m = 2$) AR(2)-Prozeß als Modellfunktion sind direkt vergleichbar. Um die Ergebnisse auch mit den gegebenen Werten (4.1.3-5) vergleichen zu können, muß das vorgegebene Modell auf dieselbe Darstellung transformiert werden. Weil für das hier betrachtete Modellbeispiel die Dimensionen des Beobachtungsraumes und des Zustandsraumes gleich sind ($n = m$), ist dies eine einfache Basistransformation

mit $\underline{L} = \underline{\tilde{C}}^T$ (siehe Kapitel 2.3):

$$\underline{A}'_1 = \begin{pmatrix} 1.9260 & -0.1055 \\ 0.0036 & 1.8170 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}'_2 = \begin{pmatrix} -0.9614 & 0.0781 \\ -0.0051 & -0.9013 \end{pmatrix}, \quad (4.1.7)$$

$$\underline{Q}' = \begin{pmatrix} 7.803 & 1.578 \\ 1.578 & 2.220 \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

In Tabelle 4.1.2 sind die gegebenen und die von beiden Verfahren geschätzten Werte der Systemmatrizen \underline{A}_1 und \underline{A}_2 und der Kovarianzmatrix \underline{Q} zusammengefaßt. Mit den Schätzwerten sind auch deren 90%-Vertrauensintervalle angegeben, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen (Kapitel 3.3,4). Die Unterschiede zwischen den Analyseergebnissen der beiden Verfahren sind gering. Alle Schätzwerte liegen innerhalb des jeweiligen 90%-Vertrauensintervalls. Insbesondere die Systemmatrizen \underline{A}_1 und \underline{A}_2 scheinen sehr gut geschätzt zu sein, was durch die engen Vertrauensintervalle angedeutet wird. Auch die vorgegebenen Werte liegen alle innerhalb der Vertrauensintervalle, d.h. die Schätzwerte sind erwartungstreu.

Parameter	gegeben (4.1.7,8)	EOFMDL-Verfahren			EOFML-Verfahren			LSQ-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
$(\underline{A}_1)_{11}$	1.93	1.93	1.91	1.95	1.93	1.91	1.94	1.93	1.91	1.94
$(\underline{A}_1)_{21}$	0.00	0.01	-0.00	0.01	0.00	-0.00	0.01	0.00	-0.01	0.01
$(\underline{A}_1)_{12}$	-0.11	-0.11	-0.15	-0.07	-0.12	-0.16	-0.08	-0.12	-0.16	-0.08
$(\underline{A}_1)_{22}$	1.82	1.81	1.79	1.83	1.83	1.80	1.84	1.83	1.80	1.84
$(\underline{A}_2)_{11}$	-0.96	-0.96	-0.98	-0.94	-0.96	-0.98	-0.94	-0.96	-0.98	-0.94
$(\underline{A}_2)_{21}$	-0.00	-0.01	-0.02	0.00	-0.01	-0.02	0.00	-0.01	-0.02	0.00
$(\underline{A}_2)_{12}$	0.08	0.07	0.03	0.12	0.08	0.04	0.11	0.08	0.04	0.12
$(\underline{A}_2)_{22}$	-0.90	-0.90	-0.92	-0.87	-0.91	-0.93	-0.88	-0.91	-0.93	-0.88
q_{11}	7.80	7.54	6.97	8.04	7.52	6.94	8.06	7.52	6.92	7.99
$q_{21}=q_{12}$	1.58	1.54	1.34	1.77	1.54	1.30	1.77	1.54	1.29	1.76
q_{22}	2.22	2.17	2.01	2.33	2.17	1.99	2.30	2.17	1.99	2.33

Tabelle 4.1.2: Die Werte der Systemmatrizen \underline{A}_1 , \underline{A}_2 und der Kovarianzmatrix \underline{Q} , wie sie in (4.1.7,8) gegeben sind, und die entsprechenden Analyseergebnisse des EOFMDL-, des EOFML- und des LSQ-Verfahrens. Die 90%-Vertrauensintervalle beruhen auf 500 Monte-Carlo-Simulationen.

d) Das EOFML-, das LSQ- und das ML-Verfahren

Aus Kapitel 2.7 ist bekannt, daß im Falle eines linearen Zustandsraummodells ohne Beobachtungsrauschen die POPs \underline{C} gleich den EOFs gewählt werden können. Das ML-Verfahren (Abschnitt 2.6a) ist jedoch nur anwendbar, wenn $\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}$ (2.5.5) invertierbar ist. Ohne Beobachtungsrauschen ($\underline{R} = \underline{0}$) ist dies der Fall, wenn die Dimensionen des Beobachtungsraumes und des Zustandsraumes gleich sind ($n = m$). Unter diesen Voraussetzungen sind die beiden Wahrscheinlichkeitsfunktionen $p(\underline{Y})$ (2.5.6) und $p(\underline{X})$ (2.7.7) identisch und man erwartet, daß die Maximum-Likelihood-Schätzer der ML- und der EOFML-Analyse gleich sind.

Das Modell (4.1.1-5), mit dem die Daten $\underline{Y}(t)$ erzeugt wurden, hat die genannten Eigenschaften, und ein Vergleich der Ergebnisse der EOFML-Analyse mit denen der ML-Analyse ist ein Test des in Abschnitt 2.6a) beschriebenen iterativen Verfahrens. Als Anfangswerte des ML-Verfahrens dienen die Schätzwerte der EOFMDL-Analyse. Der Anfangswert der Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschens \underline{R} , die bei der EOFMDL-Analyse nicht geschätzt wird, wurde gleich der Einheitsmatrix gewählt ($\underline{R} = \underline{I}$).

Die Analyse der simulierten Beobachtungen $\underline{Y}(t)$ mit dem ML-Verfahren und einem bivariaten ($m = 2$) AR(2)-Prozeß als Modellfunktion schätzt das Beobachtungsrauschen richtig als

$$\tilde{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Die weiteren Ergebnisse sind wie erwartet (nach einer entsprechenden Basis-Transformation wie in Abschnitt c) mit denen der EOFML-Analyse identisch.

Das LSQ-Verfahren, das in Abschnitt 2.6.b) vorgestellt wurde, bestimmt die Least-Squares-Schätzer der Muster \underline{C} und der Systemmatrizen \underline{A}_1 und \underline{A}_2 . Als Anfangswerte des Verfahrens dienen wiederum die Schätzwerte der EOFMDL-Analyse. Die Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} ergeben sich aus den Kovarianzen der entsprechenden unerklärten Reste. Da die Dimensionen des Beobachtungsraumes und des Zustandsraumes gleich sind ($n = m$), gilt für den Approximationsfehler (2.4.1,2)

$$\underline{\varepsilon}'(t) = \underline{Y}(t) - \underline{CC}^+ \underline{Y}(t) = \underline{0} \quad (4.1.10)$$

und die Kovarianz des Beobachtungsrauschens wird als

$$\tilde{\underline{R}} = \underline{0} \quad (4.1.11)$$

geschätzt. Für dieses Modellbeispiel ist also (die POPs \underline{C} als die EOFs (4.1.6) gewählt) ein direkter Vergleich der Least-Squares-Schätzer des LSQ-Verfahrens mit den Yule-Walker- und Maximum-Likelihood-Schätzern des EOFMDL- und EOFML-Verfahrens für \underline{A}_1 , \underline{A}_2 und \underline{Q} möglich. Die Unterschiede der drei Analyseergebnisse, die in Tabelle 4.1.2 zusammengefaßt sind, sind für dieses Modellbeispiel sehr klein. Auch die auf jeweils 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhenden 90%-Vertrauensintervalle sind fast gleich.

Box und Jenkins (1970) beobachteten bei der Anpassung von AR(p)-Prozessen an univariate Zeitreihen $Y(t)$ mittlerer und großer Länge t_{\max} ebenfalls nur kleine Unterschiede zwischen den verschiedenen Schätzern. Jedoch können (auch für relativ große t_{\max}) beachtliche Unterschiede auftreten, wenn die Zeitreihe nahe der Instabilität ist. In diesem Fall erwartet man die beste Schätzung von den Maximum-Likelihood-Schätzern.

4.2 EIN VERGLEICH DES LSQ- UND DES ML-VERFAHRENS UND DEREN ABHÄNGIGKEIT VON DEN ANFANGSWERTEN AN EINEM BEISPIEL MIT BEOBACHTUNGSRÄUSCHEN

An Hand eines weiteren Beispiels eines linearen Zustandsraummodells, das nun auch Beobachtungsräuschen einschließt, werden das LSQ- und das ML-Verfahren untersucht, die in Kapitel 2.6 vorgestellt wurden. Insbesondere interessiert uns die Abhängigkeit der Ergebnisse der beiden iterativen Schätzverfahren von den gewählten Anfangswerten.

a) Die simulierten Daten

Den simulierten Daten liegt ein Zustandsraummodell (2.1.5,6) mit den Dimensionen $n = 4$ für den Raum der $Y(t)$ und $m = 2$ für den Raum der $X(t)$ mit einem AR(2)-Prozeß als Modellfunktion zugrunde:

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{GWN}(0, \underline{R}), \quad (4.2.1)$$

$$X(t) = \underline{A}_1 X(t-1) + \underline{A}_2 X(t-2) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{GWN}(0, \underline{Q}). \quad (4.2.2)$$

Die Rauschterme $\varepsilon(t)$ und $\eta(t)$ sind Gaußsches weißes Rauschen mit verschwindendem Mittelwert und den Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} . Dieses Modell mit den Parametern

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0.2281 & 0.8679 \\ 0.7477 & -0.4430 \\ 0.5400 & 0.2195 \\ 0.3199 & 0.0465 \end{pmatrix}, \quad (4.2.3)$$

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0.2180 & 0.1614 & -0.1789 & -0.3160 \\ 0.1614 & 0.1304 & -0.1709 & -0.1864 \\ -0.1789 & -0.1709 & 1.2760 & -0.3988 \\ -0.3160 & -0.1864 & -0.3988 & 1.6990 \end{pmatrix}, \quad (4.2.4)$$

$$\underline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1.9250 & -0.1070 \\ 0.0021 & 1.8180 \end{pmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} -0.9604 & 0.0790 \\ -0.0043 & -0.9023 \end{pmatrix}, \quad (4.2.5)$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 7.846 & 1.500 \\ 1.500 & 2.177 \end{pmatrix} \quad (4.2.6)$$

ist ein System aus zwei Oszillatoren. Wie in Kapitel 2.11 gezeigt wurde, durchläuft jeder der beiden Oszillatoren im Beobachtungsraum einen Zyklus, der durch ein Paar von Mustern gekennzeichnet ist. Mit den Nebenbedingungen aus Anhang A.4 ist ein solches Paar eindeutig bestimmt. Das POP-Paar des ersten Oszillators mit der Periode $T_1 = 34$ und der $1/e$ -Abklingzeit $\tau_1 = 49$ ist

$$\underline{c}_1^1 = \begin{pmatrix} 0.1942 \\ 0.7641 \\ 0.5309 \\ 0.3098 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_2^1 = \begin{pmatrix} 0.0215 \\ -0.0101 \\ 0.0059 \\ 0.0014 \end{pmatrix}, \quad (4.2.7)$$

das des zweiten Oszillators mit der Periode $T_2 = 21$ und der $1/e$ -Abklingzeit $\tau_2 = 20$ ist

$$\underline{c}_1^2 = \begin{pmatrix} 0.8342 \\ 0.0480 \\ 0.4754 \\ 0.2090 \end{pmatrix}, \quad \underline{c}_2^2 = \begin{pmatrix} -0.0526 \\ 0.1553 \\ 0.0584 \\ 0.0417 \end{pmatrix}. \quad (4.2.8)$$

Die Zeitreihe der simulierten Beobachtungen $Y(t)$ umfaßt $t_{\max} = 1000$ Zeitschritte.

b) Das LSQ- und das ML-Verfahren

Eine Schwierigkeit bei der Anpassung von Zustandsraummodellen liegt in der Freiheit der Darstellung, die in Kapitel 2.3 näher betrachtet wurde. Um die Ergebnisse verschiedener Analysen vergleichen zu können, oder auch um die Monte-Carlo-Simulationen sinnvoll durchführen zu können, muß eine Darstellung gewählt werden, die durch geeignete Nebenbedingungen eindeutig festgelegt ist.

Die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften des betrachteten linearen Zustandsraummodells (4.2.1,2) werden durch die Angabe der Muster \underline{C} und der Systemmatrizen $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ charakterisiert. Die Angabe der POP-Paare $(c_1^1, c_2^1), (c_1^2, c_2^2)$ der beiden Oszillatoren und der dazugehörigen Zeitkonstanten $(T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2)$ ist dazu äquivalent. Während bei den Mustern \underline{C} und den Systemmatrizen $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ eine Transformationsfreiheit besteht, ist, wie schon erwähnt, die Darstellung der Oszillatoren mit den Nebenbedingungen aus Anhang A.4 eindeutig.

Die Unsicherheiten des Modells sind durch die Kovarianzmatrizen \underline{R} des Beobachtungsrauschens und \underline{Q} des Systemrauschens charakterisiert. Die Matrix \underline{R} ist im Beobachtungsraum definiert und damit eindeutig. Die Darstellung der Matrix \underline{Q} im Beobachtungsraum

$$\underline{CQC}^T = \begin{pmatrix} 2.642 & 1.323 & 2.159 & 1.068 \\ 1.323 & 3.820 & 2.844 & 1.630 \\ 2.159 & 2.844 & 2.748 & 1.484 \\ 1.068 & 1.630 & 1.484 & 0.812 \end{pmatrix} \quad (4.2.9)$$

ist ebenfalls eindeutig.

Die simulierten Daten wurden mit dem LSQ- und dem ML-Verfahren analysiert und die dazugehörigen 90%-Vertrauensintervalle berechnet, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen. Als Anfangswerte der beiden iterativen Verfahren dienten die Schätzwerte der EOFMDL-Analyse. Für das ML-Verfahren wurde der Anfangswert der Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschens \underline{R} , die durch das EOFMDL-Verfahren nicht geschätzt wird, gleich der Einheitsmatrix gesetzt ($\underline{R} = \underline{I}$). Die „beobachteten“ Schätzwerte dienten als Anfangswerte der Analyse der entsprechenden Monte-Carlo-Simulationen.

Die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften werden gut geschätzt (siehe Tabelle 4.2.1a). Die Unterschiede zwischen den beiden Analyseverfahren sind gering. Die Schätzwerte und die vorgegebenen Werte liegen innerhalb der angegebenen 90%-Vertrauensintervalle. Die stochastischen Eigenschaften des Systems (Tabelle 4.2.1b) werden schlechter geschätzt. Der Maximum-Likelihood-Schätzer (ML-Verfahren) des Beobachtungsrauschens \underline{R} ist zufriedenstellend; das im Beobachtungsraum dargestellte Systemrauschen \underline{CQC}^T wird jedoch etwas zu groß geschätzt. Das LSQ-Verfahren bestimmt die Größen \underline{R} und \underline{Q} als die Kovarianzmatrizen der entsprechenden unerklärten Reste. Die Stärke der Rauschterme wird in der Regel überschätzt. Auf die Abhängigkeit der beiden Verfahren vom Beobachtungsrauschen wird im nächsten Kapitel 4.3 eingegangen.

Parameter	gegeben (4.2.7,8)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
T_1	33.9	33.8	32.6	35.3	33.8	32.6	35.1
τ_1	48.8	54.7	35.6	80.3	58.1	38.1	80.9
$(c_1)_1$	0.19	0.20	0.17	0.22	0.20	0.17	0.22
$(c_1)_2$	0.76	0.76	0.75	0.77	0.76	0.75	0.77
$(c_1)_3$	0.53	0.53	0.52	0.54	0.53	0.52	0.54
$(c_1)_4$	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31
$(c_2)_1$	0.02	0.02	-0.00	0.05	0.02	-0.01	0.05
$(c_2)_2$	-0.01	-0.01	-0.02	0.00	-0.01	-0.02	0.00
$(c_2)_3$	0.01	0.01	-0.00	0.01	0.01	-0.00	0.01
$(c_2)_4$	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
T_2	21.1	20.5	19.6	21.2	20.5	19.7	21.3
τ_2	19.6	18.7	14.8	23.4	20.4	14.5	24.0
$(c_2)_1$	0.83	0.80	0.73	0.84	0.80	0.74	0.84
$(c_2)_2$	0.05	0.10	-0.01	0.21	0.10	-0.01	0.21
$(c_2)_3$	0.48	0.48	0.43	0.52	0.48	0.44	0.52
$(c_2)_4$	0.21	0.22	0.19	0.25	0.22	0.19	0.25
$(c_2)_1$	-0.05	-0.09	-0.16	-0.04	-0.09	-0.15	-0.05
$(c_2)_2$	0.16	0.23	0.11	0.34	0.23	0.13	0.34
$(c_2)_3$	0.06	0.08	0.04	0.12	0.08	0.04	0.12
$(c_2)_4$	0.04	0.06	0.03	0.09	0.06	0.03	0.09

Tabelle 4.2.1a: Die Analyseergebnisse für die Zeitkonstanten T_i , τ_i und die POP-Paare (c_1^i, c_2^i) der beiden Oszillatoren ($i=1,2$). Spalte 2 beinhaltet die vorgegebenen Werte, die Spalten 3-5 die Ergebnisse des LSQ-Verfahrens, d.h. die Schätzwerte und die dazugehörigen 90%-Vertrauensintervalle, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen. In den letzten drei Spalten sind die entsprechenden Ergebnisse des ML-Verfahrens aufgeführt.

c) Die Abhängigkeit des LSQ- und des ML-Verfahrens von den Anfangswerten

Aus der Analyse der simulierten Daten mit verschiedenen Anfangswerten erhält man Aufschluß über die Abhängigkeit der Schätzwerte von den gewählten Anfangswerten. Für das LSQ- und das ML-Verfahren wurden 500 Analysen mit stochastischen Anfangswerten aller Parameter θ durchgeführt. Die verschiedenen Schätzungen streuen etwas. Von diesen Verteilungen können, wie bei den Monte-

Parameter	gegeben (4.2.4,9)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
r_{11}	0.22	0.21	0.19	0.22	0.15	0.08	0.22
$r_{21}=r_{12}$	0.16	0.23	0.21	0.24	0.12	0.06	0.18
$r_{31}=r_{13}$	-0.18	-0.33	-0.36	-0.31	-0.17	-0.25	-0.07
$r_{41}=r_{14}$	-0.32	-0.12	-0.16	-0.09	-0.27	-0.37	-0.15
r_{22}	0.13	0.27	0.25	0.29	0.13	0.07	0.21
$r_{32}=r_{23}$	-0.17	-0.29	-0.32	-0.26	-0.20	-0.28	-0.08
$r_{42}=r_{24}$	-0.19	-0.31	-0.34	-0.27	-0.20	-0.33	-0.08
r_{33}	1.28	0.85	0.78	0.92	1.26	1.07	1.49
$r_{43}=r_{34}$	-0.40	-0.52	-0.59	-0.46	-0.41	-0.53	-0.25
r_{44}	1.70	1.73	1.59	1.84	1.77	1.60	1.95
$(\underline{CQC}^T)_{11}$	2.64	3.05	2.80	3.28	2.83	2.80	3.26
$(\underline{CQC}^T)_{12}$	1.32	1.43	1.23	1.61	1.37	1.27	1.67
$(\underline{CQC}^T)_{13}$	2.16	2.43	2.21	2.61	2.28	2.25	2.67
$(\underline{CQC}^T)_{14}$	1.07	1.21	1.09	1.30	1.14	1.11	1.33
$(\underline{CQC}^T)_{22}$	3.82	4.11	3.77	4.35	3.87	3.79	4.39
$(\underline{CQC}^T)_{23}$	2.84	3.06	2.80	3.26	2.90	2.83	3.32
$(\underline{CQC}^T)_{24}$	1.63	1.76	1.61	1.87	1.66	1.63	1.90
$(\underline{CQC}^T)_{33}$	2.75	3.01	2.77	3.19	2.84	2.80	3.26
$(\underline{CQC}^T)_{34}$	1.48	1.63	1.50	1.74	1.54	1.51	1.76
$(\underline{CQC}^T)_{44}$	0.81	0.89	0.82	0.95	0.84	0.83	0.97

Tabelle 4.2.1b: Analog zu Tabelle 4.2.1a sind in dieser Tabelle die Ergebnisse für die Koeffizienten der symmetrischen Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und (\underline{CQC}^T) der transformierten Kovarianzmatrix des Systemrauschens zusammengefaßt.

Carlo-Simulationen, die 90%-Intervalle berechnet werden.

Es zeigt sich, daß das LSQ-Verfahren wesentlich robuster ist. So wurden für das ML-Verfahren

$$\theta = (1 + \xi) \tilde{\theta}, \quad \xi \sim N(0, 0.04), \quad (4.2.10)$$

als stochastische Anfangswerte gewählt. Dabei ist $\tilde{\theta}$ der „beobachtete“ Schätzwert und ξ eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert 0 und der Varianz 0.04. Für das LSQ-Verfahren war es sogar möglich, die Anfangswerte vollkommen unabhängig von den „beobachteten“ Schätzwerten zu wählen, nämlich

Parameter	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren		
	gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
T_1	33.8	33.8	33.8	33.8	33.8	33.8
τ_1	54.7	54.6	54.7	58.1	57.7	58.2
$(c_1^1)_1$	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
$(c_1^1)_2$	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76	0.76
$(c_1^1)_3$	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53	0.53
$(c_1^1)_4$	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31
$(c_2^1)_1$	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
$(c_2^1)_2$	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01	-0.01
$(c_2^1)_3$	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$(c_2^1)_4$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
T_2	20.5	20.5	20.5	20.5	20.5	20.5
τ_2	18.7	18.7	18.7	20.4	19.8	20.5
$(c_1^2)_1$	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
$(c_1^2)_2$	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
$(c_1^2)_3$	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48	0.48
$(c_1^2)_4$	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22
$(c_2^2)_1$	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09	-0.09
$(c_2^2)_2$	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23	0.23
$(c_2^2)_3$	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
$(c_2^2)_4$	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06

Tabelle 4.2.2a: In dieser Tabelle sind für die Zeitkonstanten T_i , τ_i und die POP-Paare (c_1^i, c_2^i) der beiden Oszillatoren ($i=1,2$) die 90%-Intervalle der 500 Analysen mit zufälligen Startwerten der beiden iterativen LSQ- und ML-Verfahren zusammengefaßt. Die ersten drei Spalten beinhalten die Schätzwerte und die dazugehörigen 90%-Intervalle des LSQ-Verfahrens. In den letzten drei Spalten sind die entsprechenden Ergebnisse des ML-Verfahrens aufgeführt.

als normalverteilte Zufallszahlen

$$\theta = \xi, \quad \xi \sim N(0,1), \quad (4.2.11)$$

mit Mittelwert 0 und Varianz 1.

Die 90%-Intervalle der Größen (T_1, τ_1) , (c_1^1, c_2^1) , (T_2, τ_2) , (c_1^2, c_2^2) (siehe Tabelle 4.2.2a) zeigen, daß die Schwankungen für beide Verfahren sehr gering sind. Auch die Schwankungen der Schätzwerte der 1/e-Abklingzeit sind im

Parameter	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren		
	gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
r_{11}	0.21	0.21	0.21	0.15	0.09	0.14
$r_{21}=r_{12}$	0.23	0.23	0.23	0.12	0.07	0.13
$r_{31}=r_{13}$	-0.33	-0.33	-0.33	-0.17	-0.22	-0.14
$r_{41}=r_{14}$	-0.12	-0.12	-0.12	-0.27	-0.30	-0.21
r_{22}	0.27	0.27	0.27	0.13	0.07	0.14
$r_{32}=r_{23}$	-0.29	-0.29	-0.29	-0.20	-0.22	-0.13
$r_{42}=r_{24}$	-0.31	-0.31	-0.31	-0.20	-0.28	-0.18
r_{33}	0.85	0.85	0.85	1.26	1.23	1.39
$r_{43}=r_{34}$	-0.52	-0.52	-0.52	-0.41	-0.44	-0.33
r_{44}	1.73	1.73	1.73	1.77	1.72	1.82
$(\underline{COC}^T)_{11}$	3.05	3.05	3.06	2.83	2.83	2.92
$(\underline{COC}^T)_{12}$	1.43	1.43	1.44	1.37	1.35	1.42
$(\underline{COC}^T)_{13}$	2.43	2.43	2.44	2.28	2.27	2.35
$(\underline{COC}^T)_{14}$	1.21	1.21	1.21	1.14	1.13	1.17
$(\underline{COC}^T)_{22}$	4.11	4.11	4.11	3.87	3.87	3.90
$(\underline{COC}^T)_{23}$	3.06	3.06	3.06	2.90	2.89	2.94
$(\underline{COC}^T)_{24}$	1.76	1.76	1.76	1.66	1.66	1.68
$(\underline{COC}^T)_{33}$	3.01	3.01	3.01	2.84	2.83	2.90
$(\underline{COC}^T)_{34}$	1.63	1.63	1.63	1.54	1.53	1.57
$(\underline{COC}^T)_{44}$	0.89	0.89	0.89	0.84	0.84	0.86

Tabelle 4.2.2b: Analog zu Tabelle 4.2.2a sind in dieser Tabelle die Ergebnisse für die Koeffizienten der symmetrischen Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und (\underline{COC}^T) der transformierten Kovarianzmatrix des Systemrauschens zusammengefaßt.

Vergleich zu den in Tabelle 4.2.1a angegebenen 90%-Vertrauensintervallen zu vernachlässigen. Die Dämpfungsrate $\kappa = -1/\tau$ ist gegenüber der 1/e-Abklingzeit τ ein stabilerer Parameter, jedoch wird die Angabe der anschaulicheren 1/e-Abklingzeit τ bevorzugt.

Die 90%-Intervalle der Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{COC}^T (siehe Tabelle 4.2.2b) zeigen einen erheblichen Unterschied zwischen den beiden Verfahren. Die Maximum-Likelihood-Schätzer des ML-Verfahrens differieren voneinander. Die Schwankungen sind im Vergleich zu den 90%-Vertrauensintervallen der Monte-

Carlo-Simulationen (Tabelle 4.2.1b) nicht zu vernachlässigen. Die Schätzer des LSQ-Verfahrens sind dagegen kaum von den jeweiligen Anfangswerten des iterativen Verfahrens abhängig.

d) Zusammenfassung

Zusammenfassend folgt für das LSQ- und das ML-Verfahren:

Die zeitlichen und räumlichen Eigenschaften des betrachteten Zustandsraummodells werden gut geschätzt (Tabelle 4.2.1a); die Abhängigkeit der Schätzwerte von den Anfangswerten des iterativen Verfahrens ist unwesentlich (Tabelle 4.2.2a). Die Ergebnisse der beiden Verfahren unterscheiden sich kaum.

Die Schätzergebnisse der Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{CQC}^T (Tabelle 4.2.1b) sind schlechter. Die etwas besseren Ergebnisse des ML-Verfahrens werden durch die deutliche Abhängigkeit von den Startwerten (Tabelle 4.2.2b) in Frage gestellt. Weiter ist zu beachten, daß für das LSQ-Verfahren allgemeinere Anfangswerte (4.2.11) gewählt werden konnten. Die Untersuchungen zeigten außerdem, daß die Güte der Ergebnisse des ML-Schätzverfahrens von der Vorgabe der Anfangswerte der Muster \underline{C} beeinflußt wird.

Daraus schließen wir, daß für unbekannte, große, komplexe Systeme das LSQ-Verfahren zu bevorzugen ist. Dafür spricht auch der geringere Rechenzeitbedarf dieses Verfahrens.

4.3 EIN VERGLEICH VON LSQ- UND ML-VERFAHREN MIT DEM AUF DEM KALMAN-GLÄTTUNGSFILTER AUFBAUENDEN KALMAN-VERFAHREN UND DEREN ABHÄNGIGKEIT VON DEM BEOBACHTUNGSRAUSCHEN

An einem dritten Beispiel eines linearen Zustandsraummodells werden das LSQ- und das ML-Verfahren (Kapitel 2.6) mit dem von Gantert (1989) entwickelten Schätzverfahren (Kapitel 2.10) verglichen.

Das LSQ- und das ML-Verfahren bestimmen die Zustandsvariablen $X(t)$ durch den linearen, erwartungstreuen Schätzer $X(t;t) = \underline{C}^+ Y(t)$ (2.4.1). Für ein Zustandsraummodell mit einem AR(1)-Prozeß als Modellfunktion erhält man mit Hilfe des Kalman-Glättungsfilters einen Schätzer $\hat{X}(t)$, der linear von allen Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, abhängt. Das Verfahren von Gantert baut auf dem Kalman-Glättungsfilter auf und wird deshalb im folgenden kurz Kalman-Verfahren genannt. Es bestimmt die Maximum-Likelihood-Schätzer der Muster \underline{C} ,

der Modellparameter α und der Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} . Diese drei Verfahren bilden eine Hierarchie von Schätzverfahren für Zustandsraummodelle, wie sie Tabelle 2.10.1 im Überblick zeigt.

Wir wissen, daß bei einem Zustandsraummodell ohne Beobachtungsrauschen der Kalman-Glättungsfilter in den einfacheren Schätzer (2.4.1) mit $\underline{M} = \underline{I}$ übergeht (Kapitel 2.4), und außerdem, daß mit den Mustern \underline{C} auch die Zustandsvariablen $X(t)$ gegeben sind (Kapitel 2.7). In diesem Kapitel interessiert deshalb der Einfluß verschiedener Beobachtungsrauschen auf die Analyseergebnisse der drei Verfahren.

a) Die simulierten Daten

Den simulierten Daten liegt ein Zustandsraummodell (2.1.5,6) mit den Dimensionen $n = 4$ für den Raum der $Y(t)$ und $m = 2$ für den Raum der $X(t)$ und einem AR(1)-Prozeß als Modellfunktion zugrunde:

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{GWN}(0, \underline{R}), \quad (4.3.1)$$

$$X(t) = \underline{A}X(t-1) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{GWN}(0, \underline{Q}). \quad (4.3.2)$$

Die Rauschterme $\varepsilon(t)$ und $\eta(t)$ sind Gaußsches weißes Rauschen mit verschwindendem Mittelwert und den Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} . Dieses Modell mit den Parametern

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 0.1370 & 0.4787 \\ 0.0958 & 0.2802 \\ 0.4532 & 0.3196 \\ 0.2334 & 0.2347 \end{pmatrix}, \quad (4.3.3)$$

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0.0423 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0230 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0760 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0455 \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0.9100 & 0.2100 \\ -0.2500 & 0.8900 \end{pmatrix}, \quad (4.3.5)$$

$$\underline{Q} = \begin{pmatrix} 2.6690 & 0.5540 \\ 0.5540 & 2.8370 \end{pmatrix} \quad (4.3.6)$$

ist das System eines gedämpften Oszillators mit der Periode $T = 25$ und der $1/e$ -Abklingzeit $\tau = 14$. Das POP-Paar, das der Oszillator zyklisch durchläuft

(siehe Kapitel 2.11), ist mit den Nebenbedingungen aus Anhang A.4 eindeutig bestimmt:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 0.5585 \\ 0.3359 \\ 0.5845 \\ 0.3710 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0.1976 \\ 0.1010 \\ -0.2089 \\ -0.0598 \end{pmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Die Zeitreihe der simulierten Beobachtungen $Y(t)$ umfaßt $t_{\max} = 1000$ Zeitschritte.

Die Eigenschaften des Zustandsraummodells werden, wie schon im Abschnitt 4.2b) erwähnt, durch das POP-Paar (c_1, c_2) , die Zeitkonstanten T, τ , die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und die im Beobachtungsraum dargestellte Kovarianzmatrix

$$\underline{CQC}^T = \begin{pmatrix} 0.7729 & 0.4622 & 0.7442 & 0.4838 \\ 0.4622 & 0.2769 & 0.4572 & 0.2949 \\ 0.7442 & 0.4572 & 0.9985 & 0.5954 \\ 0.4838 & 0.2949 & 0.5954 & 0.3624 \end{pmatrix} \quad (4.3.8)$$

des Systemrauschens eindeutig charakterisiert.

b) Das LSQ- und das ML-Verfahren

Die simulierten Daten wurden mit dem LSQ- und dem ML-Verfahren (linearer, erwartungstreuer Schätzer für $X(t)$, Least-Squares- bzw. Maximum-Likelihood-Schätzer für \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q}) analysiert und die dazugehörigen 90%-Vertrauensintervalle berechnet, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen. Als Anfangswerte dienten die Schätzwerte der EOFMDL-Analyse. Für das ML-Verfahren wurde der Anfangswert der Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschens, die durch das EOFMDL-Verfahren nicht geschätzt wird, gleich der Einheitsmatrix ($\underline{R} = \underline{I}$) gesetzt. Die „beobachteten“ Schätzwerte dienten als Anfangswerte der Analyse der Monte-Carlo-Simulationen.

Die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften werden recht gut geschätzt (siehe Tabelle 4.3.1a). Die Unterschiede zwischen den Schätzwerten des LSQ- und ML-Verfahrens sind klein. Alle Schätzwerte liegen in den entsprechenden 90%-Vertrauensintervallen. Allerdings wird die vorgegebene $1/e$ -Abklingzeit τ systematisch unterschätzt, und es liegen einige der vorgegebenen Koeffizienten der Muster knapp außerhalb der 90%-Vertrauensintervalle. Die stochastischen Eigenschaften des Systems (Tabelle 4.3.1b) werden schlecht geschätzt. Es sind zwar alle Schätzwerte innerhalb der 90%-Vertrauensintervalle, aber diese sind nicht immer konsistent mit den vorgegebenen Werten.

Parameter	gegeben (4.3.7)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren			Kalman-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
T	25.2	25.9	23.9	27.9	25.9	24.0	27.8	25.7	24.2	28.1
τ	13.5	10.0	8.3	12.1	10.2	8.3	12.0	14.1	11.1	16.6
c_{11}	0.56	0.54	0.52	0.55	0.54	0.52	0.55	0.55	0.53	0.56
c_{12}	0.34	0.32	0.32	0.33	0.33	0.32	0.33	0.33	0.32	0.34
c_{13}	0.58	0.61	0.60	0.63	0.61	0.60	0.63	0.60	0.58	0.61
c_{14}	0.37	0.38	0.37	0.38	0.38	0.37	0.38	0.38	0.37	0.38
c_{21}	0.20	0.20	0.18	0.21	0.20	0.18	0.21	0.19	0.18	0.21
c_{22}	0.10	0.10	0.09	0.10	0.10	0.09	0.10	0.10	0.09	0.10
c_{23}	-0.21	-0.19	-0.21	-0.18	-0.19	-0.20	-0.18	-0.19	-0.21	-0.18
c_{24}	-0.06	-0.05	-0.06	-0.05	-0.05	-0.06	-0.05	-0.05	-0.06	-0.05

Tabelle 4.3.1a: Die Analyseergebnisse für die Zeitkonstanten T, τ und das POP-Paar (c_1, c_2) des Oszillators. Spalte 2 beinhaltet die vorgegebenen Werte, die Spalten 3-5 die Ergebnisse des LSQ-Verfahrens, d.h. die Schätzwerte und die dazugehörigen 90%-Vertrauensintervalle, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen. In den Spalten 6-8 sind die entsprechenden Ergebnisse des ML-Verfahrens und in den letzten drei Spalten die des Kalman-Verfahrens dargestellt.

Das Unvermögen des LSQ- und des ML-Verfahrens, insbesondere die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens korrekt zu schätzen, erstaunt auf den ersten Blick. Denn \underline{R} (4.3.4) ist klein gegenüber der transformierten Kovarianzmatrix \underline{CQC}^T (4.3.7) des Systemrauschens und sollte das Analyseergebnis nicht wesentlich beeinflussen. Dieser Mangel soll kurz erklärt werden:

Dazu spalten wir das Beobachtungsrauschen $\varepsilon(t)$ (4.3.1) in zwei Anteile

$$\varepsilon(t) = \underline{CC}^+ \varepsilon(t) + (\underline{I} - \underline{CC}^+) \varepsilon(t) \quad (4.3.9)$$

auf, wobei

$$\underline{C}^+ = (\underline{C}^T \underline{MC})^{-1} \underline{C}^T \underline{M} \quad (4.3.10)$$

die aus (2.4.1) bekannte Moore-Penrose-Pseudoinverse der Muster \underline{C} zur Metrik \underline{M} ist ($\underline{M} = \underline{R}^{-1}$ bzw. \underline{I}). Der erste Anteil $\underline{CC}^+ \varepsilon(t)$ ist die Projektion des Beobachtungsrauschens auf den durch die Muster aufgespannten Raum der Dynamik des

Parameter	gegeben (4.3.4,8)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren			Kalman-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
r_{11}	.042	.007	.007	.008	.037	.022	.053	.108	.084	.131
$r_{21}=r_{12}$.000	-.011	-.012	-.010	-.010	-.011	-.006	.030	.019	.044
$r_{31}=r_{13}$.000	.003	.003	.004	.016	.006	.029	.064	.041	.087
$r_{41}=r_{14}$.000	-.006	-.007	-.005	.015	.003	.029	.050	.035	.066
r_{22}	.023	.021	.019	.022	.013	.007	.021	.035	.028	.046
$r_{32}=r_{23}$.000	-.000	-.001	.000	.003	-.004	.011	.033	.021	.046
$r_{42}=r_{24}$.000	-.002	-.004	-.001	.005	-.002	.012	.026	.017	.038
r_{33}	.076	.008	.008	.009	.024	.008	.035	.132	.094	.164
$r_{43}=r_{34}$.000	-.018	-.019	-.017	-.003	-.011	.007	.055	.035	.073
r_{44}	.046	.039	.037	.042	.054	.040	.069	.087	.070	.104
$(\underline{CQC}^T)_{11}$	0.77	0.88	0.82	0.94	0.86	0.80	0.93	0.70	0.66	0.73
$(\underline{CQC}^T)_{12}$	0.46	0.52	0.48	0.55	0.51	0.47	0.55	0.42	0.39	0.43
$(\underline{CQC}^T)_{13}$	0.74	0.76	0.70	0.82	0.75	0.70	0.83	0.65	0.60	0.67
$(\underline{CQC}^T)_{14}$	0.48	0.51	0.47	0.55	0.50	0.47	0.55	0.42	0.39	0.44
$(\underline{CQC}^T)_{22}$	0.28	0.31	0.29	0.33	0.30	0.28	0.33	0.25	0.23	0.26
$(\underline{CQC}^T)_{23}$	0.46	0.47	0.43	0.50	0.46	0.43	0.51	0.40	0.37	0.41
$(\underline{CQC}^T)_{24}$	0.29	0.31	0.29	0.33	0.30	0.29	0.33	0.26	0.24	0.27
$(\underline{CQC}^T)_{33}$	1.00	1.07	0.99	1.14	1.06	1.01	1.17	0.85	0.79	0.89
$(\underline{CQC}^T)_{34}$	0.60	0.63	0.58	0.67	0.62	0.59	0.68	0.51	0.48	0.53
$(\underline{CQC}^T)_{44}$	0.36	0.38	0.35	0.41	0.38	0.36	0.41	0.31	0.29	0.32

Tabelle 4.3.1b: Analog zu Tabelle 4.3.1a sind in dieser Tabelle die Ergebnisse für die Koeffizienten der symmetrischen Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und (\underline{CQC}^T) der transformierten Kovarianzmatrix des Systemrauschens zusammengefaßt.

Systems, der zweite Anteil $(\underline{I}-\underline{CC}^+)\varepsilon(t)$ ist die Projektion auf den dazu orthogonalen Raum. Sind die Muster \underline{C} bekannt, so folgt für die geschätzten Zustandsvariablen (2.4.1)

$$\underline{X}(t;t) = \underline{C}^+ \underline{Y}(t) \quad (4.3.11)$$

aus der Beobachtungsgleichung (4.3.1)

$$\underline{X}(t;t) = \underline{C}^+ \underline{CX}(t) + \underline{C}^+ \varepsilon(t) = \underline{X}(t) + \underline{C}^+ \varepsilon(t). \quad (4.3.12)$$

Das bedeutet, daß die Schätzung der Zustandsvariablen um den auf den Raum der Muster projizierten Anteil des Beobachtungsrauschens verfälscht wird und dadurch das LSQ- und das ML-Verfahren die 1/e-Abklingzeit τ systematisch unterschätzen.

Bei dem einfacheren LSQ-Verfahren wird die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens als die Kovarianzmatrix

$$\underline{R}' = \langle \varepsilon'(t) \varepsilon'^T(t) \rangle \quad (4.3.13)$$

des Approximationsfehlers

$$\varepsilon'(t) = Y(t) - \underline{C}X(t;t) \quad (4.3.14)$$

bestimmt (Abschnitt 2.6b). Aus (4.3.1,12-14) folgt

$$\varepsilon'(t) = (\underline{I} - \underline{C}\underline{C}^+) \varepsilon(t), \quad (4.3.15)$$

für den Approximationsfehler und

$$\underline{R}' = (\underline{I} - \underline{C}\underline{C}^+) \underline{R} (\underline{I} - \underline{C}\underline{C}^+)^T. \quad (4.3.16)$$

für dessen Kovarianzmatrix. Mit den gegebenen Parameterwerten (4.3.3,4) können wir also höchstens erwarten, daß die Schätzung der Kovarianzmatrix \underline{R} mit

$$\underline{R}' = \begin{pmatrix} 0.0075 & -0.0114 & 0.0034 & -0.0062 \\ -0.0114 & 0.0211 & 0.0001 & -0.0023 \\ 0.0034 & 0.0001 & 0.0086 & -0.0187 \\ -0.0062 & -0.0023 & -0.0187 & 0.0409 \end{pmatrix} \quad (4.3.17)$$

verträglich ist. Ein Vergleich mit den entsprechenden Schätzwerten des LSQ-Verfahrens, die in den Spalten 5 bis 7 der Tabelle 4.3.1b zusammengefaßt sind, zeigt, daß alle Komponenten von \underline{R}' innerhalb der angegebenen 90%-Vertrauensintervalle liegen. Die Abweichung der Matrix \underline{R}' von der Matrix \underline{R} aus (4.3.4) ist allerdings nicht vernachlässigbar.

Das ML-Verfahren bestimmt die Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{Q} durch ihre Maximum-Likelihood-Schätzer (Abschnitt 2.6.a). Der Fehler bei der Schätzung der Zustandsvariablen (4.3.12) beeinflusst auch diese Schätzwerte, jedoch kann das bei diesem Verfahren nicht auf einfache Weise veranschaulicht werden.

c) Das Kalman-Verfahren

Bei dem Kalman-Verfahren werden die Zustandsraumvariablen $X(t)$ mittels des Kalman-Glättungsfilters geschätzt und die Parameter \underline{C} , α , \underline{R} und \underline{Q} als Maximum-Likelihood-Schätzer bestimmt. Gantert (1989) wählte für das Kalman-Verfahren die spezielle Darstellung des Zustandsraummodells mit $\underline{Q} = \underline{I}$ (siehe

Kapitel 2.3). Als Anfangswerte dienten die auf diese Darstellung transformierten Ergebnisse der EOFMDL-Analyse. Die Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschens war wiederum $\underline{R} = \underline{I}$. Weiter benötigt das Kalman-Verfahren noch die Anfangswerte für den Kalman-Glättungsfilter: $\hat{X}(0) = X(1;1)$ und $\underline{P}(0) = \underline{I}$. Die jeweils „beobachteten“ Schätzwerte wurden als Anfangswerte der Analyse der entsprechenden 500 Monte-Carlo-Simulationen gesetzt, auf denen die berechneten 90%-Vertrauensintervalle beruhen.

Der Kalman-Glättungsfilter korrigiert die naive Schätzung (4.3.11) der Zustandsvariablen. Es gehen dabei sowohl das lineare Zustandsraummodell (4.3.1,2) als auch alle Beobachtungen $Y(t)$, $t=1, \dots, t_{\max}$, ein. Dies führt zu einer besseren Schätzung der zeitlichen und räumlichen Struktur (siehe Tabelle 4.3.1a). Die Muster c_1 und c_2 , die Periode T und insbesondere die $1/e$ -Abklingzeit τ werden konsistent geschätzt. Jedoch ist das Kalman-Verfahren offenbar nicht in der Lage, die stochastischen Eigenschaften des Beispiels richtig zu bestimmen. Wie wir aus Tabelle 4.3.1b ersehen, liegen die Schätzwerte zwar alle innerhalb der 90%-Vertrauensintervalle, jedoch wurde die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens systematisch überschätzt und die transformierte Kovarianzmatrix \underline{CQC}^T des Systemrauschens systematisch unterschätzt.

Mit dem Kalman-Verfahren wird ein stets positiv definiten Schätzer für \underline{R} bestimmt, der nur langsam gegen einen mit Null verträglichen Wert konvergiert. Von daher ist zu verstehen, daß in diesem Beispiel, in dem das vorgegebene \underline{R} (4.3.4) klein gegenüber \underline{CQC}^T (4.3.7) und nur die Diagonale von Null verschieden ist, \underline{R} systematisch überschätzt wird. In die Likelihoodfunktion (2.5.6) geht nur die Summe $\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}$ (2.5.5) der Kovarianzen der beiden Rauschterme ein. Daraus folgt, daß mit einem systematisch überschätzten \underline{R} ein systematisch unterschätztes \underline{CQC}^T einhergeht.

d) Ein zweiter Satz simulierter Daten

Die Folgerungen bzgl. der Abhängigkeit des LSQ- und des ML-Verfahrens von dem Beobachtungsrauschen werden durch die Analyse einer zweiten Zeitreihe geprüft. Den simulierten Daten liegt wiederum das lineare Zustandsraummodell (4.3.1,2) zugrunde. Die Parameter der Muster \underline{C} (4.3.3), der Modellparameter \underline{A} (4.3.5) und der Kovarianzmatrix \underline{Q} (4.3.6) des Systemrauschens bleiben unverändert. Lediglich die Kovarianzmatrix des Beobachtungsrauschens ist neu durch

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} 0.0074 & -0.0110 & 0.0034 & -0.0060 \\ -0.0110 & 0.0228 & -0.0002 & -0.0020 \\ 0.0034 & -0.0002 & 0.0092 & -0.0179 \\ -0.0060 & -0.0020 & -0.0179 & 0.0423 \end{pmatrix}, \quad (4.3.18)$$

gegeben. Der Unterschied

$$\underline{R} - \underline{R}' = \begin{pmatrix} -0.0003 & 0.0008 & -0.0000 & 0.0003 \\ 0.0008 & 0.0009 & -0.0003 & 0.0003 \\ -0.0000 & -0.0003 & 0.0005 & 0.0010 \\ 0.0003 & 0.0003 & 0.0010 & 0.0009 \end{pmatrix} \quad (4.3.19)$$

zur Kovarianzmatrix

$$\underline{R}' = \begin{pmatrix} 0.0077 & -0.0117 & 0.0034 & -0.0063 \\ -0.0118 & 0.0219 & 0.0001 & -0.0023 \\ 0.0034 & 0.0001 & 0.0087 & -0.0189 \\ -0.0063 & -0.0023 & -0.0189 & 0.0414 \end{pmatrix} \quad (4.3.20)$$

des Approximationsfehlers $\varepsilon'(t) = (\underline{I} - \underline{CC}^+) \varepsilon(t)$ (4.3.14,15) ist klein. Daraus schließen wir, daß der Anteil $\underline{CC}^+ \varepsilon(t)$, der auf den Raum der Muster \underline{C} projiziert wird, gegenüber dem Rauschen $\varepsilon(t)$ zu vernachlässigen ist, und erwarten, daß die Analyseergebnisse insbesondere des LSQ-Verfahrens besser sind als in dem zuvor diskutierten Beispiel.

Die zeitlichen und räumlichen Eigenschaften in diesem zweiten Beispiel werden von allen drei betrachteten Verfahren gut geschätzt (siehe Tabelle 4.3.2a). Die Unterschiede sind gering, lediglich die Schätzung der 1/e-Abklingzeit τ durch das Kalman-Verfahren ist etwas groß. Die Schätzwerte und die vorgegebenen Werte liegen innerhalb der angegebenen 90%-Vertrauensintervalle. Wie erwartet, schätzen das LSQ- und das ML-Verfahren die stochastischen Eigenschaften diesmal besser (Tabelle 4.3.2b). Alle Schätzwerte liegen in den 90%-Vertrauensintervallen. Die Schätzung der Kovarianzmatrizen \underline{R} und \underline{CQC}^T ist bis auf zwei bzw. eine Ausnahme konsistent mit den vorgegebenen Werten. Das Kalman-Verfahren hingegen überschätzt wie bei dem ersten Beispiel die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und unterschätzt die transformierte Kovarianzmatrix \underline{CQC}^T des Systemrauschens.

e) Zusammenfassung

Zusammenfassend folgt für das LSQ-, das ML- und das Kalman-Verfahren:

Die räumlichen und zeitlichen Eigenschaften der beiden betrachteten Beispiele werden gut geschätzt (Tabellen 4.3.1a und 4.3.2a). Die Ergebnisse des Kalman-Verfahrens, insbesondere bei dem ersten Beispiel, sind besser als

Parameter	gegeben (4.3.7)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren			Kalman-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
T	25.2	25.3	23.9	27.1	25.3	23.7	26.8	25.3	24.2	26.6
τ	13.5	14.5	11.8	17.6	14.6	11.5	17.5	16.8	13.1	21.1
c_{11}	0.56	0.56	0.55	0.58	0.56	0.55	0.58	0.56	0.55	0.57
c_{12}	0.34	0.34	0.33	0.35	0.34	0.33	0.35	0.34	0.33	0.34
c_{13}	0.58	0.58	0.56	0.59	0.58	0.56	0.59	0.58	0.57	0.59
c_{14}	0.37	0.37	0.37	0.38	0.37	0.37	0.38	0.37	0.37	0.38
c_{21}	0.20	0.19	0.18	0.21	0.19	0.18	0.21	0.20	0.18	0.21
c_{22}	0.10	0.10	0.09	0.11	0.10	0.09	0.11	0.10	0.09	0.11
c_{23}	-0.21	-0.21	-0.22	-0.20	-0.21	-0.22	-0.20	-0.21	-0.22	-0.20
c_{24}	-0.06	-0.06	-0.07	-0.06	-0.06	-0.07	-0.06	-0.06	-0.07	-0.06

Tabelle 4.3.2a: Die Analyseergebnisse für die Zeitkonstanten T, τ und das POP-Paar (c_1, c_2) des Oszillators. Spalte 2 beinhaltet die vorgegebenen Werte, die Spalten 3-5 die Ergebnisse des LSQ-Verfahrens, d.h. die Schätzwerte und die dazugehörigen 90%-Vertrauensintervalle, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen. In den Spalten 6-8 sind die entsprechenden Ergebnisse des ML-Verfahrens und in den letzten drei Spalten die des Kalman-Verfahrens dargestellt.

die des LSQ- oder ML-Verfahrens.

Die Schätzergebnisse der stochastischen Eigenschaften von allen drei Verfahren sind im Vergleich dazu schlechter (Tabellen 4.3.1b und 4.3.2b). Für das LSQ- und das ML-Verfahren kann diese Schwäche theoretisch erläutert werden, wie die Analyseergebnisse des zweiten Beispiels zeigen. Wir beobachteten bei beiden Beispielen, daß das Kalman-Verfahren die Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und die transformierte Kovarianzmatrix \underline{CQC}^T des Systemrauschens systematisch über- bzw. unterschätzt. In beiden Beispielen war das vorgegebene \underline{R} (4.3.4,18) klein gegenüber \underline{CQC}^T (4.3.8). Wie die Beispiele bei Gantert (1989) zeigen, schätzt das Kalman-Verfahren die stochastischen Eigenschaften besser, wenn das Beobachtungsrauschen groß ist.

Legen wir vor allem Wert auf die Güte der Schätzung der räumlichen und zeitlichen Eigenschaften eines Systems, so ist das Kalman-Verfahren zu bevorzugen. Jedoch ist dieses durch die Verwendung des Kalman-Glättungsfilters noch erheblich langsamer als das ML-Verfahren.

Parameter	gegeben (4.3.8, 18)	LSQ-Verfahren			ML-Verfahren			Kalman-Verfahren		
		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.		gesch.	90%-Interv.	
r_{11}	.007	.007	.007	.008	.017	.007	.030	.060	.045	.078
$r_{21}=r_{12}$	-.011	-.011	-.012	-.010	-.004	-.006	-.001	.028	.015	.040
$r_{31}=r_{13}$.003	.004	.003	.004	.013	.004	.024	.053	.037	.075
$r_{41}=r_{14}$	-.006	-.007	-.008	-.006	.003	-.006	.013	.032	.020	.046
r_{22}	.023	.020	.019	.021	.024	.018	.032	.047	.038	.057
$r_{32}=r_{23}$	-.000	-.000	-.001	.001	.005	-.002	.013	.035	.022	.048
$r_{42}=r_{24}$	-.002	-.002	-.003	.000	.004	-.002	.012	.025	.017	.033
r_{33}	.009	.009	.009	.010	.020	.008	.035	.076	.057	.105
$r_{43}=r_{34}$	-.018	-.020	-.022	-.018	-.012	-.018	-.004	.022	.010	.036
r_{44}	.042	.043	.040	.046	.050	.035	.063	.071	.059	.085
$(\underline{CQC}^T)_{11}$	0.77	0.76	0.71	0.82	0.76	0.72	0.83	0.65	0.63	0.68
$(\underline{CQC}^T)_{12}$	0.46	0.46	0.42	0.49	0.46	0.43	0.50	0.39	0.37	0.41
$(\underline{CQC}^T)_{13}$	0.74	0.74	0.69	0.80	0.74	0.70	0.82	0.64	0.62	0.67
$(\underline{CQC}^T)_{14}$	0.48	0.49	0.45	0.52	0.48	0.46	0.53	0.42	0.40	0.44
$(\underline{CQC}^T)_{22}$	0.28	0.28	0.25	0.30	0.27	0.26	0.30	0.23	0.22	0.24
$(\underline{CQC}^T)_{23}$	0.46	0.46	0.42	0.49	0.46	0.43	0.50	0.39	0.38	0.42
$(\underline{CQC}^T)_{24}$	0.29	0.30	0.27	0.32	0.30	0.28	0.33	0.25	0.24	0.27
$(\underline{CQC}^T)_{33}$	1.00	1.00	0.92	1.06	1.00	0.95	1.10	0.86	0.83	0.90
$(\underline{CQC}^T)_{34}$	0.60	0.60	0.55	0.64	0.60	0.57	0.66	0.52	0.50	0.54
$(\underline{CQC}^T)_{44}$	0.36	0.37	0.34	0.39	0.37	0.35	0.40	0.32	0.30	0.33

Tabelle 4.3.2b: Analog zu Tabelle 4.3.2a sind in dieser Tabelle die Ergebnisse für die Koeffizienten der symmetrischen Kovarianzmatrix \underline{R} des Beobachtungsrauschens und (\underline{CQC}^T) der transformierten Kovarianzmatrix des Systemrauschens zusammengefaßt.

5. ANALYSEN ZUM EL NIÑO/SOUTHERN OSCILLATION-PHÄNOMEN

Ein zentraler Teil dieser Arbeit sind die Analysen beobachteter Daten mit der Methode der Principal Interaction/Oscillation Patterns (PIPs/POPs). Das El Niño/Southern Oscillation- (ENSO-) Phänomen erscheint für diese erste Anwendung der PIPs/POPs besonders gut geeignet. ENSO ist auf den Zeitskalen von einigen Monaten bis zu einigen Jahren das vorherrschende globale Klimasignal. Vor allem ist es ein Beispiel dafür, daß die komplexe Dynamik des Systems Ozean-Atmosphäre durch die zeitliche Entwicklung einiger weniger räumlicher Strukturen wiedergegeben werden kann [z.B. Weare et al. (1976)]. Das ENSO-Phänomen wird in Kapitel 5.1 kurz beschrieben.

Der Ablauf von ENSO-Ereignissen und deren Auswirkungen auf das Klimasystem vor allem in den Tropen sind recht gut bekannt. Dagegen ist immer noch unklar, wie ein Ereignis zustande kommt. Mit der Analysemethode der PIPs/POPs ist ein neuer diagnostischer Zugang möglich. Neben der räumlichen Struktur von ENSO wird durch die PIP/POP-Methode insbesondere auch die Dynamik dieser Muster beschrieben.

Die auffälligste Erscheinung des ENSO ist das Verhalten der Meeresoberflächentemperatur (SST) im zentralen und östlichen äquatorialen Pazifik. Durch einen SST-Anomalie-Index, wie er in Kapitel 5.2 analysiert wird, können daher warme und kalte ENSO-Ereignisse definiert und deren Stärke klassifiziert werden (Abschnitt 5.2b). Der SST-Index zeigt die allgemein bekannte Eigenschaft der festen Phasenbeziehung des ENSO-Phänomens zum Jahresgang (Abschnitt 5.2e,f); auch das breite Band an Zeitskalen dieser quasiperiodischen Erscheinung ist in dem SST-Index enthalten (Abschnitt 5.2g).

Auf diese univariate Zeitreihe werden der Stationaritätstest (Kapitel 4.1) und der Linearitätstest (Kapitel 4.2) angewandt (Abschnitt 5.2c,d). Die wichtige Voraussetzung der Stationarität ist danach erfüllt. Für die Nichtlinearitäten, die der Dynamik des SST-Index zugrunde liegen, sind die Fluktuationen auf Zeitskalen unter einem Jahr wesentlich.

Neben der SST sind auch die zonale und die meridionale Komponente der bodennahen Windgeschwindigkeit (u , v) charakteristische Variablen des ENSO. In Kapitel 5.3 wird ein gemeinsamer Datensatz der SST-, u - und v -Anomalien untersucht. Die Daten sind auf dem Äquator zentriert und überdecken den Bereich des Indischen Ozeans und des Pazifik (40°E - 80°W). Beide Regionen sind durch die im indonesischen Raum aufeinanderstoßenden Windsysteme des Monsuns und der Passate eng miteinander verbunden. Eine weitere wichtige Größe ist der Luftdruck

auf Meereshöhe (SLP). Der in Kapitel 5.4 analysierte Datensatz der SLP-Anomalien umfaßt das gesamte Gebiet zwischen 30°N und 30°S .

An dem Datensatz des SLP, der $n = 288$ Zeitreihen mit einer Länge von $t_{\max} = 296$ Zeitschritten umfaßt, wird deutlich, welchen Anforderungen ein Schätzverfahren für Zustandsraummodelle gerecht werden muß. Von der vorgestellten Hierarchie der Schätzverfahren für Zustandsraummodelle (Kapitel 2.10) kommen bei diesen Analysen deshalb nur das EOFMDL- und das LSQ-Verfahren zur Anwendung. Das ML- und das Kalman-Verfahren, die wie das LSQ-Verfahren die Muster \underline{C} und die Modellparameter α gleichzeitig bestimmen, benötigen zu viel Rechenzeit. Bei den Analysen der simulierten Daten (Kapitel 4.2,3) wurden die Unterschiede deutlich. Der hohe Rechenzeitbedarf für die Monte-Carlo-Simulationen ist der Grund, daß die Vertrauensintervalle der Schätzwerte nur für die Analysen des SST-Index angegeben werden (Abschnitt 5.2g,h).

Die Modellierung eines komplexen Systems mit einigen wenigen PIPs/POPs kann nur die wesentlichen Teile der Dynamik des Systems wiedergeben, d.h. die Dynamik der Beobachtungen und die Dynamik des angepaßten Zustandsraummodells sind keineswegs gleich. Daher sind die unerklärten Reste der Beobachtungsgleichung $\varepsilon(t)$, der dynamischen Gleichung $\eta(t)$ und der Ein-Schritt-Vorhersage $\rho(t)$ kein weißes Rauschen. Ein Test auf weißes Rauschen wie der multivariate Portmanteau-Test (Kapitel 3.5) ist kein geeignetes Hilfsmittel, um die Güte verschiedener Zustandsraummodelle zu vergleichen.

Im Verlauf der Untersuchungen stellte sich heraus, daß die Vorhersagegüte eines angepaßten Zustandsraummodells (Kapitel 3.6) das beste Kriterium ist, um zu entscheiden, welches der betrachteten Zustandsraummodelle die Dynamik des ENSO-Phänomens am besten erfaßt (Abschnitt 5.2i und Abschnitt 5.3e,i).

Die Analysen ergeben, daß das ENSO-Phänomen als eine Überlagerung von zwei PIPs aufzufassen ist, die beide eine räumlich stehende Oszillation beschreiben. Die Wechselwirkung der beiden PIPs ist nichtlinear. Das linear gekoppelte System der PIPs kann durch zwei Eigenschwingungen veranschaulicht werden. Die erste Eigenschwingung hat eine Periode von etwa drei Jahren und zeigt eine räumlich stehende Oszillation der SST-, u-, v- und SLP-Anomalien. Die zweite Eigenschwingung hat eine Periode von etwa zwei Jahren. Sie beschreibt eine ostwärts wandernde Oszillation der zonalen Windanomalien u und der SLP-Anomalien. Das Signal der meridionalen Windanomalien v erscheint im wesentlichen als stehend. In der SST konnte keine zweijährige Schwingung identifiziert werden.

5.1 DAS EL NIÑO/SOUTHERN OSCILLATION-PHÄNOMEN

Die Erscheinung, die mit El Niño/Southern Oscillation (ENSO) bezeichnet wird, ist das auf den Zeitskalen von einigen Monaten bis zu einigen Jahren vorherrschende globale Klimasignal. Dieses heute sehr intensiv untersuchte Phänomen kurzfristiger Klimaschwankungen mit einer Periode von 2 bis 7 Jahren [z.B. Trenberth (1976), Rasmusson und Carpenter (1982)] war bis in die sechziger Jahre von untergeordnetem wissenschaftlichen Interesse.

Walker beobachtete bei seiner Suche nach Erscheinungen, die dem indischen Monsun vorangehen und so eine Vorhersage der Monsunstärke erlauben [Walker (1923, 1924, 1928), Walker und Bliss (1930, 1932, 1937)], über eine Reihe von Jahren die Tendenz eines Druckwechsels zwischen dem Indischen Ozean und dem westlichen Pazifik, die er mit den bekannten Worten beschrieb: "When pressure is high in the Pacific Ocean it tends to be low in the Indian Ocean from Africa to Australia; ..." [Walker und Bliss (1932)]. Diese riesige Druckschaukel nannte er die Southern Oscillation. Auch der Zusammenhang der Southern Oscillation mit weiteren atmosphärischen Größen und deren jahreszeitliche Abhängigkeit war Walker bekannt, denn er fuhr fort: : "...; these conditions are associated with low temperatures in both areas, and rainfall varies in the opposite direction to pressure. Conditions are related differently in winter and summer, and it is therefore necessary to examine separately the seasons December to February and June to August." Bis in die sechziger Jahre hinein wurde diese Beobachtung von den meisten Meteorologen höchstens als eine interessante Kuriosität betrachtet.

Peruanische Fischer bezeichneten ursprünglich mit "Corriente del Niño" einen warmen Meeresstrom, der regelmäßig zur Weihnachtszeit auftritt und entlang der Küste Equadors und Perus südwärts wandert. Das Auftreten dieses Küstenstromes beendet die dortige Fischsaison. Ein kräftiger Südostpassat treibt normalerweise das Oberflächenwasser des östlichen Pazifiks westwärts und ermöglicht so im Küstenbereich das Aufquellen kalten, nährstoffreichen Wassers. Während des Südsommers (Dezember bis März) schwächen die Passatwinde ab. Vermindertes Aufquellen und die jahreszeitliche Erwärmung führen zu dem beobachteten warmen Küstenstrom. Die Nährstoffe des Oberflächenwassers werden aufgebraucht und das Planktonwachstum hört auf. Die Fische weichen in tiefere Wasserschichten aus.

In einigen Jahren sind die Temperaturen des Küstenstromes außerordentlich hoch und bleiben auch das folgende Jahr bestehen. Diese besonderen Ereignisse

haben katastrophale Auswirkungen auf die wirtschaftliche Lage der Fischer. Die Vögel der Küstenregion, die von den Fischen leben, sterben in großer Zahl. Die Guanoproduktion kommt zum Erliegen, was die wirtschaftliche Situation der Bevölkerung weiter verschärft. [Wyrski (1975), Philander (1983)].

Heute bezeichnet der Begriff El Niño diese besonderen Ereignisse. Die verheerenden Auswirkungen auf die Wirtschaft der Küstenregion bringen es mit sich, daß wir vom Beginn des 18. Jahrhunderts an Kenntnis von El Niño-Ereignissen haben [Quinn et al. (1978)]. Die El Niños wurden bis in die sechziger Jahre hinein vor allem als eine regionale Erscheinung angesehen.

In einer Reihe von Arbeiten zeigte Bjerknes zweierlei [Bjerknes (1966, 1969, 1972)]: Zum einen sind El Niños nicht auf den östlichen Pazifik beschränkt, sondern die Erwärmung der Meeresoberfläche erstreckt sich entlang des Äquators bis über die Datumsgrenze hinaus. Zum anderen zeigte er die enge Verbindung der atmosphärischen Erscheinung der Southern Oscillation mit dem ozeanischen Signal des El Niño auf.

Normalerweise ist, wie in Abbildung 5.1.1a) veranschaulicht, eine relativ kalte Meeresoberfläche im östlichen äquatorialen Pazifik und eine Ansammlung warmen Wassers im westlichen Pazifik zu beobachten. Über dem kalten Wasser des östlichen Pazifiks sinkt trockene Luft herab und fließt den Südostpassat stärkend westwärts. Sie wird angetrieben von dem Hochdruckgebiet über dem Ostpazifik und dem Tiefdruckgebiet über Indonesien und dem Westpazifik. Auf ihrem Weg erwärmt die Luft sich und nimmt Wasserdampf auf, bis sie über Westpazifik aufsteigt. Der Wasserdampf kondensiert aus; es kommt zu kräftigen Niederschlägen. In der oberen Troposphäre strömt die Luft ostwärts und schließt so die zweidimensionale äquatoriale Walker-Zirkulation.

Die Ansammlung warmen Wassers im Westpazifik wird durch den Südostpassat aufgebaut, der die westwärts gerichteten Ozeanströme entlang des Äquators antreibt. So spiegelt sich der Temperaturunterschied zwischen dem westlichen und östlichen Pazifik auch im Wasserstand und in der Thermoklinen wider. Die Thermokline ist die Sprungschicht, die das warme, gut durchmischte Oberflächenwasser von dem kalten Wasser in der Tiefe trennt. Die oberste gut durchmischte Schicht (mixed layer) ist im Westen über 150m tief und wird nach Osten hin flacher, bis sie an der Küste Südamerikas nahezu verschwindet.

Mit dem Auftreten einer Erwärmung im östlichen Pazifik (Abbildung 5.1.1b) werden der Temperaturunterschied der Meeresoberfläche zum westlichen Pazifik vermindert und die Passatwinde abgeschwächt. Dies wird begleitet von einem geringeren Unterschied im Luftdruck. Das Konvektionsgebiet verlagert sich vom

Westpazifik nach Osten [Gill und Rasmusson (1983), Rasmusson und Wallace (1983)]. El Niños gehen also einher mit einer schwachen Walker-Zirkulation; die Veränderungen in der Walker-Zirkulation entsprechen der Southern Oscillation.

Schwächen die Oberflächenwinde ab, ist ein schneller horizontaler Austausch des warmen Oberflächenwassers die Folge. Der ostwärts gerichtete nord-äquatoriale Gegenstrom wird verstärkt und der westwärts strömende Südäquatorialstrom schwächt sich ab [Wyrtki (1975, 1977)]. Der Unterschied in der Dicke der obersten durchmischten Schicht vermindert sich. Der Wasserstand und die Tiefe der Thermoklinen nehmen im östlichen tropischen Pazifik zu, im westlichen Pazifik dagegen nehmen sie ab. Ungewöhnlich hohe Meeresoberflächentemperaturen im zentralen und östlichen Pazifik treten auf. Ein ENSO-Ereignis findet statt.

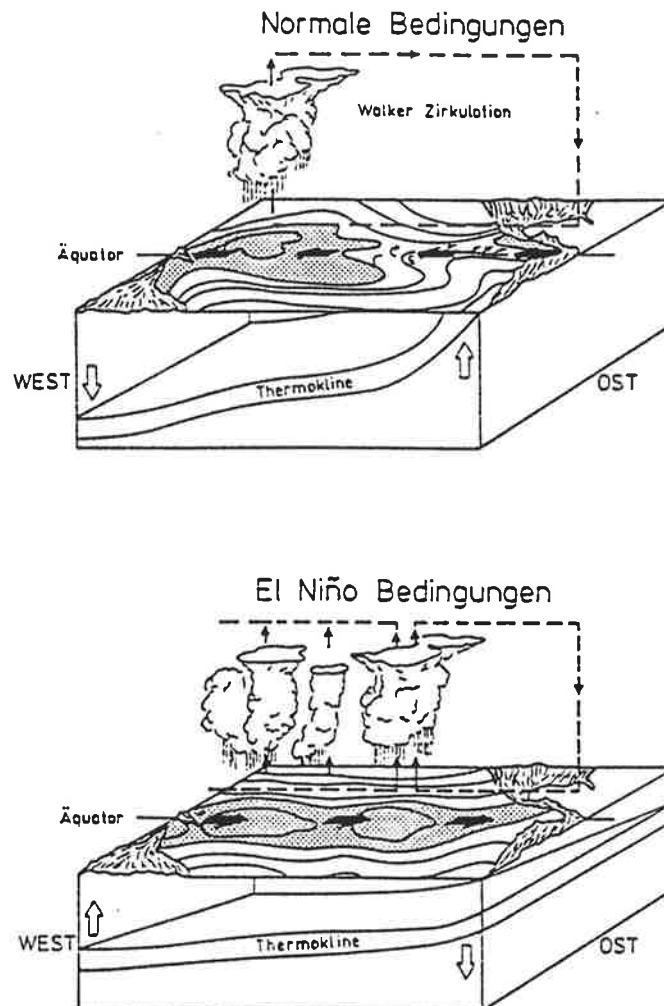


Abbildung 5.1.1: a) Die normalen Bedingungen und b) die Bedingungen während eines El Niño-Ereignisses im Bereich des tropischen Pazifik.

5.2 DER SST-INDEX

a) Die Daten

Das Verhalten der Meeresoberflächentemperatur (SST) im zentralen und östlichen äquatorialen Pazifik (180° - 90° W, 6° N- 6° S) ist die auffälligste Erscheinung des ENSO. Deshalb wurde sie mit kleineren Abweichungen der definierenden Region schon häufiger als ein ENSO-Index verwendet [z.B. Angell (1981), Wright (1984), Wright (1985), Zwiers und von Storch (1989)].

In dieser Arbeit wird ein SST-Index benutzt, der aus einem Datensatz gewonnen wurde, den T.P. Barnett freundlicher Weise zur Verfügung gestellt hat. Bei dem Datensatz handelt es sich um monatliche Mittelwerte der SST für den Zeitraum von 1950 bis 1989 auf einem $2^{\circ} \times 10^{\circ}$ Gitter, das sich zwischen 30° N- 30° S und 30° E- 70° W erstreckt. Die Region, über die der Index gemittelt wurde, entspricht derjenigen, die Wright auch für seinen Index definiert hat [Wright (1984)]. Sie ist in Abbildung 5.2.1 dargestellt. Von dem so ermittelten Index wurden die Monatsmittelwerte bzgl. des gesamten Zeitraumes und der lineare Trend abgezogen. Die Abbildung 5.2.2 zeigt den SST-Index.

b) Klassifizierung warmer und kalter ENSO-Ereignisse

Die Stärke eines warmen oder kalten ENSO-Ereignisses wird in dieser Arbeit mit Hilfe des 12 Monate übergreifenden Mittels des SST-Index definiert. An Hand der maximalen (minimalen) Werte während einer warmen (kalten) Episode ergibt sich eine Klassifizierung nach Tabelle 5.2.1. In Tabelle 5.2.2 sind die Jahre des Beginns und die Stärke eines Ereignisses innerhalb des Zeitraumes von 1950 bis 1989 zusammengefaßt.

Die Stärke der warmen Ereignisse ist mit der von Rasmusson (1984) erweiterten Zusammenstellung von Quinn et al. (1978) vergleichbar. Die Ereignisse 1953 und 1976 werden schwächer bewertet, und das 1975er Ereignis wird als

Tabelle 5.2.1: Der maximale (minimale) Wert des 12 Monate übergreifend gemittelten SST-Index einer warmen (kalten) Episode gibt die Stärke eines warmen (kalten) Ereignisses an.

Stärke	warmes Ereignis	kaltes Ereignis
0	$0.2 < \max \leq 0.4$	$-0.4 \leq \min < -0.2$
1	$0.4 < \max \leq 0.6$	$-0.6 \leq \min < -0.4$
2	$0.6 < \max \leq 0.8$	$-0.8 \leq \min < -0.6$
3	$0.8 < \max \leq 1.0$	$-1.0 \leq \min < -0.8$
4	$1.0 < \max$	$\min < -1.0$

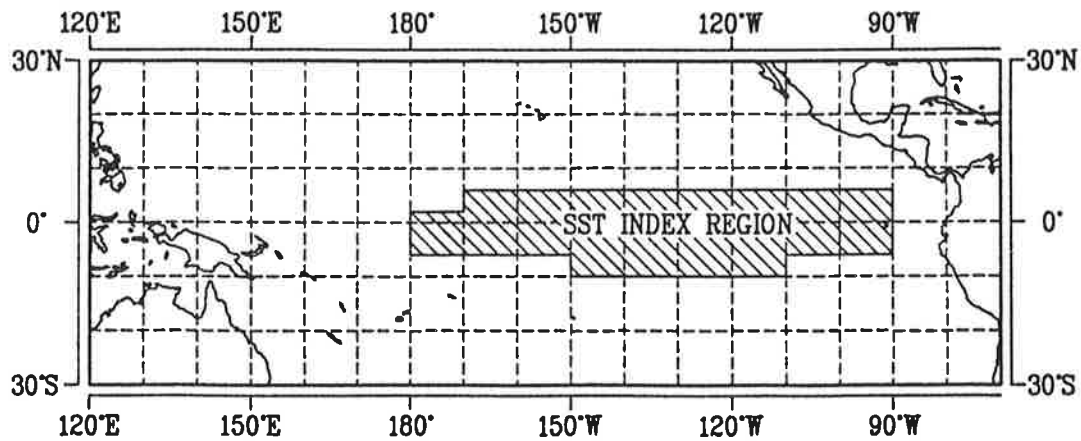


Abbildung 5.2.1: Die Region der räumlichen Mittelung der monatlichen SST-Anomalien umfaßt das Gebiet von (6° - 2° N, 170° - 90° W), (2° N- 6° S, 180° - 90° W) und (6° - 10° S, 150° - 110° W) (nach Wright (1984)).

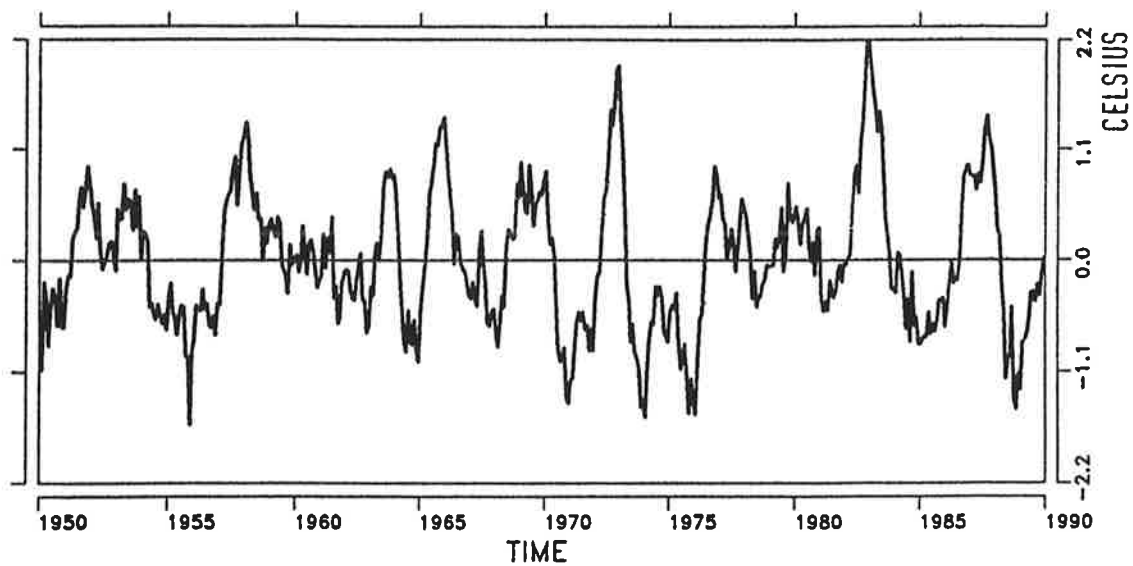


Abbildung 5.2.2: Der SST-Index für den Zeitraum von 1950 bis 1989.

Tabelle 5.2.2: Die Jahre des Beginns a) warmer bzw. b) kalter Ereignisse innerhalb des Zeitraumes von 1950 bis 1989. Die Stärke eines Ereignisses wird bezeichnet mit: 0, sehr schwach; 1, schwach; 2, mäßig stark; 3, stark; 4, sehr stark.

a) warme Ereignisse

Jahr	Stärke	Jahr	Stärke	Jahr	Stärke
1951	1	1965	3	1979	0
1953	1	1969	2	1982	4
1957	3	1972	4	1987	3
1963	1	1976	1		

b) kalte Ereignisse

Jahr	Stärke	Jahr	Stärke	Jahr	Stärke
1954	2	1970	3	1985	2
1961	0	1973	3	1988	3
1964	2	1975	4		
1967	1	1981	0		

kaltes Ereignis charakterisiert. Sehr schwache Ereignisse (Stärke 0) wie das des Jahres 1979 sind in der Zusammenstellung von Rasmusson nicht aufgeführt und werden auch im folgenden nicht weiter betrachtet.

c) Der Test auf Stationarität

Wir wenden den in Kapitel 3.1 vorgestellten Test auf Stationarität auf den SST-Index an, um zu prüfen, ob die sehr wichtige Voraussetzung der Stationarität überhaupt gegeben ist. Wie die meisten der Beispiele im Kapitel 3.1 umfaßt der Index $t_{\max} = 480$ Zeitschritte. Die in den Stationaritätstest eingehenden Parameterwerte können der Tabelle 3.1.1 entnommen werden. Die Beispiele zeigen, daß die simulierten Verteilungen der Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 teilweise deutlich von den asymptotischen Verteilungen abweichen. Der Test wird hier deshalb auf der Grundlage der simulierten Verteilungen durchgeführt, die auf der Analyse von 500 Monte-Carlo-Simulationen (Kapitel 3.3) eines AR(2)-Prozesses beruhen, der mit Hilfe des EOFMDL-Verfahrens (Kapitel 2.9) an den Index angepaßt wurde.

Die Tabelle 5.2.3 zeigt für die Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 neben dem jeweiligen Schätzwert auch die Wahrscheinlichkeit $P(S < \tilde{S})$, daß die Testgröße S kleiner ist als der Schätzwert \tilde{S} . Die Wahrscheinlichkeiten beziehen sich auf die asymptotischen (P_{asym}) bzw. die simulierten (P_{sim}) Verteilungen. Ein Vergleich der jeweiligen Werte deutet an, daß die asymptotischen und die simu-

lierten Verteilungen deutlich voneinander abweichen. Bezogen auf die simulierten Verteilungen nehmen die geschätzten Testgrößen recht typische Werte an. Daraus folgt, daß der SST-Index von einem stationären Prozeß nicht unterschieden werden kann.

Tabelle 5.2.3: Test auf Stationarität: die Schätzwerte \tilde{S} und die Wahrscheinlichkeiten

Testgröße	\tilde{S}	$P_{\text{asym}}(S < \tilde{S})$	$P_{\text{sim}}(S < \tilde{S})$
S_{α}/σ^2	15.08	99.8%	67.8%
S_{γ}/σ^2	3.84	0.2%	10.4%

$P(S < \tilde{S})$ bzgl. der asymptotischen (P_{asym}) bzw. simulierten (P_{sim}) Verteilungen der beiden Testgrößen S_{α}/σ^2 und S_{γ}/σ^2 für den SST-Index.

Die Frequenzen ω_j , an denen die Stationarität geprüft wird, sind durch die Formel in Tabelle 3.1.1 gegeben. Sie haben die Werte $\omega_j = 0.26, 0.78, 1.31, 1.83, 2.36, 2.88$ [rad/Monat] und entsprechen den Perioden $T_j = 2\pi/\omega_j = 24.0, 8.0, 4.8, 3.4, 2.7, 2.2$ [Monat]. Aus dem Spektrum des SST-Index (Abbildung 5.2.3) ersehen wir, daß der größte Teil der Energie jedoch auf Perioden oberhalb von 12 Monaten konzentriert ist. Das bedeutet, daß die energiereichsten Frequenzen nicht in den Stationaritätstest eingehen.

Die Frequenzen $\omega_j = 0.10, 0.18, 0.25, 0.33, 0.41, 0.49$ [rad/Monat], die den Perioden $T_j = 64.8, 35.9, 24.9, 19.0, 15.4, 13.0$ [Monat] entsprechen, überdecken den wichtigsten Bereich des Spektrums. Führen wir den Test mit diesen Frequenzen durch, so kommen wir wieder zu der Aussage, daß der SST-Index von einem stationären Prozeß nicht zu unterscheiden ist.

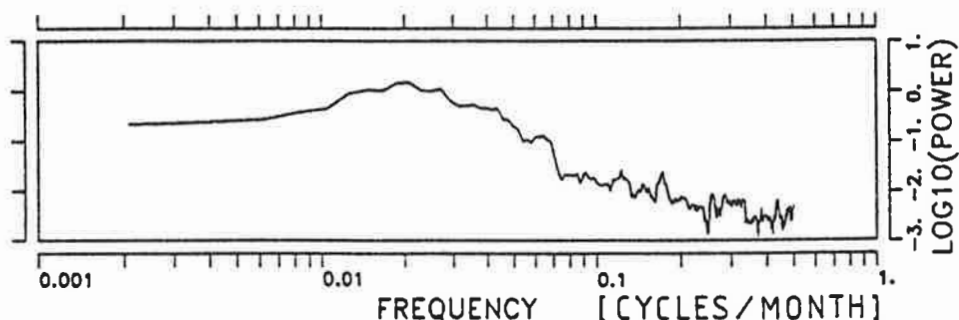


Abbildung 5.2.3: Das Spektrum des in Abbildung 5.2.2 gezeigten SST-Index.

d) Der Test auf Linearität

In diesem Abschnitt wird geprüft, ob der SST-Index auf einem linearen Prozeß beruht. Dazu verwenden wir den in Kapitel 3.2 vorgestellten Test auf Linearität. Es werden dieselben Parameterwerte gewählt wie bei den Beispielen in Kapitel 3.2. Die Beispiele zeigen, daß die asymptotische und die simulierte Verteilung der Testgröße T^2 recht gut übereinstimmen. Der Test kann also auf der Grundlage der asymptotischen Verteilung durchgeführt werden.

Die für den ungefilterten SST-Index geschätzte Testgröße von $\tilde{T}^2 = 8.71$ (siehe Tabelle 5.2.4) ist nur unwesentlich kleiner als das 5%-Signifikanzniveau, das bei $T^2 = 8.94$ liegt. So wird die Nullhypothese, daß der Prozeß linear ist, auf dem 5%-Signifikanzniveau nicht verworfen. Ein nicht-linearer Prozeß scheint allerdings möglich zu sein.

Tabelle 5.2.4: Test auf Linearität: die Schätzwerte \tilde{T}^2 und die Wahrscheinlichkeiten $P(T^2 < \tilde{T}^2)$ bzgl. der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 für verschiedene Filterungen des SST-Index.

Filter	\tilde{T}^2	$P_{\text{asym}}(T^2 < \tilde{T}^2)$
nein	8.71	94.8%
(1/ 1/ 96/108)	3.90	85.4%
(12/16/480/480)	0.80	37.1%
(12/16/ 96/108)	1.68	64.2%

Um zu sehen, welche Zeitskalen für diese evtl. Nichtlinearität verantwortlich sind, wurde der Test auf Linearität auch für den gefilterten SST-Index durchgeführt. Die Filterung erfolgt im Frequenzraum; der Filter wird in Anhang A.5 beschrieben. Werden alle langen Fluktuationen mit Zeitskalen über 108 Monaten unterdrückt (Filtercharakteristik (1/1/96/108)), so ist die Testgröße zwar kleiner ($\tilde{T}^2 = 3.90$), größere Werte treten aber nur mit einer Häufigkeit von 14.6% auf. Werden Fluktuationen mit Zeitskalen unter 12 Monaten herausgefiltert (Filtercharakteristik (12/16/480/480)), so ist der Wert der Testgröße von $\tilde{T}^2 = 0.80$ sehr klein und der SST-Index wird als linear eingestuft. Die mögliche Nichtlinearität, die dem SST-Index zugrunde liegen könnte, konzentriert sich demnach auf die schnellen Fluktuationen mit Zeitskalen unter einem Jahr. Der Filter mit der Filtercharakteristik (12/16/96/108), der auch bei den Analysen der folgenden Kapitel 5.3,4 verwendet wird, unterdrückt sowohl die kurzen als auch die langen Fluktuationen. Der so gefilterte SST-Index erscheint ebenfalls als linear.

e) *Der Verlauf warmer und kalter ENSO-Ereignisse*

Ein ENSO-Ereignis zeigt einen typischen jahreszeitlichen Verlauf. Dies verdeutlicht die Abbildung 5.2.4. Sie zeigt analog zu der von Rasmusson und Carpenter (1982) gewählten Darstellung das 12 Monate übergreifende Mittel des SST-Index in den Jahren vor, während und nach einem der zehn warmen bzw. acht kalten ENSO-Ereignisse zwischen den Jahren 1950 und 1989.

Während einer warmen Episode (Abbildung 5.2.4a) treten stark ansteigende positive SST-Anomalien meistens in den Monaten November bis Februar vor dem eigentlichen warmen Ereignis auf. Die Ereignisse von 1969 und 1987 zeigen den Temperaturanstieg schon früher, zwischen Mai und Juli. Vor dem 1953er Ereignis sind die Temperaturen sehr viel höher als in den übrigen Fällen, der Anstieg ist deshalb wesentlich flacher. Die höchsten Werte werden in den Monaten Mai bis September erreicht. Danach fällt die Temperatur drastisch ab. In einigen Fällen hält diese Abkühlung bis in die zweite Hälfte des darauffolgenden Jahres an. Dies ist nach den Ereignissen der Jahre 1953, 1963, 1969, 1972 und 1987 der Fall, auf die schon im folgenden Jahr ein kaltes Ereignis folgt.

Während einer kalten Episode (Abbildung 5.2.4b) kann man stark ansteigende negative SST-Anomalien in den Monaten Februar bis Mai vor dem eigentlichen kalten Ereignis beobachten. Von diesem Bild weicht das Verhalten der Ereignisse 1967, 1975 und 1985 ab, denen kein warmes Ereignis unmittelbar voraus geht. Die niedrigsten Werte werden zwischen September und Dezember erreicht. Danach steigen die Temperaturanomalien wieder an. Der Anstieg nach den Ereignissen von 1964, 1967, 1975 und 1985 ist besonders ausgeprägt.

Die Dauer eines warmen oder kalten ENSO-Ereignisses, von dem ersten Auftreten einer Anomalie bis zu deren Verschwinden gerechnet, ist ebenso unterschiedlich wie der jeweilige Verlauf. Im Mittel umfaßt ein Ereignis 14 bis 16 Monate.

f) *Die Persistenz*

Ein Signal ist persistent, wenn es eine Zeit andauert. Die Autokorrelationsfunktion

$$r(\tau; \mathfrak{I}) = \text{cor}[Y(t+\tau); Y(t)]_{t \in \mathfrak{I}} = \frac{\langle Y(t+\tau)Y(t) \rangle_{t \in \mathfrak{I}}}{\text{var}[Y(t)]_{t \in \mathfrak{I}}} \quad (5.2.1)$$

der Beobachtungen $Y(t)$ ist ein Maß für die mittlere Persistenz einer Erscheinung. Die Menge der Zeiten t , über die gemittelt wird, bezeichnen wir mit \mathfrak{I} . Große Werte der Autokorrelationsfunktion $r(\tau; \mathfrak{I})$ bis zu einem bestimmten τ

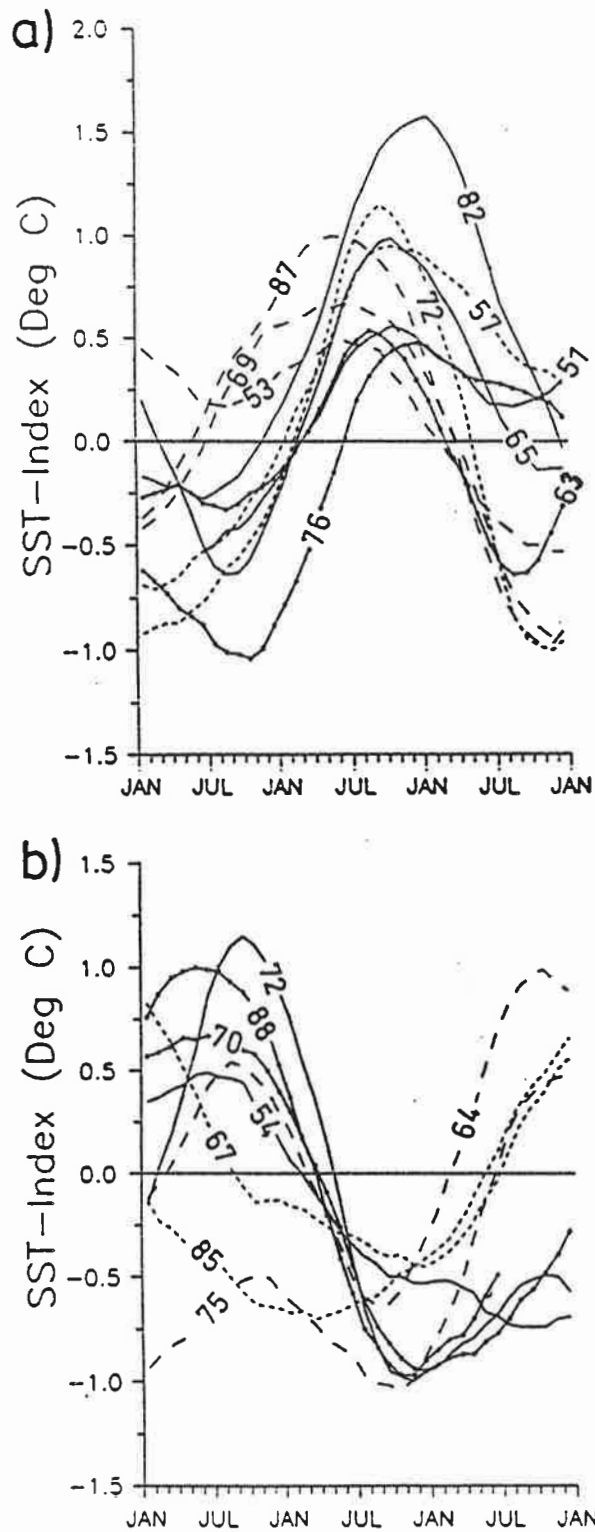


Abbildung 5.2.4: Das 12 Monate übergreifende Mittel des SST-Index in den Jahren vor, während und nach einem a) der zehn warmen und b) der acht kalten ENSO-Ereignisse zwischen den Jahren 1950 und 1989 (analog zu Rasmusson und Carpenter (1982)).

deuten an, daß das Signal im Mittel so lange anhält.

Betrachten wir die Autokorrelationsfunktion $r(\tau; \mathcal{X})$ des ungefilterten SST-Index für die einzelnen Monate (z.B. $\mathcal{X} = \{\text{alle Januare}\}$), so erkennen wir eine starke Abhängigkeit von der Jahreszeit (siehe Tabelle 5.2.5). Die Persistenz ist maximal von Juni bis August. Minimale Persistenz finden wir um den März. Dies ist zu sehen an den niedrigen Werten der Autokorrelationsfunktion $r(t; \mathcal{X})$ für $\tau=1,2,3$ und dem Band des Abfalls der Persistenz während der Monate Juli bis Dezember.

Die in Kapitel 3.6 eingeführte Korrelationsgüte (3.6.4)

$$S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X}) = \text{cor}[Y(t+\tau); Y(t+\tau; t)]_{t \in \mathcal{X}} \tag{5.2.2}$$

ist ein Maß für die Güte der τ -Schritt-Vorhersage $Y(t+\tau; t)$ gegenüber den Beobachtungen $Y(t)$. Ein Vergleich der Autokorrelationsfunktion $r(\tau; \mathcal{X})$ (5.2.1) mit der Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau; \mathcal{X})$ (5.2.2) zeigt, daß wir den einfachsten Fall einer τ -Schritt-Vorhersage betrachtet haben:

$$Y(t+\tau; t) = Y(t). \tag{5.2.3}$$

Die Komplexität eines anderen Modells und dessen physikalische Interpretation sind nur gerechtfertigt, wenn es diesem sehr einfachen „Persistenzmodell“ (5.2.3) überlegen ist.

τ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jan	100	96	88	65	49	25	13	3	3	-1	-10	-10	-14
Feb	100	92	72	60	37	24	14	12	7	0	0	-5	-7
Mär	100	84	71	52	44	33	33	27	18	16	14	13	5
Apr	100	87	75	67	60	57	52	47	44	43	42	32	13
Mai	100	89	78	74	71	68	65	65	59	54	47	24	2
Jun	100	89	84	77	77	76	76	73	66	56	29	10	-10
Jul	100	96	87	87	83	82	80	75	63	32	10	-11	-18
Aug	100	91	91	89	89	87	82	70	39	14	-6	-14	-26
Sep	100	93	92	90	87	81	70	37	18	-4	-16	-27	-19
Okt	100	96	95	94	89	81	54	33	10	0	-12	-8	-13
Nov	100	98	94	89	80	49	33	12	1	-8	-6	-9	-18
Dez	100	95	91	82	53	36	14	2	-8	-7	-9	-19	-19
Jan	100	96	88	65	49	25	13	3	3	-1	-10	-10	-14
Feb	100	92	72	60	37	24	14	12	7	0	0	-5	-7
Mär	100	84	71	52	44	33	33	27	18	16	14	13	5
Apr	100	87	75	67	60	57	52	47	44	43	42	32	13
Mai	100	89	78	74	71	68	65	65	59	54	47	24	2
Jun	100	89	84	77	77	76	76	73	66	56	29	10	-10

Tabelle 5.2.5: Die Autokorrelationsfunktion ($\times 100$) des ungefilterten SST-Index der Jahre 1950 bis 1989 für die einzelnen Monate. Z.B. ist die Korrelation der Januarwerte mit den Februarwerten gleich 0.96 [nach Wright (1985)].

g) Die Zeitskalen des ENSO-Phänomens

ENSO beinhaltet ein breites Band an Zeitskalen. Warme bzw. kalte Ereignisse folgten in der Zeit von 1950 bis 1989 mit einem Abstand von zwei bis zehn Jahren aufeinander. Die sehr schwachen Ereignisse (Stärke 0) eingeschlossen beträgt die mittlere Übergangszeit zwischen warmen und kalten bzw. kalten und warmen Ereignissen 21 Monate (Abbildung 5.2.2, Tabelle 5.2.2). Die Dauer eines Ereignisses liegt zwischen 14 und 16 Monaten (Abschnitt e). Das Spektrum des SST-Index (Abbildung 5.2.3) zeigt, daß die Energie sich hauptsächlich auf Perioden oberhalb von 12 Monaten konzentriert; wir finden ein breites, nur flach ausgeprägtes Maximum zwischen 30 und 80 Monaten.

Weitere Hinweise auf die Zeitskalen des ENSO-Phänomens erhalten wir durch die Anpassung univariater AR(p)-Prozesse (Kapitel 2.11)

$$X(t) = \sum_{j=1}^p a_j X(t-j) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, q), \quad (5.2.4)$$

an den SST-Index.

Bei der Anpassung eines Prozesses werden die Ein-Schritt-Vorhersagen optimiert. So erfaßt die EOFMDL-Analyse (Kapitel 2.9) des ungefilterten SST-Index zunächst die schnellen Fluktuationen. Erst in höherer Ordnung ($p \geq 5$) erhalten wir Hinweise auf eine Schwingung mit einer Periode um 34 Monate.

Durch eine Filterung mit der Charakteristik (12/16/96/108) werden die schnellen Fluktuationen unterdrückt. Der an den so gefilterten SST-Index angepaßte AR(2)-Prozeß (EOFMDL-Verfahren) beschreibt eine gedämpfte Schwingung

$$X^d(t) = X(t_0) \exp[\kappa_0(t-t_0)] \cos[\omega(t-t_0)] \quad (5.2.5)$$

mit einer Periode von $\tilde{T} = 2\pi/\tilde{\omega} = 32$ Monaten und einer $1/e$ -Abklingzeit von $\tilde{\tau}_0 = -1/\tilde{\kappa}_0 = 109$ Monaten. Die Dauer einer halben Periode ($\tilde{T}/2 = 16$ Monate) entspricht der Länge eines ENSO-Ereignisses von dem ersten Auftreten einer Anomalie bis zu deren Abklingen (siehe Abschnitt e).

Tabelle 5.2.6: An den gefilterten SST-Index wurde mittels des EOFMDL-Verfahrens ein AR(2)-Prozeß angepaßt. Die Tabelle zeigt

die Schätzwerte der Periode T und der $1/e$ -Abklingzeit τ sowie deren 90%-Vertrauensintervalle, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen.

Parameter	EOFMDL-Verfahren		
	gesch.	90%-Interv.	
T	32.2	28.3	32.8
τ	109.1	40.4	207.6

In Tabelle 5.2.6 sind zusammen mit den Schätzwerten auch die jeweiligen 90%-Vertrauensintervalle angegeben, die auf der Analyse von 500 Monte-Carlo-Simulationen des angepaßten AR(2)-Prozesses beruhen (Kapitel 3.3,4). Die Periode T wird zuverlässig geschätzt. Die Schätzung der $1/e$ -Abklingzeit τ ist dagegen sehr ungenau und hängt, wie weitere Analysen zeigen, stark von der verwendeten Filterung ab.

h) Die Stabilität des Systems Ozean-Atmosphäre

Wie wir gesehen haben, steht der Verlauf eines ENSO-Ereignisses in einer festen Phasenbeziehung zum Jahresgang (Abschnitt e). Auch die Persistenz variiert stark während eines Jahres (Abschnitt f). Offenbar ist das System Ozean-Atmosphäre nur in bestimmten Monaten instabil, während denen eine Störung angefacht wird und größere SST-Anomalien entstehen können.

Dieses Verhalten kann man durch eine Schwingung

$$X^d(t) = X(t_0) \exp[K(t, t_0)] \cos[\omega(t-t_0)], \quad (5.2.6)$$

$$K(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \kappa(\tau), \quad (5.2.7)$$

beschreiben, dessen Dämpfungsrate

$$\kappa(t) = \kappa_j, \quad j=1, \dots, 12, \quad (5.2.8)$$

von Monat zu Monat frei variiert. Ist κ_j positiv, so ist das System instabil, ist κ_j negativ, so ist es stabil. Physikalisch sinnvoll ist nur eine negative mittlere Dämpfungsrate:

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \kappa_j < 0. \quad (5.2.9)$$

Diese Schwingung mit zeitlich variierender Dämpfung wird durch einen AR(2)-Prozeß mit zeitabhängigen Parametern $a_1(t)$, $a_2(t)$ modelliert. Für eine kurze Beschreibung des Modells sei auf den Anhang A.6 verwiesen. Die Anpassung an den gefilterten SST-Index (Filtercharakteristik (12/16/96/108)) erfolgte mit dem LSQ-Verfahren (Kapitel 2.6). Die Schätzwerte von T und κ_j , $j=1, \dots, 12$, und die 90%-Vertrauensintervalle, die man durch die Analyse von 500 Monte-Carlo-Simulationen des angepaßten Prozesses erhält (Kapitel 3.3,4), sind in Tabelle 5.2.7 zusammengefaßt.

Die Periode der Schwingung von $\tilde{T} = 33$ Monaten und die mittlere $1/e$ -Abklingzeit von $\bar{\tau} = -1/\bar{\kappa} = 105$ Monaten (vgl. (5.2.9)) unterscheiden sich nur unwesentlich von den Zeitskalen des AR(2)-Prozesses mit konstanter Dämpfungs-

Tabelle 5.2.7: An den gefilterten SST-Index wurde mittels des LSQ-Verfahrens ein AR(2)-Prozeß mit monatlich variierender Dämpfungsrate κ_j , $j=1, \dots, 12$, angepaßt. Die Tabelle zeigt die Schätzwerte der Periode T und der monatlichen Dämpfungsrate κ_j sowie deren 90%-Vertrauensintervalle, die auf 500 Monte-Carlo-Simulationen beruhen.

Parameter	ML-Verfahren		
	gesch.	90%-Interv.	
T	32.7	31.6	34.0
κ_1	-0.022	-0.036	-0.013
κ_2	-0.025	-0.039	-0.016
κ_3	-0.023	-0.037	-0.014
κ_4	-0.016	-0.029	-0.008
κ_5	-0.006	-0.020	0.003
κ_6	0.001	-0.014	0.009
κ_7	0.004	-0.010	0.013
κ_8	0.004	-0.010	0.012
κ_9	0.001	-0.013	0.009
κ_{10}	-0.004	-0.016	0.004
κ_{11}	-0.010	-0.023	-0.002
κ_{12}	-0.017	-0.030	-0.008

rate, der in Abschnitt g) betrachtet wurde.

Die geschätzten monatlichen Dämpfungsrate κ_j , $j=1, \dots, 12$, sind in der Abbildung 5.2.5 nochmals veranschaulicht (durchgezogene Linie). Die $\tilde{\kappa}_j$ beschreiben eine nahezu kosinusförmige saisonale Oszillation. Von Juni bis September ist die Dämpfungsrate positiv, d.h. das System ist instabil. Während des restlichen Jahres ist das System dagegen stabil. Der Monat der stärksten Dämpfung ist der Februar.

Die 90%-Vertrauensintervalle der monatlichen Dämpfungsrate $\tilde{\kappa}_j$, in Abbildung 5.2.5 als gestrichelte Linien gezeigt, sind recht groß. So scheinen in den Monaten Juni bis September durchaus negative Werte für κ_j möglich zu sein. Die Grenzen der 90%-Vertrauensintervalle zeigen die gleiche saisonale Oszillation wie die $\tilde{\kappa}_j$ selbst. Wir können daher zwar nicht sicher sein, daß das System von Juni bis September wirklich instabil ist, jedoch ist die Dämpfung während dieser Zeit minimal.

i) *Die Vorhersagegüte des Modells mit monatlich variierender Dämpfungsrate*

Abschließend untersuchen wir, wie gut der AR(2)-Prozeß mit monatlich variierender Dämpfungsrate (5.2.4,8) den ungefilterten SST-Index vorhersagen kann.

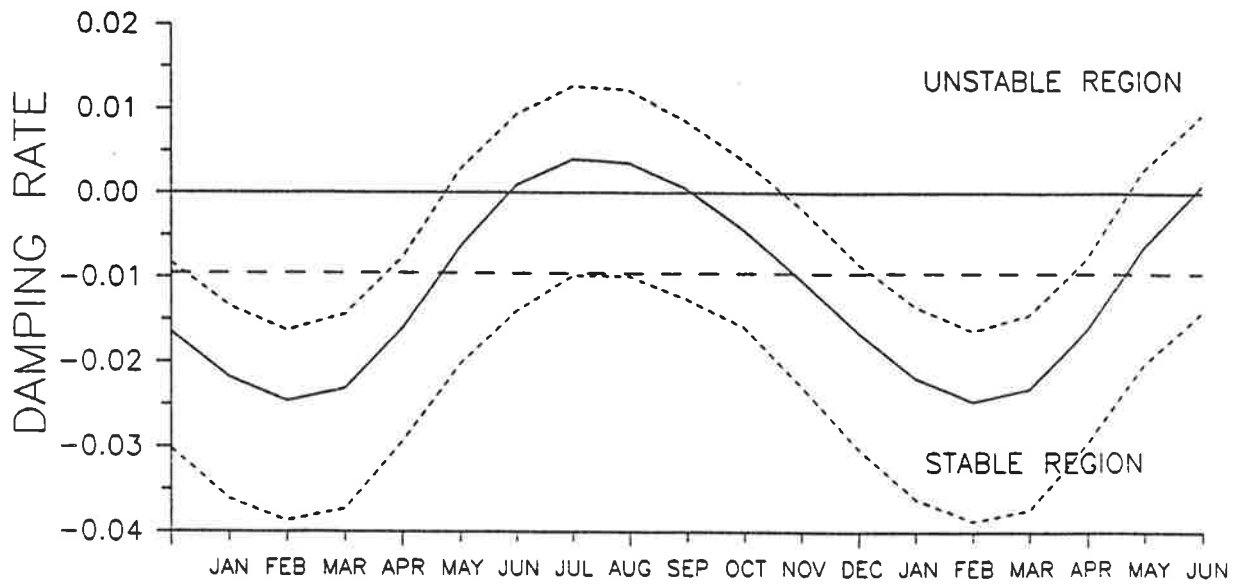


Abbildung 5.2.5: Die Schätzwerte der monatlichen Dämpfungsrates κ_j , $j=1, \dots, 12$, (durchgezogene Linie) und die Grenzen der 90%-Vertrauensintervalle (gestrichelte Linien). $\kappa_j > 0$ bedeutet eine Anfachung, $\kappa_j < 0$ eine Dämpfung.

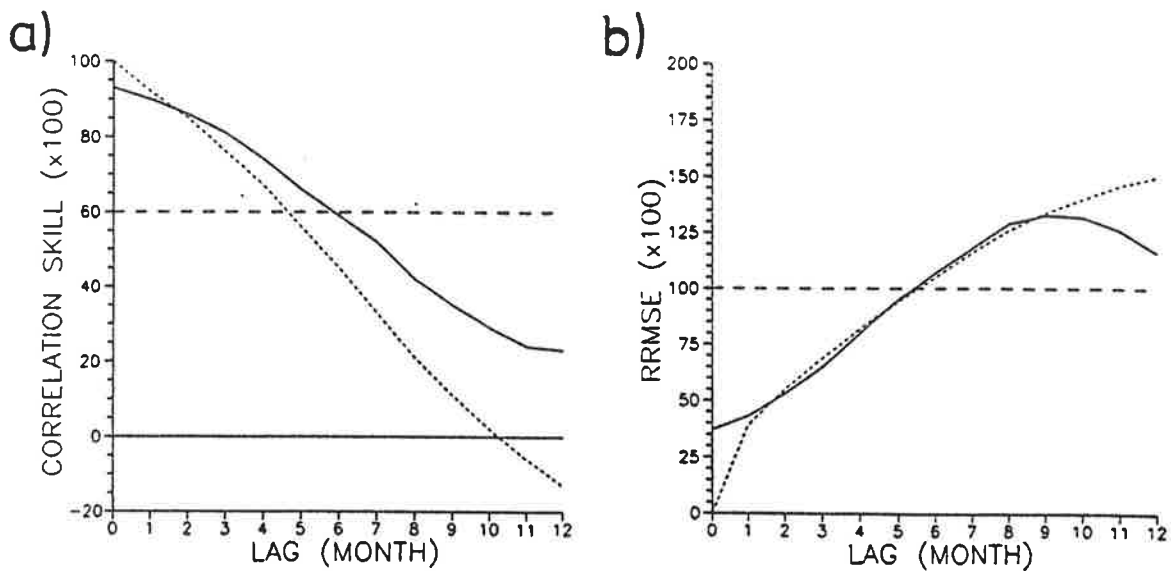


Abbildung 5.2.6: a) Die Korrelationsgüte $S_{cor}(\tau)$ und b) die relative Abweichung $S_{rrmse}(\tau)$ der Modell- (durchgezogene Linien) und Persistenzvorhersagen (gestrichelte Linien) des SST-Index. Das Modell das zugrunde liegt, ist ein univariater AR(2)-Prozeß mit monatlich variierender Dämpfungsrates (5.2.4,8).

Als Startwerte einer Vorhersage dient nicht der mit der Filtercharakteristik (12/16/96/108) gefilterte SST-Index, an den das Modell angepaßt wurde, sondern der durch die Mittelung über die sechs Monate vor Beginn einer Vorhersage geglättete SST-Index. Die Gewichte der Mittelung haben ein Verhältnis von 1:2:3:4:5:6. Die Vorhersagen starten in allen möglichen Monaten des Zeitraumes von 1950 bis 1989.

Die Güte der Vorhersagen messen wir mittels der Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau; \mathfrak{I})$ und der relativen Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau; \mathfrak{I})$, die in Kapitel 3.6 eingeführt wurden ($\mathfrak{I} = \{1, \dots, t_{\text{max}}\}$). Diese Gütemaße der Modellvorhersagen werden in der Abbildung 5.2.6 gezeigt (durchgezogene Linien). Die Maße der einfachen Persistenzvorhersage (Abschnitt *f*) sind als Vergleich eingetragen (gestrichelte Linien).

Die Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau)$ des Modells ist bei Vorhersagen über einen Zeitraum von mehr als zwei Monaten ($\tau > 2$) höher als die der Persistenzvorhersagen. Die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau)$ von dem SST-Index ist für beide Arten der Vorhersagen nahezu gleich. Über einen Zeitraum bis zu fast sechs Monaten ($\tau < 6$) liegt für das betrachtete Modell die Korrelationsgüte oberhalb von 0.6 ($S_{\text{cor}}(\tau) < 0.6$) und die relative Abweichung unterhalb von Eins ($S_{\text{rrmse}} < 1.0$). Wir schließen aus diesem Vergleich, daß die angepaßte Schwingung mit monatlich variierender Dämpfung einen wichtigen Teil der Dynamik des SST-Index erfaßt.

j) Zusammenfassung

In diesem Kapitel 5.2 wurde der in Abschnitt a) vorgestellte SST-Index analysiert.

Der Test auf Stationarität zeigt, daß diese wichtige Eigenschaft für den SST-Index erfüllt ist (Abschnitt c). Der Linearitätstest wurde auf den SST-Index in verschiedenen Filterungen angewandt (Abschnitt d). Mögliche Nichtlinearitäten konzentrieren sich demnach auf schnelle Fluktuationen mit Zeitskalen unter einem Jahr. Werden die kurzen und die langen Zeitskalen durch eine Filterung mit der Charakteristik (12/16/96/108) unterdrückt, so wird der SST-Index als linear angesehen.

Das quasiperiodische Verhalten des ENSO-Phänomens beinhaltet ein breites Band an Zeitskalen (Abschnitt g). Das breite und flache Maximum des Spektrums des SST-Index liegt bei Perioden zwischen 30 und 80 Monaten (Abbildung 5.2.3). Der an den gefilterten SST-Index angepaßte AR(2)-Prozeß beschreibt eine

Schwingung mit einer Periode von $\tilde{T} = 32$ Monaten. Eine halbe Periode ($\tilde{T}/2 = 16$ Monate) entspricht der Länge eines ENSO-Ereignisses.

Die feste Phasenbeziehung eines Ereignisses zum Jahresgang (Abschnitt e, Abbildung 5.2.4) und die starke Abhängigkeit der Persistenz von der Jahreszeit (Abschnitt f, Tabelle 5.2.5) deuten darauf hin, daß die Empfindlichkeit des Systems Ozean-Atmosphäre von der Jahreszeit abhängt. Dieses Verhalten kann durch einen AR(2)-Prozeß mit monatlich frei variierender Dämpfungsrate κ_j modelliert werden (Abschnitt h). Die geschätzten κ_j beschreiben eine saisonale Oszillation (Abbildung 5.2.5). Von Juni bis September ist die Dämpfung am geringsten, das System Ozean-Atmosphäre reagiert in diesen Monaten am empfindlichsten auf Störungen. Ein Signal, das in dieser Zeit beobachtet wird, wird angefacht oder nur schwach gedämpft. Die Lebensdauer eines solchen Signals ist groß gegenüber einem Signal, das im Februar, der Zeit der stärksten Dämpfung, auftritt. Die Monate maximaler Persistenz und geringer Dämpfung stimmen überein, ebenso die Monate minimaler Persistenz und starker Dämpfung.

Die Schwingung mit variierender Dämpfung beschreibt einen wichtigen Teil der Dynamik des SST-Index. Dies bestätigt ein Vergleich der Güte der Vorhersagen des SST-Index mit der einfachen Persistenzvorhersage (Abschnitt i).

5.3 ÄQUATORIALE MONATLICHE ANOMALIEN DER MEERESOBERFLÄCHENTEMPERATUR UND DER ZONALEN UND MERIDIONALEN KOMPONENTE DER BODENNAHEN WIND- GESCHWINDIGKEIT ÜBER DEM INDISCHEN OZEAN UND DEM PAZIFIK

a) Die Daten

Bei den Daten, die den Analysen dieses Kapitels zugrunde liegen, handelt es sich um monatliche Anomaliewerte der Meeresoberflächentemperatur (SST) und der zonalen und meridionalen Komponente der 10m-Oberflächenwindgeschwindigkeit (u , v) entlang des Äquators über dem Indischen Ozean und dem Pazifik für den Zeitraum von 1970 bis 1989. Sie wurden aus einem Datensatz gewonnen, den T.P. Barnett freundlicher Weise zur Verfügung gestellt hat. Die Originaldaten liegen auf einem $2^{\circ} \times 10^{\circ}$ Gitter vor, das sich zwischen 30°N - 30°S und 30°E - 70°W erstreckt. Eine genauere Beschreibung der Windanomalien und eine Analyse mit komplexen EOFs finden wir in Barnett (1983). Der Datensatz der SST ist auch die Grundlage für den SST-Index, der im vorhergehenden Kapitel 5.2 untersucht wurde.

Die Daten sind über Zellen von $10^{\circ} \times 10^{\circ}$ mit Zentrum auf dem Äquator gemittelt. Sie umfassen den Indischen Ozean und den Pazifik, d.h. sie erstrecken sich von 40°E bis 80°W . Betrachtet werden im folgenden die Abweichungen vom langjährigen Monatsmittel, das auf dem untersuchten Zeitraum von 1970 bis 1989 beruht. Der lineare Trend der Daten wurde abgezogen. Alle Fluktuationen mit Zeitskalen unter 12 Monaten und über 108 Monaten wurden durch eine Filterung im Frequenzraum unterdrückt. Verwendet wurde der Filter, der in Anhang A.5 beschrieben ist, mit der Filtercharakteristik (12/16/96/108). Der gesamte Bereich an Zeitskalen, den ENSO beinhaltet und wie er in Abschnitt 5.2g für den SST-Index aufgezeigt wird, liegt innerhalb des Filterfensters. Um eine gemeinsame Analyse von SST, u und v zu ermöglichen, wurden die drei Datensätze skaliert, so daß sie die gleiche räumlich gemittelte Varianz besitzen.

b) Die EOF-Analyse

Das Verhalten der äquatorialen SST-, u - und v -Anomalien wird beherrscht von der zeitlichen Entwicklung der ersten EOF, die den hohen Anteil von 45.7% der Varianz der Beobachtungen $Y(t)$ erfaßt. Abbildung 5.3.1a zeigt die erste EOF \tilde{e}_1 und Abbildung 5.3.2a die geschätzte Zustandsvariable $\tilde{X}_1(t)$, die auch EOF-Koeffizient genannt wird. Die Zeitachse der Abbildungen von Zeitreihen

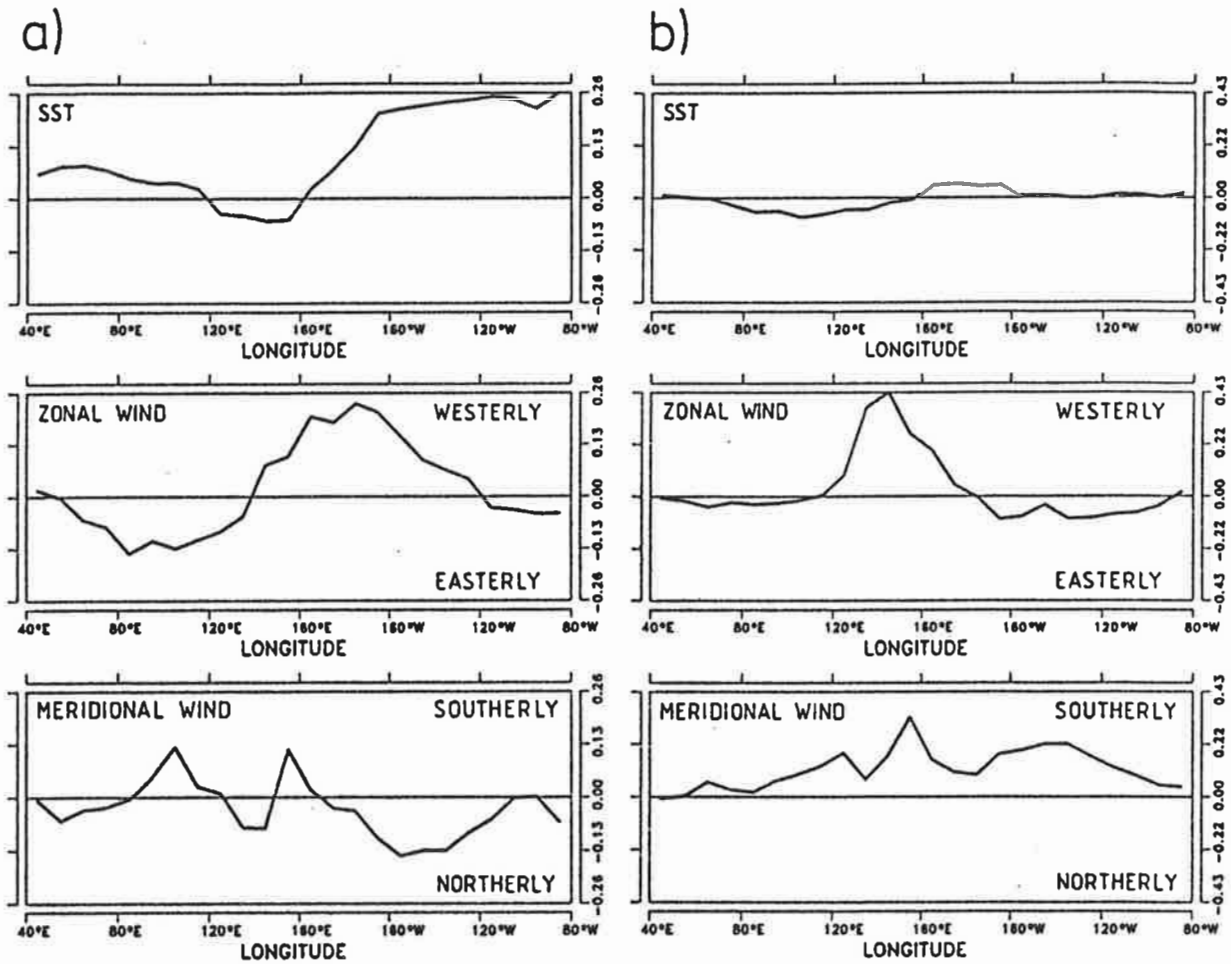


Abbildung 5.3.1: a) Die erste EOF \tilde{e}_1 und b) die zweite EOF \tilde{e}_2 der äquatorialen SST-, u- und v-Anomalien. Die erste EOF \tilde{e}_1 erklärt 45.7% der Varianz, die zweite EOF \tilde{e}_2 18.5%.

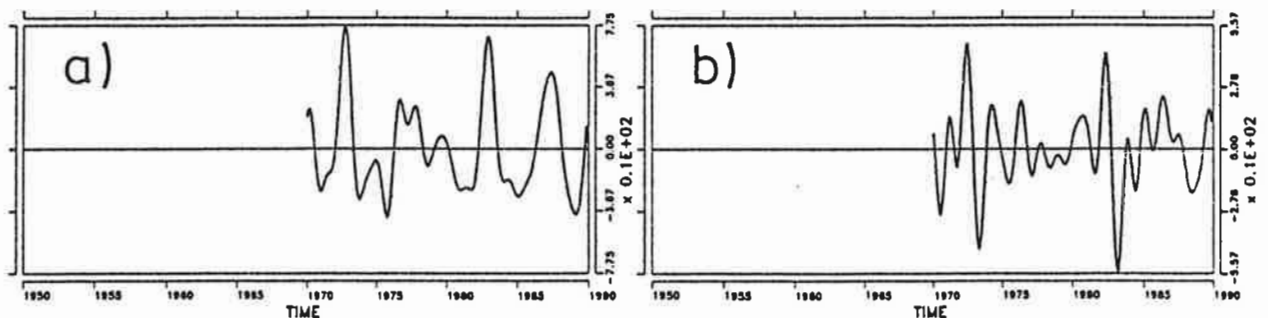


Abbildung 5.3.2: Die EOF-Koeffizienten a) $\tilde{X}_1(t)$ und b) $\tilde{X}_2(t)$ der in Abbildung 5.3.1 gezeigten EOFs \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 . Die Korrelation von $\tilde{X}_1(t)$ mit dem SST-Index (Abbildung 5.2.2) beträgt 0.89.

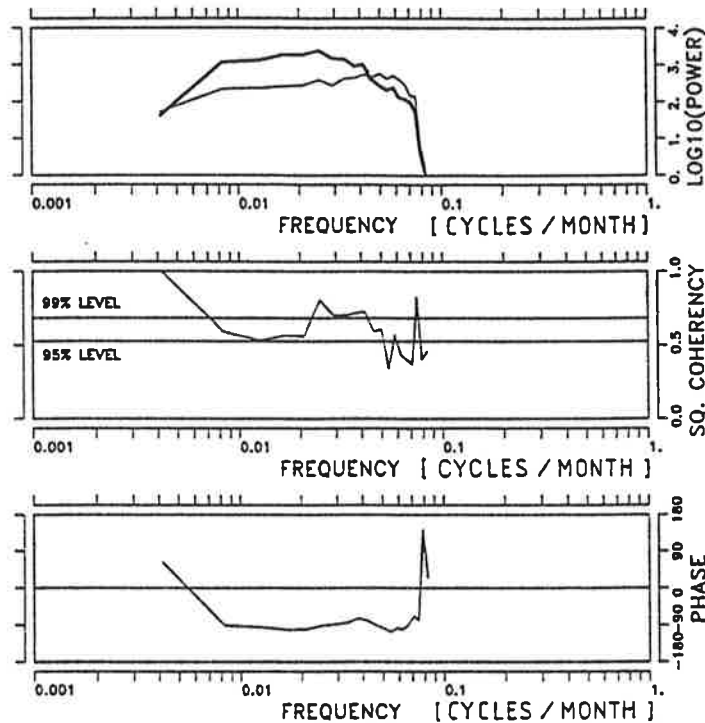


Abbildung 5.3.3: Die Kreuzspektralanalyse der EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$: die Spektren von $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ (oberste Abbildung, dicke bzw. dünne Linie) sowie die Kohärenz (mittlere Abbildung) und die Phase (unterste Abbildung) zwischen $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$.

wurde in diesem Kapitel so wie in den Kapiteln 5.2 und 5.4 gewählt, um den Vergleich der Ergebnisse der verschiedenen Analysen zu vereinfachen.

Der EOF-Koeffizient $\tilde{X}_1(t)$ und der SST-Index (Abbildung 5.2.2) sind hoch korreliert:

$$\text{cor}[\tilde{X}_1(t); \text{SST-Index}] = 0.89. \quad (5.3.1)$$

Die erste EOF beschreibt daher die räumliche Struktur, die wir während eines warmen (kalten) Ereignisses beobachten:

Eine kräftige Erwärmung der Meeresoberfläche erstreckt sich von der südamerikanischen Küste bis in den zentralen Pazifik ($160^\circ\text{E}-80^\circ\text{W}$). Sie geht einher mit einer Abkühlung im Westpazifik ($120^\circ-160^\circ\text{E}$) und einer Erwärmung im Indischen Ozean ($40^\circ-120^\circ\text{E}$). Begleitet wird dieses Temperatursignal von kräftigen Westwindanomalien im zentralen Pazifik ($140^\circ\text{E}-120^\circ\text{W}$), deren Maximum westlich der maximalen SST-Anomalien, im Bereich der Datumslinie liegt. Über dem Indischen Ozean und Indonesien ($50^\circ-140^\circ\text{E}$) finden wir dagegen Ostwindano-

malien. Gleichzeitig treten Windanomalien aus nördlicher Richtung im Zentral- und Ostpazifik zwischen 170°E und 110°W auf. Die meridionalen Windanomalien im Westpazifik und Indischen Ozean zeigen kein einheitliches großräumiges Muster.

Die zweite EOF \tilde{e}_2 (Abbildung 5.3.1b) erklärt 18.5% der Varianz der Beobachtungen $Y(t)$. Der Beitrag der SST-Anomalien zu der zweiten EOF ist im gesamten Untersuchungsgebiet verschwindend klein. Die u-Anomalien im Indischen Ozean und dem Ostpazifik (40° - 120°E und 180° - 80°W) sind ebenfalls fast Null, aber im westlichen Pazifik (120°E - 180°) treten starke Westwindanomalien auf. Südliche Windanomalien unterschiedlicher Stärke finden wir im Indischen Ozean und dem gesamten Pazifik.

Am auffälligsten an dem EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_2(t)$ (Abbildung 5.3.2b), der zeitlichen Entwicklung dieses Musters \tilde{e}_2 , sind der Wechsel von großen positiven zu großen negativen Werten in den Jahren 1972/73 und 1982/83. Der Zusammenhang mit den sehr starken, warmen Ereignissen der Jahre 1972 und 1982 ist unverkennbar.

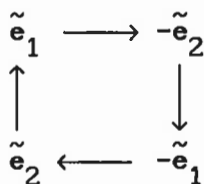
Die Kreuzspektralanalyse [nach Brockwell und Davis (1987)] der EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ (Abbildung 5.3.3) zeigt, daß deren Kohärenz für Perioden zwischen 24 und 40 Monaten über dem 99%-Niveau liegt. $\tilde{X}_2(t)$ führt dabei $\tilde{X}_1(t)$ mit etwa 90° Phasenverschiebung. Das Ergebnis der Korrelationsanalyse von $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ ist dazu konsistent. Bei einer Zeitverschiebung von ± 6.5 Monaten ist die Korrelationsfunktion maximal:

$$\text{cor}[\tilde{X}_1(t+6.5); \tilde{X}_2(t)] = 0.52, \quad (5.3.2)$$

$$\text{cor}[\tilde{X}_1(t-6.5); \tilde{X}_2(t)] = -0.56. \quad (5.3.3)$$

Die zweite EOF beschreibt demnach eine Übergangsphase von ENSO. Ein halbes Jahr vor einem Ereignis tritt das Muster der zweiten EOF auf - ein halbes Jahr nach einem Ereignis finden wir das negative der zweiten EOF.

Die Beziehung zwischen den EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ deutet an, daß die EOFs \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 einen Zyklus der Form



beschreiben, bei dem in Abständen von 6.5 Monaten die EOFs \tilde{e}_1 , $-\tilde{e}_2$, $-\tilde{e}_1$, \tilde{e}_2

als „reine“ Zustände auftreten. Eine solche Beziehung zwischen den Mustern ist uns aus Kapitel 2.11 bekannt. Die beiden EOFs sind offenbar die POPs eines Oszillators mit einer Periode von $\tilde{T} = 26$ Monaten.

c) Die POP-Analyse nach von Storch et al. (1988)

Die POP-Analyse, die auf von Storch et al. (1988) zurückgeht (vS-POP-Analyse), entspricht der EOFMDL-Analyse (Kapitel 2.9) eines Zustandsraummodells (2.1.5,6) mit einem AR(1)-Prozeß (2.9.1) als Modellfunktion:

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{WN}(0, \underline{R}), \quad (5.3.4)$$

$$X(t) = \underline{A}X(t-1) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q}). \quad (5.3.5)$$

Der Zustandsraum ist bei dieser Anwendung der POP-Analyse durch die ersten zehn EOFs gegeben ($m = 10$, $\tilde{\underline{C}} = \tilde{\underline{E}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{10})$), die zusammen 88.5% der Varianz der Beobachtungen $Y(t)$ erfassen. Fluktuationen, die wenig beitragen, werden dadurch unterdrückt.

Als Ergebnis der Analyse erhält man fünf POP-Paare $(\tilde{c}_1^i, \tilde{c}_2^i)$, $i=1, \dots, 5$ (Kapitel 2.11). Jedes dieser POP-Paare charakterisiert einen Oszillator der Periode \tilde{T}_i und der 1/e-Abklingzeit $\tilde{\tau}_i$, die in Tabelle 5.3.1 zusammengestellt sind. Als dritte Größe ist in Tabelle 5.3.1 die erklärte Varianz

$$S_i = \frac{\text{var}[Y(t)] - \text{var}[\varepsilon_i(t)]}{\text{var}[Y(t)]}, \quad i=1, \dots, r \quad (5.3.6)$$

$$\varepsilon_i(t) = Y(t) - c_1^i X_1^i(t) - c_2^i X_2^i(t), \quad (5.3.7)$$

eines POP-Paares (c_1^i, c_2^i) angegeben, wobei $X_1^i(t)$, $X_2^i(t)$ die dazugehörigen Zustandsvariablen (POP-Koeffizienten) sind. Die erklärte Varianz S_i gibt an, wieviel ein POP-Paar (c_1^i, c_2^i) zu der Varianz der Beobachtungen $\text{var}[Y(t)]$ beiträgt (siehe Abschnitt 3.5).

Tabelle 5.3.1: Die Perioden \tilde{T}_i , die 1/e-Abklingzeiten $\tilde{\tau}_i$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_i der fünf Oszillatoren, $i=1, \dots, 5$, die man bei der EOFMDL-Analyse mit 10 EOFs und einem AR(1)-Prozeß als Modellfunktion erhält.

i	\tilde{T}_i	$\tilde{\tau}_i$	\tilde{S}_i
1	265.	40.4	16.8%
2	64.7	37.8	12.4%
3	45.5	26.9	6.7%
4	30.1	41.8	14.5%
5	27.1	50.1	-6.3%

Von diesen fünf Oszillatoren ist jedoch nur einer sinnvoll. Die Periode $\tilde{T}_1 = 265$ Monate des ersten Oszillators ist zu groß, denn Fluktuationen mit einer Periode von mehr als 108 Monaten wurden bei den Beobachtungen $Y(t)$ herausgefiltert (Abschnitt a). Durch eine Kreuzspektralanalyse werden der zweite und dritte Oszillator ausgeschlossen: die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^i(t)$, $\tilde{X}_2^i(t)$, $i=2,3$, sind nicht kohärent, so wie wir es für einen Oszillator der Periode T_i erwarten (vgl. (2.11.8)). Der fünfte Oszillator hat eine negative erklärte Varianz ($\tilde{S}_5 = -6.3\%$), d.h. die Varianz des unerklärten Restes $\text{var}[\varepsilon_5(t)]$ ist größer als die Varianz der Beobachtungen $\text{var}[Y(t)]$.

Daraus folgt: In dieser speziellen Darstellung des Zustandsraummodells (5.3.4,5) als ein System von unabhängigen Oszillatoren finden wir ein relevantes POP-Paar $(\tilde{c}_1^4, \tilde{c}_2^4)$ (Abbildung 5.3.4a) mit den Zeitskalen $\tilde{T}_4 = 30$ Monate, $\tilde{\tau}_4 = 42$ Monate. Das Muster \tilde{c}_1^4 (dicke Linie) und die erste EOF \tilde{e}_1 (Abbildung 5.3.1a) sind ähnlich, ebenso entsprechen sich im wesentlichen \tilde{c}_2^4 (dünne Linie) und die zweite EOF \tilde{e}_2 (Abbildung 5.3.1b). Die Abbildung 5.3.4 zeigt ferner die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^4(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^4(t)$ (dünne Linie) sowie deren Kreuzspektralanalyse. Die Kohärenz ist für $f = 1/(30 \text{ Monate}) = 0.033/\text{Monat}$ zwar minimal, sie liegt aber dennoch auf dem hohen Wert des 95%-Niveaus. Die Phasenverschiebung beträgt wie erwartet -90° .

d) Das Zustandsraummodell eines Oszillators

Die vS-POP-Analyse ergibt, daß für die Beobachtungen $Y(t)$ ein Oszillator relevant ist. Ein solcher Oszillator wird durch ein Zustandsraummodell mit einem bivariaten AR(1)-Prozeß ($m = 2$) als Modellfunktion beschrieben:

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim \text{WN}(0, \underline{R}), \quad (5.3.8)$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} X(t-1) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(0, \underline{Q}) \quad (5.3.9)$$

Das in Kapitel 2.6 vorgestellte LSQ-Verfahren schätzt die Muster \underline{C} und die Modellparameter $a_{\mu\nu}$ gleichzeitig und bestimmt so den optimal angepaßten Oszillator.

Als Ergebnis dieser Analyse erhält man einen Oszillator mit einer Periode von $\tilde{T} = 44$ Monate und einer $1/e$ -Abklingzeit $\tilde{\tau} = 53$ Monate, der den Zyklus des POP-Paares $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ durchläuft (Kapitel 2.11), die in der Abbildung 5.3.5a gezeigt sind. Die Muster \tilde{c}_1 (dicke Linie) und \tilde{c}_2 (dünne Linie) sind den EOFs

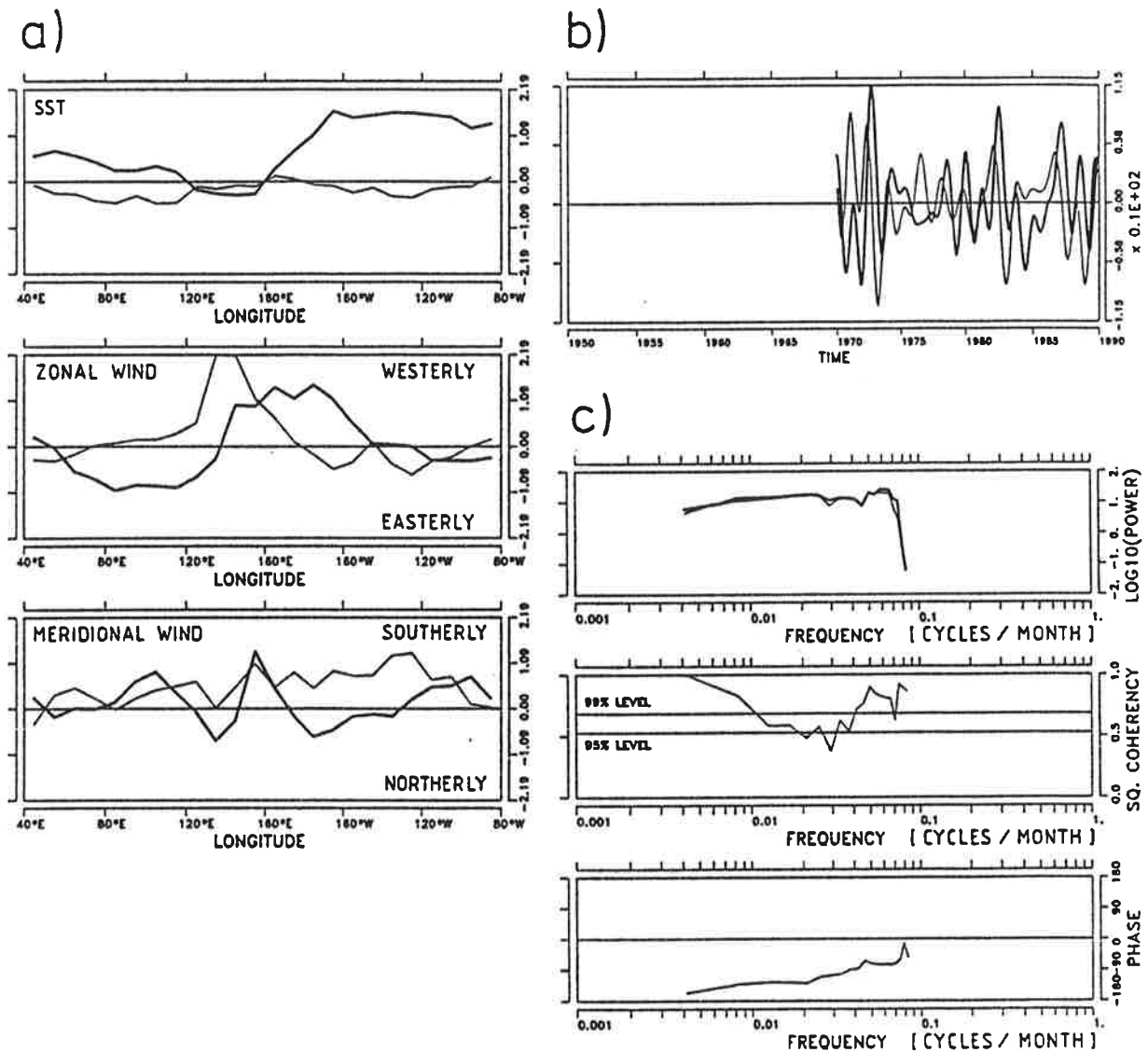


Abbildung 5.3.4: Als Ergebnis der vS-POP-Analyse der äquatorialen SST-, u- und v-Anomalien erhält man ein relevantes POP-Paar (\tilde{c}_1^4 , \tilde{c}_2^4) mit der Periode $\tilde{T}_4 = 30$ Monate und der $1/e$ -Abklingzeit $\tilde{\tau}_4 = 42$ Monate. Gezeigt sind a) die Muster \tilde{c}_1^4 (dicke Linie) und \tilde{c}_2^4 (dünne Linie), b) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^4(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^4(t)$ (dünne Linie) sowie c) deren Kreuzspektralanalyse (Spektren (oberste Abbildung), Kohärenz (mittlere Abbildung) und Phase (unterste Abbildung)).

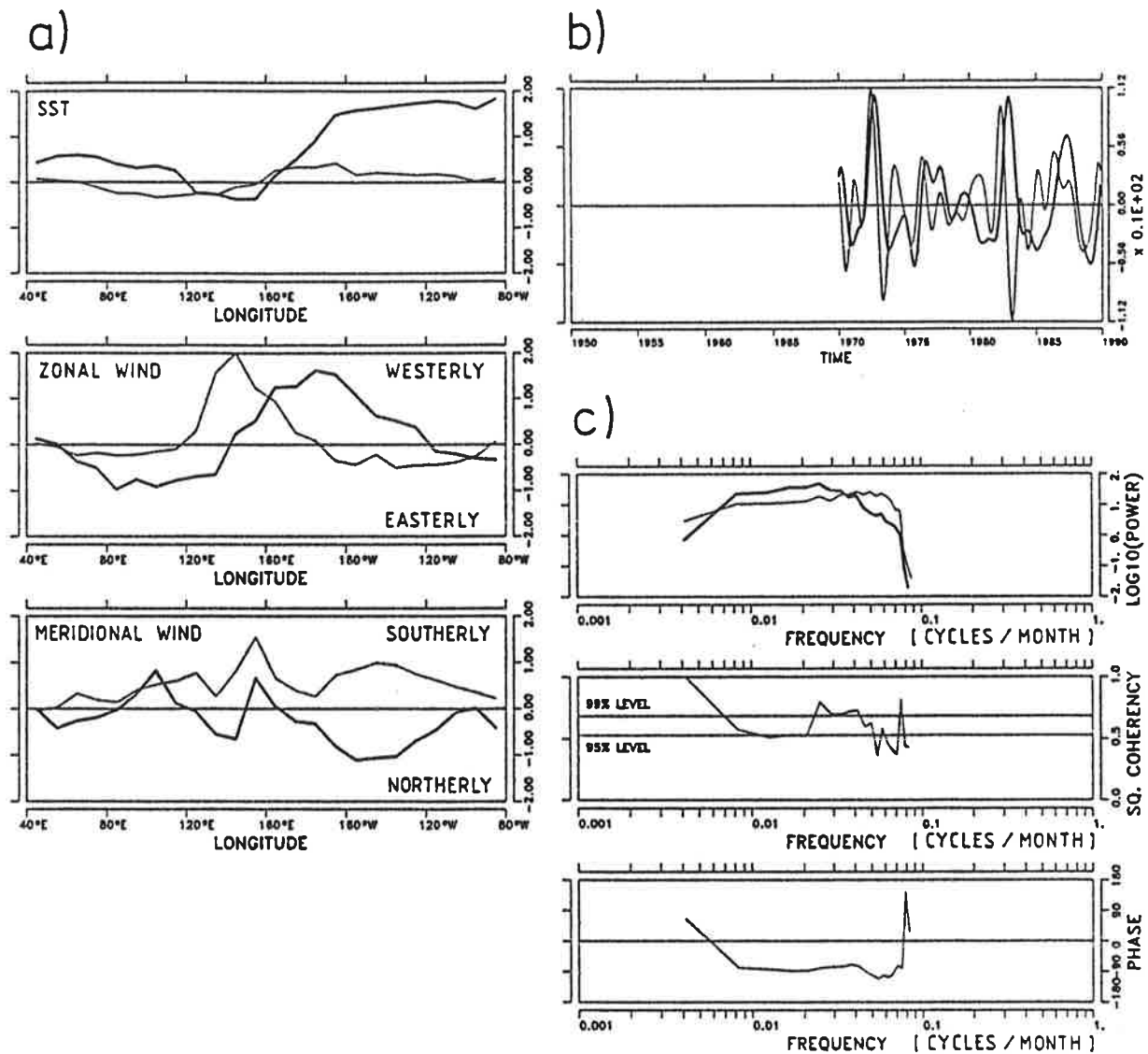
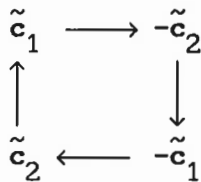


Abbildung 5.3.5: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell eines Oszillators an die äquatorialen Daten angepaßt. Als Ergebnis der Analyse erhält man ein POP-Paar (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) mit den Zeitskalen $\tilde{T} = 44$ Monate, $\tilde{\tau} = 53$ Monate. Gezeigt sind a) die Muster \tilde{c}_1 (dicke Linie) und \tilde{c}_2 (dünne Linie), b) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2(t)$ (dünne Linie) sowie c) deren Kreuzspektalanalyse (Spektren (oberste Abbildung), Kohärenz (mittlere Abbildung) und Phase (unterste Abbildung)).

\tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 (Abbildung 5.3.1) sehr ähnlich. Die Abbildung 5.3.5 zeigt ferner die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2(t)$ (dünne Linie) sowie deren Kreuzspektralanalyse. Die Kohärenz liegt für $f = 1/(44 \text{ Monate}) = 0.023/\text{Monat}$ über dem 99%-Niveau und $\tilde{X}_2(t)$ führt $\tilde{X}_1(t)$ wie erwartet mit 90° Phasenverschiebung.

Wir verfolgen nun den Zyklus



den das POP-Paar $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ (Abbildung 5.3.5a) durchläuft:

Im Bereich des zentralen und östlichen Pazifik ($160^\circ\text{E}-80^\circ\text{W}$) beschreiben die SST-Anomalien eine räumlich stehende Oszillation ($\tilde{c}_2 \approx 0$). Es entwickelt sich aus einem Zustand ohne nennenswerte Anomalien $[\tilde{c}_2]$ innerhalb einer viertel Periode eine kräftige Erwärmung $[\tilde{c}_2 \rightarrow \tilde{c}_1]$, die nach einer weiteren viertel Periode vollständig abklingt $[\tilde{c}_1 \rightarrow -\tilde{c}_2]$. Im weiteren Verlauf bildet sich ganz analog ein kaltes Ereignis $[-\tilde{c}_2 \rightarrow -\tilde{c}_1 \rightarrow \tilde{c}_2]$. Im Indischen Ozean ($40^\circ-120^\circ\text{E}$) beschreibt die SST auch eine räumlich stehende Oszillation ($\tilde{c}_2 \approx 0$), die jedoch schwächer ist.

Die zonalen Windanomalien u zeigen dagegen ein nach Osten wanderndes Signal. Noch während im Pazifik das kalte Ereignis abläuft $[-\tilde{c}_1]$, treten Westwindanomalien im Indischen Ozean und dem indonesischen Raum auf ($50^\circ-140^\circ\text{E}$). Diese wandern ostwärts in den Westpazifik $[-\tilde{c}_1 \rightarrow \tilde{c}_2]$, wobei sie sich verstärken. Zur warmen Phase $[\tilde{c}_1]$ finden wir die anomalen Westwinde im zentralen Pazifik ($140^\circ\text{E}-120^\circ\text{W}$), westlich der maximalen Erwärmung. Nach einem warmen Ereignis klingen die Windanomalien im Pazifik ab $[\tilde{c}_1 \rightarrow -\tilde{c}_2]$. Gleichzeitig werden im Indischen Ozean bereits die Vorläufer des nächsten kalten Ereignisses beobachtet.

Die meridionalen Windanomalien v zeigen im Zentral- und Ostpazifik ($170^\circ\text{E}-110^\circ\text{W}$) auch eine stehende Oszillation ($\tilde{c}_1 \approx -\tilde{c}_2$), die gegenüber der Oszillation der SST-Anomalien um eine achte Periode verschoben ist. Kurz vor einem Ereignis sind kaum v -Anomalien zu beobachten. Während der warmen Phase finden wir Windanomalien aus nördlicher Richtung, die sich weiter verstärken. Nachdem die SST-Anomalien abgeklungen sind, verschwinden eine achte Periode später auch die meridionalen Windanomalien.

e) Die Vorhersagegüte des Zustandsraummodells eines Oszillators

Um zu überprüfen, ob das Zustandsraummodell eines Oszillators (5.3.8,9) das ENSO-Phänomen gut beschreibt, untersuchen wir dessen Vorhersagegüte. Jedoch werden nicht die Beobachtungen $Y(t)$ selbst, sondern der SST-Index (Abbildung 5.2.2) vorhergesagt. Der SST-Index wird dabei durch eine Linearkombination

$$r \cos[\varphi] X_1(t+\tau;t) + r \sin[\varphi] X_2(t+\tau;t) \quad (5.3.10)$$

der τ -Schritt-Vorhersagen $X(t+\tau;t)$ der Zustandsvariablen $X(t)$ approximiert.

Als Startwerte einer Vorhersage dienen die über sechs Monate vor Beginn einer Vorhersage gemittelten Beobachtungen $Y(t)$. Die Gewichte der Mittelung haben ein Verhältnis von 1:2:3:4:5:6. Die Vorhersagen starten in allen möglichen Monaten des untersuchten Zeitraumes von 1970 bis 1989.

Die Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau)$ und die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau)$ (Kapitel 3.6) sind ein Maß für die Güte der Modellvorhersagen. Die Parameter φ und r aus (5.3.10) werden so gewählt, daß die Korrelation $S_{\text{cor}}(\tau=0)$ maximal und die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau=0)$ minimal ist. In Abbildung 5.3.6 werden die Vorhersagegüte des Oszillators der vS-POP-Analyse (Abschnitt c, durchgezogene Linie) und des mit dem LSQ-Verfahren angepaßten Oszillators (Abschnitt d, durchgezogene Linie mit Symbolen) der Vorhersagegüte der einfachen Persistenzvorhersage (Abschnitt 5.2f, gestrichelte Linie) gegenüber gestellt. Am schlechtesten schneidet der Oszillator der vS-POP-Analyse ab. Aber auch der mit dem LSQ-Verfahren optimal angepaßte Oszillator ist kaum besser als die Persistenzvorhersage.

f) Zusammenfassung: ENSO als System eines Oszillators?

Die Kreuzspektral- und Korrelationsanalyse der EOFs \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 (Abschnitt b), die vS-POP-Analyse (Abschnitt c) und die Anpassung des Zustandsraummodells eines Oszillators (Abschnitt d) liefern alle einen Hinweis auf einen Oszillator. Zwar sind bei den drei Analysen die Muster ähnlich, die Schätzung der Periode des Oszillators ist dagegen nicht konsistent (b) $\tilde{T} = 26$ Monate, c) $\tilde{T} = 30$ Monate, d) $\tilde{T} = 44$ Monate). Außerdem ist die Vorhersagbarkeit des SST-Index durch dieses Zustandsraummodell eines Oszillators nicht besser als die einfache Persistenzvorhersage (Abschnitt e). Ein wesentlicher Teil der Dynamik des ENSO-Phänomens scheint nicht erfaßt zu sein.

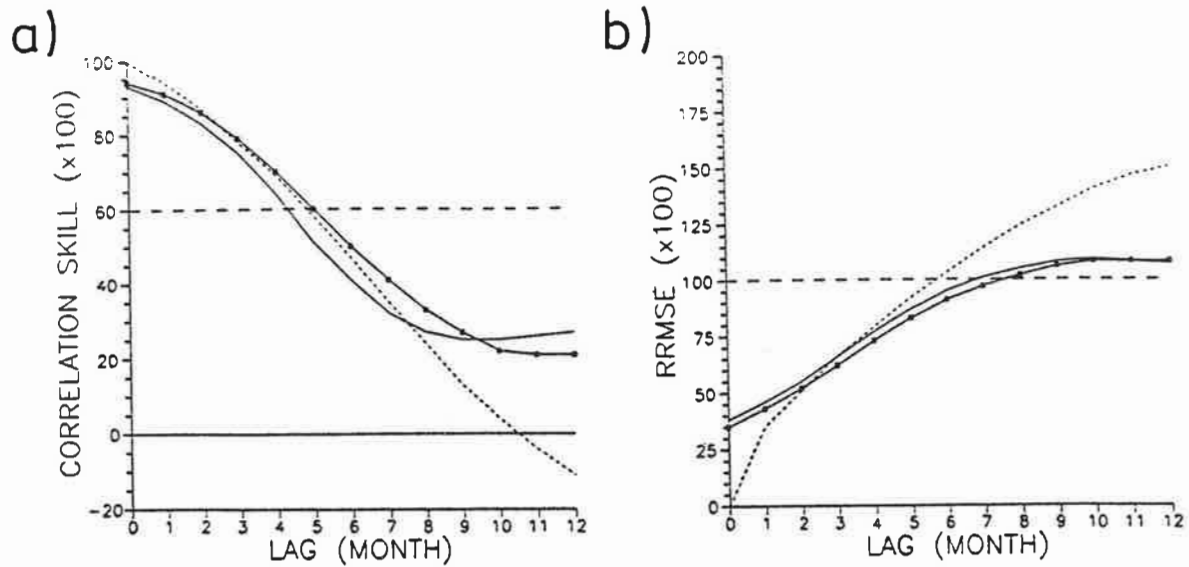


Abbildung 5.3.6: a) Die Korrelationsgüte $\tilde{S}_{cor}(\tau)$ und b) die relative Abweichung $\tilde{S}_{rrmse}(\tau)$ der Vorhersagen des SST-Index durch den Oszillator der vS-POP-Analyse (durchgezogene Linien), durch den mittels des LSQ-Verfahrens optimal angepassten Oszillator (durchgezogene Linie mit Symbolen) und durch die Persistenzvorhersagen (gestrichelte Linien).

Betrachten wir nochmals die EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ aus Abbildung 5.3.2, so erkennen wir eine vorherrschende Periode von etwa drei Jahren für $\tilde{X}_1(t)$ und von etwa zwei Jahren für $\tilde{X}_2(t)$. Augenscheinlich liegen den Beobachtungen $Y(t)$ Prozesse mit zwei verschiedenen Zeitskalen zugrunde. Das bisher betrachtete Zustandsraummodell (5.3.8,9) kann dies nicht beschreiben.

g) Das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren

Wir benötigen daher ein Modell, daß in der Lage ist, die zwei Schwingungen wiederzugeben, die in den EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ vorherrschend sind. Die räumliche Struktur der Schwingungen ist durch die beiden EOFs \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 gegeben. Ein geeignetes Modell ist das Zustandsraummodell

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \varepsilon(t), \quad \varepsilon \sim WN(0, \underline{R}), \tag{5.3.11}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 \\ 0 & a_1^2 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} a_2^1 & 0 \\ 0 & a_2^2 \end{pmatrix} X(t-2) + \eta(t), \quad \eta \sim WN(0, \underline{Q}). \tag{5.3.12}$$

Es beschreibt zwei unabhängige, räumlich stehende, gedämpfte Oszillatoren.

Passen wir dieses Zustandsraummodell an die Beobachtungen $Y(t)$ an (LSQ-Verfahren), so finden wir eine langsamere Schwingung des Musters \tilde{c}_1 (Abbildung 3.5.7a) mit den Zeitskalen $\tilde{T}_1 = 34$ Monate, $\tilde{\tau}_1 = 164$ Monate und eine schnellere Schwingung des Musters \tilde{c}_2 (Abbildung 5.3.7b) mit $\tilde{T}_2 = 22$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 137$ Monate. Die Zeitskalen der Oszillatoren sehen wir in Tabelle 5.3.2 im Überblick. Das Muster \tilde{c}_1 (Abbildung 5.3.7a) gleicht der ersten EOF \tilde{e}_1 (Abbildung 5.3.1a), das Muster \tilde{c}_2 (Abbildung 5.3.7b) der zweiten EOF \tilde{e}_2 (Abbildung 5.3.1b). Die vorherrschenden Perioden der beiden EOF-Koeffizienten von drei bzw. zwei Jahren wird durch dieses Modell richtig erfaßt.

Die erklärte Varianz (Abschnitt 3.5) des ersten Musters \tilde{c}_1 beträgt mit $\tilde{S}_1 = 45.6\%$ etwa das 2.5-fache der erklärten Varianz $\tilde{S}_2 = 18.5\%$ des zweiten Musters \tilde{c}_2 . Wir schließen daraus, daß die dreijährige Schwingung die fundamentale Schwingung des ENSO-Systems ist.

Tabelle 5.3.2: Die Perioden \tilde{T}_μ , die 1/e-Abklingzeiten $\tilde{\tau}_\mu$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_μ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren, $\mu=1,2$.

μ	\tilde{T}_μ	$\tilde{\tau}_\mu$	\tilde{S}_μ
1	33.8	164.	45.6%
2	22.2	137.	18.5%

h) *Das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren*

Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren wird nun untersucht, indem eine lineare Kopplung

$$+ \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^1 \\ c_{21}^1 & 0 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} 0 & c_{12}^2 \\ c_{21}^2 & 0 \end{pmatrix} X(t-2) \quad (5.3.13)$$

zu der dynamischen Gleichung (5.3.12) addiert wird.

Die geschätzten Muster \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 (nicht gezeit) gleichen denen des Zustandsraummodells ohne Kopplung (Abbildung 5.3.7). Die angepaßte Modellfunktion lautet

$$\begin{aligned} X(t) = & \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 0.91 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{pmatrix} [X(t-1)-X(t-2)] \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0.00 \\ -0.00 & 0 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} 0 & 0.13 \\ 0.06 & 0 \end{pmatrix} [X(t-1)-X(t-2)] + \eta(t). \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

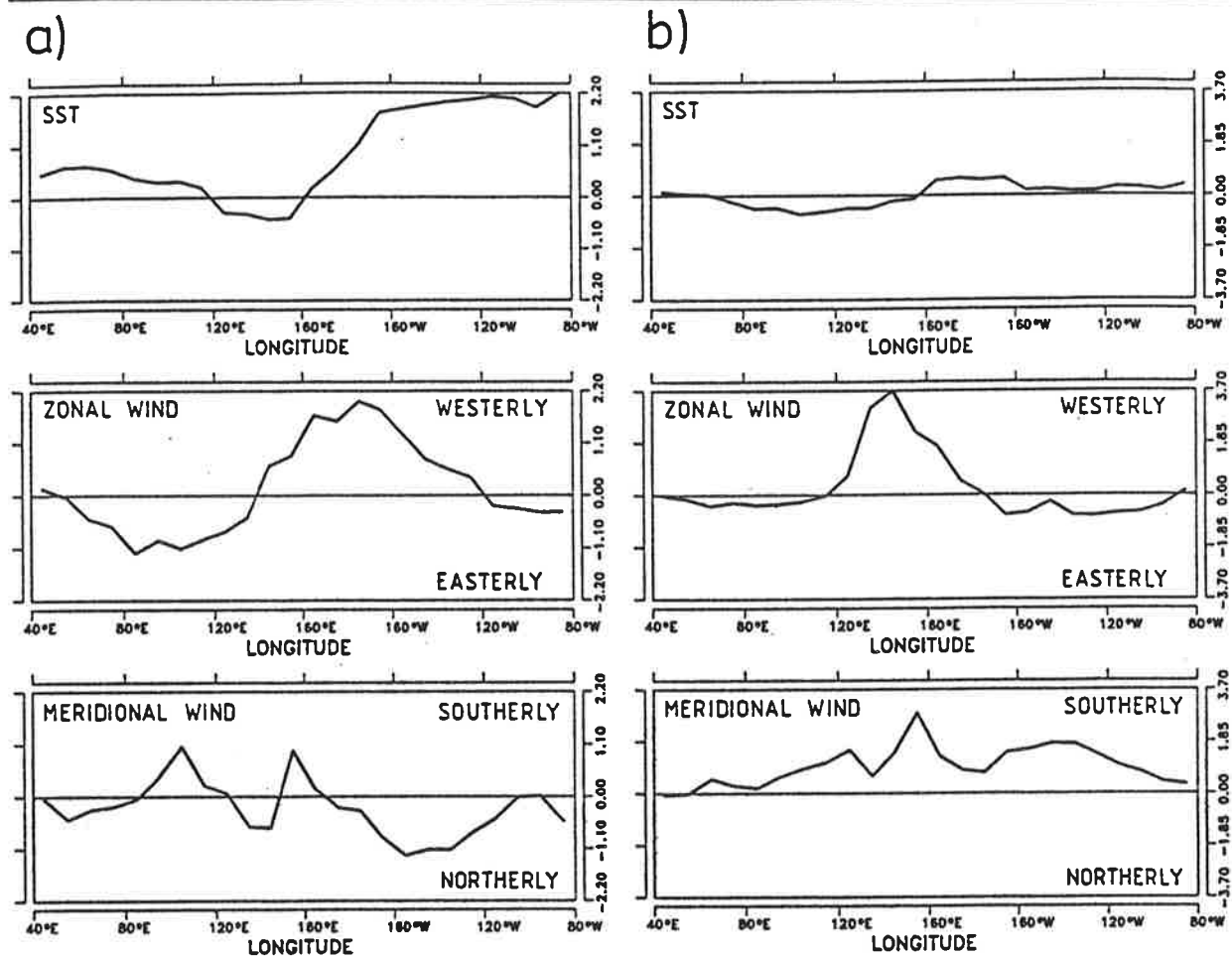


Abbildung 5.3.7: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren an die äquatorialen Daten angepaßt. Gezeigt ist a) das Muster \tilde{c}_1 der langsameren Schwingung ($\tilde{T}_1 = 34$ Monate, $\tilde{\tau}_1 = 164$ Monate) und b) das Muster \tilde{c}_2 der schnelleren Schwingung ($\tilde{T}_2 = 22$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 137$ Monate).

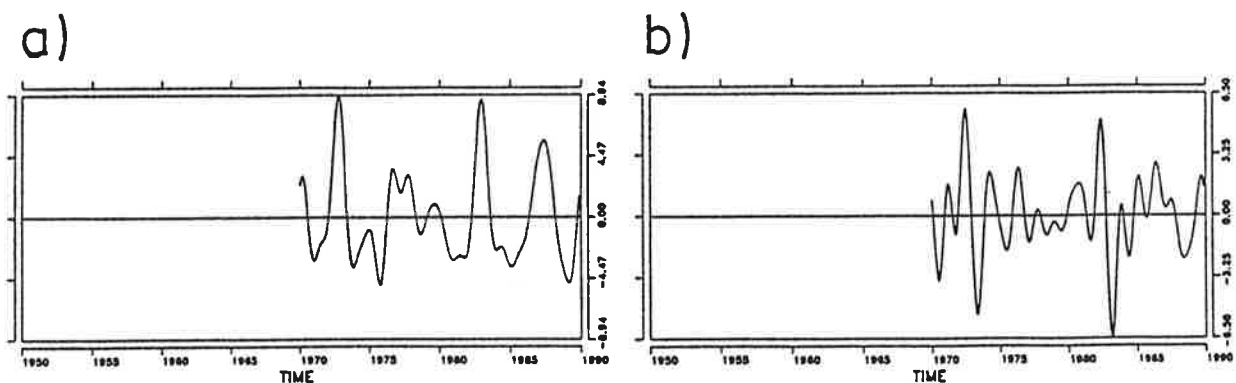


Abbildung 5.3.8: Die Zustandsvariablen a) $\tilde{X}_1(t)$ und b) $\tilde{X}_2(t)$ der in Abbildung 5.3.7 gezeigten Muster \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren.

Die Kopplung der Schwingungen ist demnach nicht von den Zustandsvariablen $X(t-1)$ selbst, sondern von der Änderung des Zustandes $[X(t-1)-X(t-2)]$ abhängig. Die Wechselwirkung des Signals $X_2(t)$ auf die Dynamik von $X_1(t)$ ist um einen Faktor zwei größer als umgekehrt, d.h. im wesentlichen wird die langsamere Oszillation des Musters \tilde{c}_1 von etwa drei Jahren durch die schnellere Oszillation des Musters \tilde{c}_2 von etwa zwei Jahren beeinflusst.

Da die Wechselwirkung linear ist, entspricht die Modellfunktion (5.3.12+13) einem AR(2)-Prozeß. Es ist deshalb möglich, dieses Modell durch zwei POP-Paare (c_1^i, c_2^i) , $i=1,2$, darzustellen, die die Eigenschwingungen des betrachteten Zustandsraummodells charakterisieren (Kapitel 2.11). Die Schätzwerte der Periode T_i , der 1/e-Abklingzeit τ_i , der erklärten Varianz $S_{1,2}^i$ eines Musters $c_{1,2}^i$ und der erklärten Varianz S_i eines POP-Paares (c_1^i, c_2^i) faßt Tabelle 5.3.3 zusammen.

Tabelle 5.3.3: Die Periode \tilde{T}_i , die 1/e-Abklingzeit $\tilde{\tau}_i$, die erklärte Varianz $\tilde{S}_{1,2}^i$ eines Musters $\tilde{c}_{1,2}^i$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_i eines POP-Paares $(\tilde{c}_1^i, \tilde{c}_2^i)$ der beiden Oszillatoren, $i=1,2$, die die Eigenschwingungen des Systems zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren charakterisieren.

i	\tilde{T}_i	$\tilde{\tau}_i$	\tilde{S}_1^i	\tilde{S}_2^i	\tilde{S}_i
1	38.6	80.4	43.3%	1.2%	44.5%
2	21.9	85.7	18.2%	18.3%	36.5%

Betrachten wir die erste Eigenschwingung, die durch das in Abbildung 5.3.9a gezeigte POP-Paar $(\tilde{c}_1^1, \tilde{c}_2^1)$ und die Zeitskalen $\tilde{T}_1 = 39$ Monate, $\tilde{\tau}_1 = 80$ Monate gekennzeichnet wird: dieses POP-Paar beschreibt im wesentlichen eine stehende Oszillation, denn das zweite Muster \tilde{c}_2^1 (dünne Linie) ist gegenüber dem ersten \tilde{c}_1^1 (dicke Linie) vernachlässigbar klein ($\tilde{c}_2^1 \ll \tilde{c}_1^1$). Ein Vergleich der erklärten Varianzen ($\tilde{S}_1^1 = 43.3\%$, $\tilde{S}_2^1 = 1.2\%$) und die Spektren der POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^1(t)$, $\tilde{X}_2^1(t)$ in Abbildung 5.3.9c verdeutlichen, daß der Beitrag von \tilde{c}_2^1 unbedeutend ist.

Die hohe Korrelation des POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^1(t)$ mit dem SST-Index von

$$\text{cor}[\tilde{X}_1^1(t); \text{SST-Index}] = 0.89 \quad (5.3.15)$$

zeigt, daß diese Eigenschwingung die räumliche Struktur warmer und kalter ENSO-Ereignisse wiedergibt. Eine halbe Periode der Eigenschwingung von $\tilde{T}_1/2 =$

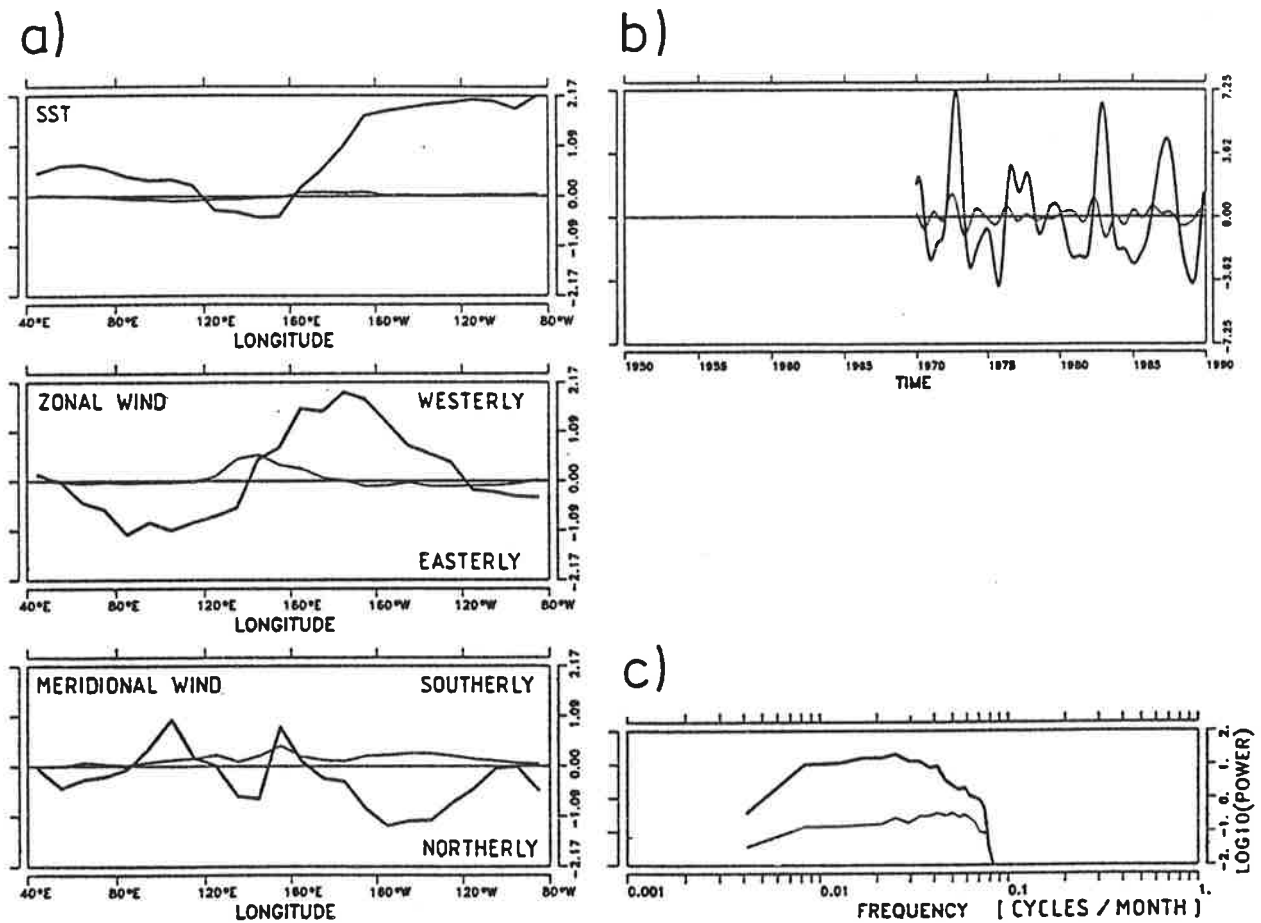


Abbildung 5.3.9: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren an die äquatorialen Daten angepaßt. Gezeigt sind von der ersten Eigenschwingung des Systems mit den Zeitskalen $\tilde{T}_1 = 39$ Monate, $\tilde{\tau}_1 = 80$ Monate werden a) die Muster \tilde{c}_1^1 (dicke Linie) und \tilde{c}_2^1 (dünne Linie), b) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^1(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^1(t)$ (dünne Linie) sowie c) deren Spektren.

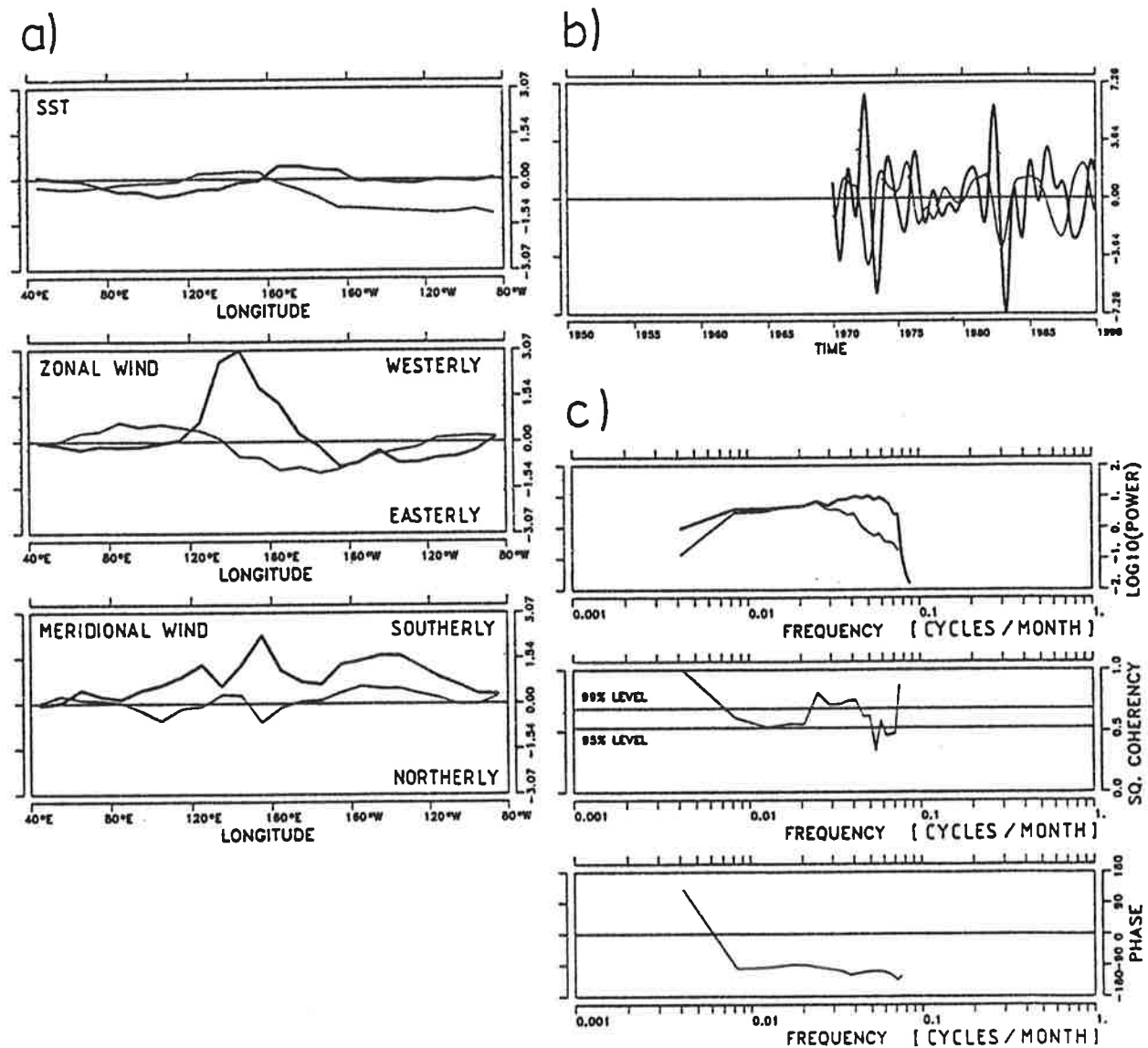


Abbildung 5.3.10: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren an die äquatorialen Daten angepaßt. Gezeigt sind von der zweiten Eigenschwingung des Systems mit den Zeitskalen $\tilde{T}_2 = 22$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 86$ Monate werden a) die Muster \tilde{c}_1^2 (dicke Linie) und \tilde{c}_2^2 (dünne Linie), b) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^2(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^2(t)$ (dünne Linie) sowie c) deren Kreuzspektralanalyse (Spektren (oberste Abbildung), Kohärenz (mittlere Abbildung) und Phase (unterste Abbildung)).

19 Monaten entspricht der mittleren Übergangszeit zwischen warmen und kalten bzw. kalten und warmen Ereignissen (vgl. Tabelle 5.2.2 und Abschnitt 5.2g).

Ein warmes Ereignis zeigt eine kräftige Erwärmung der Meeresoberfläche im zentralen und östlichen Pazifik, die begleitet wird von einer Abkühlung im Westpazifik, einer Erwärmung im Indischen Ozean und anomalen Nordwinden im Zentralpazifik. Die gleichzeitig auftretenden kräftigen Westwindanomalien im zentralen Pazifik und die Ostwindanomalien im Indischen Ozean beschreiben eine riesige Zonalwindschaukel, deren Schwingung an die von Walker und Bliss (1932) beschriebene Druckschaukel der Southern Oscillation erinnert (Kapitel 5.1).

Das in Abbildung 5.3.10a gezeigte POP-Paar $(\tilde{c}_1^2, \tilde{c}_2^2)$ gibt die räumliche Struktur an, die die zweite, schnellere Eigenschwingung mit der Periode von $\tilde{T}_2 = 22$ Monaten und der $1/e$ -Abklingzeit von $\tilde{\tau}_2 = 86$ Monaten kennzeichnet. Die hohe Kohärenz der Koeffizienten $\tilde{X}_1^2(t)$, $\tilde{X}_2^2(t)$ und die Phasenverschiebung um -90° (Abbildung 5.3.10c) bestätigen die Interpretation von $(\tilde{c}_1^2, \tilde{c}_2^2)$ als Musterpaar eines Oszillators nach Kapitel 2.11.

Das Muster \tilde{c}_2^2 kennzeichnet den Zustand eines sich abschwächenden kalten Ereignisses, wie wir aus einem Vergleich mit dem Muster \tilde{c}_1^1 der ersten Eigenschwingung sehen (Abbildung 5.3.9a, dicke Linie). Nach einer Zeit von $\tilde{T}_2/4 = 5.5$ Monaten $[\tilde{c}_2^2 \rightarrow \tilde{c}_1^2]$ sind die SST-Anomalien im ganzen Untersuchungsgebiet verschwunden. Die schwachen Westwindanomalien über dem Indischen Ozean wanderten derweil stark anwachsend ostwärts in den Westpazifik. Gleichzeitig treten im Indischen Ozean und dem gesamten Pazifik Windanomalien aus südlicher Richtung auf. Verfolgen wir den Zyklus der zweiten Eigenschwingung weiter, so erkennen wir nach weiteren $\tilde{T}_2/4 = 5.5$ Monaten $[\tilde{c}_1^2 \rightarrow -\tilde{c}_2^2]$, daß sich im zentralen und östlichen Pazifik eine Erwärmung der Meeresoberfläche aufbaut und die Westwindanomalien abgeschwächt den zentralen Pazifik erreicht haben. Die Wanderung der anomalen Westwinde setzt sich weiter fort bis in den Ostpazifik $[-\tilde{c}_2^2 \rightarrow -\tilde{c}_1^2]$.

Durch eine Kreuzspektral- und Korrelationsanalyse der EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ wurde in Abschnitt b) ein Oszillator identifiziert. Dieser Oszillator entspricht der hier beschriebenen zweiten Eigenschwingung, denn die Muster-Paare $(\tilde{e}_2, -\tilde{e}_1)$ (Abbildungen 5.3.1) und $(\tilde{c}_1^2, \tilde{c}_2^2)$ (Abbildung 5.3.10a) gleichen einander, und die Perioden $\tilde{T} = 26$ Monate und $\tilde{T}_2 = 22$ Monate werden konsistent geschätzt.

i) Die Vorhersagegüte des Zustandsraummodells zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren

Uns interessiert nun die Fähigkeit des Zustandsraummodells zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren den SST-Index vorherzusagen (vgl. Abschnitt e). Abbildung 5.3.11 zeigt die Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau)$ und die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau)$ der Modellvorhersagen (durchgezogene Linie) und der einfachen Persistenzvorhersage (gestrichelte Linie).

Die Modellvorhersagen über einen Zeitraum von mehr als einen Monat ($\tau > 1$) sind der Persistenzvorhersage überlegen. Dies belegt sowohl die Korrelationsgüte $S_{\text{cor}}(\tau)$ als auch die relative Abweichung $S_{\text{rrmse}}(\tau)$. Die Verbesserung gegenüber den Vorhersagen des Zustandsraummodells eines Oszillators (Abbildung 5.3.6) ist noch deutlicher. Über einen Zeitraum bis zu sieben Monaten ($\tau \leq 7$) liegt für das hier betrachtete Modell die Korrelationsgüte oberhalb von 0.6 ($S_{\text{cor}}(\tau) > 0.6$) und die relative Abweichung unterhalb von Eins ($S_{\text{rrmse}}(\tau) < 1.0$). Wir sehen, daß das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren die ENSO-Dynamik gut erfaßt.

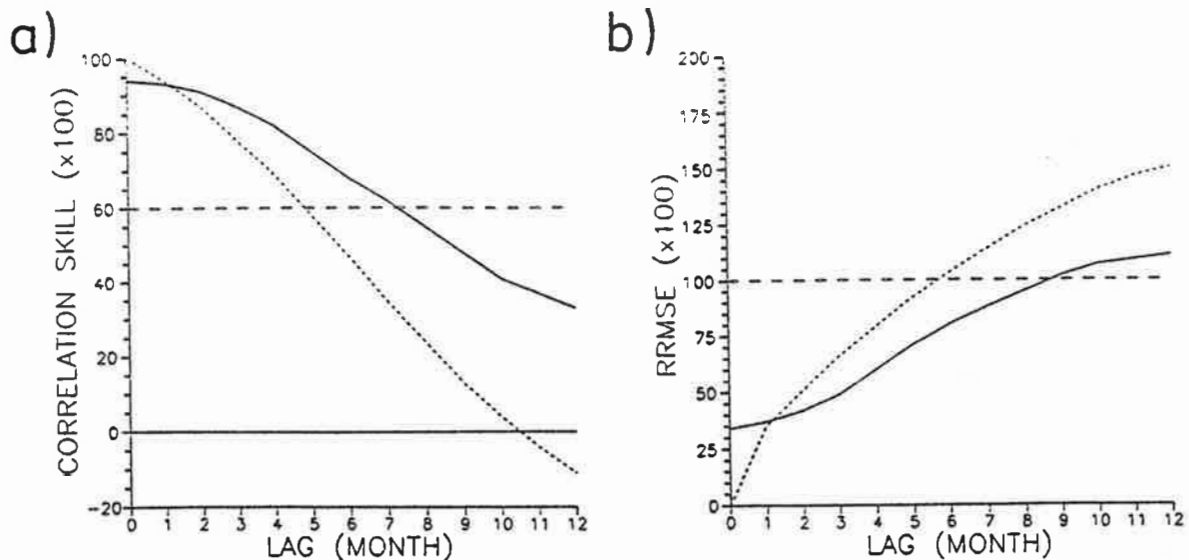


Abbildung 5.3.11: a) Die Korrelationsgüte $\tilde{S}_{\text{cor}}(\tau)$ und b) die relative Abweichung $\tilde{S}_{\text{rrmse}}(\tau)$ der Vorhersagen des SST-Index durch die zwei linear gekoppelten, stehenden Oszillatoren (durchgezogene Linien) und durch die Persistenzvorhersagen (gestrichelte Linien).

j) Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren

Das Zustandsraummodell der beiden stehenden Oszillatoren (5.3.11,12), das in Abschnitt g) betrachtet wurde, haben wir in Abschnitt h) durch einen linearen Wechselwirkungsterm (5.3.13) erweitert. In diesem Abschnitt wird getestet, ob für die Wechselwirkung der Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ (Abbildung 5.3.8) der unabhängigen, stehenden Oszillatoren mit den Mustern \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 (Abbildung 5.3.7) auch nichtlineare Terme von Bedeutung sein können.

Mit dem Test auf Linearität, der in Kapitel 3.2 eingeführt wurde, testen wir, ob die Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$ bzw. $\tilde{X}_2(t)$ auf einem linearen Prozeß beruhen. Dabei werden dieselben Parameter gewählt wie bei den Beispielen in Kapitel 3.2. Der Test wird auch hier auf der Grundlage der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 durchgeführt. Tabelle 5.3.4 faßt die Testergebnisse zusammen.

Die Nullhypothese, die Zustandsvariable $\tilde{X}_1(t)$ beruhe auf einem linearen Prozeß, wird nicht verworfen, denn die geschätzte Testgröße von $\tilde{T}^2 = 1.94$ liegt weit unter dem 5%-Signifikanzniveau von $T^2 = 8.94$. Der Schätzwert $\tilde{T}^2 = 9.41$ für die Zustandsvariable $\tilde{X}_2(t)$ liegt über dem 5%-Signifikanzniveau. Der Prozeß, der die Dynamik von $\tilde{X}_2(t)$ beschreibt, ist demnach wahrscheinlich nichtlinear.

Die Zustandsvariable $\tilde{X}_1(t)$ und der gefilterte SST-Index (Filtercharakteristik (12/16/96/108)) sind fast identisch ($\text{cor}[\tilde{X}_1(t); \text{SST-Index}] = 0.94$). Der Test auf Linearität von $\tilde{X}_1(t)$ kann deshalb mit dem des SST-Index (Abschnitt 5.2d) verglichen werden. Wir sehen, daß der Linearitätstest für den Zeitraum von 1970 bis 1989 ähnlich ausfällt wie für die Jahre 1950 bis 1989 (Tabelle 5.2.4).

Tabelle 5.3.4: Test auf Linearität:
die Schätzwerte \tilde{T}^2 und die Wahrscheinlichkeiten $P(T^2 < \tilde{T}^2)$ bzgl. der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 für die Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren.

	\tilde{T}^2	$P_{\text{asym}}(T^2 < \tilde{T}^2)$
$\tilde{X}_1(t)$	1.94	68.7%
$\tilde{X}_2(t)$	9.41	95.3%

Mit dem Test auf Linearität können wir nur auf nichtlineare Wechselwirkungen der Zustandsvariablen $X_\mu(t)$ mit sich selbst testen. Deshalb soll ein weiterer Test auf Linearität durchgeführt werden, der auch mögliche nichtlineare Wechselwirkungen zwischen den Zustandsvariablen $X_1(t)$ und $X_2(t)$

berücksichtigt. Dazu verwenden wir die Tripelkorrelationen

$$t_{\mu\nu\sigma} = \frac{\langle X_{\mu}(t)X_{\nu}(t)X_{\sigma}(t) \rangle}{\sqrt{\text{var}[X_{\mu}(t)]\text{var}[X_{\nu}(t)]\text{var}[X_{\sigma}(t)]}} \quad (5.3.15)$$

als Testgrößen. Wird die Dynamik der Variablen $X_{\mu}(t)$ durch einen linearen Prozeß beschrieben, den ein Gaußsches weißes Rauschen antreibt, so sind die $t_{\mu\nu\sigma}$ identisch Null. Die Verteilung der Testgrößen $t_{\mu\nu\sigma}$ wird durch Monte-Carlo-Simulationen approximiert.

In Tabelle 5.3.5 sind die Ergebnisse dieses Linearitätstests zusammengefaßt. Die Verteilungen der Testgrößen $t_{\mu\nu\sigma}$ beruhen auf 500 Monte-Carlo-Simulationen des Zustandsraummodells (5.3.11,12) der zwei linearen, unabhängigen, stehenden Oszillatoren, das durch Gaußsches weißes Rauschen angetrieben wurde ($\varepsilon \sim \text{GWN}(0, R)$, $\eta \sim \text{GWN}(0, Q)$). Aufgrund dieses Tests schließen wir, daß der Prozeß der Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ nichtlinear ist; auch die Wechselwirkung zwischen $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ ist nichtlinear.

Testgröße	\tilde{t}	$P_{\text{sim}}(t < \tilde{t})$	$t_{<95\%}$	$t_{>95\%}$
t_{111}	0.054	100%	-0.015	0.014
t_{112}	0.007	83%	-0.012	0.014
t_{122}	0.045	100%	-0.011	0.010
t_{222}	0.015	97%	-0.014	0.013

Tabelle 5.3.5: Test auf Linearität: die Schätzwerte \tilde{t} und die Wahrscheinlichkeiten $P(t < \tilde{t})$ bzgl. der simulierten Verteilung der Tripelkorrelationen $t_{\mu\nu\sigma}$, $\mu, \nu, \sigma = 1, 2$, der Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren. Innerhalb des Intervalls $[t_{<95\%}, t_{>95\%}]$ liegen 90% der simulierten Werte von t .

Die Ergebnisse der beiden Tests weisen darauf hin, daß die Dynamik der Zustandsvariablen auch durch nichtlineare Terme beeinflusst wird. Jedoch konnte keine nichtlineare Erweiterung der Modellfunktion (5.3.12+13) gefunden werden. Es ergaben sich z.B. für zusätzliche kubische Terme sehr kleine, mit Null verträgliche Parameter. Auch die Vorhersagegüte verbesserte sich durch diese Erweiterung nicht gegenüber dem Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren.

k) Zusammenfassung

In diesem Kapitel 5.3 wurden die äquatorialen monatlichen Anomalien der Meeresoberflächentemperatur (SST) und der zonalen und meridionalen Komponente

der bodennahen Windgeschwindigkeiten (u , v) im Bereich des Indischen Ozeans und des Pazifik analysiert.

Wir fanden, daß das ENSO-Phänomen als eine Überlagerung von zwei PIPs aufzufassen ist, die beide in erster Ordnung eine räumlich stehende Oszillation beschreiben (Abschnitt *h*). Mit dem ersten PIP, das 45.6% der Varianz der Beobachtungen erfaßt, ist die fundamentale Oszillation des ENSO mit einer Periode von drei Jahren ($\tilde{T}_1 = 34$ Monate) verbunden. Das zweite PIP erklärt 18.5% der Varianz. Die zugehörige Schwingung hat eine Periode von zwei Jahren ($\tilde{T}_2 = 22$ Monate).

Mit einem linearen Kopplungsterm wurde die Wechselwirkung der beiden Oszillatoren modelliert (Abschnitt *i*). Dabei zeigt sich, daß die Wechselwirkung nur in eine Richtung wirkt: die schnellere, zweijährige Oszillation beeinflusst die langsamere, dreijährige Oszillation. Die Dynamik der beiden PIPs selbst und auch die Wechselwirkung untereinander ist nichtlinear. Das zeigen die in Abschnitt *j*) durchgeführten Tests auf Linearität. Eine nicht-lineare Erweiterung der Modellfunktion (5.3.12+13) konnte jedoch nicht gefunden werden.

Das linear gekoppelte System der zwei stehenden Oszillationen kann durch zwei Eigenschwingungen veranschaulicht werden:

Die erste Eigenschwingung beschreibt eine stehende Oszillation in SST, u und v mit einer Periode von $\tilde{T}_1 = 39$ Monaten. Eine halbe Periode ($\tilde{T}_1/2 = 19$ Monate) entspricht der mittleren Übergangszeit zwischen warmen und kalten bzw. kalten und warmen Ereignissen. Die räumliche Struktur gleicht dem bekannten ENSO-Muster und stimmt mit dem „composite“ der Übergangsphase („transition phase“) eines warmen Ereignisses von Rasmusson und Carpenter (1982) überein. Rasmusson und Carpenter untersuchten SST-, u - und v -Anomalien über dem Pazifik zwischen 30°N - 30°S und 100°E - 70°W . Sie bestimmten das composite der Übergangsphase als Mittel der Monate August bis Oktober der Jahre 1951, 1953, 1957, 1965, 1969 und 1972.

Die zweite Eigenschwingung hat eine Periode von $\tilde{T}_2 = 22$ Monaten. Sie ist gekennzeichnet durch ein ostwärts wanderndes Signal der zonalen Windanomalien. Ausgehend vom Indischen Ozean erreicht es nach ca. 16 Monaten den Ostpazifik. Besonders verstärkt wird das Signal im westlichen Pazifik (120°E - 180°), einer Region, die für den Beginn eines ENSO-Ereignisses von besonderer Bedeutung ist [Rasmusson und Carpenter (1982)].

Zusammenfassend ergibt sich danach folgendes Bild:

- Die Dynamik der SST-Anomalien entspricht einer stehenden, dreijährigen Oszillation.
- Der anomale Zonalwind u erscheint als Überlagerung einer stehenden, dreijährigen Oszillation, die eine Schaukel zwischen dem Indischen Ozean und dem Pazifik beschreibt, und einer ostwärts wandernden, zweijährigen Oszillation.
- Der anomale Meridionalwind v setzt sich aus den zwei Oszillatoren zusammen, die beide im wesentlichen als stehend erscheinen.

Barnett (1983) fand für die zonalen Windanomalien ebenfalls die Überlagerung einer stehenden und wandernden Oszillation. Er analysierte die u -Anomalien zwischen 10°N - 10°S und 30°E - 70°W für die Jahre 1952 bis 1978 mit der Methode der komplexen EOFs.

Die POPs der zwei Eigenschwingungen sind nicht linear unabhängig, sondern sie lassen sich als Linearkombination der Muster der beiden linear gekoppelten, stehenden Oszillatoren darstellen (Abschnitt 2.11). Diese Entartung der POPs findet bei Barnett (1983) ihre Entsprechung darin, daß er die Dynamik der zonalen Windanomalien allein aus der ersten komplexen Eigenfunktion ableitet.

Durch die Überlagerung der ersten und zweiten Eigenschwingung der zonalen Windanomalien kann der schnelle Übergang von östlichen zu westlichen Windanomalien westlich der Datumslinie erklärt werden, wie er von Rasmusson und Carpenter (1982) zu Ende des Jahres vor einem warmen Ereignis beobachtet wird.

5.4 GLOBALE MONATLICHE ANOMALIEN DES LUFTDRUCKES AUF MEERESHÖHE ZWISCHEN 30°N UND 30°S

a) Die Daten

Den Analysen dieses Kapitels liegt ein globaler (30°N-30°S) Datensatz monatlicher Anomalien des Luftdruckes auf Meereshöhe (SLP) für die Jahre von 1956 bis 1988 zugrunde. Dieser Datensatz stammt wie die SST-, u- und v-Daten von Barnett. Die Daten befinden sich auf einem $5^\circ \times 10^\circ$ Gitter. Verwendet wurden die Daten, die auf den Breitenkreisen von 27.5°N, 17.5°N, 7.5°N, 2.5°N, 2.5°S, 7.5°S, 17.5°S und 27.5°S liegen. Eine Beschreibung der Daten findet sich in Barnett (1985). Analysiert werden wiederum die Abweichungen vom Monatsmittel des untersuchten Zeitraumes, von denen der lineare Trend abgezogen wurde. Die Daten wurden gefiltert (Filtercharakteristik (12/16/96/108)) und so skaliert, daß die Varianz jeder einzelnen Zeitreihe gleich ist. Abbildung 5.4.1 gibt einen Überblick über das Untersuchungsgebiet.

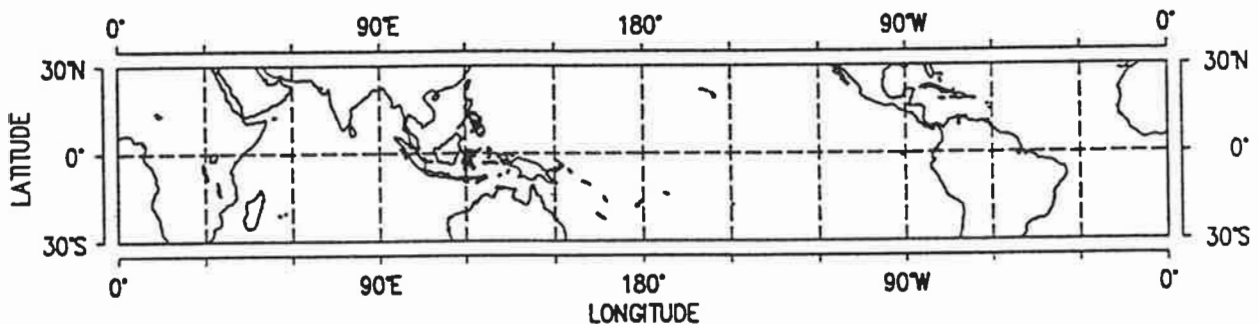


Abbildung 5.4.1: Das Untersuchungsgebiet im Überblick

b) Die EOF-Analyse

Die zeitliche Entwicklung der ersten EOF \tilde{e}_1 , die 24.2% der Varianz der Beobachtungen $Y(t)$ erklärt, ist das beherrschende Signal des SLP-Feldes. Die Korrelation des EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$ (Abbildung 5.4.3a) mit dem SST-Index (Abbildung 5.2.2)

$$\text{cor}[\tilde{X}_1(t); \text{SST-Index}] = 0.85 \quad (5.4.1)$$

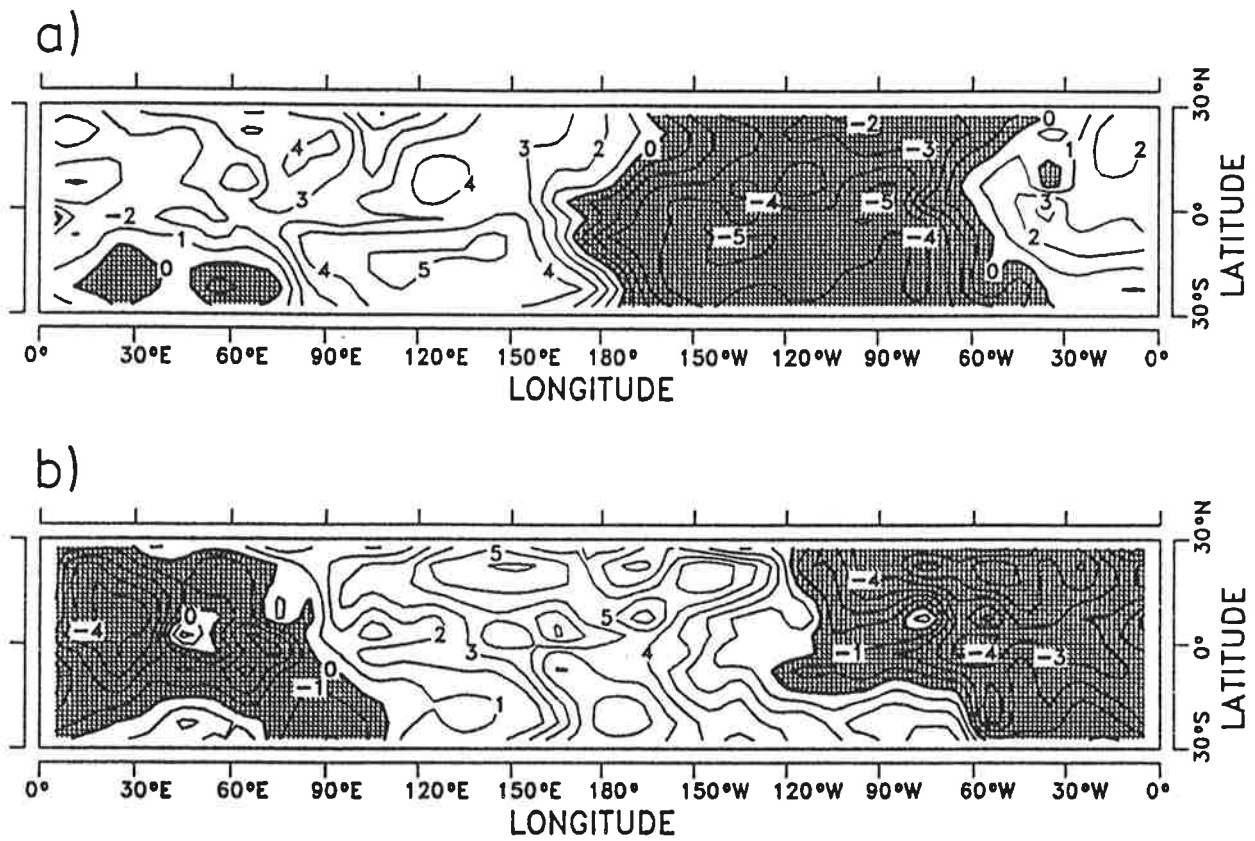


Abbildung 5.4.2: a) Die erste EOF \tilde{e}_1 und b) die zweite EOF \tilde{e}_2 der SLP-Anomalien. Die erste EOF \tilde{e}_1 erklärt 24.2% der Varianz, die zweite EOF \tilde{e}_2 8.6%.

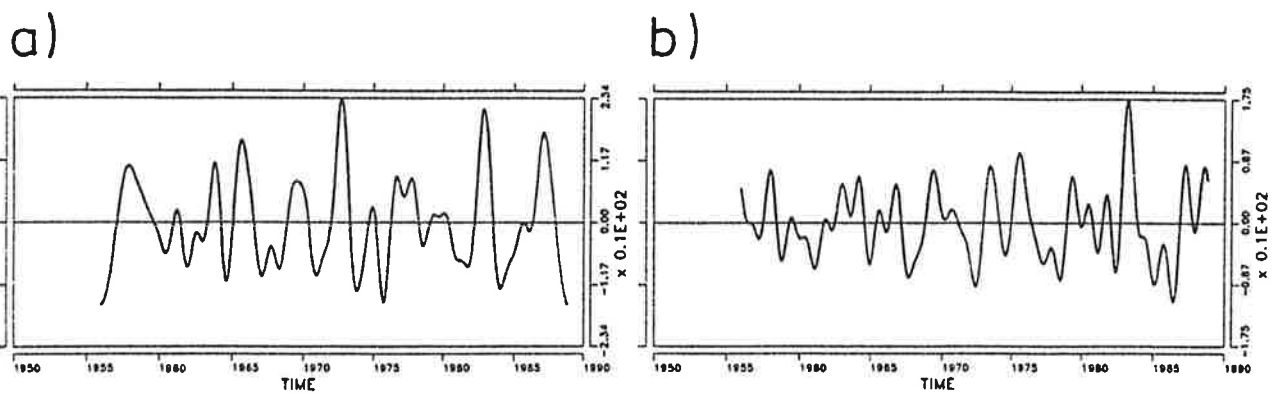


Abbildung 5.4.3: Die EOF-Koeffizienten a) $\tilde{X}_1(t)$ und b) $\tilde{X}_2(t)$ der in Abbildung 5.4.2 gezeigten EOFs \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 . Die Korrelation von $\tilde{X}_1(t)$ mit dem SST-Index (Abbildung 5.2.2) beträgt 0.85.

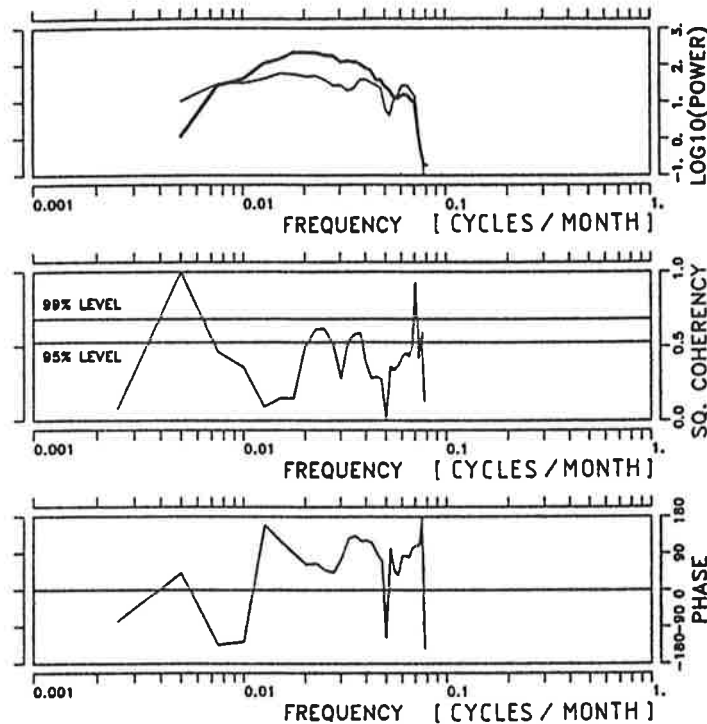


Abbildung 5.4.4: Die Kreuzspektralanalyse der EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$: die Spektren von $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ (oberste Abbildung, dicke bzw. dünne Linie) sowie die Kohärenz (mittlere Abbildung) und die Phase (unterste Abbildung) zwischen $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$.

ist hoch, d.h. $\tilde{X}_1(t)$ spiegelt das ENSO-Signal wider. Die erste EOF \tilde{e}_1 beschreibt die räumliche Struktur des Signals während eines warmen (kalten) Ereignisses (Abbildung 5.4.2a, Gebiete negativer Werte sind schraffiert):

Kennzeichnend für ein warmes Ereignis ist westlich von der Datumslinie ein ausgedehntes Gebiet anomalen Hochdrucks, das über Nordaustralien, dem östlichen Indischen Ozean und Indonesien besonders stark ausgeprägt ist. Östlich der Datumslinie befindet sich ein Gebiet anomalen Tiefdruckes mit dem Zentrum im zentralen und östlichen Südpazifik (160° - 80° W). Die Zentren entgegengesetzter Druckanomalien über Indonesien und dem Südpazifik entsprechen den Zentren des bekannten Korrelationsmusters von Berlage (1957) (Abbildung 5.4.5).

Die zweite EOF \tilde{e}_2 erklärt 8.6% der Varianz (Abbildung 5.4.2b, Gebiete negativer Werte sind schraffiert). Fast der gesamte Raum des Indischen Ozeans und des Pazifiks zeigt positive SLP-Anomalien. Die Zentren maximaler Werte liegen nördlich und südlich des Äquators im Bereich der Datumslinie (180°).

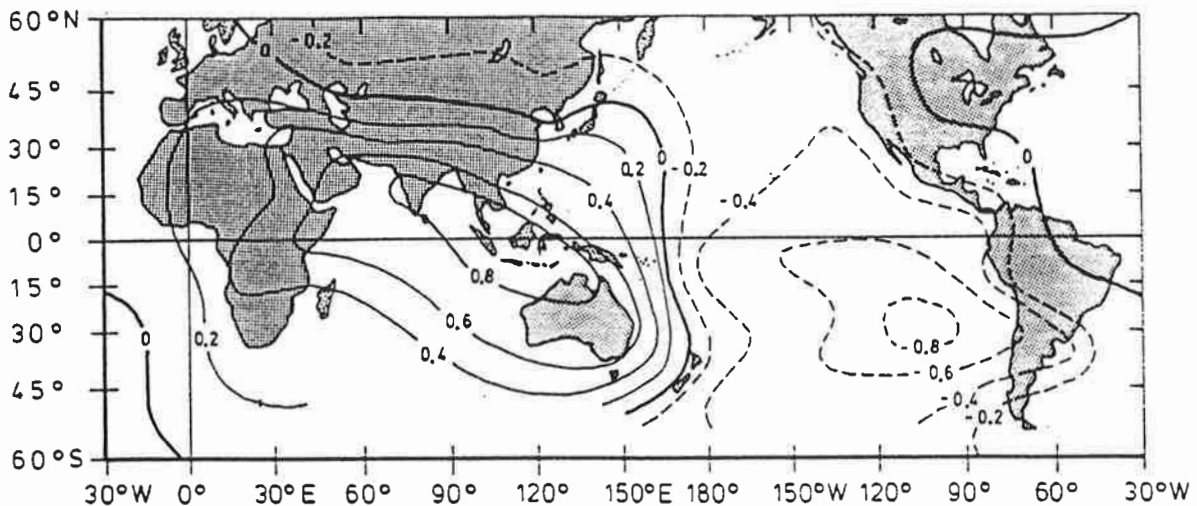


Abbildung 5.4.5: Die Korrelationen der jährlichen SLP-Anomalien mit denen von Djakarta [Berlage (1957)].

Die Zentren des Gebietes anomalen Tiefdruckes, das sich von der Westküste Amerikas über den Atlantik und Afrika bis in den westlichen Teil des Indischen Ozeans erstreckt, liegen über Mittelamerika und Zentralafrika.

Die zeitliche Entwicklung der zweiten EOF ist kleinskaliger als die der ersten EOF, wie ein Vergleich der EOF-Koeffizienten $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ zeigt (Abbildung 5.4.3). Wir schließen daraus, daß dem beobachteten SLP-Feld Prozesse mit verschiedenen Zeitskalen zugrunde liegen.

Auch die Kreuzspektralanalyse von $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ deutet auf zwei Zeitskalen hin (Abbildung 5.4.4). Für Perioden zwischen 24 und 30 bzw. 36 und 50 Monaten liegt die Kohärenz über dem 95%-Niveau. $\tilde{X}_1(t)$ führt dabei $\tilde{X}_2(t)$ mit etwa 135° Phasenverschiebung bei Perioden von 24 bis 30 Monaten bzw. mit etwa 45° Phasenverschiebung bei Perioden von 36 bis 50 Monaten.

c) Das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren

Wie wir bei den Analysen der äquatorialen SST-, u- und v-Daten im Kapitel 5.2 gesehen haben, ist das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, räumlich stehender Oszillatoren (5.3.11,12) geeignet, zwei Zeitskalen in Verbindung mit zwei dominanten Mustern zu modellieren.

Passen wir dieses Zustandsraummodell an die beobachteten SLP-Anomalien $Y(t)$ an (LSQ-Verfahren), so finden wir eine langsamere Schwingung mit der Periode $\tilde{T}_1 = 33$ Monate und der $1/e$ -Abklingzeit $\tilde{\tau}_1 = 253$ Monate und eine

schnellere Schwingung mit $\tilde{T}_2 = 28$ Monate und $\tilde{\tau}_2 = 34$ Monate. Die Zeitskalen der Schwingungen sehen wir in Tabelle 5.4.1 im Überblick. Das Muster \tilde{c}_1 (Abbildung 5.4.6a) und die erste EOF \tilde{e}_1 (Abbildung 5.4.2a) sind ähnlich, ebenso entsprechen sich das zweite Muster \tilde{c}_2 (Abbildung 5.4.6b) und die zweite EOF \tilde{e}_2 (Abbildung 5.4.2b). Die erklärte Varianz (Abschnitt 3.5) des ersten Musters \tilde{c}_1 beträgt mit $\tilde{S}_1 = 22.8\%$ mehr als das 2.5-fache der erklärten Varianz $\tilde{S}_2 = 8.3\%$ des zweiten Musters \tilde{c}_2 . Wir schließen daraus, daß die dreijährige Schwingung die fundamentale Schwingung des ENSO-Systems ist.

Tabelle 5.4.1: Die Perioden \tilde{T}_μ , die 1/e-Abklingzeiten $\tilde{\tau}_\mu$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_μ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren, $\mu=1,2$.

μ	\tilde{T}_μ	$\tilde{\tau}_\mu$	\tilde{S}_μ
1	32.7	252.	22.8%
2	27.8	33.8	8.3%

Die fundamentale Schwingung des SLP-Feldes beschreibt dieselbe Dynamik wie die fundamentale Schwingung der äquatorialen SST-, u-, v-Daten (Abschnitt 5.3g). Bezogen auf den gemeinsam untersuchten Zeitraum von 1970 bis 1988 beträgt die Korrelation der beiden Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$ 0.87 (Abbildungen 5.3.8a und 5.4.7a). Auch die geschätzten Perioden stimmen gut überein ($\tilde{T}_1 = 33$ Monate SLP, $\tilde{T}_1 = 34$ Monate für SST, u und v).

Das Signal, das der schnellere Oszillator des SLP-Feldes aufnimmt, unterscheidet sich von dem der SST-, u- und v-Daten. Die Perioden werden verschieden geschätzt ($\tilde{T}_2 = 28$ Monate für SLP, $\tilde{T}_2 = 22$ Monate für SST, u und v) und die Korrelation der beiden Zustandsvariablen $\tilde{X}_2(t)$ (Abbildungen 5.3.8b und 5.4.7b) ist mit -0.62 deutlich niedriger als die Korrelation der beiden Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$ der fundamentalen Schwingung.

d) Die Stabilität der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren

In Abschnitt 5.2h untersuchten wir die Stabilität des Systems Ozean-Atmosphäre, indem wir an den SST-Index eine Schwingung mit monatlich frei variierender Dämpfungsrate κ_j , $j=1, \dots, 12$, (5.2.8) anpaßten. Es ergab sich eine deutliche Abhängigkeit der Dämpfungsrate von der Jahreszeit. Das System Ozean-Atmosphäre ist demnach instabil von Juni bis September. Die Zeit der stärksten Dämpfung liegt zu Anfang eines Jahres im Februar.

Um Aussagen über die Stabilität der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren zu erhalten, betrachten wir das Zustandsraummodell (5.3.11,12) mit

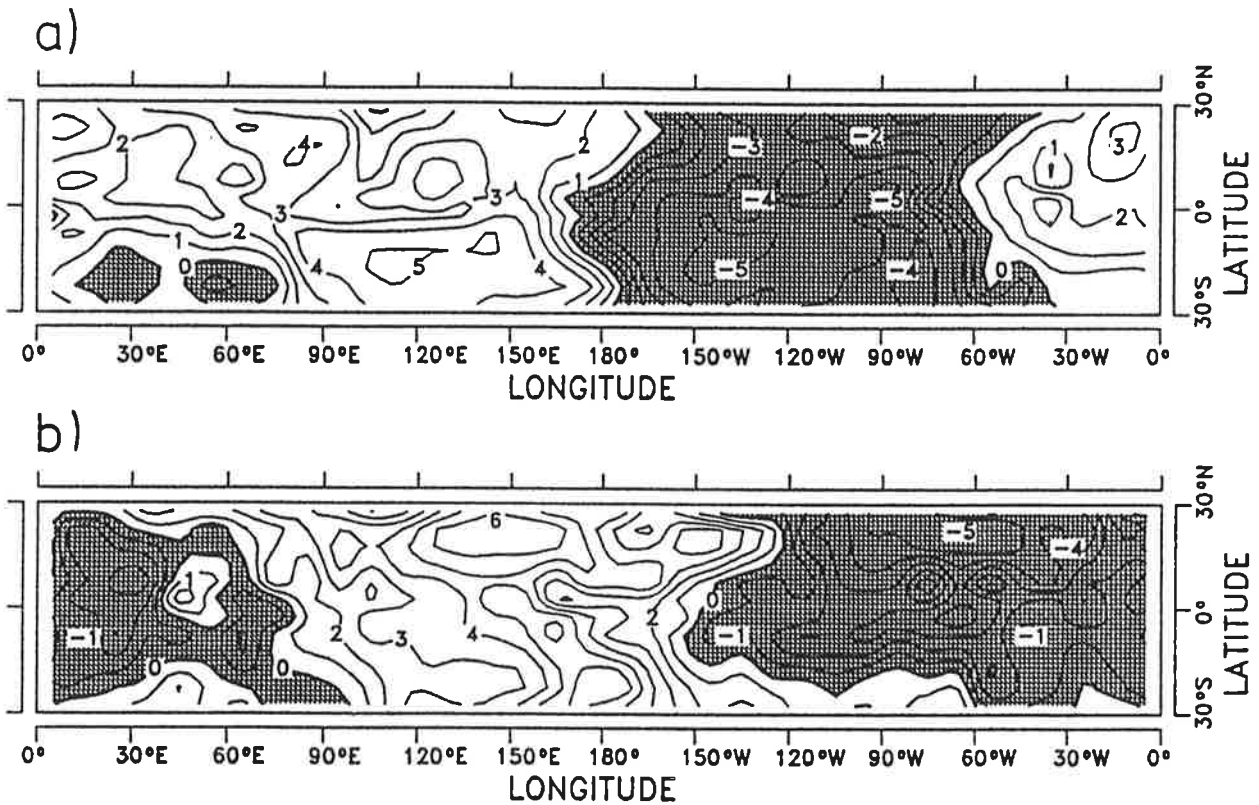


Abbildung 5.4.6: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren an die SLP-Anomalien angepaßt. Gezeigt ist a) das Muster \tilde{c}_1 der langsameren Schwingung ($\tilde{T}_1 = 33$ Monate, $\tilde{\tau}_1 = 252$ Monate) und b) das Muster \tilde{c}_2 der schnelleren Schwingung ($\tilde{T}_2 = 28$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 34$ Monate).

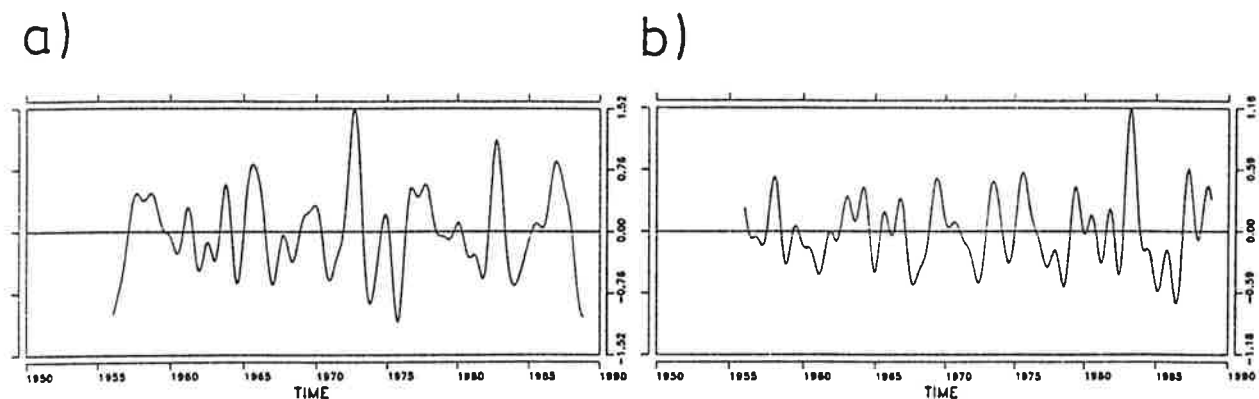


Abbildung 5.4.7: Die Zustandsvariablen a) $\tilde{X}_1(t)$ und b) $\tilde{X}_2(t)$ der in Abbildung 5.4.6 gezeigten Muster \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 zweier unabhängiger, stehender Oszillatoren.

zeitabhängigen Parametern $a_1^\mu(t)$, $a_2^\mu(t)$, $\mu=1,2$. Der Zusammenhang zwischen den Parametern $a_1^\mu(t)$, $a_2^\mu(t)$ und den monatlichen Dämpfungsraten $\kappa^\mu(t) = \kappa_j^\mu$, $j=1, \dots, 12$, ist in Anhang A.6 beschrieben.

Die Muster \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 (nicht gezeigt), die Perioden \tilde{T}_1 , \tilde{T}_2 , und die mittleren 1/e-Abklingzeiten $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ (Tabelle 5.4.2) gleichen denen der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren mit konstanter Dämpfungsrate (Abschnitt c). Die geschätzten monatlichen Dämpfungsraten $\tilde{\kappa}_j^\mu$ sind in Abbildung 5.4.8 aufgetragen. Die durchgezogene Linie entspricht der Dämpfungsrate des langsameren Oszillators ($\tilde{T}_1 = 33$ Monate), die gestrichelte Linie der des schnelleren Oszillators ($\tilde{T}_2 = 28$ Monate).

Tabelle 5.4.2: Die Perioden \tilde{T}_μ , die mittleren 1/e-Abklingzeiten $\bar{\tau}_\mu$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_μ der beiden unabhängigen, stehenden

μ	\tilde{T}_μ	$\bar{\tau}_\mu$	\tilde{S}_μ
1	32.6	238.	22.4%
2	27.9	32.1	7.4%

Oszillatoren, $\mu=1,2$, mit monatlich variierender Dämpfungsrate κ_j^μ , $j=1, \dots, 12$.

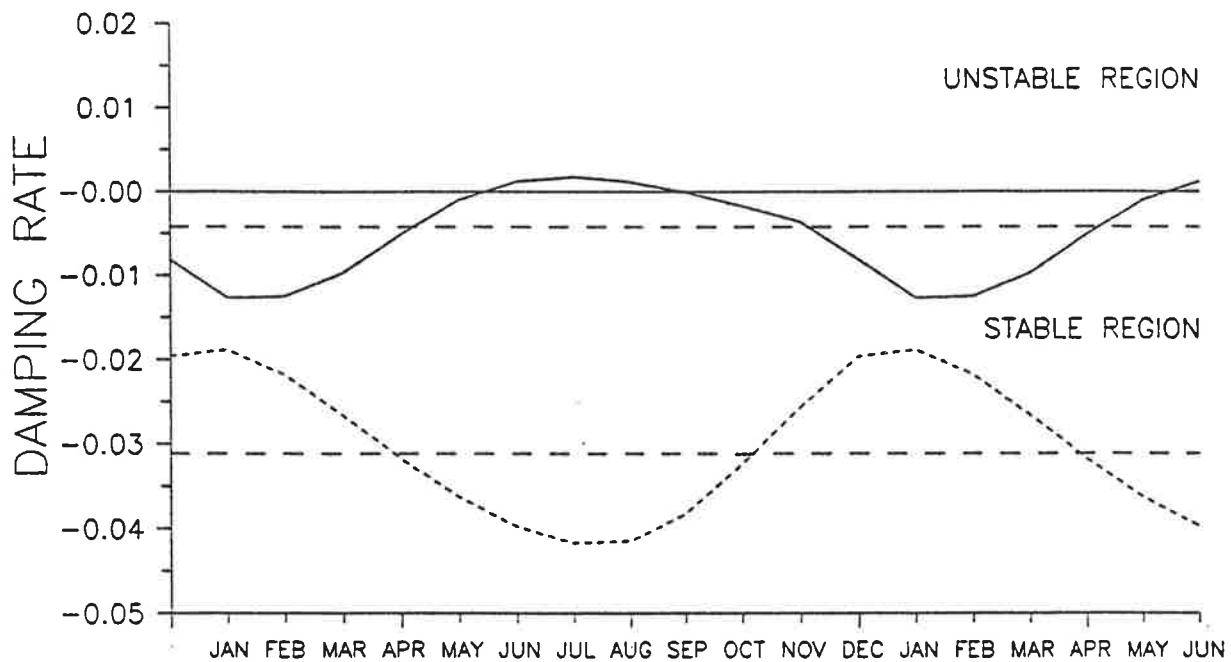


Abbildung 5.4.8: Die Schätzwerte der monatlichen Dämpfungsraten κ_j^μ , $j=1, \dots, 12$, für den langsameren ($\tilde{T}_1 = 33$ Monate, durchgezogene Linie) und den schnelleren ($\tilde{T}_2 = 28$ Monate, gestrichelte Linie) stehenden Oszillator. $\kappa_j^\mu > 0$ bedeutet ein Anfachung, $\kappa_j^\mu < 0$ eine Dämpfung.

Die Dämpfungsrate κ_j^1 des langsameren Oszillators nimmt in den Monaten Juni bis August kleine, positive Werte an, d.h. während dieser Monate reagiert der Oszillator am empfindlichsten auf Störungen. Die Monate der stärksten Dämpfung sind Januar und Februar. Das beschriebene Dämpfungsverhalten entspricht dem des SST-Index.

Die Dämpfung des schnelleren Oszillators ist das ganze Jahr hindurch stärker als die des langsameren Oszillators ($\kappa_j^2 < \kappa_k^1$, $j, k=1, \dots, 12$) und die Amplitude der Dämpfung ist größer. Die saisonale Variation ist gerade gegenläufig, und so liegt die Zeit der geringsten Dämpfung im Dezember und Januar, die Zeit der stärksten Dämpfung im Juli und August.

e) *Das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren*

Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren wird untersucht, indem die dynamische Gleichung (5.3.12) um den Term (5.3.13) einer linearen Kopplung erweitert wird.

Die geschätzten Muster \tilde{c}_1 und \tilde{c}_2 (nicht gezeigt) gleichen denen des Zustandsraummodells ohne Kopplung (Abbildungen 5.4.6). Die angepasste Modellfunktion lautet

$$\begin{aligned} X(t) = & \begin{pmatrix} 0.97 & 0 \\ 0 & 0.95 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} 0.97 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{pmatrix} [X(t-1)-X(t-2)] \\ & + \begin{pmatrix} 0 & 0.01 \\ 0.00 & 0 \end{pmatrix} X(t-1) + \begin{pmatrix} 0 & -0.10 \\ 0.03 & 0 \end{pmatrix} [X(t-1)-X(t-2)] + \eta(t). \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Wie bei den SST-, u- und v-Daten (Abschnitt 5.3h) wirkt die Änderung $[X_2(t-1)-X_2(t-2)]$ in der schnelleren Oszillation des Musters \tilde{c}_2 auf die langsamere Oszillation $X_1(t)$ des Musters \tilde{c}_1 . Die weiteren linearen Wechselwirkungen sind demgegenüber zu vernachlässigen.

Die betrachtete Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren ist linear, d.h. die Modellfunktion (5.3.12+13) entspricht einem AR(2)-Prozeß. Es ist deshalb möglich, dieses Modell durch zwei POP-Paare (c_1^i, c_2^i) darzustellen, die die Eigenschwingungen des betrachteten Zustandsraummodells charakterisieren (Kapitel 2.11). Die Schätzwerte der Periode T_i , der 1/e-Abklingzeit τ_i , der erklärten Varianz $S_{1,2}^i$ eines Musters $c_{1,2}^i$ und der erklärten Varianz S_i eines POP-Paares (c_1^i, c_2^i) faßt Tabelle 5.4.3 zusammen.

Tabelle 5.4.3: Die Periode \tilde{T}_i , die 1/e-Abklingzeit $\tilde{\tau}_i$, die erklärte Varianz $\tilde{S}_{1,2}^i$ eines Musters $\tilde{c}_{1,2}^i$ und die erklärte Varianz \tilde{S}_i eines POP-Paares $(\tilde{c}_1^i, \tilde{c}_2^i)$ der beiden Oszillatoren, $i=1,2$, die die Eigenschwingungen des Systems zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren charakterisieren.

i	\tilde{T}_i	$\tilde{\tau}_i$	\tilde{S}_1^i	\tilde{S}_2^i	\tilde{S}_i
1	38.5	81.6	21.2%	1.3%	22.5%
2	26.0	90.2	11.2%	11.3%	22.4%

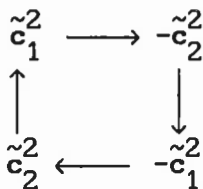
Die erste Eigenschwingung mit der Periode $\tilde{T}_1 = 39$ Monate und der 1/e-Abklingzeit $\tilde{\tau}_1 = 82$ Monate durchläuft einen Zyklus, der durch das POP-Paar $(\tilde{c}_1^1, \tilde{c}_2^1)$ aus Abbildung 5.4.9 charakterisiert wird. Das zweite Muster \tilde{c}_2^1 ist gegenüber dem ersten Muster \tilde{c}_1^1 zu vernachlässigen ($\tilde{c}_2^1 \ll \tilde{c}_1^1$). Die erklärten Varianzen ($\tilde{S}_1^1 = 21.2\%$, $\tilde{S}_2^1 = 1.3\%$) und die Spektren der POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^1(t)$, $\tilde{X}_2^1(t)$ (Abbildung 5.4.9d) verdeutlichen dies. Der POP-Koeffizient $\tilde{X}_1^1(t)$ und der SST-Index sind hoch korreliert:

$$\text{cor}[\tilde{X}_1^1(t); \text{SST-Index}] = 0.85. \tag{5.4.3}$$

Es handelt sich bei der ersten Eigenschwingung also um eine räumlich stehende Oszillation, die die Dynamik warmer und kalter ENSO-Ereignisse wiedergibt.

Ein warmes Ereignis äußert sich im SLP durch anomalen Hochdruck westlich der Datumslinie und anomalen Tiefdruck östlich der Datumslinie. Besonders ausgeprägt ist das Hochdruckgebiet über Nordaustralien, dem östlichen Indischen Ozean und Indonesien. Das Zentrum des Tiefdruckgebietes liegt im zentralen und östlichen Pazifik ($160^\circ - 80^\circ \text{W}$) südlich des Äquators. Die Schwingung dieses Musters mit der Periode $\tilde{T}_1 = 39$ Monate gleicht einer riesigen Schaukel im anomalen Druckfeld, der Southern Oscillation [Walker und Bliss (1932)].

Das in Abbildung 5.4.10 gezeigte POP-Paar $(\tilde{c}_1^2, \tilde{c}_2^2)$ gibt die räumliche Struktur an, die die zweite, schnellere Eigenschwingung mit der Periode von $\tilde{T}_2 = 26$ Monaten und der 1/e-Abklingzeit von $\tilde{\tau}_2 = 90$ Monaten kennzeichnet. Die Kohärenz der POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^2(t)$, $\tilde{X}_2^2(t)$ liegt für $f = 1/(26 \text{ Monate}) = 0.038/\text{Monat}$ auf dem 95%-Niveau. Die Phasenverschiebung beträgt jedoch etwa -135° und weicht damit deutlich von den erwarteten -90° ab. Der Zyklus



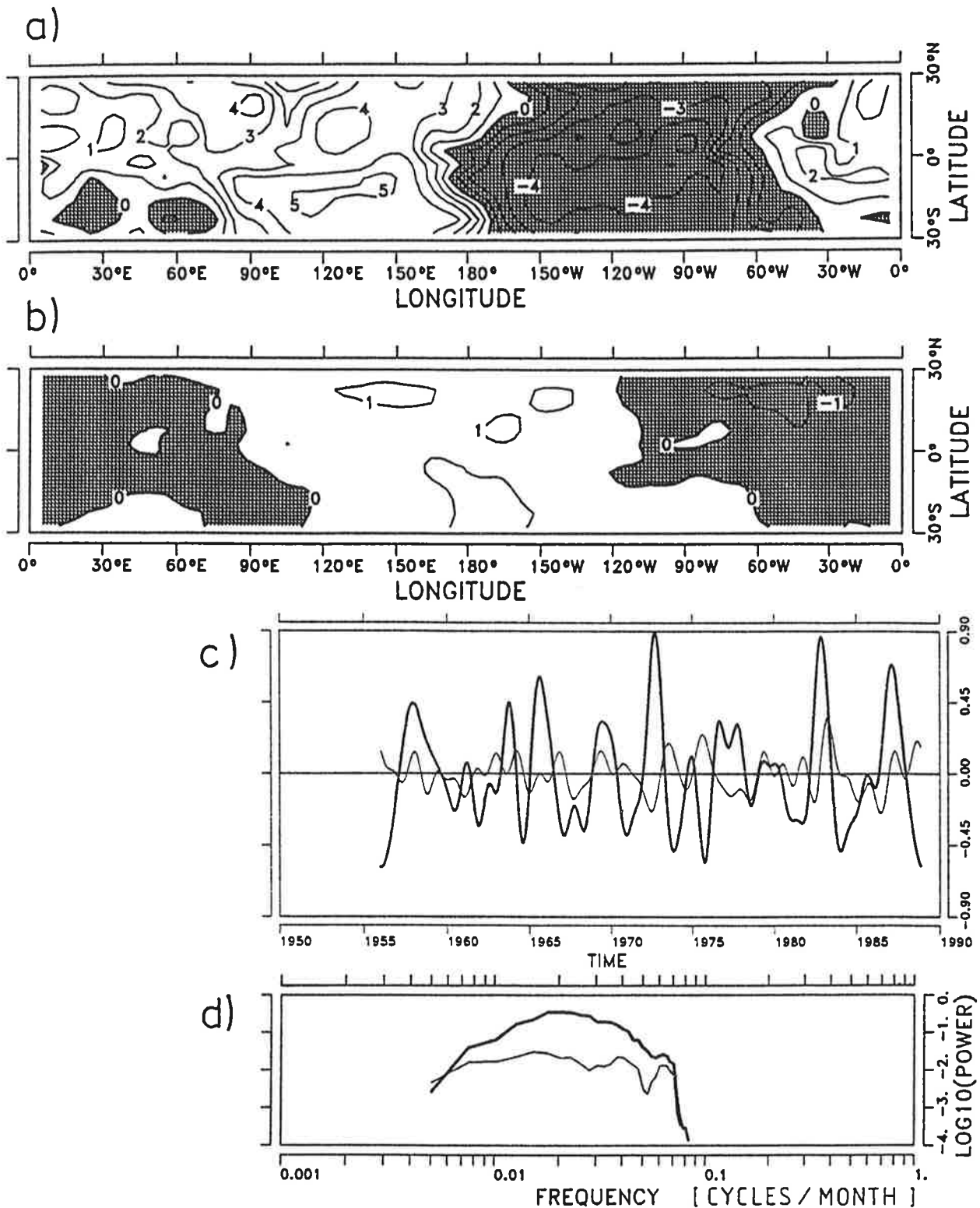


Abbildung 5.4.9: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren an die SLP-Daten angepaßt. Gezeigt sind von der ersten Eigenschwingung des Systems mit den Zeitskalen $\tilde{\tau}_1 = 39$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 82$ Monate werden die Muster a) \tilde{c}_1^1 und b) \tilde{c}_2^1 , c) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^1(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^1(t)$ (dünne Linie) sowie d) deren Spektren.

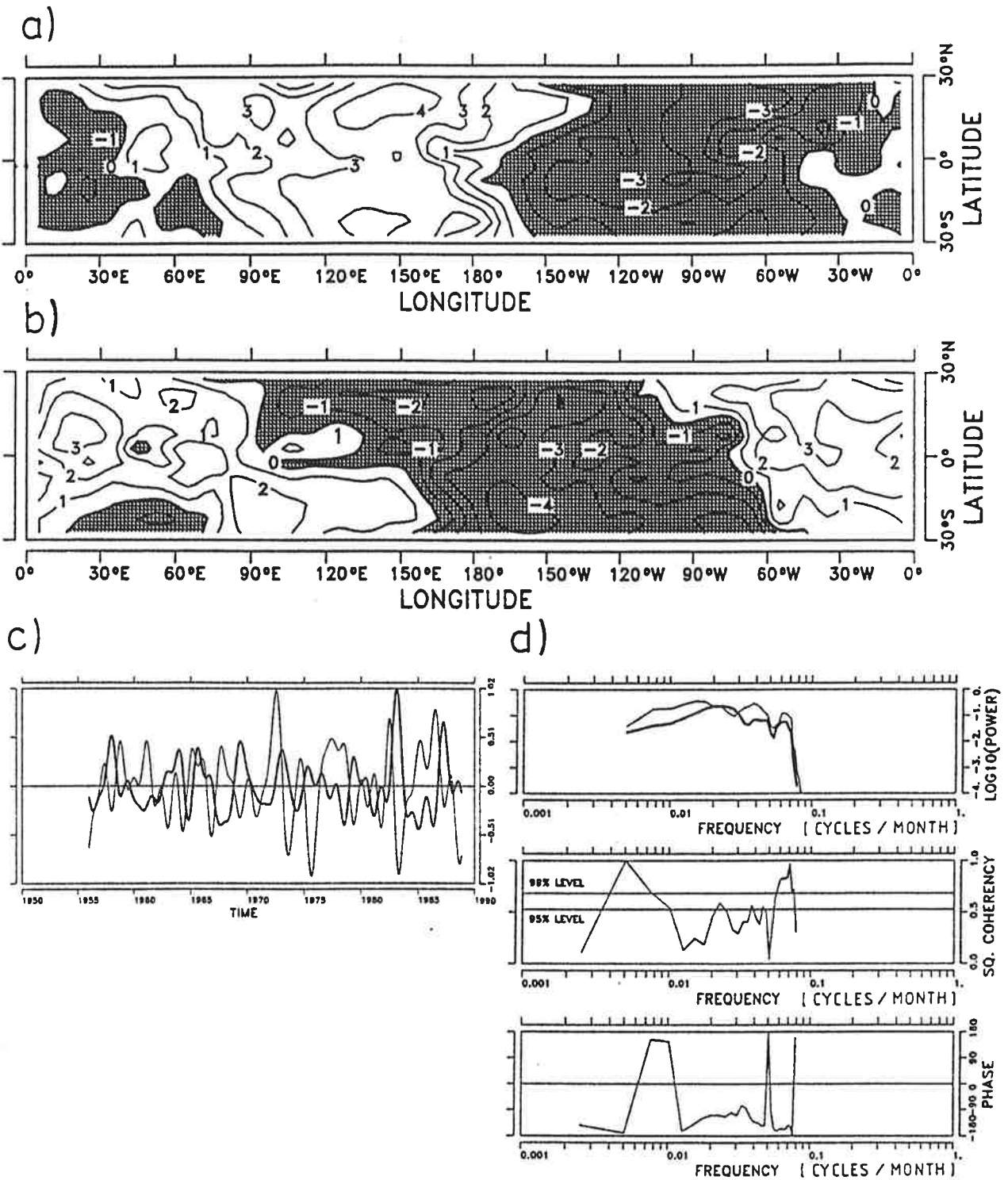


Abbildung 5.4.10: Mittels des LSQ-Verfahrens wurde das Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren an die SLP-Daten angepaßt. Gezeigt sind von der zweiten Eigenschwingung des Systems mit den Zeitskalen $\tilde{T}_2 = 26$ Monate, $\tilde{\tau}_2 = 90$ Monate werden die Muster a) \tilde{c}_1 und b) \tilde{c}_2 , c) die POP-Koeffizienten $\tilde{X}_1^2(t)$ (dicke Linie) und $\tilde{X}_2^2(t)$ (dünne Linie) sowie d) deren Kreuzspektralanalyse (Spektrien (oberste Abbildung), Kohärenz (mittlere Abbildung) und Phase (unterste Abbildung)).

wird also nicht gleichmäßig durchlaufen, wie es der Interpretation des POP-Paares $(\tilde{c}_1^2, \tilde{c}_2^2)$ nach Kapitel 2.11 entspricht. Vielmehr erfolgt der Übergang $[\pm\tilde{c}_2^2 \rightarrow \pm\tilde{c}_1^2]$ innerhalb von $(3/8)\tilde{T}_2 \approx 10$ Monaten, der Übergang $[\pm\tilde{c}_1^2 \rightarrow \mp\tilde{c}_2^2]$ dagegen innerhalb von $(1/8)\tilde{T}_2 \approx 3$ Monaten. Welcher Teil des Zyklus die asymmetrischen Übergangszeiten verursacht, kann nicht beantwortet werden. Es ergibt sich folgendes Bild:

Das Gebiet anomalen Hochdrucks über dem australischen Raum $[\tilde{c}_2^2]$ baut sich auf und wandert $[\tilde{c}_2^2 \rightarrow \tilde{c}_1^2]$ ostwärts in den westlichen Pazifik, wobei es sich aufspaltet mit einem Zentrum nördlich und einem südlich des Äquators. Danach befindet sich das Hochdruckgebiet dann im östlichen Pazifik $[-\tilde{c}_2^2]$. Der weitere Zyklus zeigt, daß diese Wanderung nach Osten sich um fast den ganzen Globus herum fortsetzt. Wir erkennen das Signal über Amerika $[-\tilde{c}_1^2]$ und dann über dem Atlantik und Afrika $[\tilde{c}_2^2]$. Zu dieser Zeit erscheint auch wieder das Hochdruckgebiet über dem australischen Raum.

f) Die Wechselwirkung der beiden stehenden Oszillatoren

Wie bei den äquatorialen Daten (Abschnitt 5.3j) testen wir, ob für die Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ (Abbildung 5.4.7) der unabhängigen, stehenden Oszillatoren mit den Mustern \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 (Abbildungen 5.4.6) nichtlineare Wechselwirkungsterme von Bedeutung sein können.

Wir wenden den Linearitätstest aus Kapitel 3.2 mit den dort verwendeten Parametern auf $\tilde{X}_1(t)$ und $\tilde{X}_2(t)$ an. Tabelle 5.4.4 zeigt die Testergebnisse. Auf dem hohen Signifikanzniveau von 2.5% wird die Nullhypothese zurückgewiesen, die Zustandsvariable $\tilde{X}_1(t)$ oder $\tilde{X}_2(t)$ beruhe auf einem linearen Prozeß.

	\tilde{T}^2	$P_{\text{asym}}(T^2 < \tilde{T}^2)$
$\tilde{X}_1(t)$	15.9	97.7%
$\tilde{X}_2(t)$	43.8	99.5%

Tabelle 5.4.4: Test auf Linearität: die Schätzwerte \tilde{T}^2 und die Wahrscheinlichkeiten $P(T^2 < \tilde{T}^2)$ bzgl. der asymptotischen Verteilung der Testgröße T^2 für die Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren.

Die Ergebnisse des Linearitätstests, der auf den Tripelkorrelationen $t_{\mu\nu\sigma}$ (5.3.15) als Testgrößen aufbaut (vgl. Abschnitt 5.3j), sind in Tabelle 5.4.5 zusammengefaßt. Auch dieser Test zeigt, daß nichtlineare Terme für die Dynamik der Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ wichtig sind.

Tabelle 5.4.5: Test auf Linearität: die Schätzwerte \tilde{t} und die Wahrscheinlichkeiten $P(t < \tilde{t})$ bzgl. der simulierten

Testgröße	\tilde{t}	$P_{\text{sim}}(t < \tilde{t})$	$t_{<95\%}$	$t_{>95\%}$
t_{111}	.0137	98%	-.0093	.0094
t_{112}	.0094	98%	-.0066	.0080
t_{122}	.0089	93%	-.0108	.0095
t_{222}	.0292	100%	-.0316	.0170

Verteilung der Tripelkorrelationen $t_{\mu\nu o}$, $\mu, \nu, o=1,2$, der Zustandsvariablen $\tilde{X}_1(t)$, $\tilde{X}_2(t)$ der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren. Innerhalb des Intervalls $[t_{<95\%}, t_{>95\%}]$ liegen 90% der simulierten Werte von t .

Obwohl die beiden Tests sehr klar auf die Bedeutung von Nichtlinearitäten für die Dynamik der beiden unabhängigen, stehenden Oszillatoren hinweisen, konnte keine nichtlineare Erweiterung der Modellfunktion (5.3.12+13) gefunden werden. Ähnlich wie bei der Analyse der äquatorialen SST-, u- und v-Anomalien waren z.B. die geschätzten Modellparameter zusätzlicher kubischer Terme klein, und die Vorhersagegüte verbesserte sich durch diese Erweiterung nicht gegenüber dem Zustandsraummodell zweier linear gekoppelter, stehender Oszillatoren.

g) Zusammenfassung

In diesem Kapitel 5.4 wurde das globale (30°N - 30°S) Feld monatlicher Anomalien des Luftdruckes auf Meereshöhe (SLP) analysiert.

Wie bei den äquatorialen SST-, u- und v-Daten im letzten Kapitel 5.3 fanden wir zwei PIPs, die beide in erster Ordnung eine räumlich stehende Oszillation beschreiben (Abschnitt c). Mit dem ersten PIP, das 22.8% der Varianz der Beobachtungen erfaßt, ist die langsamere Schwingung mit einer Periode von etwa drei Jahren verbunden ($\tilde{T}_1 = 33$ Monate). Diese Oszillation gleicht der räumlich stehenden, dreijährigen Oszillation der SST-, u- und v-Daten (Abschnitt 5.3h). In beiden Datensätzen ist diese fundamentale Oszillation des ENSO konsistent enthalten. Das zweite PIP erklärt 8.3% der Varianz. Die Periode der zugehörigen Schwingung ist mit $\tilde{T}_2 = 28$ Monate etwas länger als zwei Jahre.

Die Dämpfung der zwei stehenden Oszillatoren beschreibt eine saisonale Schwingung (Abschnitt d). Die Zeiten der stärksten und geringsten Dämpfung sind für die beiden Oszillatoren gerade entgegengesetzt.

In den Monaten Januar bis Februar wird der dreijährige Oszillator am stärksten gedämpft. Ein ENSO-Signal, das im wesentlichen mit diesem Oszillator verbunden ist, kann sich in dieser Zeit nicht entwickeln; die Vorhersagbarkeit ist minimal. Dem entspricht, daß die Persistenz des SST-Index im Monat März am geringsten ist (Abschnitt 5.2f).

Besonders starke Signale des dreijährigen Oszillators werden in den Monaten Juni bis August verursacht. Während dieser Zeit reagiert der Oszillator am empfindlichsten auf Störungen. Dies ist auch die Zeit, in der die Winde im Pazifik westlich von 160°E ein Teil des asiatischen Sommermonsuns sind [Rasmusson und Carpenter (1982), Barnett (1983)]. Das ermöglicht eine besonders starke Wechselwirkung zwischen dem Monsunsystem und den Passatwinden. Die Monate des Nordsummers sind demnach die wichtigen Monate für den Übergang zu warmen oder kalten Ereignissen [vgl. z.B. Meehl (1987)].

An Hand eines linearen Kopplungstermes wurde die Wechselwirkung der beiden Oszillatoren untersucht (Abschnitt e). Es zeigt sich, daß die schnellere, zweijährige Oszillation auf die langsamere, dreijährige Oszillation einwirkt. Die Wechselwirkung in umgekehrter Richtung ist dagegen zu vernachlässigen. Die Linearitätstests aus Abschnitt f) weisen klar darauf hin, daß nichtlineare Terme für die Dynamik der beiden PIPs eine Rolle spielen. Jedoch konnte für das SLP-Feld keine nichtlineare Erweiterung der Modellfunktion (5.3.12+13) gefunden werden.

Auch die beiden Eigenschwingungen des linear gekoppelten Systems der zwei stehenden Oszillatoren zeigen Ähnlichkeiten zu den Eigenschwingungen der äquatorialen Daten:

Die erste Eigenschwingung beschreibt eine stehende Oszillation mit einer Periode von $\tilde{T}_1 = 39$ Monaten. Die räumliche Struktur des zugehörigen Musters gleicht dem bekannten ENSO-Muster des SLP mit dem Zentrum anomalen Hochdrucks im indonesisch-australischen Raum und dem Zentrum anomalen Tiefdrucks im zentralen und östlichen Südpazifik. Die Schwingung dieses Musters entspricht der Southern Oscillation.

Die zweite Eigenschwingung mit einer Periode von $\tilde{T}_2 = 26$ Monaten beschreibt ein ostwärts wanderndes Signal. Es erscheint zunächst in dem australischen Raum und erreicht innerhalb von ca. 13 Monaten den Ostpazifik. Das Signal kann um fast den gesamten Globus herum bis nach Afrika verfolgt werden.

Für den SLP ergibt sich folgendes Bild:

- Das anomale Druckfeld erscheint als Überlagerung einer räumlich stehenden, dreijährigen Oszillation, die die Schwingung einer riesigen Schaukel zwischen dem Indischen Ozean und dem Südpazifik wiedergibt, und einer zweijährigen Oszillation, die ein ostwärts wanderndes Signal beschreibt.

Barnett (1990) fand eine langsamere, stehende Oszillation mit einer Periode zwischen 48 und 56 Monaten und eine schnellere, ostwärts wandernde Oszillation mit einer Periode zwischen 24 und 30 Monaten sowohl in der SST als auch in dem SLP. Er analysierte den kombinierten Datensatz von SST- und SLP-Anomalien der Jahre von 1951 bis 1987, die die Region von 90°N bis 40°S überdecken, indem er nach einer Filterung mit den Charakteristika (32/36/80/88) und (18/20/30/35) für beide Frequenzbereiche die komplexen EOFs bildete. Der Unterschied zwischen dem Barnettschen Filter und dem in dieser Arbeit verwendeten Filter ist gering und wird in Anhang A.5 beschrieben.

Das von Barnett gefundene zweijährig oszillierende, ostwärts wandernde Signal des SLP ist konsistent mit der hier gefundenen zweiten Eigenschwingung. Das zweijährige, wandernde Signal der SST findet durch die Analyse der SST-, u- und v-Anomalien in dem Kapitel 5.3 dagegen keine Entsprechung. Die Periode von 48 bis 56 Monaten, die Barnett für die langsamere, stehende Schwingung angibt, liegt deutlich oberhalb der hier gefundenen $\tilde{T}_1 = 39$ Monate der ersten Eigenschwingung. Der Grund dafür ist die von Barnett gewählte Filtercharakteristik (32/36/80/88). Durch diese Filterung werden die kürzeren Zeitskalen zu wenig berücksichtigt; ein Schätzwert der Periode, der am unteren Filterrand liegt, ist nicht möglich. Bei den Analysen der SST-, u- und v-Daten in Kapitel 5.3 sowie bei den Analysen der SLP-Daten in diesem Kapitel wurde eine weniger einschränkende Filterung mit der Charakteristik (12/16/96/108) verwendet. Dieses Filterfenster schließt den gesamten Bereich an Zeitskalen ein, den ENSO beinhaltet (siehe Abschnitt 5.2g).

5.5 ZUSAMMENFASSUNG DER ERGEBNISSE DER KAPITEL 5.3 UND 5.4

Fassen wir die Analyseergebnisse der Kapitel 5.3 und 5.4 zusammen:

- 1.) Die zeitliche Entwicklung des ENSO-Phänomens beinhaltet Prozesse mit zwei verschiedenen Zeitskalen (Abschnitt 5.3g und 5.4c):
 - In den Anomalien der SST, des zonalen und meridionalen Windes und des SLP wurde ein räumlich stehender Oszillator mit einer Periode von fast drei Jahren ($\tilde{T}_1 = 32-34$ Monate) identifiziert.
 - Ein zweiter räumlich stehender Oszillator mit einer Periode von etwa zwei Jahren ist in den Windanomalien u und v ($\tilde{T}_2 = 22$ Monate) sowie den SLP-Anomalien ($\tilde{T}_2 = 28$ Monate) zu finden.
- 2.) Die räumliche Struktur dieser beiden stehenden Oszillatoren ist durch zwei PIPs gegeben. Die Überlagerung und Wechselwirkung der PIPs führt zu den beobachteten warmen und kalten ENSO-Ereignissen.
- 3.) Der dreijährige Oszillator beschreibt die fundamentale Schwingung des ENSO-Systems (Abschnitt 5.3g und 5.4c), die durch die schnellere, zweijährige Schwingung beeinflusst wird (Abschnitt 5.3h und 5.4e).
- 4.) Die fundamentale Schwingung ist in den Monaten Juni bis August am empfindlichsten. Diese Jahreszeit ist für einen Übergang zu einem warmen oder kalten Ereignis besonders wichtig (Abschnitt 5.4d).
- 5.) Die Dynamik der beiden PIPs und deren gegenseitige Wechselwirkung ist nichtlinear. Eine Modellierung der Nichtlinearitäten gelang nicht (Abschnitt 5.3j und 5.4f).

Das linear gekoppelte System der beiden stehenden Oszillatoren führt auf zwei Eigenschwingungen (Abschnitt 5.3h und 5.4e):

- 1.) Die erste Eigenschwingung der SST-, u - und v - Anomalien und die erste Eigenschwingung der SLP-Anomalien entsprechen einander. Es handelt sich um ein räumlich stehendes Signal, das die Schwingung zwischen warmen und kalten ENSO-Ereignissen wiedergibt (Abbildung 5.3.9 und 5.4.9). Die Periode von $\tilde{T}_1 = 39$ Monaten ist gerade das Doppelte der mittleren Übergangszeit zwischen warmen und kalten bzw. kalten und warmen Ereignissen.
- 2.) Die zweite Eigenschwingung der SST-, u - und v -Anomalien und die zweite Eigenschwingung der SLP-Anomalien sind nicht unmittelbar vergleichbar. Beide Male handelt es sich aber um eine zweijährige Oszillation ($\tilde{T}_2 = 22$

Monate für SST, u und v , $\tilde{T}_2 = 26$ Monate für SLP), die die enge Verbindung der Windsysteme des Indischen Ozeans und des Pazifiks widerspiegeln.

Für die einzelnen Variablen ergibt sich folgendes Bild:

- 1.) Die Dynamik der SST-Anomalien ist durch eine stehende, dreijährige Oszillation gegeben.
- 2.) Der anomale Zonalwind u erscheint als Überlagerung einer räumlich stehenden, dreijährigen Oszillation und einer ostwärts wandernden, zweijährigen Oszillation.
- 3.) Der anomale Meridionalwind v setzt sich aus den zwei Oszillatoren zusammen, die beide im wesentlichen als stehend erscheinen.
- 4.) Das anomale Druckfeld SLP erscheint als Überlagerung einer räumlich stehenden, dreijährigen Oszillation und einer ostwärts wandernden, zweijährigen Oszillation.

Die bekannte Schaukel der SLP-Anomalien, deren Zentren im indonesisch-australischen Raum und im zentralen und östlichen Südpazifik liegen, findet in dieser Beschreibung sein Gegenstück in der Schaukel der Zonalwindanomalien, deren Zentren im Indischen Ozean und im Zentralpazifik liegen.

6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Ein komplexes System mit vielen Freiheitsgraden wird bei der PIP/POP-Analyse durch ein Modell mit wenig Freiheitsgraden approximiert. Von dem dynamischen Verhalten des einfachen Modells kann auf die dynamischen Eigenschaften des komplexen Systems geschlossen werden.

Das Modell, das durch die PIP/POP-Analyse an die Beobachtungen des untersuchten Systems angepaßt wird, ist ein Zustandsraummodell (Kapitel 2.1). Da der Zustand des Systems unabhängig von der Anzahl der Meßpunkte ist, an denen die Beobachtungen gegeben sind, unterscheidet das Zustandsraummodell zwischen den Beobachtungen $Y(t)$ und den Zustandsvariablen $X(t)$. Den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen gibt die Beobachtungsgleichung (2.1.3)

$$Y(t) = \underline{C}X(t) + \text{Rauschen.}$$

Die zeitliche Entwicklung des Systems wird durch die dynamische Gleichung (2.1.4)

$$X(t) = F[X(\tau < t), \alpha, t-1] + \text{Rauschen}$$

modelliert. Im allgemeinen Fall kann die Modellfunktion $F[X(\tau < t), \alpha, t-1]$ nicht-linear und zeitabhängig sein. Die Spalten der Matrix \underline{C} werden in dem Raum der Beobachtungen $Y(t)$ interpretiert und heißen deshalb auch Muster. Das zeitliche Verhalten des komplexen Systems Ozean-Atmosphäre wird oft durch die Wechselwirkung einiger weniger räumlicher Muster bestimmt. Das ENSO-Phänomen ist ein Beispiel dafür. Zustandsraummodelle mit einer dynamischen Gleichung von wenig Freiheitsgraden können daher die wesentlichen dynamischen Eigenschaften des beobachteten komplexen Systems wiedergeben. In diesem Fall bilden die Muster \underline{C} eine Basis des Unterraumes, auf den die Dynamik des Systems beschränkt ist.

Die in Kapitel 2.10 zusammengestellte Hierarchie der Schätzverfahren für Zustandsraummodelle (Tabelle 2.10.1) umfaßt zwei Arten von Verfahren. Das EOFMDL- und das EOFML-Verfahren wählen die Muster \underline{C} als die empirischen Orthogonalfunktionen (EOFs) und passen anschließend die Modellparameter α an. Das LSQ-, das ML- und das Kalman-Verfahren sind dagegen iterative Optimierungsverfahren, die die Anpassung der Muster \underline{C} und der Modellparameter α gleichzeitig durchführen.

Für große, komplexe Systeme ist von den drei Verfahren, die die Muster \underline{C} und die Modellparameter α gleichzeitig bestimmen, das LSQ-Verfahren zu bevor-

zugen (Kapitel 4). Die Muster \underline{C} und die Modellparameter α werden durch das LSQ-Verfahren gut geschätzt, die Abhängigkeit der Schätzergebnisse von den gewählten Anfangswerten ist unbedeutend und der Rechenzeitbedarf ist geringer als der des ML- oder Kalman-Verfahrens.

In Kapitel 3 wurden ein Stationaritätstest und ein Linearitätstest vorgestellt. Deren Anwendbarkeit auf kurze Zeitreihen mit etwa 500 Zeitschritten wurde durch einen Vergleich simulierter Verteilungen der Testgröße mit der asymptotischen Verteilung der Testgröße untersucht.

Für den Stationaritätstest aus Kapitel 3.1 weichen die simulierten Verteilungen der beiden Testgrößen S_α/σ^2 und S_γ/σ^2 deutlich von den asymptotischen Verteilungen ab. Hinzu kommt, daß die simulierten Verteilungen abhängig sind von dem gewählten stationären Prozeß, der simuliert wird. Der Stationaritätstest wurde dennoch auf den SST-Index angewendet, aber auf der Grundlage der Verteilungen entschieden, die auf Simulationen eines an den SST-Index angepaßten AR(2)-Prozesses beruhen (Abschnitt 5.2c).

Für den Linearitätstest aus Kapitel 3.2 stimmt die simulierte Verteilung der Testgröße T^2 mit der asymptotischen Verteilung gut überein. Der Linearitätstest kann daher auch auf kurze Zeitreihen angewendet werden.

In Kapitel 5 wurden monatliche Anomalien der Meeresoberflächentemperatur (SST) und der zonalen und meridionalen Komponente der bodennahen Windgeschwindigkeiten (u und v) entlang des Äquators im Bereich des Indischen Ozeans und des Pazifik sowie ein globales (30°N - 30°S) Feld monatlicher Anomalien des Luftdruckes auf Meereshöhe (SLP) untersucht. Aus den Analysen folgt, daß die zeitliche Entwicklung des ENSO-Phänomens durch die Überlagerung und Wechselwirkung zweier PIPs beschrieben werden kann. Die Dynamik der PIPs selbst und auch deren Wechselwirkung sind nichtlinear.

In erster Ordnung entspricht jeder der zwei PIPs einem räumlich stehenden Oszillator. Die Periode des dominierenden PIP beträgt knapp drei Jahre. Diese fundamentale Schwingung findet sich in den SST-, u -, v - und SLP-Anomalien. Die Schwingung des zweiten PIP hat eine Periode von etwa zwei Jahren, die nur in den atmosphärischen Größen, den u -, v - und SLP-Anomalien, enthalten ist. Die Wechselwirkung zwischen den zwei PIPs wirkt von der schnelleren, zweijährigen Oszillation zu der langsameren dreijährigen Oszillation. Die zweijährige, atmosphärische Oszillation ist demnach ein wesentlicher Auslöser für das Auftreten warmer oder kalter ENSO-Ereignisse. Der dreijährige Oszillator reagiert

in den Monaten Juni bis August am empfindlichsten auf solche Störungen.

Das linear gekoppelte System der beiden PIPs zeigt eine räumlich stehende Schwingung in Ozean und Atmosphäre (SST, u , v , und SLP) und eine ostwärts wandernde Schwingung in der Atmosphäre (u , v und SLP). Das räumlich stehende Signal gibt die etwa dreijährige Schwingung zwischen warmen und kalten ENSO-Ereignissen wieder. Die ostwärts wandernde Schwingung hat eine Periode von etwa zwei Jahren. Dieses Signal wandert ausgehend von dem Raum des Indischen Ozeans ostwärts in den Pazifik und spiegelt die enge Verbindung zwischen dem Monsunsystem und den Passatwinden wider. In dem globalen Feld der SLP-Anomalien kann das Signal um fast den gesamten Globus herum bis nach Afrika verfolgt werden.

A. ANHANG

A.1 GRADIENTEN DER SCHÄTZFUNKTIONEN $f(Y)$ UND $f'(Y)$

Für das in Abschnitt 2.6a) beschriebene iterative Schätzverfahren zur Bestimmung der Maximum-Likelihood-Schätzer werden im Schritt 1.2.2) die Gradienten der Gütefunktion (2.5.8)

$$f(Y) = \frac{1}{n} \left(\text{tr}[\langle \rho(t) \rho^T(t) \rangle \underline{S}^{-1}] + \ln[\det(\underline{S})] \right) \quad (\text{A.1.1})$$

bzgl. \underline{C} und \underline{B}_R benötigt. Es gilt zusätzlich (2.5.7)

$$\rho(t) = Y(t) - \underline{C}F[X(\tau < t), \alpha, t-1], \quad (\text{A.1.2})$$

sowie (2.5.5), (2.6.3)

$$\underline{S} = \underline{CQC}^T + \underline{R}, \quad \underline{R} = \underline{B}_R \underline{B}_R^T. \quad (\text{A.1.3})$$

Wir verwenden die bekannten Beziehungen für die Ableitung von Matrizen

$$\frac{\partial \underline{S}^{-1}}{\partial x} = - \underline{S}^{-1} \frac{\partial \underline{S}}{\partial x} \underline{S}^{-1}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$\frac{\partial \det(\underline{S})}{\partial x} = \det(\underline{S}) \text{tr}[\underline{S}^{-1} \frac{\partial \underline{S}}{\partial x}], \quad (\text{A.1.5})$$

wie man sie z.B. in Dhrymes (1978) findet. Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(Y)}{\partial \underline{C}} = \frac{-2}{n} \left(\underline{S}^{-1} \langle \rho(t) F^T[X(\tau < t), \alpha, t-1] \rangle \right. \\ \left. + \underline{S}^{-1} \langle \rho(t) \rho^T(t) \rangle \underline{S}^{-1} \underline{CQ} - \underline{S}^{-1} \underline{CQ} \right)^T, \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

$$\frac{\partial f(Y)}{\partial \underline{B}_R} = \frac{-2}{n} \left(\underline{S}^{-1} \langle \rho(t) \rho^T(t) \rangle \underline{S}^{-1} \underline{B}_R - \underline{S}^{-1} \underline{B}_R \right)^T. \quad (\text{A.1.7})$$

Für das in Abschnitt 2.6b) beschriebene iterative Schätzverfahren zur Bestimmung der Least-Squares-Schätzer ist in dem Schritt 1.2) das Minimum der quadratischen Funktion (2.6.4)

$$f'(Y) = \frac{1}{n} \langle \rho^T(t) \rho(t) \rangle \quad (\text{A.1.8})$$

bzgl. \underline{C} durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underline{C} \langle F[\dots] F^T[\dots] \rangle = \langle Y(t) F^T[\dots] \rangle. \quad (\text{A.1.9})$$

gegeben. Dabei steht $F[\dots]$ als Abkürzung für $F[X(\tau < t), \alpha, t-1]$. Das Gleichungssystem folgt aus der notwendigen Bedingung

$$0 = \frac{\partial f'(Y)}{\partial \underline{C}} = \frac{-2}{n} \left(\langle \rho(t) F^T[X(\tau < t), \alpha, t-1] \rangle \right)^T, \quad (\text{A.1.10})$$

die für die quadratischen Funktion $f'(Y)$ (A.1.8) auch hinreichend ist.

A.2 HERLEITUNG DES MULTIVARIATEN DURBIN-LEVINSON-ALGORITHMUS

Ein autoregressiver Prozeß p-ter Ordnung (AR(p)-Prozeß) (2.9.1)

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}(t-j) + \eta(t), \quad \eta \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{Q}}), \quad (\text{A.2.1})$$

erfüllt die Yule-Walker-Gleichungen (2.9.2,3)

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}} &= \langle \eta(t) \mathbf{X}^T(t-k) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k) - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(k-j), \quad k=1, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}} &= \langle \eta(t) \eta^T(t) \rangle = \langle \eta(t) \mathbf{X}^T(t) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(0) - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(-j). \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Ein $\text{AR}^-(p)$ -Prozeß in negativer Zeitrichtung (2.9.5)

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j^- \mathbf{X}(t+j) + \eta^-(t), \quad \eta^- \sim \text{WN}(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{Q}}^-), \quad (\text{A.2.4})$$

erfüllt die Yule-Walker-Gleichungen (2.9.6,7)

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}} &= \langle \eta^-(t) \mathbf{X}^T(t+k) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(-k) - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j^- \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(-k+j), \quad k=1, \dots, p, \end{aligned} \quad (\text{A.2.5})$$

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}}^- &= \langle \eta^-(t) [\eta^-(t)]^T \rangle = \langle \eta^-(t) \mathbf{X}^T(t) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(0) - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j^- \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(j). \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

Um die Kovarianzmatrizen $\underline{\mathbf{Q}}$ und $\underline{\mathbf{Q}}^-$ (2.9.12,13) zu berechnen, verwendet man am besten den ersten Teil der Beziehungen (A.2.3,6), damit sichergestellt wird, daß $\underline{\mathbf{Q}}$ und $\underline{\mathbf{Q}}^-$ positiv semidefinit sind.

Für die Hilfsgröße Δ (2.9.14) gilt mit der Yule-Walker-Gleichung (A.2.2):

$$\begin{aligned} \Delta &= \langle \eta(t) [\eta^-(t-p-1)]^T \rangle = \langle \eta(t) \mathbf{X}^T(t-p-1) \rangle \\ &= \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(p+1) - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{C}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}(p+1-j). \end{aligned} \quad (\text{A.2.7})$$

Analog folgt für die Hilfsgröße Δ^- (2.9.15) mit (A.2.5):

$$\begin{aligned}\Delta^- &= \langle \eta^-(t) [\eta(t+p+1)]^T \rangle = \langle \eta^-(t) X^T(t+p+1) \rangle \\ &= C_{xx}(-p-1) - \sum_{j=1}^p \underline{A}_j^- C_{xx}(-p-1+j).\end{aligned}\quad (\text{A.2.8})$$

Die Modellparameter des AR(p-1)- und AR⁻(p-1)-Prozesses seien bekannt:

$$C_{xx}(k) = \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{(p-1)} C_{xx}(k-j), \quad k=1, \dots, p-1, \quad (\text{A.2.2a})$$

$$C_{xx}(k-p) = \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{-(p-1)} C_{xx}(k-j), \quad k=1, \dots, p-1, \quad (\text{A.2.5a})$$

$$\underline{Q}^{-(p-1)} = C_{xx}(0) - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{-(p-1)} C_{xx}(p-j), \quad (\text{A.2.6a})$$

$$\Delta^{(p-1)} = C_{xx}(p) - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{(p-1)} C_{xx}(p-j). \quad (\text{A.2.7a})$$

Daraus leiten wir zunächst die rekursive Gleichung (2.9.8) für den AR⁺(p)-Prozeß her:

$$\underline{Q} = \underbrace{C_{xx}(k)}_{(\text{A.2.2a})} - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{(p)} C_{xx}(k-j) - \underbrace{\underline{A}_p^{(p)} C_{xx}(k-p)}_{(\text{A.2.5a})}, \quad k=1, \dots, p-1, \quad (\text{A.2.2b})$$

$$\underline{Q} = \sum_{j=1}^{p-1} \left(\underline{A}_j^{(p-1)} - \underline{A}_j^{(p)} - \underline{A}_p^{(p)} \underline{A}_j^{-(p-1)} \right) C_{xx}(k-j), \quad k=1, \dots, p-1,$$

$$\underline{A}_j^{(p)} = \underline{A}_j^{(p-1)} - \underline{A}_p^{(p)} \underline{A}_j^{-(p-1)}, \quad j=1, \dots, p-1, \quad (\text{A.2.9})$$

Als zweites leiten wir die dazugehörige rekursive Gleichung (2.9.10) her:

$$\underline{Q} = C_{xx}(p) - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{(p)} C_{xx}(p-j) - \underline{A}_p^{(p)} C_{xx}(0), \quad (\text{A.2.2c})$$

$$\underline{Q} = \underbrace{C_{xx}(p) - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{(p-1)} C_{xx}(p-j)}_{(\text{A.2.7a})} - \underline{A}_p^{(p)} \left(\underbrace{C_{xx}(0) - \sum_{j=1}^{p-1} \underline{A}_j^{-(p-1)} C_{xx}(p-j)}_{(\text{A.2.6a})} \right),$$

$$\underline{A}_p^{(p)} = \Delta^{(p-1)} [\underline{Q}^{-(p-1)}]^{-1}. \quad (\text{A.2.10})$$

Die Herleitung der Gleichungen (2.9.9,11) eines multivariaten AR⁻(p)-Prozesses ist ganz analog. Ersetzen von \underline{A}_j durch \underline{A}_j^- , $j=1, \dots, p$, und $C_{xx}(k)$ durch $C_{xx}(-k)$, $k=0, \dots, p$, für eine beliebige Ordnung p liefert den Übergang zwischen

den Yule-Walker-Gleichungen (A.2.2) \rightarrow (A.2.5). Aus dem Übergang zwischen den Gleichungen (A.2.3) \rightarrow (A.2.6) und (A.2.7) \rightarrow (A.2.8) ergeben sich die weiteren Ersetzungen von \underline{Q} durch \underline{Q}^- und Δ durch Δ^- . Damit folgt:

$$\underline{A}_j^{-(p)} = \underline{A}_j^{-(p-1)} - \underline{A}_p^{-(p)} \underline{A}_{p-j}^{(p-1)}, \quad j=1, \dots, p-1, \quad (\text{A.2.11})$$

$$\underline{A}_p^{-(p)} = \Delta^{-(p-1)} [\underline{Q}^{+(p-1)}]^{-1} \quad (\text{A.2.12})$$

A.3 TRANSFORMATION EINER QUADRATISCHEN MATRIX AUF BLOCKDIAGONALGESTALT

Eine $k \times k$ Matrix \underline{A} wie z.B. die Systemmatrix (2.11.2) eines AR(1)-Prozesses läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation

$$\underline{A}' = \underline{L}^{-1} \underline{A} \underline{L} \quad (\text{A.3.1})$$

auf Blockdiagonalgestalt

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix} (\because) & & & 0 \\ & \diagdown & & \\ & & (\because) & \\ 0 & & & (\cdot) \diagdown (\cdot) \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.2})$$

bringen. Voraussetzung dafür ist, daß alle (komplexen) Eigenwerte der Matrix \underline{A} verschieden sind.

Um die Transformationsmatrix \underline{L} herzuleiten, gehen wir in zwei Schritten vor. Zunächst bringt man \underline{A} auf Diagonalgestalt:

$$\underline{L}_1^{-1} \underline{A} \underline{L}_1 = \text{diag} \left((\alpha_1 + i\beta_1), (\alpha_1 - i\beta_1), \dots, (\alpha_r + i\beta_r), (\alpha_r - i\beta_r), \gamma_1, \dots, \gamma_{k-2r} \right), \quad (\text{A.3.3})$$

$$\underline{L}_1 = \left((a_1 + ib_1), (a_1 - ib_1), \dots, (a_r + ib_r), (a_r - ib_r), c_1, \dots, c_{k-2r} \right). \quad (\text{A.3.4})$$

Dabei sind $[\alpha_i \pm i\beta_i, a_i \pm ib_i]$, $i=1, \dots, r$, und $[\gamma_i, c_i]$, $i=1, \dots, k-2r$, die komplex- und reellwertigen Eigenpaare der Matrix \underline{A} . Die komplexwertigen Eigenpaare treten in zueinander konjugiert komplexen Paaren auf, weil die Matrix \underline{A} reell ist.

Die so gewonnene komplexe Darstellung kann auf eine reelle transformiert werden. Mit

$$\underline{A}' = \underline{L}_2^{-1} [\underline{L}_1^{-1} \underline{A} \underline{L}_1] \underline{L}_2, \quad (\text{A.3.5})$$

$$\underline{L}_2 = \begin{pmatrix} (\because) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & (\because) & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\because) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3.6})$$

hat die Matrix \underline{A}' die gewünschte Blockdiagonalgestalt (A.3.2). Die Blöcke stehen für

$$(\because) = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, r, \quad (\text{A.3.7})$$

$$(\cdot) = \gamma_i, \quad i=1, \dots, k-2r. \quad (\text{A.3.8})$$

Die beiden Transformationen (A.3.4,6) können abschließend zusammengefaßt werden, und man erhält

$$\underline{L} = \underline{L}_1 \underline{L}_2 = \left(a_1, b_1, \dots, a_r, b_r, c_1, \dots, c_{k-2r} \right) \quad (\text{A.3.9})$$

für die gesuchte Transformationsmatrix.

A.4 EINDEUTIGE DARSTELLUNG VON OSZILLATOREN UND RELAXATOREN

Wie am Schluß von Kapitel 2.11 erwähnt, ist für eine eindeutige Darstellung der Oszillatoren und Relaxatoren im Beobachtungsraum \underline{C}' die Formulierung einiger Nebenbedingungen notwendig. Die $\underline{C}' = (c'_1, \dots, c'_{p \times m})$ ergeben sich als Linearkombination (2.11.11)

$$c'_m = \sum_{\mu=1}^m c_{\mu}^1 c'_{\mu m}, \quad m=1, \dots, p \times m, \quad (\text{A.4.1})$$

aus den Mustern \underline{C} . Die Transformationsmatrix \underline{L} wurde in dem vorherigen Kapitel A.3 hergeleitet. Die Freiheit in der Darstellung wird u.a. durch die noch offene Normierung der Eigenvektoren der Matrix \underline{A} , $a_i \pm i b_i$, $i=1, \dots, r$, und c_i , $i=1, \dots, p \times m - 2r$, verursacht. Man wähle deshalb

$$\left. \begin{aligned} 1 &= c'_{2i-1}{}^T c'_{2i-1} + c'_{2i}{}^T c'_{2i}, \\ 0 &= c'_{2i-1}{}^T c'_{2i}, \\ 0 &\leq c'_{2i-1}{}^T c'_{2i-1} - c'_{2i}{}^T c'_{2i}, \\ 0 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c'_i(2i-1) \quad \text{oder} \\ 0 &\leq c'_i(2i-1) \quad \text{für festes } i, \end{aligned} \right\} \quad i=1, \dots, r, \quad (\text{A.4.2})$$

für die Oszillatoren und

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \mathbf{c}'_{2r+i} \mathbf{c}'_{2r+i} \\ 0 &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c'_i(2r+i) \quad \text{oder} \\ 0 &\leq c'_i(2r+i) \quad \text{für festes } i, \end{aligned} \right\} i=1, \dots, p \times m - 2r, \quad (\text{A.4.3})$$

für die Relaxatoren.

Da die komplexen Eigenpaare $[\alpha_i \pm i\beta_i, a_i \pm ib_i]$, $i=1, \dots, r$, in konjugiert komplexen Paaren auftreten, ist es möglich, die Schwingungsfrequenz $\omega_i = \arctan(\beta_i/\alpha_i)$ auf

$$0 < \omega_i \leq \pi \quad (\text{A.4.4})$$

einzuschränken.

Als letztes ist noch die Reihenfolge der Oszillatoren und Relaxatoren offen. Die der Oszillatoren sei durch die Größe der Perioden

$$T_i \geq T_{i+1}, \quad i=1, \dots, r, \quad (\text{A.4.5})$$

gegeben, die der Relaxatoren durch die Größe der 1/e-Abklingzeiten

$$\tau_i \geq \tau_{i+1}, \quad i=1, \dots, p \times m - 2r. \quad (\text{A.4.6})$$

A.5 BESCHREIBUNG DES VERWENDETEN FILTERS

Um die Fluktuationen auf Zeitskalen, die nicht von Interesse sind, zu unterdrücken, können die Fourierkomponenten einer Zeitreihe entsprechend gewichtet werden. Die Gewichte des Filters, der in dieser Arbeit verwendet wurde, sind durch

$$w(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_{\min} \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\pi (\omega - \omega_{\min}) / (\omega_1 - \omega_{\min}) \right] \right) & \text{für } \omega_{\min} \leq \omega < \omega_1 \\ 1 & \text{für } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ \frac{1}{2} \left(1 - \cos \left[\pi (\omega - \omega_{\max}) / (\omega_2 - \omega_{\max}) \right] \right) & \text{für } \omega_2 < \omega \leq \omega_{\max} \\ 0 & \text{für } \omega_{\max} < \omega \end{cases} \quad (\text{A.5.1})$$

gegeben. Die Perioden $(p_{\min}/p_2/p_1/p_{\max})$ bezeichnen wir als die Charakteristik

des Filters. Dabei gilt

$$p_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}, \quad p_2 = 2\pi/\omega_2, \quad p_1 = 2\pi/\omega_1, \quad p_{\max} = 2\pi/\omega_{\min}. \quad (\text{A.5.2})$$

D.h. Fluktuationen mit Perioden unter p_{\min} bzw. über p_{\max} werden herausgefiltert. Die „Cosinus-Schwänze“ des Filters vermindern die unangenehmen Randeffekte des Rechteckfilters, den man mit der Charakteristik $p_{\min} = p_2$ und $p_1 = p_{\max}$ erhält.

Der in Kapitel 5.4 erwähnte Filter, der in der Arbeit von Barnett (1990) zur Anwendung kommt, unterscheidet sich nur durch die linearen Anstiege des Filterfensters:

$$w(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < \omega_{\min}, \\ (\omega - \omega_{\min}) / (\omega_1 - \omega_{\min}) & \text{für } \omega_{\min} \leq \omega < \omega_1, \\ 1 & \text{für } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ (\omega - \omega_{\max}) / (\omega_2 - \omega_{\max}) & \text{für } \omega_2 < \omega \leq \omega_{\max}, \\ 0 & \text{für } \omega_{\max} < \omega \end{cases} \quad (\text{A.5.3})$$

A.6 EIN UNIVARIATER AR(2)-PROZESS MIT KONSTANTER UND ZEITABHÄNGIGER

DÄMPFUNGSRATE

Der univariate AR(2)-Prozeß

$$X(t) = a_1 X(t-1) + a_2 X(t-2) \quad (\text{A.6.1})$$

beschreibt eine gedämpfte Schwingung

$$X(t) = X(t_0) \exp[\kappa_0(t-t_0)] \cos[\omega(t-t_0)] \quad (\text{A.6.2})$$

mit der Dämpfungsrate κ_0 , der 1/e-Abklingzeit $\tau = -1/\kappa_0$, der Schwingungsfrequenz ω und der Periode $T = 2\pi/\omega$. Der Anfangszustand zur Zeit t_0 ist durch $X(t_0)$ gegeben. Die Beziehungen

$$a_1 = 2 \exp[\kappa_0] \cos[\omega], \quad (\text{A.6.3})$$

$$a_2 = - \exp[2\kappa_0]. \quad (\text{A.6.4})$$

geben den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten a_1 , a_2 und den Größen κ_0 , ω .

Eine Schwingung mit einer zeitabhängigen Dämpfungsrate $\kappa(t)$ wird durch einen AR(2)-Prozeß

$$X(t) = a_1(t-1) X(t-1) + a_2(t-1) X(t-2) \quad (\text{A.6.5})$$

mit den zeitabhängigen Parametern

$$a_1(t-1) = 2 \exp[\kappa(t-1)] \cos[\omega], \quad (\text{A.6.6})$$

$$a_2(t-1) = - \exp[\kappa(t-1)+\kappa(t-2)] \quad (\text{A.6.7})$$

modelliert. Die Lösung dieses Systems ist

$$X(t) = X(t_0) \exp[K(t, t_0)] \cos[\omega(t-t_0)], \quad (\text{A.6.8})$$

mit der Dämpfung

$$K(t, t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t-1} \kappa(\tau). \quad (\text{A.6.9})$$

Der Anfangszustand zum Zeitpunkt t_0 ist wieder durch $X(t_0)$ gegeben.

Für die konstante Dämpfungsrate $\kappa(t) = \kappa_0$ ergeben sich aus (A.6.5-9) wieder die Beziehungen (A.6.1-4).

LITERATURVERZEICHNIS

- Angell, J.K.; 1981; Comparison of Variations in Atmospheric Quantities with Sea Surface Temperature Variations in the Equatorial Eastern Pacific; Mon. Wea. Rev., 109, 230-243
- Aoki, M.; 1987; State Space Modeling of Time Series; Springer-Verlag, Berlin
- Barnett, T.P.; 1983; Interaction of the Monsoon and Pacific Trade Wind System at Interannual Time Scales. Part I: The Equatorial Zone; Mon. Wea. Rev., 111, 756-773
- Barnett, T.P.; 1985; Variations in Near-Global Sea Level Pressure; J. Atmos. Sci., 42, 478-501
- Barnett, T.P.; 1990; The Interaction of Multiple Time Scales in the Tropical Climate System; preprint
- Barnett, T.P. und K. Hasselmann; 1979; Techniques of Linear Prediction, With Application to Oceanic and Atmospheric Fields in the Tropical Pacific; Rev. Geophys. Space Phys., 17, 949-968
- Berlage, H.P.; 1957; Fluctuations in the General Atmospheric Circulation of More Than One Year, Their Nature and Prognostic Value; Korte Ned. Met. Inst., Meded. Verh., 69, 1-152
- Bjerknes, J.; 1966; A Possible Response of the Atmospheric Hadley Circulation to Equatorial Anomalies of Ocean Temperature; Tellus, 18, 820-829
- Bjerknes, J.; 1969; Atmospheric Teleconnections from the Equatorial Pacific; Mon. Wea. Rev., 97, 163-172
- Bjerknes, J.; 1972; Large-Scale Atmospheric Response to the 1964-65 Pacific Equatorial Warming; J. Phys. Oceanogr., 2, 212-217
- Box, G.E.P. und G.M. Jenkins; 1970; Time Series Analysis, Forecasting and Control; Holden-Day, San Francisco
- Box, G.E.P. und D.A. Pierce; 1970; Distribution of Residual Autocorrelations in Autoregressive-Integrated Moving Average Time Series Models; J. Amer. Statist. Assoc., 65, 1509-1526
- Brockwell, P.J. und R.A. Davis; 1987; Time Series: Theory and Methods; Springer Series in Statistics, Springer-Verlag, New York
- Chitturi, R.V.; 1974; Distribution of Residual Autocorrelations in Multiple Autoregressive Schemes; J. Amer. Stat. Assoc., 69, 928-934
- Dhrymes, P.J.; 1978; Introductory Statistics; Springer-Verlag, New York
- Gantert, C.; 1989; Analyse von Zeitreihen; Diplomarbeit, Fakultät für Physik der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br.

- Gill, A.E. und E.M. Rasmusson; 1983; The 1982-83 Climate Anomaly in the Equatorial Pacific; *Nature*, 306, 229-234
- Hartung, J.; 1982; Statistik - Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik; R. Oldenbourg Verlag, München
- Harvey, A.C.; 1981a; Time Series Models; Philip Allan Publishers Ltd., Oxford
- Harvey, A.C.; 1981b; The Econometric Analysis of Time Series; Philip Allan Publishers Ltd., Oxford
- Hasselmann, K.; 1988; PIPs and POPs: The Reduction of Complex Dynamical Systems Using Principal Interaction and Oscillation Patterns; *J. Geophys. Res.*, 93, D9, 11015-11021
- Honerkamp, J.; 1990; Stochastische Dynamische Systeme - Konzepte, numerische Methoden, Datenanalysen; VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim
- Honerkamp, J. und U. Weese; 1989; State Space Models, PIPs, POPs and EOFs; preprint Thep 89/1, Fakultät für Physik der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i.Br.
- Hosking, J.R.M.; 1980; The Multivariate Portmanteau Statistic; *J. Amer. Statist. Assoc.*, 75, 602-608
- Jazwinski, A.H.; 1970; Stochastic Processes and Filtering Theory; Mathematics in Science and Engineering, Vol. 64, Academic Press, New York
- Kirchen, A.; 1988; Schätzung zeitveränderlicher Strukturparameter in ökonomischen Prognosemodellen; Athenäum Verlag, Frankfurt am Main
- McLeod, A.I. und W.K. Li; 1983; Diagnostic Checking ARMA Time Series Models Using Squared-Residual Autocorrelations; *J. Time Series Analysis*, 4, 269-273
- Meehl G.A.; 1987; The Annual Cycle and Interannual Variability in the Tropical Pacific and Indian Ocean Regions; *Mon. Wea. Rev.*, 115, 27-50
- Peña, D. und G.E.P. Box; 1987; Identifying a Simplifying Structure in Time Series; *J. Amer. Stat. Ass.*, 82, 836-843
- Perrochaud, J.B.; 1982; Bispectral Analysis of Nonlinear Systems; Master of Science dissertation; University of Southampton
- Philander, S.G.H.; 1983; El Niño Southern Oscillation phenomena; *Nature*, 302, 295-301
- Philander, S.G.H. und E.M. Rasmusson; 1985; The Southern Oscillation and El Niño; *Advances in Geophysics*, 28a, 197-215

- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling; 1986; Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing; Cambridge University Press, Cambridge
- Priestley, M.B. und T. Subba Rao; 1969; A Test for Non-Stationarity of Time-Series; J. Roy. Statist. Soc. B, 31, 140-149
- Pruscha, H.; 1989; Angewandte Methoden der Mathematischen Statistik - Lineare, loglineare, logistische Modelle; B.G. Teubner, Stuttgart
- Quinn, W.H., D.O. Zopf, K.S. Short und R.T.W. Kuo Yang; 1978; Historical Trends and Statistics of the Southern Oscillation, El Niño, and Indonesian Droughts; Fish. Bull., 76, 663-678
- Rasmusson, E.M.; 1984; El Niño: The Ocean/Atmosphere Connection; Oceanus, 27, 5-12
- Rasmusson, E.M. und T.C. Carpenter; 1982; Variations in Tropical Sea Surface Temperature and Surface Wind Fields Associated with the Southern Oscillation/El Niño; Mon. Wea. Rev., 110, 354-384
- Rasmusson, E.M. und J.M. Wallace; 1983; Meteorological Aspects of the El Niño/Southern Oscillation; Science, 222, 1195-1202
- Schlittgen, R. und B.H.J. Streitberg; 1987; Zeitreihenanalyse; zweite, erweiterte Auflage; R. Oldenbourg Verlag, München
- Schneider, W.; 1986; Der Kalmanfilter als Instrument zur Diagnose und Schätzung variabler Parameter in ökonomischen Modellen; Arbeiten zur Angewandten Statistik, Band 27, Physica-Verlag, Heidelberg
- Shumway, R.H. und D.S. Stoffer; 1982; An Approach to Time Series Smoothing and Forecasting Using the EM-Algorithm; J. Time Series Analysis, 3, 253-264
- Stoer, J.; 1983; Einführung in die Numerische Mathematik I; vierte verbesserte Auflage; Heidelberger Taschenbücher, Band 105, Springer-Verlag, Berlin
- Stoer, J., R. Bulirsch; 1978; Einführung in die Numerische Mathematik II; zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage; Heidelberger Taschenbücher, Band 114, Springer-Verlag, Berlin
- von Storch, H. und G. Hannoschöck; 1985; Statistical Aspects of Estimated Principal Vectors (EOFs) Based on Small Sample Sizes; J. Clim. Appl. Meteor., 24, 716-724
- von Storch, H., T. Bruns, I. Fischer-Bruns und K. Hasselmann; 1988; Principal Oscillation Patterns of the 30- to 60-Day Oscillation in General Circulation Model Equatorial Troposphere; J. Geophys. Res., 93, D9, 11022-11036

- von Storch. H., U. Weese und J.S. Xu; 1990; Simultaneous Analysis of Space-Time Variability: Principal Oscillation Patterns and Principal Interaction Patterns with Application to the Southern Oscillation; Z. Meteorol., 40, 99-103;
auch als Report No. 34, Max-Planck-Institut für Meteorologie, Hamburg
- Subba Rao, T. und M.M. Gabr; 1980; A Test for Linearity of Stationary Time Series; J. Time Series Analysis, 1, 145-158
- Timmer, J.; 1990; Auf dem Weg zur nichtlinearen Zeitreihenanalyse;
Diplomarbeit, Fakultät für Physik der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
i.Br.
- Trenberth, K.E.; 1976; Spatial and Temporal Variations of the Southern Oscillation; Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 102, 639-653
- Walker, G.T.; 1923; Correlation in Seasonal Variations of Weather, VIII: A Preliminary Dstudy of World Weather (World Weather I); Mem. Indian Meteor. Dept., 24, 75-131
- Walker, G.T.; 1924; Correlation in Seasonal Variations of Weather , IX: A Further Study of World Weather (World Weather II); Mem. Indian Meteor. Dept., 24, 275-332
- Walker, G.T.; 1928; World Weather III; Mem. Roy. Meteor. Soc., 2, 97-106
- Walker, G.T. und E.W. Bliss; 1930; World Weather IV; Mem. Roy. Meteor. Soc., 3, 81-95
- Walker, G.T. und E.W. Bliss; 1932; World Weather V; Mem. Roy. Meteor. Soc., 4, 53-84
- Walker, G.T. und E.W. Bliss; 1937; World Weather VI; Mem. Roy. Meteor. Soc., 4, 119-139
- Weare, B.C., A.R. Navato und R.E. Newell; 1976; Empirical Orthogonal Analysis of Pacific Sea Surface Temperatures; J. Phys. Oceanogr., 6, 671-678
- Whittle, P.; 1963; Prediction and Regulation by Linear Least-Squares Methods; The English Universities Press ltd., London;
1983; zweite Auflage; University of Minnesota, Minneapolis
- Wright, P.B.; 1984; Relationship Between Indices of the Southern Oscillation; Mon. Wea. Rev., 112, 1913-1919
- Wright, P.B.; 1985; The Southern Oscillation: An Ocean-Atmosphere Feedback System?; Bull. Amer. Meteor. Soc., 66, 398-412
- Wyrtki, K.; 1975; El Niño - The Dynamic Response of the Equatorial Pacific Ocean to Atmospheric Forcing; J. Phys. Oceanogr., 5, 572-584

- Wyrtki, K.; 1977; Sea Level During the 1972 El Niño; J. Phys. Oceanogr., 7,
779-787
- Zwiers, F. und H. von Storch; 1989; Regime Dependent Autoregressive Time
Series Modeling of the Southern Oscillation; Report No.44, Max-Planck-
Institut für Meteorologie, Hamburg

- EXAMENSARBEIT Nr. 1**
Juli 1990
- Modellierung des gekoppelten Systems
Ozean-Atmosphäre in den Tropen**
Mojib Latif
- EXAMENSARBEIT Nr. 2**
Juli 1990
- Zur Dynamik des antarktischen Zirkumpolar-
stromes**
Jörg-Olaf Wolff
- EXAMENSARBEIT Nr. 3**
Juli 1990
- Zur Erniedrigung des atmosphärischen
Kohlendioxidgehalts durch den Weltozean
während der letzten Eiszeit**
Christoph Heinze
- EXAMENSARBEIT Nr. 4**
August 1990
- Analysis and Prediction of the El Niño
Southern Oscillation Phenomenon using
Principal Oscillation Pattern Analysis**
Jin-Song Xu
- EXAMENSARBEIT Nr. 5**
Dezember 1990
- Untersuchung zur niederfrequenten
Variabilität der Meeresoberflächen-
temperatur im Nordpazifik**
Ute Luksch
- EXAMENSARBEIT Nr. 6**
Dezember 1990
- Meereismodellierung im Südlichen Ozean**
Achim Stössel
- EXAMENSARBEIT Nr. 7**
Dezember 1990
- Principal Interaction/Oscillation Patterns
Theorie und Analysen
zum El Niño/Southern Oscillation-Phänomen**
Udo Weese