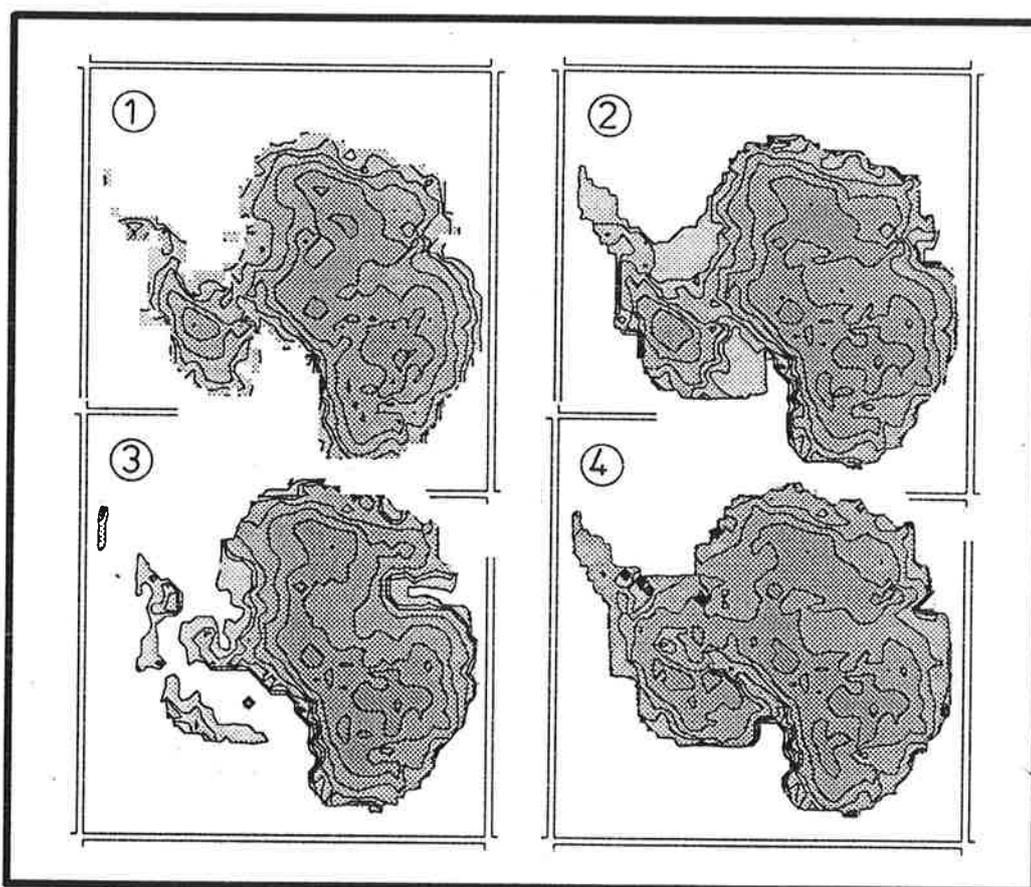




Max-Planck-Institut für Meteorologie

EXAMENSARBEIT Nr. 9



MODELLIERUNG DES GEKOPPELTEN SYSTEMS:
INLANDEIS, ÜBERGANGZONE UND SCHELFEIS
DER ANTARKTIS

von
WOLFGANG BÖHMER

HAMBURG, JANUAR 1991

DOKTORARBEIT

AUTOR:

WOLFGANG BÖHMER

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR METEOROLOGIE

TITELBILD: Experimente mit dem gekoppelten System
Inlandeis und Schelfeis im Paläoklima

- 1 Die heutige Eisoberflächentopographie
des antarktischen Inlandeises
(ohne Schelfeisgebiete)
- 2 Simulation der heutigen Verteilung von
Inlandeis und Schelfeis
- 3+4 Andere simulierte Verteilungen von Inlandeis
und Schelfeis aufgrund einer Änderung des
Bodenreibungskoeffizienten im Modell

MAX-PLANCK-INSTITUT
FÜR METEOROLOGIE
BUNDESSTRASSE 55
D-2000 HAMBURG 13
F.R. GERMANY

Tel.: (040) 4 11 73-0
Telex: 211092 mpime d
Telemail: MPI.METEOROLOGY
Telefax: (040) 4 11 73-298

Modellierung des gekoppelten Systems:
Inlandeis, Übergangszone und Schelfeis
der Antarktis

DISSERTATION

Zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
im Fachbereich Geowissenschaften
der Universität Hamburg

vorgelegt von
Wolfgang J. Böhmer
aus Aurich

Hamburg 1990

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Geowissenschaften
der Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. H. Graßl
und Prof. Dr. K. Hasselmann

Hamburg, den 09.01. 1991
(Datum der vorläufigen Bescheinigung)

Prof. Dr. M. Dunst
Sprecher
des Fachbereiches Geowissenschaften

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Allgemeine Eisdynamik - Bewegung eines polykristallinen Körpers	6
2.1	Spannungstensor und Kräftebilanz	7
2.2	Nichtlineares Fließverhalten	11
3	Eismodelle	13
3.1	Das Konzept der getrennten Zeitskalen	13
3.2	Das Inlandeis	15
3.3	Modellierung der Schelfeisgebiete	18
3.3.1	Schelfeisnäherung	19
3.3.2	Das quasistationäre Schelfeismodell	20
3.3.3	Das prognostische Schelfeismodell	28
3.4	Modellierung der Übergangszone zwischen Inlandeis und Schelfeis	31
3.4.1	Kennzeichen der Übergangszone	34
3.4.2	Die integrale Kräftebilanz zwischen Inland- und Schelfeis	35
3.4.3	Abschätzung des Zugterms der Kräftebilanz	38
3.4.4	Identifizierung der Eiskanäle	43
3.4.5	Grenzen der Kopplung	45

4 Numerik der Eismodelle	47
4.1 Kopplung der Teilmodelle	47
4.2 Numerik des Inlandeismodells	47
4.3 Numerik des prognostischen Schelfeismodells	49
4.4 Numerik der Übergangszone	56
5 Modellexperimente	59
5.1 Experimente mit dem gekoppelten System Inlandeis Schelfeis im Paläoklima	60
5.1.1 Das Standardexperiment (I)	61
5.1.2 Sensitivitätsexperimente	64
5.1.3 Meeresspiegelschwankungen	68
5.2 Fließverhalten unter geometrisch einfachen Randbedingungen	69
5.3 Zur Kopplung des Inlandeismodells mit dem prognostischen Schelfeismodell	77
5.3.1 Vergleich des Modells mit Beobachtungsdaten	77
5.3.2 Der Übergang zwischen Inlandeis und Ross Schelfeis	78
5.3.3 Das Standardexperiment (II)	83
5.3.4 Ein Eiszeitexperiment	86
6 Diskussion	90
7 Ausblick	93
Zusammenfassung	94
Literatur	96

Abbildungsverzeichnis

1.1	Isometrische Ansicht der Antarktis in zwei Teilen	2
2.1	Angreifende Spannungen an der Oberfläche eines Körpers	8
2.2	Wirkung von Normal- und Scherspannung auf einen inkompressiblen Körper	10
2.3	Darstellung des Fließverhaltens unterschiedlicher Materialien	12
3.1	Profil eines analytischen Schelfeises	24
3.2	Anwendung des analytischen Schelfeismodells auf das Ronne-Filchner Schelfeis	27
3.3	Geschwindigkeitsprofile im Bereich des Inlandeises, der Übergangszone und des Schelfeises	33
3.4	Vertikaler Schnitt, rechtwinkelig zur Aufschwimmgrenze, im Bereich der Übergangszone zur Verdeutlichung der Integrationsrichtung	36
3.5	Definition der notwendigen Größen für die Abschätzung des Wasser- und Schelfeisseitigen Druckes	39
3.6	Die bedeutendsten Eiskanäle der West-Antarktis	44
4.1	Modellierte Bodentemperatur der Antarktis mit dem Inlandeismodell	49
4.2	Berechnung der Änderung der Eisdicke im numerischen Gitter	53
4.3	Numerischer 21-Punktstern zur Bestimmung der $v_{(i,j)}$ Komponente im nichtlinearen Fall	55
4.4	Numerische Behandlung der Übergangszone	58

5.1	Eisdicken der Antarktis vom Inlandeismodell berechnet	62
5.2	Der Standardlauf für das Paläoeismodell	63
5.3	Sensitivitätsexperiment (A) mit dem Paläoeismodell	65
5.4	Sensitivitätsexperiment (B) mit dem Paläoeismodell	67
5.5	Aufsicht (xy-Ebene) und Seitenprofil (zx-Ebene) der vereinfachten Geometrie	70
5.6	Isolinien der Eisgeschwindigkeiten für den linearen Fall	72
5.7	Isolinien der Eisdicken für den linearen Fall	73
5.8	Isolinien der Eisgeschwindigkeiten für den nichtlinearen Fall	75
5.9	Isolinien der Eisdicken für den nichtlinearen Fall	76
5.10	Tabellarischer Vergleich der beobachteten und modellierten Eiskanäle	79
5.11	Breitenvergleich der Übergangszone im Modell und in der Natur	79
5.12	Modellierte Eisströme im Ross Schelfeis	81
5.13	Isolinien der beobachteten Eisgeschwindigkeit im Ross Schelfeis	82
5.14	Isolinien der im Ross Schelfeis modellierten Eisdicken	84
5.15	Geschwindigkeitsvektoren im modellierten Ross Schelfeis	85
5.16	Verteilung der Eisdicken im Ross Schelfeis nach einer Meeresspiegelabsenkung	89

Liste der wichtigsten Symbole

h	= Eisdicke = $(h_s - h_b)$
h_i	= Eisdicke im Inlandeis
h_{sh}	= Eisdicke im Schelfeis
h_g	= Eisdicke an einem Aufschwimmpunkt
h_s	= Höhe der Eisoberfläche (bezogen auf eine Koordinatenachse)
h_b	= Höhe der Eisunterseite
h_T	= Höhe des Felsuntergrundes
h_{ss}	= Höhe des Meeresspiegels
\vec{u}	= Vektor der Eisgeschwindigkeit
u, v, w	= Komponenten der Eisgeschwindigkeit
\vec{u}_B	= Gleitgeschwindigkeit des Eises am Boden ($\vec{u}_B = \vec{u}(z) = h_b$)
\vec{u}_H	= horizontale Eisgeschwindigkeit ($\vec{u} = (u, v)$)
\vec{g}	= Gravitationsvektor
\vec{q}	= Eisfluß (vertikal integrierte horizontale Eisgeschwindigkeit)
B	= Jahresschneebilanz
T	= Temperatur im Eis
$\vec{\sigma}$	= Spannungstensor
σ'_{ij}	= Spannungsabweichungstensor
$\dot{\epsilon}_{ij}$	= effektive Deformationsrate
σ	= effektive Scherspannung (zweite Tensorinvariante)
n	= Exponent im Fließgesetz mit dem Wert 3
μ	= Reibungskoeffizient
δ_{ij}	= Kroneckerdelta
p	= isotroper Anteil des Normaldruckes
ρ, ρ_w	= Dichte des Eises, bzw. Dichte des Wassers
d	= Distanz zwischen einem Aufschwimmpunkt im Schelfeis und einem Punkt (x,y) im Schelfeisgebiet
x_f	= Ort der Abbruchkante im Schelfeis
x_i	= Ort im Inlandeis
x_s	= Ort im Schelfeis
x_g	= Ort, an dem das Eis zu schwimmen beginnt ("grounding line")
$A'(T)$	= temperaturabhängige Konstante im linearen Fließgesetz
$A(T')$	= Konstante, entnommen aus [Paterson, W.S.B., Tabelle 3.3, (S.39); 1983]

Kapitel 1

Einleitung

Im heutigen Klimazustand existieren im wesentlichen nur noch zwei größere Inlandeis-massen: das Grönländische und das Antarktische Inlandeis. Das Grönländische Eis-schild besteht aus einem Wasserreservoir von 2.6 Millionen km^3 in gefrorenem Zustand. Den weitaus größten Anteil stellt die Antarktis dar mit ihren 30 Millionen km^3 Was-seräquivalent. Dagegen ist der Anteil von Gebirgsgletschern und kleineren Eiskappen am totalen Landeisvolumen verschwindend gering.

Die meisten Informationen über den Aufbau des Antarktischen Inlandeises stammen aus Tiefseesedimentkernen des südlichen Ozeans. So ist aus Änderungen der relati-ven Konzentration der Sauerstoffisotope O^{18} und O^{16} zu entnehmen, daß vor ungefähr 30 - 40 Millionen Jahren die Ozeantemperatur abgesunken war [Pittock, A.B. et al., 1978] und dies mit einer beträchtlichen Zunahme der Eisbedeckung des Antarktischen Kontinents einherging. Die zeitliche Entwicklung der Inlandeise ist eng mit den Klima-bedingungen, die durch Atmosphäre und Ozean gegeben werden, verknüpft. Alle drei Komponenten stehen - auf unterschiedlichen Zeitskalen - miteinander in Wechselwir-kung. Das Inlandeis ändert sich im Vergleich zur Atmosphäre und Ozean nur langsam. Für Zeitskalen von mehr als 1 000 Jahren übernimmt das Inlandeis die prognostische Rolle der Klimakomponenten, während sich Atmosphäre und Ozean quasistationär auf die vom Inlandeis vorgegebenen Randbedingungen einstellen.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, mit einem vorhandenen prognostischen dreidimen-sionalen Inlandeismodell ein gekoppeltes System von Inland- und Schelfeis mit einer Übergangszone zwischen Inland- und Schelfeis zu entwickeln, das für Fragestellungen im Bereich des Paläoklimas geeignet ist. Weiterhin soll eine Modellvariante entworfen werden, die auch für Fragen der Gegenwart und der nahen Zukunft eingesetzt werden kann.

In der jüngsten Vergangenheit ist immer wieder die Rolle der Westantarktis bei einer

Klimaänderung unter den Wissenschaftlern diskutiert worden, und sie hält noch an [Weertman, J. 1976]. Die Besonderheit der Westantarktis besteht darin, daß der Felsuntergrund - im Gegensatz zum Ostteil - des Antarktischen Kontinents, *unterhalb* des heutigen Meeresspiegel liegt und damit ein direkter Kontakt zu den Ozeanen existiert. Dieser Teil des Inlandeises wird Marines Inlandeis genannt. Die Abbildung 1.1 zeigt, auf zwei unterschiedlichen Ebenen, den heutigen Zustand der Antarktis.

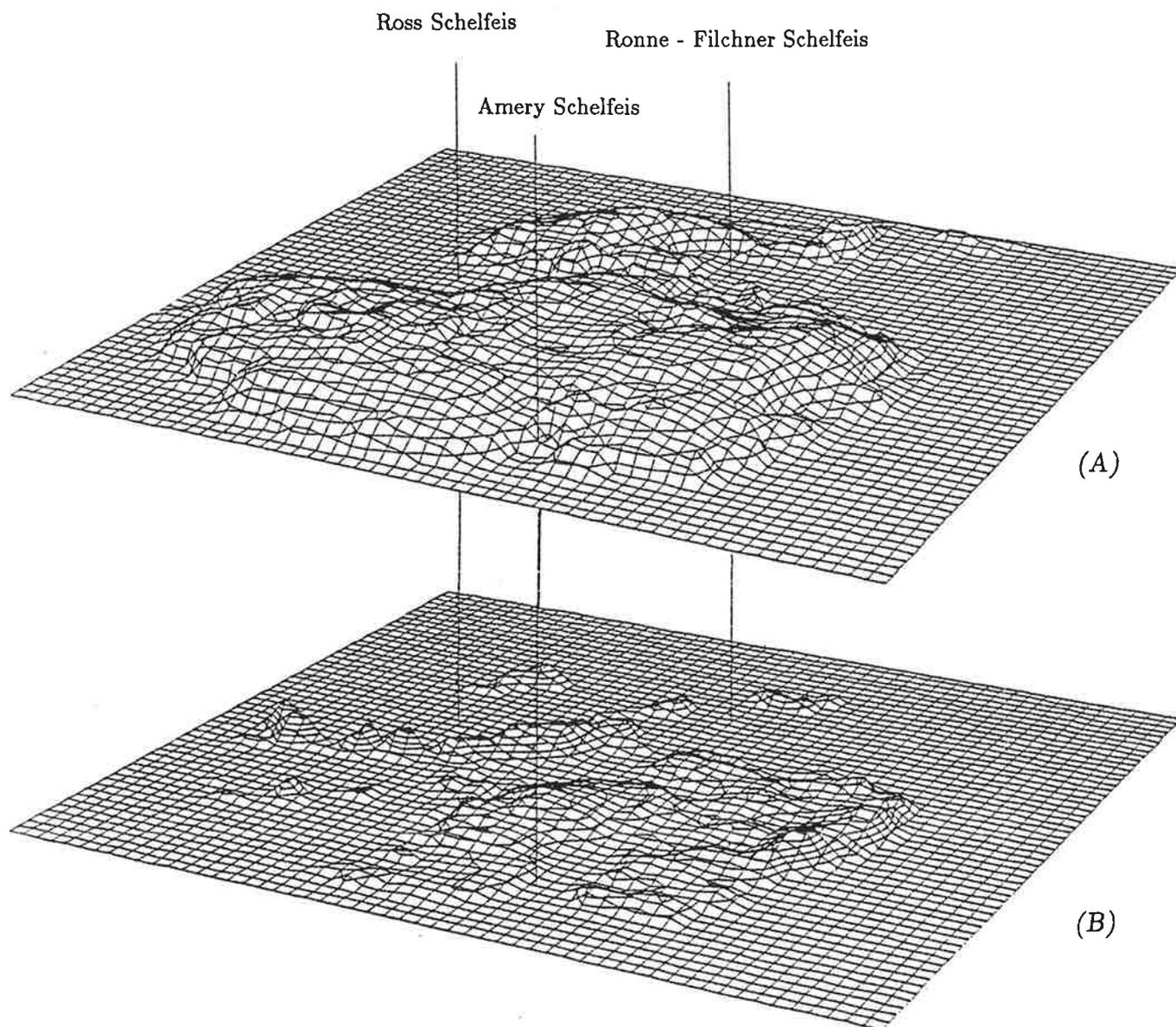


Abbildung 1.1: Isometrische Ansicht der Antarktis: A) Eisoberflächentopographie; B) Bodentopographie relativ zum heutigen Meeresspiegel.

Im oberen Teil des Bildes 1.1 (A) ist die heutige Eisoberflächentopographie gezeichnet. Die Gebiete der drei größten Schelfeise der Antarktis: Das Ross Schelfeis mit einer Fläche von $525,8 \cdot 10^3 \text{km}^2$, das Ronne-Filchner Schelfeis mit $472,7 \cdot 10^3 \text{km}^2$ und das Amery Schelfeis mit einer Fläche von $100 \cdot 10^3 \text{km}^2$ sind extra markiert. Im unteren Teil des Bildes 1.1 (B) ist die heutige Bodentopographie der Antarktis relativ zum heutigen Meeresspiegel dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, daß weite Teile des Bodenbereiches der Westantarktis unterhalb des Meeresspiegels liegen.

Marines Eis wird im wesentlichen durch fünf Größen kontrolliert: Durch Eiskanäle, Schelfeisgebiete, Schneeakkumulation, Massenverlust durch Eiskalben, sowie durch Eisdome, von denen sich das Eis radial fortbewegt. Eisdome im Schelfeisgebiet entstehen, wenn die Bewegung des Schelfeises durch Inseln, so z.B. durch die Berkner Insel, durch die Crary Erhebung oder durch die Roosevelt Insel, unterbunden wird. Aber auch wenn größere Flächen des Eises Grundberührung bekommen wird die Kriechbewegung im Schelfeis gestört. Die entstehenden radialen Fließmuster sind dann unabhängig vom Eisfluß im Schelfeis. Die Ränder dieser Erhebungen sind stark durch ein ausgedehntes Spaltensystem gekennzeichnet. Diese werden durch Scherung des Eisflusses um diese Eiserhebungen herum hervorgerufen [Kenneth, C.J. and C.R. Bentley, 1983].

Die größten Schelfeisgebiete, die Eis aus dem Oststeil des Kontinents entsorgen, liegen im Westen. Schelfeise sind nichts anderes als riesige Inlandeiszungen, die sich vorwiegend in Buchten erstrecken und sich unter ihrem eigenen Gewicht in Richtung offener See zur Abbruchkante hinbewegen. Zum Teil üben die Ränder der Buchten eine Stützfunktion aus. Typische Schelfeisgeschwindigkeiten liegen zwischen 100 m bis hin zu 1 000 m pro Jahr an der Abbruchkante. Die Schmelzgebiete des Schelfeises ragen von der Eisfront bis ungefähr 150 km ins Schelfeisinnere hinein. Die Schmelzbereiche an der Unterseite sind schwierig zu messen, werden aber mit etwa 1 m pro Jahr an der Eisfront geschätzt.

Weiterhin wird die Auswirkung einer Übergangszone zwischen dem Schelfeis und dem Inlandeis diskutiert [Van der Veen, C.J., 1985; Herterich, K., 1987]. Mangels geeigneter Daten aus dem Gebiet des Übergangs zwischen Inlandeis und Schelfeis, existieren verschiedene Anschauungen, die auf unterschiedlichen Modellkonzeptionen beruhen, jedoch ist wohl die Wechselwirkung noch nicht eindeutig verstanden.

Aufgrund der erdzeitlichen Klimageschichte wird vermutet, daß während der vorletzten Warmperiode etwa vor 120 000 bis 130 000 Jahren das Eisvolumen der Westantarktis geringer war als heute und der Meeresspiegel um ca. 5 m höher als heute lag. Es ist ferner wahrscheinlich, daß während der letzten Kälteperiode vor ca. 18 000 Jahren das Inlandeis der Westantarktis bis zum Kontinentalschelf reichte.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich im wesentlichen in zwei unterschiedliche Teile auf: dem theoretischen Teil, der die Kapitel zwei, drei und vier umfasst sowie den experimentellen Teil, der das Kapitel fünf beinhaltet.

Nach der Einleitung erfolgt im theoretischen Teil eine Einführung in die Eisdynamik (Kapitel 2). In diesem werden die physikalischen Grundlagen der numerischen Modelle beschrieben. Insbesondere die Beziehung zwischen dem Spannungstensor eines polykristallinen Festkörpers und der Kräftebilanz sowie das nichtlineare Fließverhalten des Festkörpers sind Gegenstand der Erörterungen. Die aus diesen Grundlagen entwickelten drei Teilmodelle werden im dritten Kapitel dargelegt. Dabei beruht die separate Modellierung der unterteilten Eisgebiete der Antarktis auf der Basis der getrennten Zeitskalen. Schon zu Beginn dieser Arbeit existierte das Inlandeismodell, welches hier vollständigkeithalber mit aufgeführt wurde (Abschnitt 3.2). Die Modellentwicklung der Schelfeisgebiete schließt sich im Abschnitt 3.3 an. Für zwei unterschiedliche Zeitskalen wird, für Zeitskalen größer als 1 000 Jahre und für Zeitskalen unter 1 000 Jahren, ein quasistationäres beziehungsweise ein prognostisches Schelfeismodell vorgestellt. Die Behandlung der mit geringer Breite, gegenüber dem Inland- und Schelfeis, versehenen Übergangszone in dem groben äquidistanten Modellgitter (100 km), wird im Abschnitt 3.4 wiedergegeben. Im Kapitel vier wird die Numerik der Eismodelle behandelt.

Der zweite Teil der Arbeit (Kapitel 5) beschäftigt sich mit den numerischen Experimenten, die mit den Eismodellen durchgeführt wurden. Im Abschnitt 5.1 erfolgen Langzeituntersuchungen. Nach einem Standardexperiment werden zwei Sensitivitätsexperimente zur Kopplung der Teilmodelle durchgeführt. Dabei wird das gekoppelte System von prognostischem Inlandeis, quasistationärem Schelfeis mit einer quasistationären Übergangszone dazwischen, in den numerischen Experimenten jeweils 10 000 Jahre integriert. Experimente zu Auswirkungen von Meeresspiegelschwankungen auf die Antarktis werden anschließend durchgeführt (Abschnitt 5.1.3). Mit einer einfachen Geometrie (Boxmodell) wird im Abschnitt 5.2 das empirische Fließverhalten des Eises in zwei Experimenten gegenübergestellt. Aus dieser Gegenüberstellung werden wertvolle Rückschlüsse für die Modellierung eines dynamischen Schelfeises gewonnen. Der Abschnitt 5.3 befaßt sich mit numerischen Experimenten für eine realistischere Geometrie (Ross-Schelfeis) in einem Zeitbereich bis 1 000 Jahre. Dabei steht das prognostische Schelfeismodell mit dem prognostischen Inlandeismodell mit einer quasistationären Übergangszone in Verbindung. Wie gut der Eistransport aus dem Inlandeis- ins Schelfeismodell simuliert wird, wird an Hand von Beobachtungen beurteilt. Anschließend wird ein Standardexperiment für das Ross-Schelfeis, welches durch das Inlandeismodell ernähert wird, definiert. Ein Anwendungsbeispiel des gekoppelten Modells von

Inlandeis- Ross-Schelfeismodell erfolgt mit einem Eiszeitexperiment (Abschnitt 5.3.4). Mit diesem Experiment werden die Grenzen der groben Modellauflösung bei der Modellierung deutlich. Im Kapitel 6 findet eine umfassende Diskussion der Ergebnisse dieser Arbeit statt, sowie ein Ausblick für eine sinnvolle Weiterführung dieser Modellierung. Eine nachfolgende kurzgehaltene Zusammenfassung schließt die Modellierung des gekoppelten Systems: Inlandeis, Übergangszone und Schelfeis der Antarktis, ab.

Kapitel 2

Allgemeine Eisdynamik - Bewegung eines polykristallinen Körpers

Die beiden Abschnitte dieses Kapitels betrachten die Gesetzmäßigkeiten, die den Hintergrund aller in der Eisdynamik verwendeten Modelle bilden. Diese Grundlagen sind bei [Paterson, W.S.B., 1981] in anschaulicher Weise, speziell auf die Dynamik von Gletschern und Inlandeisen bezogen, zu finden. Allgemeiner gehalten ist das Thema bei [Jaeger, J.C., 1969], der eher die Bereiche der Geologie und Geophysik in seinem Buch abdeckt. Eine rein theoretische Abhandlung der Thematik ist bei [Hutter, K., 1983] zu finden. Eine weitere einführende Darstellung in die Eisdynamik, mit einfachen Vorschlägen zur Eismodellierung ist bei [Oerlemans, J. and C.J. van der Veen, 1984] zu finden.

Im folgenden Abschnitt 2.1 wird auf den, in der Mechanik fester Körper, wichtigen Spannungstensor eingegangen. Die Wirkung der Normalspannung sowie die Wirkung der Abweichungen der Normalspannungen vom isotropen Druck auf einen Körper werden definiert. Im Abschnitt 2.2 wird das nichtlineare Fließverhalten von polykristallinem Eis gegenüber einem perfekt plastischen Körper sowie gegenüber einer Newtonschen Flüssigkeit abgegrenzt.

Um von qualitativen Beschreibungen von Gletscher- oder Eisbewegungen zu einer quantitativen Beschreibung zu gelangen, ist es notwendig, die Bewegungs- und Fließeigenschaften des Eises näher zu untersuchen.

Dabei wird ein Eisquader als idealisiertes Modell eines Gletschers angesehen. Auftretende Kräfte und die damit verbundenen Spannungen, die das mechanische Gleichgewicht eines solchen Blocks bestimmen, können mit der Mechanik fester Körper berechnet werden. Spannungen im Eis sind bisher noch nicht direkt gemessen worden, jedoch sind die zeitlichen Änderungen der Deformationen (Deformationsrate) und die Eisgeschwindigkeiten von Gletschern und Inlandeisen bekannt. Damit besteht eine Möglichkeit,

die modellierten Geschwindigkeitsfelder mit beobachteten Geschwindigkeitsfeldern zu vergleichen.

Eisdynamik, ein Teilgebiet der Mechanik fester Körper, beruht im wesentlichen auf der Wechselwirkung von Kräften und Deformationen. Wirkt eine Kraft auf einen festen Körper, so tritt eine Verschiebung oder Deformation des Materials ein. Bei der Mechanik fester Körper gibt es folgende drei Aspekte:

1. Die am Körper angreifenden Kräfte.
2. Die durch die Kräfte hervorgerufenen Deformationen des Körpers.
3. Das Verhalten des Materials unter Krafteinwirkung, insbesondere die Beziehung zwischen Spannung und Deformationsrate.

Die beiden ersten Punkte werden zunächst eingehender betrachtet. Anschließend wird der dritte Aspekt, speziell das Materialverhalten von Gletschereis im Vergleich mit einer Newtonschen Flüssigkeit und einem perfekten, plastischen Körper, untersucht.

In der Kontinuumsmechanik werden Kräfte in zwei unterschiedliche Typen, den Oberflächen- und den Körperkräften, eingeteilt. Oberflächenkräfte greifen an den Außenflächen eines Volumenkörpers an. Normalkräfte und Scherkräfte sind hierfür ein typisches Beispiel. Körperkräfte greifen dagegen, die Gravitationskraft wird dazugerechnet, am Schwerpunkt eines Körpers an und wirken auf die gesamte Masse des Körpers.

2.1 Spannungstensor und Kräftebilanz

Spannungen (mit der physikalischen Einheit Pascal) werden durch Oberflächenkräfte hervorgerufen, die auf eine Einheitsfläche bezogen werden. Sie treten auf:

- als Normalspannungen, die bei einem festen Körper zu einer Kompression oder Dehnung führen. Hervorgerufen wird diese Reaktion durch eine senkrecht zur Oberfläche des Körpers wirkende Kraft.
- als Scherspannungen, die zu den Oberflächenkräften gezählt werden, die tangential an der Oberfläche eines Körpers angreifen und eine Scherung des Körpers hervorrufen.

Die Abbildung 2.1 (S. 8) illustriert im Euklidischen Raum die Komponenten des Spannungstensors am Beispiel eines Würfels. Jedes System von Spannungen kann durch

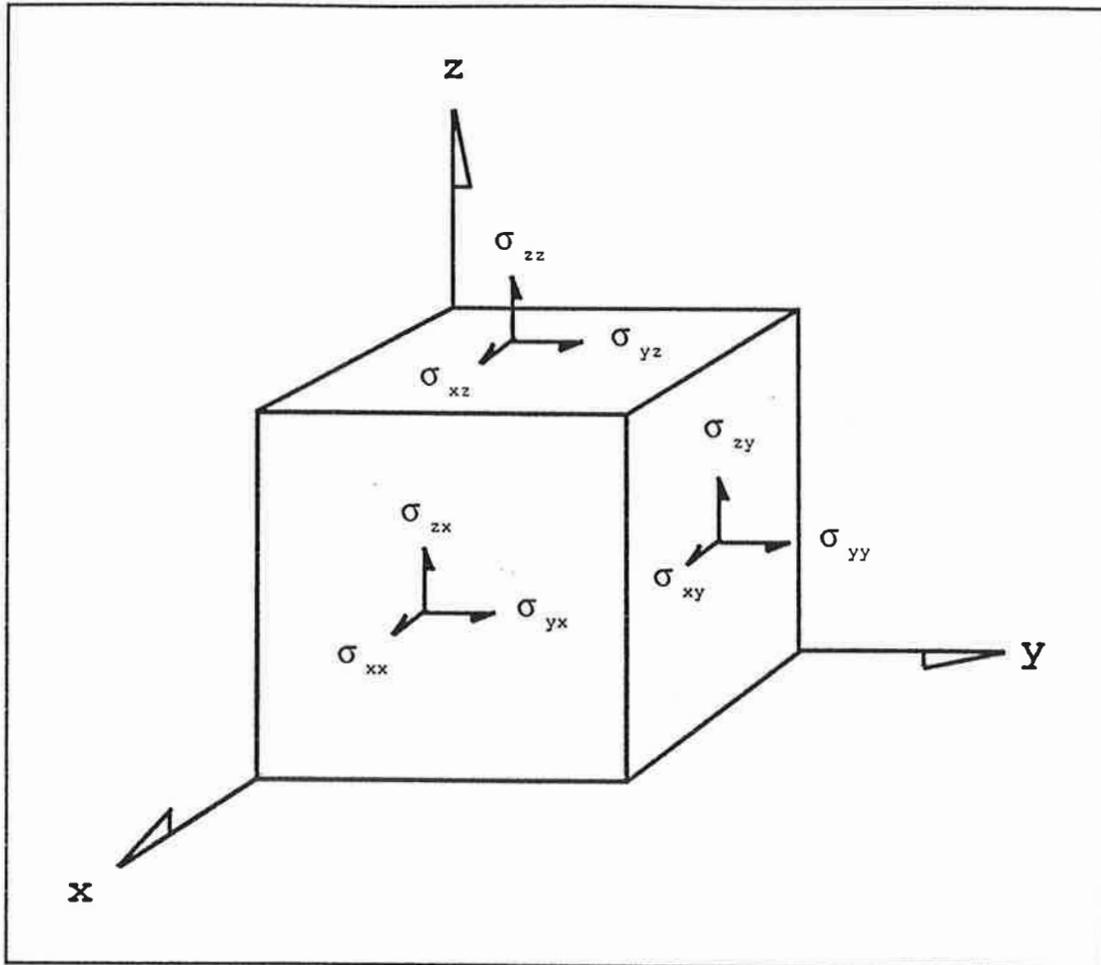


Abbildung 2.1: Angreifende Normal- und Scherspannungen an der Oberfläche eines Volumenkörpers. Der erste Index gibt die Richtung an, in welcher die Spannung wirkt. Der zweite Index bezeichnet die Normale zur Ebene, an der die Spannung angreift.

einen Tensor von neun Elementen beschrieben werden. Bei einem symmetrischen Tensor reduziert sich die Anzahl der unabhängigen Komponenten auf sechs Komponenten. Symmetrisch verhalten sich in der Matrix die folgenden Komponenten der Scherspannungen (siehe Abbildung 2.1):

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} \quad .$$

Der erste Index gibt die Richtung an, in welcher die Spannung wirkt. Der zweite Index bezeichnet die Normale zur Ebene, an der die Spannung angreift. Das Symmetrieverhalten der Scherspannungen resultiert aus der Forderung, daß die Scherspannungen, die an

dem Volumenelement der Abbildung 2.1 angreifen, im Gleichgewicht kein Drehmoment erzeugen dürfen. Ohne diese Symmetrieeigenschaften würden sich die Drehmomente nicht mehr gegenseitig aufheben [Jaeger, J.C., 1969, Kapitel 3].

Der isotrope Anteil des Normaldrucks wird mit p bezeichnet und ist definiert durch:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) . \quad (2.1)$$

Dabei bezeichnen σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} die Diagonalelemente des Spannungstensors, die im isotropen Fall identisch sind. Bei Fluiden beschreiben diese Elemente gerade den (isotropen) hydrostatischen Druck. Gleichung (2.1) entspricht der ersten Tensorinvariante, bezüglich einer Translation des Koordinatensystems.

Der Spannungsabweichungstensor drückt dagegen die Abweichung zum isotropen Anteil der Normalspannungen aus. In einer Matrix wird dies wie folgt beschrieben:

$$\sigma'_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} - p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} - p \end{vmatrix} .$$

Dabei gilt für die Nebendiagonalelemente $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$. Kürzer kann diese Matrix in der Tensornotation mit dem Kroneckersymbol ($\delta_{i,j}$) ausgedrückt werden. Diese Darstellung des Spannungsabweichungstensor wird im weiteren Verlauf der Arbeit benutzt:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} , \quad (2.2)$$

$$\text{mit } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

Der Spannungsabweichungstensor σ'_{ij} bewirkt durch die Abweichung zum isotropen Anteil der Normalspannung eine Formänderung des Körpers (siehe auch Abbildung 2.2). In Flüssigkeiten tritt dagegen keine Abweichung zum isotropen Anteil der Normalspannungen auf.

Eine Eigenschaft eines polykristallinen Eiskörpers besteht in der Inkompressibilität, dies bedeutet, daß die anliegenden Spannungen zwar die Form des Körpers ändern aber nicht das Volumen (Abbildung 2.2).

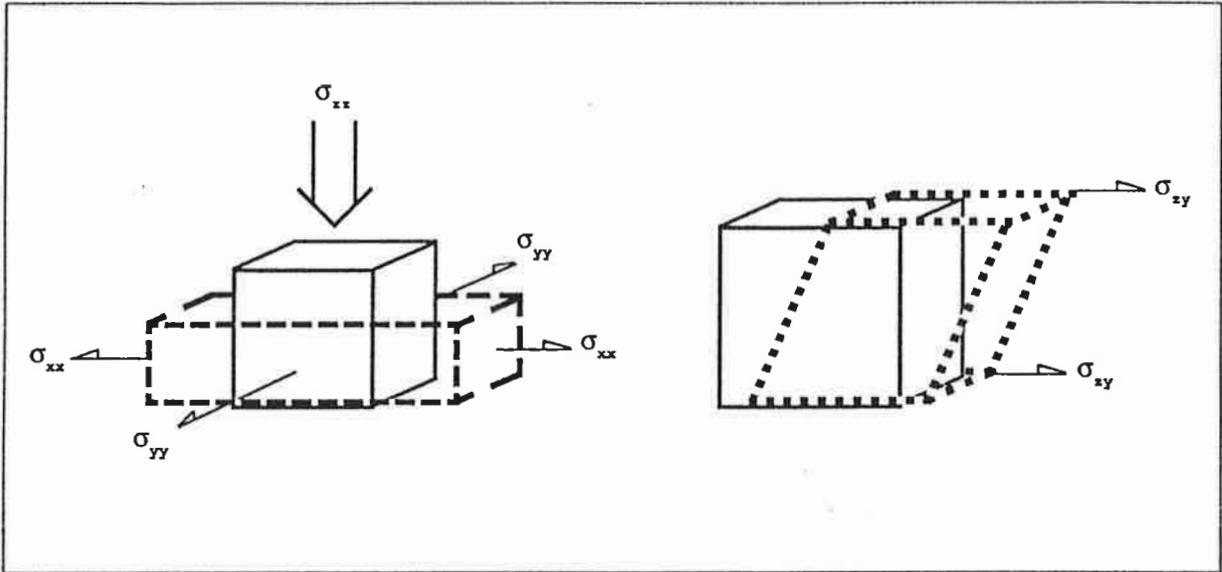


Abbildung 2.2: Darstellung eines inkompressiblen Körpers unter Einwirkung von anisotropen Normalspannungen (links) und Scherspannungen (rechts). Der Körper wird jeweils auf unterschiedliche Weise (gestrichelte Linien) bei konstantem Volumen verformt.

Die Bewegung eines Kontinuums ist definiert durch [Malvern, L.E., 1969] :

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{g} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (2.3)$$

Dabei ist $\vec{\sigma}$ der Spannungstensor, \vec{u} die Geschwindigkeit, ρ die Dichte und \vec{g} ist der Vektor der Schwerkraftbeschleunigung.

Nach Paterson verläuft die Bewegung im Eis so langsam, daß in Gleichung (2.3) der rechte Term zu vernachlässigen ist [Paterson, W.S.B., 1981].

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{g} = 0 \quad (2.4)$$

Gleichung (2.4) bedeutet, daß die Divergenz des Spannungstensors $\vec{\sigma}$ durch die Gravitationskraft pro Volumeneinheit bilanziert wird. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem, in dem die vertikale Ausdehnung entlang der z -Achse verläuft, lautet die Kräftebilanz:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g, \quad (2.7)$$

wobei bereits die Symmetrie des Spannungstensors $\vec{\sigma}$ ausgenutzt wurde. Die Beziehung zwischen den vorkommenden Spannungen und den auftretenden zeitlichen Änderungen der Deformationen ist, wie im nächsten Abschnitt dargelegt wird, nichtlinear.

2.2 Nichtlineares Fließverhalten

Für polykristallines Eis stellt das Fließgesetz den Zusammenhang zwischen den zeitlichen Änderungen der Deformation ($\dot{\epsilon}_{ij}$) und dem auftretenden Spannungsabweichungstensor (σ'_{ij}) dar. Der Zusammenhang konnte aus Laborexperimenten empirisch ermittelt werden [Nye, J.F., 1952a]. Das Fließgesetz lautet:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = A(T') \sigma'^{n-1}_{ij}, \quad (2.8)$$

$$\text{wobei: } 2\sigma^2 = \sum_{ij} \sigma'^2_{ij}. \quad (2.9)$$

Die zweite Tensorinvariante σ der Spannungsabweichung wird als effektive Scherspannung bezeichnet. Der Faktor $A(T')$ ist stark temperaturabhängig ($A(0^\circ C)/A(-10^\circ C) \approx 10$). Die Temperatur T' im Eis wird relativ zum druckkorrigierten Schmelzpunkt gemessen. Der Exponent n hängt von der Größenordnung der Scherspannung ab (für Scherspannungen im Bereich von 0.4 - 1.0 bar gilt $n=3$). Das Fließgesetz ist unabhängig vom isotropen Anteil des Normaldrucks und invariant gegenüber einer Rotation des Koordinatensystems.

Die Deformationsrate ($\dot{\epsilon}_{ij}$) ist unter gleichbleibender Scherspannung unabhängig von der Zeit. Ein solches Verhalten charakterisiert das Kriechen 2.-Ordnung. Treten kleine Geschwindigkeitsgradienten wie in Inlandeisen oder Gletschern auf, ist es gebräuchlich, folgende Definition des Tensors der Deformationsrate zu benutzen:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (2.10)$$

Für die effektive Deformationsrate $\dot{\epsilon}$ (der zweiten Invarianten des Tensors der Deformationsrate) gilt analog zu Gleichung (2.9):

$$2\dot{\epsilon}^2 = \sum_{ij} \dot{\epsilon}^2_{ij}. \quad (2.11)$$

Damit stellen Gleichung (2.8) und Gleichung (2.9) eine Beziehung zwischen den Spannungsabweichungen und den Geschwindigkeitsgradienten dar. Die Gleichungen (2.5), (2.6), (2.7) und (2.8) in Verbindung mit Gleichung (2.10) bilden ein geschlossenes System zur Bestimmung der drei Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z und der sechs Komponenten des symmetrischen Spannungstensors $\vec{\sigma}$.

Um das Deformationsverhalten von polykristallinem Eis deutlich abzugrenzen, ist in der Abbildung 2.3 ein Vergleich zwischen einer Newtonschen Flüssigkeit, einem perfekt plastischen und einem polykristallinen Körper skizziert. Aus Abbildung (2.3) ist

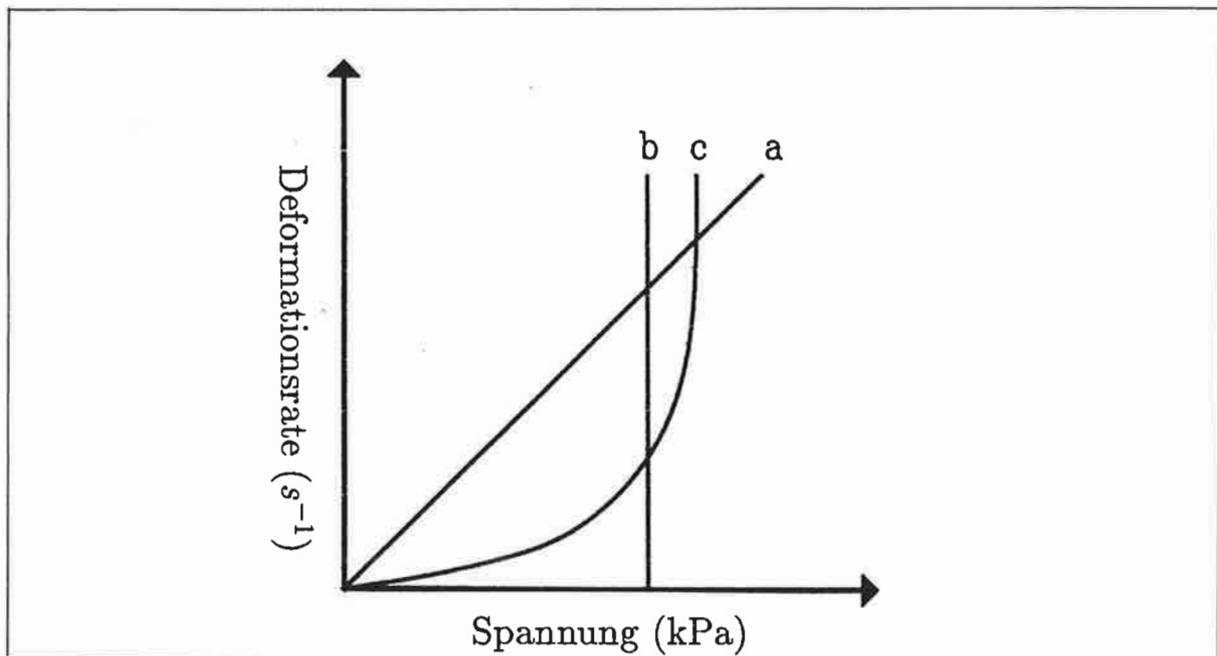


Abbildung 2.3: Vergleich des Deformationsverhalten zwischen einer Newtonschen Flüssigkeit (a), einem perfekt plastischen Körper (b) und einem polykristallinen Eiskörper (c).

ersichtlich, daß die Deformation bei einer Newtonschen Flüssigkeit linear zu den auftretenden Kräften erfolgt (a). Ein perfekt plastischer Körper verharrt bis zu einem bestimmten Schwellenwert in Ruhe und zeigt danach eine unendliche große Deformationsrate (b). Polykristallines Eis (c) ist in seinem Deformationsverhalten dem eines perfekt plastischen Körpers ähnlich. Dies ist auch der Grund, weshalb in einfachen Modellen [Weertman, J., 1974] oft mit der Annahme der perfekten Plastizität gearbeitet wird. Für quantitative Rechnungen muß jedoch das nichtlineare Deformationsverhalten von polykristallinem Eis berücksichtigt werden.

Kapitel 3

Eismodelle

Im vorhergehenden Kapitel sind die Grundlagen zur Eisdynamik für eine Modellentwicklung eines Eiskörpers mit polykristallinen Eigenschaften dargelegt worden. Um Fragen im Bereich des Paläoklimas beantworten zu können, werden Eismodelle benötigt, die für eine lange numerische Integrationszeit geeignet sind. Dies bedingt auch eine relativ grobe Auflösung der Antarktis im Modellgitter um vertretbare Rechenzeiten zu gewährleisten.

Im Gegensatz zu dem einzigen vergleichbaren Eismodell [Huybrechts, P., 1990], wird in dieser Arbeit das Konzept der getrennten Zeitskalen benutzt. Dieses Konzept hat eine weitreichende Konsequenz für die Modellentwicklung und letztendlich auch für die numerischen Experimente, so daß im folgenden Abschnitt etwas näher auf das Konzept der getrennten Zeitskalen eingegangen werden soll.

3.1 Das Konzept der getrennten Zeitskalen

Auf Grund von Modellexperimenten [Herterich, K., 1988] ist bekannt, daß das Inlandeis der Antarktis Zeitskalen zwischen 10 000 und 100 000 Jahren hat. Typische Schelfeise dagegen benötigen nur etwa 1 000 Jahre, um in den Gleichgewichtszustand zu gelangen. Die Übergangszone zwischen Inland- und Schelfeis erreicht das Gleichgewicht im Vergleich dazu in einer noch viel kürzeren Zeit [Herterich, K., 1987]. Folglich befinden sich sowohl die Übergangszone als auch das Schelfeis auf den relevanten Zeitskalen des Inlandeises immer im Gleichgewicht und können somit in quasistationärer Weise modelliert werden.

In diesem Kapitel sollen die Näherungen abgeleitet werden, die in den drei unterschiedlichen Bereichen Inlandeis, Schelfeis und Übergangsregion gelten. Die wesentlichen Gegensätze zwischen der Inland- und Schelfeismodellierung sind in den beiden folgenden

Absätzen zusammengefaßt.

Im Inlandeis lassen sich die Eisgeschwindigkeiten diagnostisch aus den *lokalen* Größen Eisdicke, Eisoberflächengradient und Temperatur ableiten. Mit Hilfe der Flacheisnäherung läßt sich ein analytischer Ausdruck für die Geschwindigkeiten finden. Die horizontalen Geschwindigkeiten variieren mit der Tiefe, so daß ein mehrschichtiges Modell notwendig ist (Abschnitt 3.2).

Im Schelfeis dagegen ergeben sich die Eisgeschwindigkeiten aus einem System von zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ für das (horizontale) Schelfeisgebiet. Es kann *kein* analytischer Ausdruck mehr für die Geschwindigkeiten hergeleitet werden, so daß die Bestimmung der Geschwindigkeiten im Schelfeis nur auf numerischen Wege möglich und damit aufwendiger als für das Inlandeis ist. Jedoch sind die horizontalen Geschwindigkeiten unabhängig von der Tiefe, so daß ein Einschichtenmodell ausreicht (Abschnitt 3.3.3).

Für das quasistationäre Schelfeismodell (Abschnitt 3.3.2) werden die Eisgeschwindigkeiten nicht benötigt. Die Übergangszone, deren Breite in Fließrichtung des Eises verglichen mit der horizontalen Erstreckung des Inland- und Schelfeises klein ist, erfährt eine gesonderte Behandlung. Die Dynamik der Übergangszone wird im Modell nur im Ansatz benutzt. Sie wird als quasistationär angesehen und ihre Wirkung auf das Inland- und Schelfeis wird im Modell als nicht aufgelöster Prozeß parameterisiert (Abschnitt 3.4).

3.2 Das Inlandeis

Das prognostische dreidimensionale Inlandeismodell, als Teilbaustein des gekoppelten Systems Inland- Schelfeis und Übergangszone, existierte schon bei Beginn dieser Arbeit. Es ist am Max-Planck-Institut (MPI) entwickelt worden [Herterich, K., 1988] und soll hier in kurzer Form wiedergegeben werden.

In seinen Annahmen entspricht das Inlandeismodell der von [Hutter, K., 1983] entwickelten Flacheisnäherung. Dies bedeutet, daß alle horizontalen partiellen Ableitungen von Eisgrößen, (Deformationsgeschwindigkeit, Temperatur und Scherspannung) klein gegenüber ihren vertikalen Ableitungen sind. Im wesentlichen werden für die Modellierung des Inlandeises drei prognostische Gleichungen benötigt: Die Massenbilanz, die Wärmebilanz und die Einsinkgeschwindigkeit des Kontinents in den Erdmantel unter der Last des Eises.

Die zeitliche Änderung der Eisdicke (h) folgt aus der Massenbilanz:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{q} + B \quad (3.1)$$

Dabei ist \vec{q} die vertikal integrierte horizontale Eisgeschwindigkeit \vec{u}_H , mit

$$\vec{q} = \int_{h_b}^{h_s} \vec{u}_H dz$$

und B die Jahresschneebilanz an der Eisoberfläche h_s . Die Eisunterseite ist mit h_b gekennzeichnet.

Wegen der starken Temperaturabhängigkeit des Eisflusses (\vec{q}) (Änderungen um den Faktor 100 im Temperaturbereich von 0° C bis -30° C) wird eine zweite prognostische Gleichung, die zeitliche Änderung der Temperatur, benötigt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla T + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + d_w \quad (3.2)$$

In Gleichung (3.2) ist T die Temperatur, \vec{u} die Eisgeschwindigkeit, k der (molekulare) Diffusionskoeffizient sowie d_w die Wärmeproduktion, die im Eis durch auftretende Deformationen hervorgerufen wird.

Als dritte prognostische Variable kommt die Höhe des Kontinents (h_b) hinzu, der durch die Last des Eises im den Erdmantel einsinkt. Diese Variable ist jedoch in der benutzten Version des MPI-Modells nicht enthalten. Zur Lösung von Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) muß noch die Eisgeschwindigkeit \vec{u} bekannt sein und für Gleichung (3.2)

Randbedingungen angegeben werden. Im Fall des Inlandeises läßt sich in der hier benutzten Flacheisnäherung ein analytischer Ausdruck für die Eisgeschwindigkeit ableiten. Mit dieser Näherung folgt aus der z -Komponente der Kräftebilanz (Gleichung (2.7)):

$$\sigma_{zz} = -\rho g(h_s - z),$$

wobei der Atmosphärendruck an der Eisoberfläche ($z = h_s$) vernachlässigt wird. Die beiden einzigen von Null verschiedenen Scherspannungen σ_{xz} und σ_{yz} werden durch vertikale Integration der x - und y -Komponente der Gleichung (2.5) und (2.6) der Kräftebilanz ermittelt. Mit der Isotropie des Normaldruckes ($\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$) ergibt sich:

$$\sigma_{xz} = -\rho g \frac{\partial h_s}{\partial x} (h_s - z),$$

und

$$\sigma_{yz} = -\rho g \frac{\partial h_s}{\partial y} (h_s - z) .$$

Die beiden Scherspannungskomponenten σ_{xz} und σ_{yz} sind über das Fließgesetz (2.8) und der Definition (2.10) mit dem vertikalen Gradienten der horizontalen Geschwindigkeit $\vec{u}_H = (u, v)$ verknüpft:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} = -2 A(T') \left(\sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} . \quad (3.3)$$

Die beiden auftretenden Parameter, der Exponent n (≈ 3) sowie der temperaturabhängige Faktor $A(T')$, sind durch Feldmessungen bestimmt worden. Aus der vertikalen Integration der Gleichung (3.3) folgt die horizontale Eisgeschwindigkeit $\vec{u}_H = (u, v)$:

$$(u, v) = \vec{u}_B + c_o \left(\frac{\partial h_s}{\partial x}, \frac{\partial h_s}{\partial y} \right) , \quad (3.4)$$

$$\text{mit } c_o = -2(\rho g)^n \left[\left(\frac{\partial h_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_s}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \int_{h_b}^z A(T'(z')) (h_s - z')^n dz'$$

und \vec{u}_B der horizontalen Gleitgeschwindigkeit des Eises am Boden ($\vec{u}_B = \vec{u}_H(z = h_b)$). Wie aus Gleichung (3.4) zu sehen ist, werden die Geschwindigkeitskomponenten maßgeblich durch die Oberflächenneigung des Eises ($\frac{\partial h_s}{\partial x}$, $\frac{\partial h_s}{\partial y}$) und einem Faktor c_o bestimmt, der wiederum von der Oberflächenneigung, der Eisdicke und der Temperatur abhängt. Dabei ist die Richtung des Geschwindigkeitsvektors entgegen dem Gradienten der Oberflächenneigung gerichtet. Mit den horizontalen Geschwindigkeiten lassen

sich die Eisflüsse \vec{q} und die Massenbilanz bestimmen. Für die Wärmeadvektion in Gleichung (3.2) wird noch die vertikale Eisgeschwindigkeit w benötigt. Diese folgt aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 .$$

Damit sind die wichtigsten Modellgleichungen des Inlandeismodells definiert worden. Ein kurzer Einblick in die numerische Behandlung der Modellgleichungen und einen Vergleich der Bodentemperaturen des Modells mit Beobachtungen sind im Kapitel 4 dargestellt.

3.3 Modellierung der Schelfeisgebiete

Die Schelfeisgebiete der Westantarktis mit ihrem direkten Kontakt zu den Ozeanen, gehören zu den sensiblen Eismassen der Antarktis. Schelfeise und Gletscher ähneln sich in ihren Eigenschaften, so in den auftretenden Kräften, die zu Eisbewegungen führen. Jedoch stellen Schelfeise den einfacheren Fall dar, denn der Bodenkontakt fehlt, der bei Gletschern jederzeit vorhanden ist. Für ein Schelfeis existieren einfache, sich wenig ändernde Randbedingungen (Atmosphäre, Ozean); Form und Gleichgewichtsprofil lassen sich mit der Methode der plastischen Verformung behandeln. Die horizontalen Geschwindigkeiten sind unabhängig von der Tiefe. Die Erforschung der Schelfeise, insbesondere die des dynamischen Verhaltens, ist noch recht jung.

Als einer der Ersten untersuchte [Weertman, J., 1957a, b] die Kriechdeformation schwimmender Eisplatten, indem er das gerade im Labor neu entwickelte Fließgesetz, von [Nye, J.F., 1952a] und von [Glen, W.J., 1958] verallgemeinert, anwandte (siehe Abschnitt 2.2). Die ersten Arbeiten zum Gleichgewichtsprofil sowie über das Verhalten des Schelfeises in konvergierenden und divergierenden Buchten, stammen von [Thomas, R., 1973a,b und 1979b] sowie von [Sanderson, J.O., 1979].

Die erste realistischere numerische Behandlung von Schelfeisen wurde von [MacAyeal, D.R. and R.H. Thomas, 1982] durchgeführt. Das Modell ist sowohl auf das Ross Schelfeis [MacAyeal, D.R. and Thomas, 1986] als auch auf das Ronne-Filchner Schelfeis [Lange, M.A. and D.R. MacAyeal, 1986] angewandt worden. Die Ränder wurden festgehalten und eine Anfangseisdicke in einer Keilform vorgegeben. In allen Anwendungen wurde das Modell, so im Ross Schelfeis, mit den beobachteten Größen des durch die Eiskanäle (A, B, C, D, E, D, F) einströmenden Eises eingegeben. Die Resultate zeigen, bei einer Gitterauflösung von etwa 20 km, befriedigende Übereinstimmungen mit den beobachteten Eisdicken und Eisgeschwindigkeiten.

Die Grundlage der Schelfeismodellierung dieser Arbeit basiert auf der Kräftebilanz der Gleichung (2.4). Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß durch die im Schelfeis existierenden Randbedingungen (Kontakt zur Atmosphäre und zum Ozean) bestimmte Oberflächenkräfte vernachlässigt werden können und sich dadurch die allgemeinen Gleichungen (2.5), (2.6) und (2.7) vereinfachen.

3.3.1 Schelfeisenäherung

Der direkte Kontakt des Schelfeises zur Atmosphäre und zum Ozean führt zu Vereinfachungen der Modellgleichungen. In Schelfeisen können sich keine vertikalen Scherkräfte (σ_{xz}) und (σ_{yz}) aufbauen [Sanderson, J.O. and C.S.M. Doake, 1979], weil die Schelfeisunterseite im Ozean keine Grundberührung hat. Die Scherung, hervorgerufen durch die Atmosphäre an der Schelfeisoberseite, wird genauso wie bei dem Inlandeismodell (Abschnitt 3.2), vernachlässigt. Die allgemeine Kräftebilanz Gleichung (2.5), (2.6) und (2.7) geht damit in die Schelfeisenäherung über und Gleichung (2.7) reduziert sich zu:

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho g.$$

Integration über z , von der Eisoberfläche $z = h_s$ bis zu einer Tiefe z im Eisinnern ergibt

$$\sigma_{zz} = -\rho g(h_s - z) . \quad (3.1)$$

Der Normaldruck σ_{zz} in z -Richtung nimmt mit der Tiefe zu. Weiterhin gilt nach der allgemeinen Definition des Spannungsabweichungstensors Gleichung (2.2), daß die Summe der Abweichungen verschwinden muß :

$$\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} + \sigma'_{zz} = 0$$

oder

$$\sigma'_{zz} = -\sigma'_{xx} - \sigma'_{yy} . \quad (3.2)$$

Für die Normalspannungen gilt direkt nach Gleichung (2.2)

$$\sigma_{xx} = \sigma'_{xx} + p \quad (3.3)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma'_{yy} + p$$

$$\sigma_{zz} = \sigma'_{zz} + p$$

$$\text{oder } p = \sigma_{zz} - \sigma'_{zz} \quad (3.4)$$

Wird nun die Gleichung (3.4) unter Beachtung von Gleichung (3.1) und Gleichung (3.2) in Gleichung (3.3) eingesetzt, folgt:

$$\sigma_{xx} = 2 \sigma'_{xx} + \sigma'_{yy} - \rho g(h_s - z) . \quad (3.5)$$

Für die Spannung σ_{yy} folgt analog

$$\sigma_{yy} = 2 \sigma'_{yy} + \sigma'_{xx} - \rho g(h_s - z) . \quad (3.6)$$

Werden die Gleichungen (3.5) und (3.6) in die Gleichung (2.5) sowie in die Gleichung (2.6) eingesetzt, ergibt sich unter Vernachlässigung der vertikalen Scherspannungen σ_{xz} und σ_{yz} :

$$-\rho g \frac{\partial h_s}{\partial x} + 2 \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad (3.7)$$

$$-\rho g \frac{\partial h_s}{\partial y} + 2 \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} = 0 \quad . \quad (3.8)$$

In der Schelfeisnäherung von (3.7) und (3.8) sind die horizontalen Ableitungen der Eisoberflächenhöhe ($\frac{\partial h}{\partial x}$ sowie $\frac{\partial h}{\partial y}$), der Anisotropie des Normaldruckes (σ'_{xx}) und (σ'_{yy}) und der horizontalen Scherspannung σ_{xy} miteinander verknüpft.

Die Gleichungen (3.7) und (3.8) bilden die Ausgangsgleichungen der beiden Schelfeismodelle (quasistationär, prognostisch), die in den folgenden Abschnitten entwickelt werden.

3.3.2 Das quasistationäre Schelfeismodell

Für die Modellierung auf Zeitskalen größer als 1 000 Jahre, der Zeit innerhalb der das Schelfeis bei festen Randbedingungen ins Gleichgewicht kommt, können weitere Vereinfachungen gemacht werden.

Vereinfachungen der Schelfeisnäherungen

Sinn und Zweck dieser Vereinfachungen liegen darin, zu untersuchen, ob es mit einfach konstruierten Schelfeismodellen, die besser für eine lange numerische Integration geeignet sind, möglich ist, Fragen im Bereich des Paläoklimas zu beantworten. Zum einen wird dabei auf die komplizierte Schelfeisdynamik verzichtet, die auf den Zeitskalen größer als 1 000 Jahre eine untergeordnete Rolle spielt, indem das Schelfeis nur in seinem Gleichgewichtszustand (quasistationär) betrachtet wird. Zum anderen wird das nichtlineare Fließverhalten des Eises in Gleichung (2.8) linearisiert.

Mit diesen beiden Annahmen ist es möglich, eine einfache Lösung zu konstruieren, die auch prinzipielle Aussagen über Schelfeise gestattet. Eine Überprüfung des in diesem Abschnitt entwickelten quasistationären Schelfeismodells erfolgt (Abschnitt 5.1.1 Seite 61), indem getestet wird, wie gut mit den vom Inlandeismodell in Verbindung mit der Übergangszone berechneten Eisdicken an der Aufschwimmgrenze, sich die zirkumpolare Schelfeisbedeckungen simulieren lassen.

Aus Gleichung (3.7) folgt für ein Schelfeisprofil in der x - z Ebene ($\sigma'_{yy} = \sigma_{xy} = 0$):

$$-\rho g \frac{\partial h_s}{\partial x} + 2 \frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} = 0 \quad . \quad (3.9)$$

In der Gleichung (3.9) wird die Kraft die durch der Eisoberflächengradient bewirkt wird in x -Richtung und durch die Kraft die aus dem Gradienten der Anisotropie des Normaldruckes folgt bilanziert. Durch eine Integration von Gleichung (3.9) entlang der x -Achse ergibt sich:

$$-\rho g [h_s(x) - h_s(x_f)] + 2 [\sigma'_{xx}(x) - \sigma'_{xx}(x_f)] = 0 \quad , \quad (3.10)$$

dabei ist $h_s(x)$ die Höhe der Eisoberfläche an einem Ort x innerhalb des Schelfeises und $h_s(x_f)$ die Höhe der Eisoberfläche an der Abbruchkante x_f des Schelfeises. Wird Gleichung (3.10) nach σ'_{xx} aufgelöst, folgt:

$$\sigma'_{xx}(x) = \sigma'_{xx}(x_f) + \frac{1}{2} \rho g [h_s(x) - h_s(x_f)] \quad . \quad (3.11)$$

Die Spannungsabweichung σ'_{xx} an einer Stelle x im Schelfeis hängt nach Gleichung (3.11) von der Höhendifferenz des Eises zwischen der Abbruchkante x_f und der Stelle x ab. Unbekannt bleibt in Gleichung (3.11) bei vorgegebener Eisoberflächenhöhe (h_s) noch die Spannungsabweichung $\sigma'_{xx}(x_f)$ an der Abbruchkante.

In dieser Modellentwicklung soll nicht das Fließgesetz nach Gleichung (2.8) zur Anwendung kommen, sondern eine linearisierte Version:

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = A' \sigma'_{xx} \quad . \quad (3.12)$$

Einsetzen der Gleichung (3.11) in Gleichung (3.12) liefert:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A' \left[\sigma'_{xx}(x_f) + \frac{1}{2} \rho g (h_s(x) - h_s(x_f)) \right] \quad . \quad (3.13)$$

Mit dem Ausdruck für die x -Komponente des Geschwindigkeitsgradienten in Gleichung (3.13) läßt sich durch Integration über x die Geschwindigkeit im Schelfeis ermitteln:

$$\int_{x_s}^x \frac{\partial u}{\partial x} dx' = A' \left[\sigma'_{xx}(x_f)(x - x_s) + \frac{1}{2} \rho g \int_{x_s}^x (h_s(x') - h_s(x_f)) dx' \right] \quad , \quad (3.14)$$

mit x_s einer Stelle im Schelfeis, für welche die Geschwindigkeit $u(x_s)$ bekannt sei. Bei einer unendlich weit entfernten Abbruchkante ($x_f \rightarrow \infty$), ist die Eisdicke an der Abbruchkante infinitesimal klein ($\sigma'_{xx}(x_f)$). Dies bedeutet, daß die Eisoberfläche $h_s(x_f)$ auf der Höhe des Meeresspiegels h_{ss} liegt. Damit ergibt sich der folgende Ausdruck für die Eisgeschwindigkeit eines Schelfeisprofils:

$$u(x) = u(x_s) + \frac{1}{2} A' \rho g \int_{x_s}^x [h_s(x') - h_{ss}] dx' \quad . \quad (3.15)$$

Die Ausdrücke (3.13) und (3.15) sollen für die weitere Rechnung als Funktion der Eisdicke h anstelle der Höhe der Eisoberfläche h_s ausgedrückt werden. Nach der Schwimmbedingung gilt:

$$h \rho = (h_{ss} - h_b) \rho_w, \quad (3.16)$$

wobei h_b die Höhe der Schelfeisunterseite und ρ_w die Dichte des Wassers ist. Mit der Gleichung (3.16) wird in Gleichung (3.15):

$$(h_s - h_{ss}) = c h, \quad (3.17)$$

$$\text{mit } c = \left(1 - \frac{\rho}{\rho_w}\right). \quad (3.18)$$

Zur Berechnung der stationären Form des Schelfeises wird von der eindimensionalen Massenerhaltung ausgegangen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + b = 0, \quad (3.19)$$

mit q der vertikal integrierten horizontalen Eisgeschwindigkeit u , h der Eisdicke und b der Massenbilanz. Da im Schelfeis keine vertikale Geschwindigkeitsscherung stattfindet, gilt:

$$q = u \cdot h.$$

Falls b vernachlässigt werden kann, wird:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial(u \cdot h)}{\partial x} = u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

Wird jetzt Gleichung (3.20) nach dem Gradienten der Eisdicke aufgelöst und für die Geschwindigkeit $u(x)$ die Gleichung (3.15) sowie für die Ableitung $\partial u / \partial x$ die Gleichung (3.13) unter Beachtung von Gleichung (3.17) eingesetzt, folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{h}{u(x)} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= -\frac{\frac{1}{2} A' \rho g c h^2}{u(x_s) + \frac{1}{2} A' \rho g c \int_{x_s}^x h(x') dx'} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Um einen analytischen Ausdruck für die Eisdickenverteilung zu bekommen, welches das Ziel dieser Herleitung ist, muß eine Annahme über das Integral im Nenner der Gleichung (3.21) gemacht werden: Für den Fall, daß der Ort $x > x_s$ sehr nahe bei

dem Ort x_s liegt, kann das Integral $\frac{1}{2} A' \rho g c \int_{x_s}^x h(x') dx'$ vernachlässigt werden und man erhält näherungsweise:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{A' \rho g c}{2 u(x_s)} h^2 \quad (3.22)$$

Gleichung (3.22) ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung, die jedoch nicht unlösbar ist. Sie stellt einen Spezialfall der Riccatischen Differentialgleichung dar, die mit Hilfe der Separation der Variablen gelöst werden kann. Das Ergebnis ist:

$$h(x) = \frac{h(x_s)}{1 + \frac{A' \rho g c h(x_s)}{2 u(x_s)} (x - x_s)} \quad (3.23)$$

Bei fester Eisdicke und Eisgeschwindigkeit an der Stelle x_s ist

$$\frac{A' \rho g c h(x_s)}{2 u(x_s)} = \frac{1}{d_o}, \quad (3.24)$$

eine Konstante. Mit $d = (x - x_s)$ erhält man:

$$h(x) = \frac{h(x_s)}{1 + \frac{d}{d_o}} \quad (3.25)$$

Nach Gleichung (3.25) nimmt die Eisdicke mit wachsender Entfernung (d) zur Stelle x_s ab. Der Parameter d_o kann leicht abgeschätzt werden, wenn Gleichung (3.25) nach d_o aufgelöst wird:

$$d_o = d \cdot \left(\frac{h(x_s)}{h(x)} - 1 \right)^{-1}$$

Bei einer Eisdicke an der Aufschwimmlinie $h(x_s) = 1$ km, einer Längenausdehnung des Schelfeises von 1 000 km (Ross Schelfeis), sowie einer Abbrucheisdicke von $h(x) = h(x_f) = 0.2$ km, folgt $d_o = 250$ km. Ein Schelfeisprofil nach Gleichung (3.25) mit den beschriebenen Werten ist in Abbildung 3.1 zu sehen.

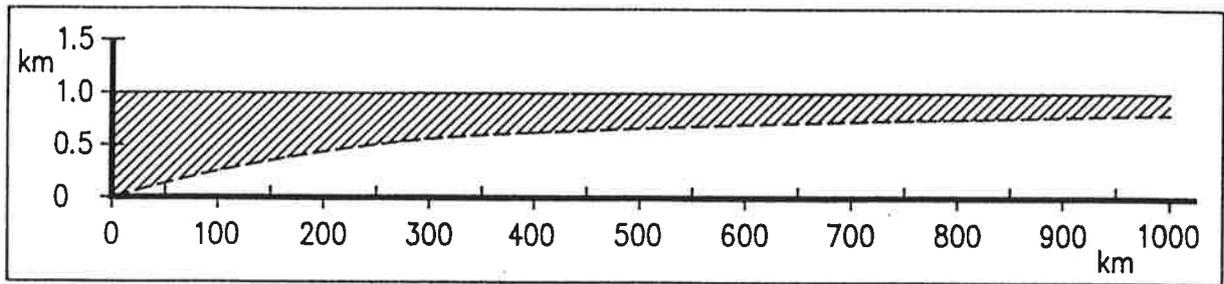


Abbildung 3.1: Profil eines analytisch bestimmten Schelfeis mit vorgegebener Eisdicke an der Aufschwimmgrenze $h(x_s)$ von 1 km, einer Eisdicke an der Abbruchkante von 0.2 km und einer Längenausdehnung d von 1 000 km mit einem Parameter d_o von 250 km.

Die einfache Darstellung der Eisdickenverteilung der Gleichung (3.25) für ein Schelfeisprofil soll nun auf ein zweidimensionales Gebiet verallgemeinert werden. Es wird versucht, die Eisdicken $h(x, y)$ im Schelfeis als ein gewichtetes Mittel der Eisdickenverteilung $h_{g,i}$ längs der Schwimmlinie (der Linie an der das Inlandeis zu schwimmen anfängt) und den jeweiligen Entfernungen d_i zur Schwimmlinie auszudrücken:

$$h(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{h_{g,i}}{1 + \frac{d_i}{d_o}} \quad (3.26)$$

Dabei ist m die Anzahl der Gitterpunkte längs der Schwimmlinie und d_o ein einmalig festgesetzter Parameter, um die nach Gleichung (3.26) modellierten Schelfeisdicken an Beobachtungen anpassen zu können. Das gewichtete Mittel zur Bestimmung der Schelfeisdicke $h(x, y)$ Gleichung (3.26), ist nicht direkt zeitabhängig; jedoch abhängig von der Eisdicke h_g an der Aufschwimmlinie. Diese wird wiederum von dem prognostischen Inlandeismodell sowie von der Übergangszone bestimmt und liegt auf der Zeitskala des Inlandeises.

In Abbildung 3.2 ist am Beispiel des simulierten Ronne-Filchner Schelfeises gezeigt, wie die Eisdickenberechnung für eine Ebene vollzogen wird. In diesem einfachen, analytischen Modell wird deutlich, daß die Berechnung der Schelfeisgebiete entscheidend von den Eisdicken an der Aufschwimmgrenze abhängt. Auf die Berechnung der Eisdicken an der Aufschwimmlinie wird im Abschnitt 3.4 eingegangen.

Im Hinblick auf eine Berechnung der Schelfeisdicken nach Gleichung (3.26) in einem

gekoppelten System des prognostischen Inlandeismodells (Abschnitt 3.2) mit dem quasistationären Schelfeismodell erlangen die beiden Größen x_g und h_g eine besondere Bedeutung für die Form (3.26), die nachfolgend verdeutlicht wird (siehe auch Abbildung 3.2):

- die Position der Aufschwimmgrenze x_g muß hinreichend, und im Bedarfsfall mit einer größeren Auflösung als die Gitterauflösung im Modell, bekannt sein. Damit wird sichergestellt, daß mögliche Änderungen in der Position der Aufschwimmgrenze nicht von der äquidistanten Gitterauflösung (100 km) abhängen und folglich bei Änderungen des Meeresspiegels eine kontinuierliche Bewegung der Aufschwimmgrenze erfolgen kann.
- die Eisdicke h_g an der Aufschwimmgrenze g muß bekannt sein. Dies ist eine Größe, die zwar von dem Eisfluß aus dem Inlandeis abhängt, aber von der Übergangszone mit bestimmt wird (Abschnitt 3.4).

Das Oerlemans Schelfeis

Eine ähnliche Parameterisierung für die Schelfeisdicke im Gleichgewicht haben [Oerlemans, J. and C.J. Van der Veen, 1982, S.183] vorgeschlagen. Ihr Inland-Schelfeismodell (ohne Übergangszone) hat die gleiche Gitterauflösung, wie das Modell in der vorliegenden Arbeit. Die Schelfeisdicke $h(x, y)$ an einem Gitterpunkt (i,j) im Schelfeis ist gegeben durch:

$$h(x, y) = \frac{1}{Q} \int_0^{2\pi} \frac{h_\lambda}{Y^p} d\lambda \quad , \quad (3.27)$$

mit λ einer bestimmten Richtung in der Horizontalebene, h_λ der Eisdicke an der Aufschwimmgrenze und Y der Distanz in Richtung von λ zwischen einem Schelfeispunkt (x,y) und der Aufschwimmgrenze. Der Wert des Exponenten p beträgt 1,5. Q ist eine Normalisierungskonstante. Im numerischen Modell wurde nur über vier Richtungen gemittelt. Mit der Form (3.27) erreichte Oerlemans bereits eine Simulation der Eisbedeckung der drei größten Schelfeisgebiete der Antarktis.

Der Ansatz von Oerlemans hat jedoch gegenüber der Form (3.26) den Nachteil, daß direkt an der Aufschwimmlinie ($Y = 0$), Gleichung (3.27) singulär wird. Weiterhin beruht die Form auf einem empirischen Ansatz, im Gegensatz zur Gleichung (3.26), die an die Eisdynamik angelehnt ist. Ein weiterer Kritikpunkt an der Form (3.27) ist, wie in Abschnitt (5.3.2) deutlich wird, die Mittelung über nur vier Raumrichtungen, die in Konflikt gerät mit der gängigen Vorstellung der numerischen Behandlung des Ross

Schelfeis (siehe auch MacAyeal, D.R. and R.H. Thomas, 1982,1986), denn das Ross Schelfeis wird nur durch wenige diskrete Eiskanäle ernährt. Außerdem fließt nahezu kein Eis, bis auf kleinere unbedeutende Gletscher, aus der an der Ostseite flankierenden Transantarktischen Gebirgskette ins Ross Schelfeis hinein.

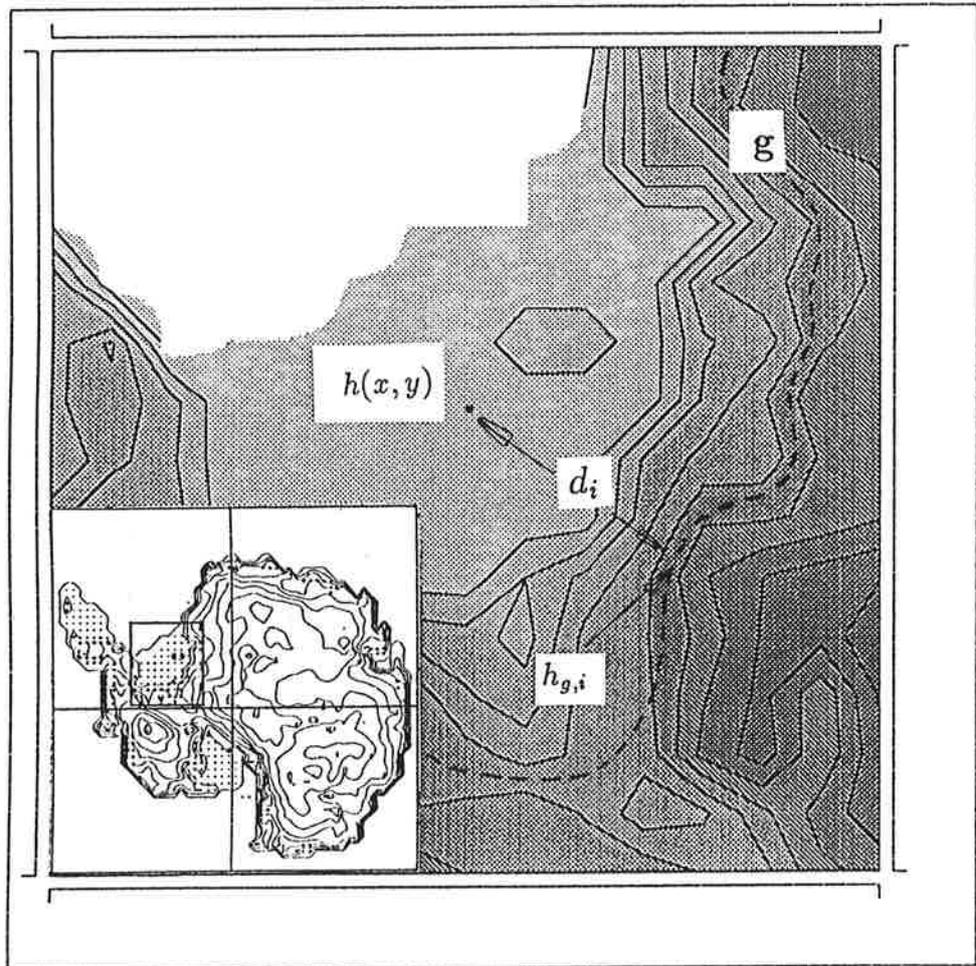


Abbildung 3.2: Arbeitsweise des analytischen Modells, dargestellt am Ronne-Filchner Schelfeis: Die Eisdicke $h(x, y)$ am Punkt (x, y) innerhalb des Schelfeises ist durch die Eisdicke $h_{g,i}$ an der Aufschwimmlinie g und den Abstand d vom Punkt (x, y) zur Aufschwimmlinie bestimmt. Der einmalig festgelegte Parameter $d_o = 250$ km soll das Modell an die Beobachtungen justieren.

3.3.3 Das prognostische Schelfeismodell

Für transiente Zustände des Schelfeises, die sich auf einer Zeitskala von weniger als 1 000 Jahre abspielen, einem Zeitbereich, indem das Schelfeis noch nicht im Gleichgewicht ist, ist es erforderlich, sich mit den dynamischen Vorgängen im Schelfeis näher zu beschäftigen. Insbesondere müssen nun die Eisgeschwindigkeiten im Schelfeis, die im quasistationären Schelfeismodell nicht mehr enthalten sind, explizit berechnet werden. Die Divergenz dieses Geschwindigkeitsfeldes bestimmt über die Massenerhaltung (Gleichung (3.19)) die zeitliche Änderung der Eisdicke.

So ist für die Modellierung des gekoppelten Systems Ozean Schelfeis ein prognostisches Schelfeismodell Voraussetzung, um Wechselwirkungen, insbesondere für die Temperatur- und Dichteberechnung, in beiden Medien zu berücksichtigen. Ebenso ist es erforderlich mit einem dynamischen Schelfeismodell zu arbeiten, wenn transiente Zustände bei Stabilitätsrechnungen zur Westantarktis betrachtet werden sollen.

In der prognostischen Modellversion kommen die kompletten Gleichungen der im Schelfeis gültigen Kräftebilanz, Gleichung (3.7) und Gleichung (3.8), zur Anwendung. Um einen Ausdruck für die Geschwindigkeiten im Schelfeis zu erhalten, wird die Beziehung zwischen Spannung und Verformung (Gleichung (2.8)) benötigt. Eine dem Fließgesetz analoge Form gilt auch für die effektive Deformationsrate ($\dot{\epsilon}$) und die effektive Spannung (σ) [Paterson, W.S.B., 1981]:

$$\dot{\epsilon} = A(T') \sigma^n \quad (3.28)$$

Wird das Fließgesetz (2.8) nach (σ'_{ij}) aufgelöst und die effektive Spannung σ in Gleichung (2.8) durch Gleichung (3.28) ersetzt, folgt:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{A(T') \left(\frac{\dot{\epsilon}}{A(T')} \right)^{\frac{1}{n} \cdot (n-1)}} \quad (3.29)$$

Wird der Nenner der Gleichung (3.29) nach den Potenzregeln ausmultipliziert, so gilt:

$$\sigma'_{ij} = \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{A(T')^{\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{(1-\frac{1}{n})}} \quad (3.30)$$

Nach Gleichung (3.30) ergibt sich für die in Gleichung (3.7) und Gleichung (3.8) enthaltenen Spannungen:

$$\sigma'_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} A(T')^{-\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{-(1-\frac{1}{n})}, \quad (3.31)$$

$$\sigma'_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} A(T')^{-\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{-(1-\frac{1}{n})}, \quad (3.32)$$

$$\sigma'_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} A(T')^{-\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{-(1-\frac{1}{n})}, \quad (3.33)$$

$$\sigma'_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) A(T')^{-\frac{1}{n}} \dot{\epsilon}^{-(1-\frac{1}{n})} \quad (3.34)$$

Wobei die in Gleichung (3.30) enthaltenen Komponenten des Tensors der Deformationsrate nach Gleichung (2.10) durch Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten ersetzt worden sind. In den Gleichungen (3.31), (3.32), (3.33) und (3.34) stehen noch die effektiven Deformationsraten ($\dot{\epsilon}$), die durch Geschwindigkeitsableitungen ersetzt werden sollen. Im Schelfeis vereinfacht sich der Ausdruck (2.11) für die effektive Deformationsrate zu:

$$\dot{\epsilon} = \left[\frac{1}{2} (\dot{\epsilon}_{xx}^2 + \dot{\epsilon}_{yy}^2 + \dot{\epsilon}_{zz}^2) + \dot{\epsilon}_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.35)$$

Mit

$$\dot{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \dot{\epsilon}_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \dot{\epsilon}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.36)$$

wird die effektive Deformationsrate (Gleichung (3.35)) zu:

$$\dot{\epsilon} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

In Gleichung (3.37) tritt die vertikale Ableitung der Vertikalkomponente der Eisesgeschwindigkeit $\partial w / \partial z$ auf, die mit Hilfe der im Eis gültigen Inkompressibilität ersetzt wird zu:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (3.38)$$

Wird jetzt Gleichung (3.37) unter Berücksichtigung von Gleichung (3.38) in die Gleichungen (3.31), (3.32), (3.33) und (3.34) eingesetzt, gehen die Gleichungen für die Schelfeisnäherung (Gleichung (3.7) und Gleichung (3.8)) nach Multiplikation mit $A(T')^{\frac{1}{n}}$ über in:

$$- \rho g A(T')^{\frac{1}{n}} \frac{\partial h_s}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} f \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) f \right] = 0 \quad (3.39)$$

und

$$- \rho g A(T')^{\frac{1}{n}} \frac{\partial h_s}{\partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} f \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) f \right] = 0, \quad (3.40)$$

Dabei steht der Term f für den nichtlinearen Anteil, der im wesentlichen die effektive Deformationsrate enthält. Mit Gleichung (3.37) und Gleichung (3.38) wird:

$$f = \dot{\epsilon}^{-(1-\frac{1}{n})} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})} \quad (3.41)$$

Die beiden Gleichungen (3.39) und (3.40) bilden ein geschlossenes System von zwei nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ, für die zwei unbekanntes Geschwindigkeitskomponenten u, v , die nur noch numerisch gelöst werden können. Beide Gleichungen (3.39) und (3.40) verknüpfen in diagnostischer Weise die Form des Schelfeises ($\partial h_s / \partial x, \partial h_s / \partial y$) mit den Geschwindigkeiten im Eis. Der Einfluß des nichtlinearen Terms f auf das Lösungsverhalten wird im Abschnitt 5.2, (S. 69) untersucht. In den numerischen Experimenten zeigen sich in der Tat sichtbare Unterschiede zwischen linearem und nichtlinearem Fließverhalten des Eises.

Es läßt sich, im Gegensatz zum Inlandeismodell, bei dem es mit Hilfe der Flacheisnäherung möglich war einen geschlossenen Ausdruck für die Geschwindigkeiten zu finden (Gleichung 3.4, Seite 16), aus den Schelfeisnäherungen (Gleichung (3.39) und Gleichung (3.40)) kein analytischer Ausdruck mehr für die Geschwindigkeiten finden. Damit ist grundsätzlich die Berechnung der Geschwindigkeiten im Schelfeis aufwendiger als im Inlandeis. Gemeinsam ist beiden Modellen, daß die Gleichungen zur Geschwindigkeitsberechnung keine Zeitabhängigkeit besitzen und demzufolge die Gleichungen diagnostischer Natur sind.

Im prognostischen Schelfeismodell wird in erster Näherung mit einer konstanten Temperatur ($T = -10 \text{ }^\circ\text{C}$) gerechnet. Die Konstante $A(T')$ hat dann nach [Paterson, W.S.B., Tabelle 3.3, (S. 39); 1983] den Wert $A(-10 \text{ }^\circ\text{C}) = 5.2 \cdot 10^{-16} \text{ s}^{-1} \text{ KPa}^{-3}$.

Das numerische Schema zur Lösung des Systems der Gleichungen (3.39) und (3.40), wird im Kapitel 4 erklärt.

3.4 Modellierung der Übergangszone zwischen Inlandeis und Schelfeis

Die Existenz, aber auch die Definition der Übergangszone, ist bisher noch umstritten. So sind bisher noch keine Beobachtungsdaten vorhanden um die aus theoretischen Überlegungen abgeleitete Übergangszone zu bestätigen. Eine strenge Definition der Übergangszone ist bisher ebenfalls nicht erfolgt. So ist die Ausdehnung der Übergangszone bei verschiedenen Autoren unterschiedlich. Nach [Herterich, K., 1987] ist allein aus den physikalischen Bedingungen, welche die Übergangszone charakterisieren, eine plausible Definition möglich. Im Abschnitt 3.4.1 wird auf diese Bedingungen näher eingegangen, um daraus Gleichungen abzuleiten mit denen eine Kopplung des Inlandeismodells mit dem Schelfeismodell möglich ist. Der darauffolgende Abschnitt 3.4.2 beschäftigt sich mit der Formulierung der Kopplung, die sich im wesentlichen auf die Kräftebilanz im Übergangsgebiet zwischen Inlandeis und Schelfeis stützt. Eine Größenabschätzung des Zugterms in der Kräftebilanz sowie ein Vergleich mit dem Druckunterschied zwischen Inlandeis und Schelfeis erfolgt anschließend (Abschnitt 3.4.3). Eine Bedingung um die Eiskanäle zu finden, die die Schelfeise im wesentlichen ernähren, ist im Abschnitt 3.4.4 definiert. Die Grenzen des Kopplungsverfahrens werden im Abschnitt 3.4.5 diskutiert.

Der erste Hinweis auf die Existenz einer Übergangszone zwischen Inlandeis und Schelfeis kam von [Weertman, J., 1974]. Er folgerte unter der Annahme der vollkommenden Plastizität (siehe Abbildung 2.3), daß im Bereich der Übergangszone die Spannung am Boden (σ_{xz}) von gleicher Größenordnung sein muß, wie die longitudinale Zugspannung (σ'_{xx}) und, daß Gleichgewichtsbedingungen in diesem Bereich nur existieren können, wenn die Eisdicke des schwimmenden Teils des Eises sich nicht wesentlich von dem auf Grund liegenden Eis unterscheidet. Doch diesen theoretischen Überlegungen - Messungen gibt es bis heute nicht - wurde lange Zeit keine Beachtung geschenkt.

Erst [Van der Veen, C.J., 1985] griff diese Gedanken wieder auf. Sein zweidimensionales gekoppeltes Inlandeis Schelfeismodell enthält eine Übergangszone, die sich nur stromaufwärts vom Aufschwimmpunkt erstreckt. Die Breite des Übergangsgebietes wurde mit 150 km fixiert, bei einer Gitterauflösung von 50 km. Demzufolge fallen drei Gitterpunkte in das Übergangsgebiet; eine Minimalforderung, um die Kräftebilanz im Übergangsgebiet noch numerisch definieren zu können.

Ein wesentlicher Beitrag zur Problematik der Übergangszone, ist in der Arbeit von [Herterich, K., 1987] zu finden. In seinem zweidimensionalen Modell für ein Vertikalprofil der Übergangszone wird die komplette zweidimensionale Kräftebilanz nach Gleichung

(2.5) und Gleichung (2.7) betrachtet. Das Koordinatensystem im dem Modell hat seine x-Achse in Fließrichtung. Ausgehend von Gleichung (3.7) läßt sich in ähnlicher Weise wie für das prognostische Schelfeismodell (Abschnitt 3.3.3) eine Gleichung für die Geschwindigkeitskomponenten u, w in einer Vertikalebene ableiten:

$$- \rho g A (T')^{\frac{1}{n}} \frac{\partial h_s}{\partial x} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} f_{\ddot{u}} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) f_{\ddot{u}} \right] = 0 \quad . \quad (3.42)$$

Zusammen mit der Inkompressibilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.43)$$

resultiert ein geschlossenes System zur Bestimmung von u, w . In Gleichung (3.42) treten sowohl typische Inlandeis- als auch typische Schelfeisterme auf. Der zweite Term in der Gleichung ist ein typischer Schelfeistern, der aus der Anisotropie des Normaldruckes resultiert. Der dritte Term, ein charakteristischer Inlandeistern, entsteht durch vertikale Scherungsspannungen. Die Größe $f_{\ddot{u}}$ beinhaltet den nichtlinearen Anteil an der Gleichung und lautet:

$$f_{\ddot{u}} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)} \quad . \quad (3.44)$$

Als Ergebnis der numerischen Rechnungen zur Übergangszone von Herterich kann festgehalten werden, daß die Breite des Übergangsbereichs in der gleichen Größenordnung wie die Eisdicke liegt und damit klein in seiner Erstreckung gegenüber dem Inland- und Schelfeis ist. Ein weiteres Resultat ist, daß die Übergangszone, entgegen den Überlegungen von [Van der Veen, C.J., 1983, 1985], sich auch stromabwärts des Aufschwimmpunktes fortsetzt. Somit reicht die Übergangszone auch in den schwimmenden Teil des Eises hinein. Durch die im Vergleich zum Inlandeis und Schelfeis geringere horizontale Erstreckung des Übergangsgebietes, kann indirekt gefolgert werden, daß die Einstellzeit bei vergleichbarer Geschwindigkeit ins Gleichgewicht in der Übergangszone wesentlich geringer ist als im Inlandeis und Schelfeis. Eine weitere Eigenschaft der Übergangszone besteht darin, die im Inlandeis maßgeblichen vertikalen Scherspannungen (σ_{xz}) abzubauen und die Zugspannungen (σ'_{xx}) aufzubauen.

Die Abbildung 3.3 zeigt schematisch, wie sich die Geschwindigkeitsprofile in den drei Bereichen (Inlandeis, Schelfeis und Übergangszone) darstellen lassen. Im Inlandeis ist die horizontale Ableitung der Horizontalkomponente der Eisgeschwindigkeit klein gegen ihre vertikale Ableitung. Im Schelfeis verschwindet jedoch die vertikale Ableitung der Horizontalkomponente der Eisgeschwindigkeit ($\frac{\partial u}{\partial z} = 0$) und die horizontale Ableitung der Horizontalkomponente der Geschwindigkeit ist von Null verschieden ($\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$). Im

Übergangsgebiet sind jedoch beide Ableitungen $\partial u / \partial x$ und $\partial u / \partial z$ von gleicher Größenordnung. Damit läßt sich eine plausible, allein durch die Geschwindigkeitsableitungen charakterisierte, Definition für die Übergangszone angeben.

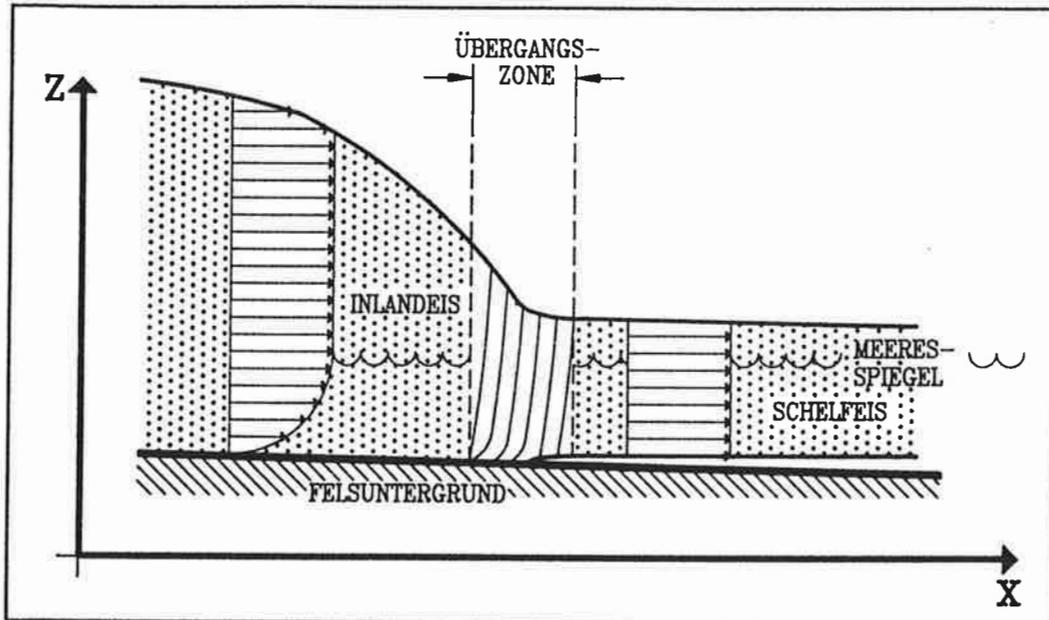


Abbildung 3.3: Geschwindigkeitsprofile in den drei Näherungen Inlandeis, Schelfeis und Übergangszone. Bei den unterschiedlichen Profilen spielen die Randbedingungen am Boden eine maßgebliche Rolle nach [Herterich, K. 1987].

Es bleibt aber noch zu klären, in wieweit die Übergangszone in einem gekoppelten Modell berücksichtigt werden muß und welchen Einfluß diese auf die beiden angrenzenden Regionen (Inlandeis und Schelfeis) ausübt. Die Resultate von [Van der Veen, C. J., 1985] zeigen, daß die Modellläufe mit Berücksichtigung einer Übergangszone weniger sensitiv auf Meeresspiegeländerungen reagieren als die ohne Übergangszone. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Übergangszone wie ein Puffer wirkt. Modelle ohne Übergangszone, wie die Modelle von [Lingle, C.S., 1984], [Fastook, J.L., 1984], sowie von [Thomas, R. and Bentley, C.R., 1978] zeigen eine empfindlichere Reaktion des Inlandeises auf Meeresspiegeländerungen. Offensichtlich gehören die Vorgänge, die in der Übergangszone stattfinden, zu den wichtigen Prozessen in der Wechselwirkung von Inland- und Schelfeis.

Um auf den Gedanken des stetigen Übergangs von [Weertman, J., 1974] wieder zurück zu kommen und um auf die notwendigen Bedingungen einer Kopplung des prognostischen Inlandeismodells mit einem Schelfeismodell einzugehen, erfolgt im nächsten Abschnitt

nochmal eine Zusammenfassung der bisherigen Kenntnis der Übergangszone.

3.4.1 Kennzeichen der Übergangszone

Bevor die Kenntnisse der Übergangszone, die auf numerischen Rechnungen [Herterich, K. 1987] und analytischen Betrachtungen basieren [Herterich, K., 1990], in einem Kopplungsverfahren Eingang finden, werden die wesentlichen Merkmale der Übergangszone nochmal verdeutlicht:

1. Um eine realistische, zeitskalengetreue Verbindung zwischen Inlandeis und Schelfeis zu erhalten, ist es notwendig, ein Bindeglied entsprechend einer Übergangszone zu modellieren.
2. Die Ausdehnung der Übergangszone ist klein gegenüber der Ausdehnung von Inland- und Schelfeis.
3. Die Übergangszone ist deshalb quasistationär, da ihre Zeitkonstante kleiner als die des Inland- und Schelfeises ist.
4. Der Eisfluß aus dem Inlandeis in die Übergangszone ist gleich dem Eisfluß aus der Übergangszone in das Schelfeis.
5. Die Breite des Übergangsgebietes hängt vom Eisfluß aus dem Inlandeis ab.
6. Die Übergangszone bestimmt den Ort der Aufschwimmlinie.
7. Die Übergangszone muß die Randbedingungen für das angrenzende Schelfeismodell liefern.

Um diesen sieben Punkten im Modell gerecht zu werden, ist es im Grunde notwendig, ein eigenes Übergangsmodell zu entwickeln. Doch anschließend entsteht ein Problem der Gitterauflösung, wenn das entwickelte Übergangsmodell in diesem äquidistanten groben Gitter (100 km) verwendet werden soll, denn es hätte mit seiner geringen horizontalen Ausdehnung (etwa 30 km) höchstens einen Gitterpunkt zur Verfügung. Um dieses Problem zu umgehen bieten sich drei Möglichkeiten an. Zum einen kann die Übergangszone mit einer höheren Gitterauflösung versehen werden und wird dann als eigenes Modell in dieses grobe Modellgitter genestet. Oder, es wird mit adaptiven Gittern gearbeitet, bei denen es möglich ist interessante Gebiete im Modell höher aufzulösen. Dieses Verfahren ist jedoch aufwendig und nicht ganz unproblematisch wie in einem ähnlichen Auflösungsproblem bei einem Fall der atmosphärischen Konvergenz (Berechnung von Rollen in der

Atmosphäre) gezeigt wurde [Sündermann, A., 1990]. Mit diesem Verfahren würden jedoch auch schnell die Grenzen der vertretbaren Rechenkapazitäten überschritten werden, die dann für das gekoppelte System mit adaptiver Gitterauflösung benötigt werden. Die letzte Möglichkeit mit einer eigens modellierten Übergangszone zu rechnen, besteht darin, das mathematische Verfahren zu Gunsten der Methode der finiten Elemente zu wechseln. Mit dieser Methode ist es einfacher, als mit der hier verwendeten Methode der finiten Differenzen interessante Gebiete eingehender zu betrachten. Doch die Methode der finiten Elemente ist mathematisch wesentlich aufwendiger, als die hier verwendete. Außerdem müssen dann alle Teilmodelle auf die Methode der finiten Elemente umgeschrieben werden.

In dieser Arbeit wird keines der beschriebenen Möglichkeiten genutzt, sondern die Übergangszone wird, bedingt durch ihre geringe horizontale Auflösung als subskaliger Prozeß in diesem Modell behandelt. Damit reicht es aus sich auf die wesentlichen Größen der Übergangszone, die für eine Kopplung notwendig sind zu beschränken. So reicht die Kenntnis der Position der Aufschwimmlinie sowie die Eisdicke am Aufschwimmpunkt aus, um die Randbedingungen für das angrenzende Schelfeis festzulegen.

3.4.2 Die integrale Kräftebilanz zwischen Inland- und Schelfeis

Die Randbedingungen, die für das quasistationäre Schelfeismodell festgelegt werden müssen sind, die Orte der Aufschwimmpunkte x_g und die Eisdicken an den Aufschwimmpunkten $h_{g,i}$. Damit sind auch die jeweiligen Distanzen zwischen den Aufschwimmpunkten und den Schelfeisgitterpunkten im Modell gegeben, womit die Eisdickenverteilung im (quasistationären) Schelfeis nach Gleichung (3.26) berechnet werden kann (siehe auch Abbildung 3.2).

Für das prognostische Schelfeismodell werden zusätzlich noch die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten (u, v) benötigt (siehe Gleichung (3.64)).

Für die zwei Unbekannten x_g und h_g des quasistationären Schelfeismodells stehen zwei Gleichungen zur Verfügung: die integrale Kräftebilanz zwischen Inland- und Schelfeis und die Schwimmbedingung.

Durch die Verwendung der Impulsbilanz nebst der Schwimmbedingung gelingt es die Übergangszone als subskaligen Prozeß im Modell zu behandeln. Der numerische Rechenzeitaufwand für die Übergangszone (Berechnung der Aufschwimmpunkte) liegt in

derselben Größenordnung wie der des quasistationären Schelfeismodells.

Die zweidimensionale Kräftebilanz (2.4) wird über das von der Eisoberfläche, der Eisunterfläche und den beiden Senkrechten (1,4) und (2,3) begrenzte Gebiete (siehe Abbildung 3.4) integriert und mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Linienintegral umgewandelt. Aus der x-Komponente der Kräftebilanz erhält man daraus das Linienintegral:

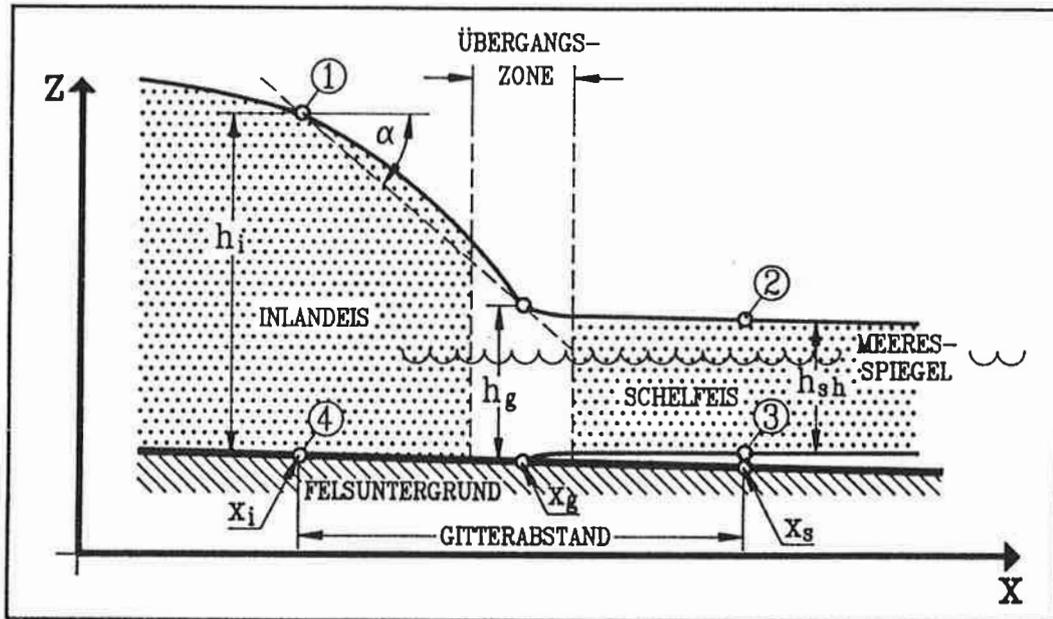


Abbildung 3.4: Vertikaler Schnitt, rechtwinklig zur Aufschwimmgrenze, durch die drei im Modell realisierten Näherungen von Inlandeis, Schelfeis und Übergangszone. Die eingezeichneten Ziffern beschreiben den geschlossenen Weg (12341) der Integration der Impulsbilanz [Böhmer, W. and K. Herterich, 1990].

$$\oint (\sigma_{xx} dn_x + \sigma_{xz} dn_z) = 0 . \quad (3.45)$$

Dabei ist σ_{xx} der Normaldruck in x-Richtung, σ_{xz} die vertikale Scherspannung und $\vec{n} = (n_x, n_z)$ der nach außen gerichtete Normalenvektor längs des geschlossenen Weges (1,2,3,4,1, siehe Abbildung 3.4) mit $|dn|^2 = dx^2 + dz^2$.

Das Linienintegral wird in vier Teilintegrale zerlegt:

Integral (1 - 2): Dieses Integral verschwindet, da der atmosphärische Druck vernachlässigbar gegenüber den anderen im Eis auftretenden Drücken ist ($\sigma_{xx} = 0$) und an der Eisoberfläche von der Atmosphäre her keine Scherkräfte aufrechterhalten werden können ($\sigma_{xz} = 0$).

Integral (4 - 3): Für einen flachen Eisboden ist $dn_x = 0$. Ferner ist für $x > x_g$, $\sigma_{xz} = 0$. Damit reduziert sich dieses Teilintegral auf eine Integration über die Scherkräfte σ_{xz} am Eisboden zwischen $x = x_g$ und $x = x_i$:

$$\int_{4-3} \sigma_{xz} dn_z = - \int_{x_i}^{x_g} \sigma_{xz} dx = -\bar{\sigma}_{xz} (x_g - x_i). \quad (3.46)$$

Integral (4 - 1): Längs der Vertikale (4-1) ist $(dn_x, dn_z) = (-dz, 0)$ und es gilt die Inlandeisnäherung ($\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = -\rho g (h_s(x_i) - z)$):

$$\begin{aligned} \int_{4-1} \sigma_{xx} dn_x &= \int_{h_b(x_i)}^{h_s(x_i)} \rho g (h_s(x_i) - z) dz = \left[\rho g h_s(x_i) \cdot z - \rho g \frac{1}{2} z^2 \right]_{h_b(x_i)}^{h_s(x_i)}, \\ &= \rho g \frac{1}{2} (h_s(x_i)^2 - 2 h_s(x_i) \cdot h_b(x_i) + h_b(x_i)^2) \\ &= \frac{1}{2} \rho g h_i^2 \quad \text{falls } h_b(x_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dabei ist h_i die Inlandeisdicke. Demzufolge wirkt von der Inlandeisseite in Fließrichtung des Eises der Druck $\frac{1}{2} \rho g h_i^2$ auf die Übergangszone.

Integral (3 - 2): Längs der Vertikalen (3-2) ist $(dn_x, dn_z) = (dz, 0)$ und es gilt die Schelfeisnäherung ($\sigma_{xz} = 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} + 2 \sigma'_{xx}$ mit $\sigma_{zz} = -\rho g (h_s(x_s) - z)$):

$$\begin{aligned} \int_{2-3} \sigma_{xx} dn_x &= \int_{h_b(x_s)}^{h_s(x_s)} \left[-\rho g (h_s(x_s) - z) + 2 \sigma'_{xx} \right] dz \\ &= \left[-\rho g h_s(x_s) \cdot z + \rho g \frac{1}{2} z^2 + 2 \sigma'_{xx} z \right]_{h_b(x_s)}^{h_s(x_s)}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen liefert:

$$\begin{aligned} &= -\rho g \frac{1}{2} (h_s^2(x_s) - 2 h_s(x_s) \cdot h_b(x_s) \\ &\quad + h_b^2(x_s)) + 2 \sigma'_{xx} h_{sh} \quad (3.48) \\ &= -\frac{1}{2} \rho g h_{sh}^2 + 2 \sigma'_{xx} h_{sh} \quad \text{falls } h_b(x_s) = 0. \end{aligned}$$

Dabei ist h_{sh} die Schelfeisdicke. Somit wirkt von der Schelfeisseite entgegen der Fließrichtung des Eises ein Druck $-\frac{1}{2} \rho g h_{sh}^2$ und eine Zugkraft $2 \sigma'_{xx} h_{sh}$ in Fließrichtung ($\sigma'_{xx} > 0$).

Die Summe aller Teilintegrale liefert schließlich:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_i^2 - h_{sh}^2) + 2 \sigma'_{xx} h_{sh} = \bar{\sigma}_{xz} (x_g - x_i). \quad (3.49)$$

In Gleichung (3.49) bilanziert sich der Druckunterschied, hervorgerufen durch die unterschiedlichen Eisdicken im Inland- und Schelfeis und die Zugkraft vom Schelfeis her, mit den mittleren Bodenscherkräften längs des Weges von x_i bis x_g . Der Term σ'_{xx} nimmt zwar mit zunehmender Entfernung von der Abbruchkante des Schelfeises in Richtung der Aufschwimmlinie zu und erreicht seinen Maximalwert im Bereich der Übergangszone, jedoch kann die Zugkraft $2\sigma'_{xx} h_{sh}$ im Vergleich zu den anderen Termen der Gleichung (3.49) womöglich vernachlässigt werden, wie der nächste Abschnitt zeigt.

3.4.3 Abschätzung des Zugterms der Kräftebilanz

In Gleichung (3.49) ist der Zugterm $2\sigma'_{xx} h_{sh}$, vernachlässigt worden. Um dies näher zu begründen, folgt in diesem Abschnitt eine Größenabschätzung. Die Spannung σ'_{xx} stellt mit positivem Vorzeichen einen Zug für das Schelfeis dar, der im Schelfeis in Richtung der Abbruchkante zu einer Abnahme der Eisdicke führt.

Ausgehend von der Kräftebilanz (3.9), folgt durch Integration längs der x-Achse von einem Punkt $x = x_s$ im Schelfeis nahe der Aufschwimmlinie bis zur Abbruchkante $x = x_f$:

$$\sigma'_{xx}(x_s) = \sigma'_{xx}(x_f) + \frac{1}{2} \rho g [h_{sh}(x_s) - h_{sh}(x_f)] \quad (3.50)$$

Die Anisotropie des Normaldruckes an der Stelle $x = x_s$ hängt ab von der Anisotropie an der Abbruchkante $x = x_f$ des Schelfeises und von der Höhendifferenz der Schelfeisoberfläche zwischen x_s und x_f .

Zunächst wird die Anisotropie des Normaldruckes an der Abbruchkante bestimmt. Mit der Annahme, daß sich das Eis an der Abbruchkante unbeschleunigt bewegt, herrscht ein Gleichgewicht zwischen den wasserseitigen Druck F_w und dem Druck F_{eis} von der Schelfeisseite:

$$F_{eis} = F_w \quad \text{oder,}$$

$$\int_{h_b}^{h_s} \sigma_{xx}(z) dz = - \int_{h_b}^{h_{ss}} \rho_w g (h_{ss} - z) dz \quad (3.51)$$

Dabei ist h_s die Höhe der Schelfeisoberfläche, h_b die Höhe der Schelfeisunterseite, h_{ss} die Höhe des Meeresspiegels und ρ_w die Meerwasserdichte.

Eine schematische Darstellung, der für die Integration notwendigen Größen ist im unteren Teil der Abbildung 3.5, Seite 39 zu finden.

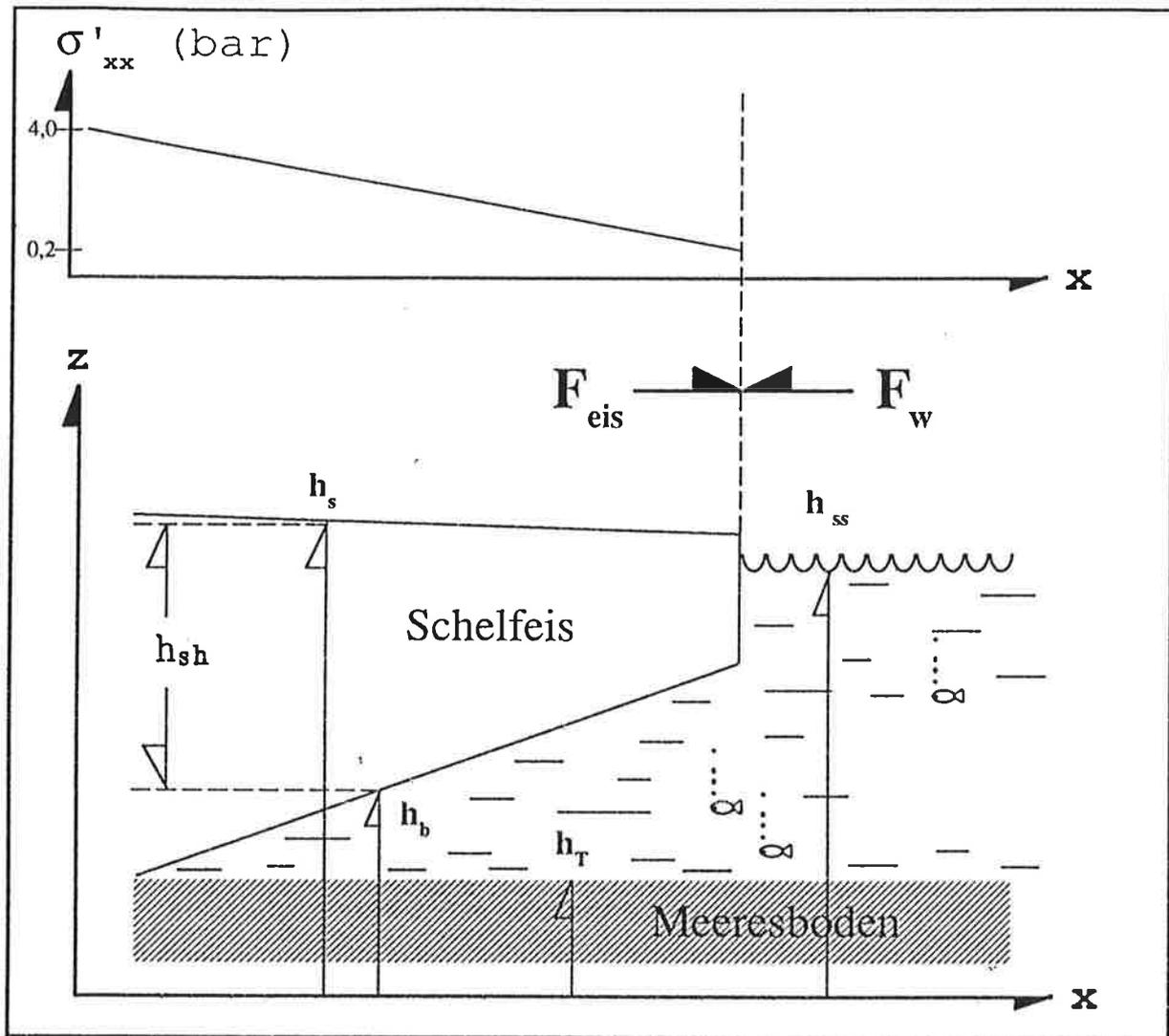


Abbildung 3.5: Skizze zur Verdeutlichung der Variablen, die zur Abschätzung des Druckes an der Abbruchkante, zwischen Schelfeis (F_{eis}) und Wasser (F_w) notwendig sind. Dabei zeigt der obere Teil die Zunahme der Zugspannung (σ'_{xx}) nach Gleichung (3.56).

Die linke Seite von Gleichung (3.51) kann nach Gleichung (3.5) für den zweidimensionalen Fall ($\sigma'_{yy} = 0$) in zwei Teilintegrale zerlegt werden:

$$\int_{h_b}^{h_s} 2 \sigma'_{xx}(z) dz - \rho g \int_{h_b}^{h_s} (h_s - z) dz = -\rho_w g \int_{h_b}^{h_{ss}} (h_{ss} - z) dz . \quad (3.52)$$

Wir nehmen an, daß σ'_{xx} unabhängig von z ist. Dies ist eine häufig gemachte Annahme und ist von [Budd, W.F., 1970] eingehend diskutiert worden. Ausführen der Integration liefert sofort:

$$2 \sigma'_{xx}(h_s - h_b) + \rho g \frac{1}{2} [h_s - z]^2 \Big|_{h_b}^{h_s} = \rho_w g \frac{1}{2} [h_{ss} - z]^2 \Big|_{h_b}^{h_{ss}} . \quad (3.53)$$

Mit der Schelfeisdicke $h_{sh} = h_s - h_b$ und der Schwimmbedingung Gleichung (3.16), folgt, wenn $h_b = 0$, die Beziehung:

$$2 \sigma'_{xx} h_{sh} - \frac{1}{2} \rho g h_{sh}^2 = -\rho_w g \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho_w} h_{sh} \right)^2 . \quad (3.54)$$

Wird diese Gleichung nach σ'_{xx} aufgelöst und die Gleichung (3.18) benutzt, ergibt sich an der Abbruchkante:

$$\sigma'_{xx}(x_f) = \frac{1}{4} \rho g h_{sh} c . \quad (3.55)$$

Zusammenfassend für die Größenabschätzung zwischen der Zugkraft im Schelfeis und dem Druckunterschied zwischen Inlandeis und Schelfeis kann der Term σ'_{xx} , der aus zwei Termen besteht, wie folgt ausgedrückt werden.

$$\sigma'_{xx}(x) = \frac{1}{4} \rho g h_{sh} c + \frac{1}{2} \rho g [h_s(x_d) - h_s(x_f)] . \quad (3.56)$$

Die mittlere Eisdicke an der Abbruchkante beträgt etwa 200 m, damit herrscht ein Druck - gemäß den oben gemachten Annahmen - von 0.22 bar. Wird die Eishöhe an einem beliebigen Ort x_d im Schelfeis an die Aufschwimmgrenze x_g verlegt [$h_s(x_d) = h_s(x_g)$], so beträgt die Eishöhendifferenz von der Abbruchkante bis zur Aufschwimmgrenze $h_s(x_g) - h_s(x_f) = 80$ m. Dabei wird die Eisdicke an der Schwimmlinie mit $h_g(x_g) = 1\,000$ m und eine Eisdicke an der Abbruchkante mit $h_{sh}(x_f) = 200$ m angenommen. Es resultiert dann ein Gesamtdruck von ca. 4 bar im Bereich der Aufschwimmlinie.

Diese zweidimensionale Abschätzung bezieht sich auf ein seitlich unbegrenztes Schelfeis, so daß $\sigma'_{xx}(x)$ nach Gleichung (3.56) linear von der Abbruchkante bis in das Übergangsgebiet zunimmt und dort seinen Maximalwert annimmt (Abbildung 3.5, oberer Teil). Bei einem seitlich begrenzten Schelfeis wird $\sigma'_{xx}(x)$ Werte annehmen, die noch wesentlich

geringer, als die angegeben sind, so daß diese Werte eine obere Schranke darstellen. So gibt Thomas auch für Spannungen in Schelfeisen einen Druck bis zu 1 bar an [Thomas, R.H., 1979]. Der Wert von 1 bar erscheint realistischer, als der oben angegebene von 4 bar, da dieser sich auf seitlich berandete Schelfeise bezieht. Die seitliche Berandung eines Schelfeises führt folglich zu einer Reduktion der Zuspannung im Schelfeis.

Um den Vergleich zwischen $\sigma'_{xx} h_{sh}$ und $\frac{1}{2} \rho g (h_i^2 - h_{sh}^2)$ in der Gleichung (3.49) abzuschließen, kann der Ansatz von [Weertman, J., 1974] benutzt werden, indem es zulässig ist, die Eisdicken des Schelfeises in der Nähe der Übergangszone und die Eisdicke in der Übergangszone von annähernd gleicher Größenordnung ($h_g \approx h_s$) anzusehen.

Wird angenommen, daß die Eisdicke im Inlandeis $h_i = 2$ km und am Aufschwimmpunkt 1 km beträgt, ist $h_i^2 - h_g^2 = 3$ km² und es herrscht ein Druck von etwa 13 bar in der Nähe der Aufschwimmgrenze. Mit diesen Werten kann jetzt die Größenabschätzung erfolgen und es gilt die Relation:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_i^2 - h_{sh}^2) \gg \sigma'_{xx} h_{sh} \quad (3.57)$$

Erhöht sich die Eisdicke im Inlandeis auf 3 km, so wird $h_i^2 - h_g^2$ etwa 8 km². Der auf der linken Seite der Relation entstehende Druck beträgt dann etwa 35 bar. Damit wird deutlich, daß für ein seitlich berandetes Schelfeis der Zugterm ($\sigma'_{xx} h_{sh}$) in Gleichung (3.49) gegenüber den ersten Term in selbiger Gleichung vernachlässigt werden darf.

Mit der Vernachlässigung der Zugkraft von der Schelfeisseite in Gleichung (3.49) wird diese zu:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_i^2 - h_{sh}^2) = \bar{\sigma}_{xz} (x_g - x_i) \quad (3.58)$$

Veränderungen in den Bodenbedingungen führen nach Gleichung (3.58) zwangsweise auch immer zu Änderungen in den Druckverhältnisse zwischen Inlandeis und Schelfeis. Diese Veränderungen können somit auch eine Bewegung der Aufschwimmgrenze herbeiführen. Leider lassen sich die Scherkräfte am Untergrund schlecht abschätzen, da diese heute noch völlig unbekannt sind. Für eine Kopplung des Inlandeismodells mit einem Schelfeismodell ist die Kenntnisse der Aufschwimmpunkte x_g unerlässlich. Diese lassen sich ermitteln, wenn Gleichung (3.58) nach (x_g) aufgelöst wird, es gilt dann:

$$x_g = x_i + \frac{1}{\bar{\sigma}_{xz}} \left(\frac{1}{2} \rho g [h_i^2 - h_{sh}^2] \right) \quad (3.59)$$

Mit Gleichung (3.59) wird deutlich, daß die Position der Aufschwimmpunkte x_g durch die Druckverhältnisse zwischen Inlandeis und Schelfeis sowie durch die unbekanntes Bodenbedingungen und den daraus resultierenden Bodenscherkräften jenseits des Punktes (x_i) bestimmt wird. Ein Ansatz, wie trotzdem die Positionen der Aufschwimmpunkte festgelegt werden können, folgt jetzt.

Mit der binomischen Formel folgt für die Eisdickendifferenz zwischen Inlandeis und Schelfeis

$$\begin{aligned} h_i^2 - h_{sh}^2 &= (h_i - h_{sh})(h_i + h_{sh}) \\ &= (h_i - h_g) 2\bar{h} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \bar{h} = \frac{1}{2} (h_i + h_g) .$$

Dies führt die Kräftebilanz Gleichung (3.58) auf die Form:

$$\frac{1}{2} \rho g (h_i - h_g) 2\bar{h} = \bar{\sigma}_{xz}(x_g - x_i) . \quad (3.60)$$

Aus Gleichung (3.60) läßt sich die dimensionlose Größe:

$$\mu = \frac{\bar{\sigma}_{xz}}{\rho g \bar{h}} = \frac{h_i - h_g}{x_g - x_i} . \quad (3.61)$$

bilden. Die Größe $\mu = \tan \alpha$ (siehe Abbildung 3.4) ist der Quotient zwischen der auftretenden mittleren Reibungskraft $\bar{\sigma}_{xz}$ am Eisboden und der Normalkraft durch die Last des Eises. Damit hat μ die Bedeutung eines Reibungskoeffizienten. Die Gleichung (3.61) stellt weiterhin eine Beziehung zwischen dem Reibungskoeffizienten und der Eisoberflächenneigung am Rand des Inlandeises her und bestimmt dadurch auch den Eisfluß aus dem Inlandeis. Aus Gleichung (3.61) folgt jetzt die Position x_g der Aufschwimmgrenze:

$$x_g = x_i + \frac{1}{\mu} (h_i - h_g) . \quad (3.62)$$

Die Eisdicke h_g an der Aufschwimmgrenze folgt aus der Schwimmbedingung (3.16). Im Fall einer noch vorhandenen Grundberührung des Eises wird ($h_b = h_T$). Damit entspricht die Höhe der Eisunterseite der Höhe der Bodentopographie und Gleichung (3.62) liefert unter Beachtung von Gleichung (3.16):

$$x_g = x_i + \frac{1}{\mu} \left[h_i - \frac{\rho}{\rho_w} (h_{ss} - h_T) \right] . \quad (3.63)$$

Damit hängt die Position des Aufschwimmpunktes x_g vom Reibungskoeffizienten μ und der Meeresspiegelhöhe h_{ss} , der Eisdicke im Inlandeis und der Bodentopographie ab.

Bei fester Höhe des Meeresspiegels (h_{ss}) geschieht die Kopplung der Teilmodelle über die Position der Aufschwimmpunkte, dabei stellt μ den einzigen freien Parameter dar. Ob es einen Wert für diesen Parameter gibt, mit dem sich die Kopplung verwirklichen läßt, können nur numerische Experimente zeigen (Abschnitt 5.1.2).

Mit den hier entwickelten Gleichungen der Übergangzone kann das quasistationäre Schelfeismodell direkt an das prognostischen Schelfeismodell gekoppelt werden. Für

das prognostische Schelfeismodell werden dagegen zusätzlich noch die Komponenten der Eisgeschwindigkeit (u, v) im Übergangsbereich benötigt, die im folgenden Absatz bestimmt werden.

Auf Grund der Quasistationarität der Übergangszone unter Vernachlässigung des Schneefalls an der Eisoberfläche und des Schmelzens sowie Gefrierens an der Eisunterseite stromabwärts des Aufschwimmpunktes, muß der Eisfluß q_i vom Inlandeis in das Übergangsgebiet gleich dem Eisfluß q_s aus dem Übergangsgebiet in das Schelfeisgebiet sein. Im Schelfeis existieren auch keine vertikalen Scherspannungen mehr, so daß sich die Horizontalkomponenten der Eisgeschwindigkeiten aus einer einfachen Beziehungen ergeben:

$$u = \frac{q_x(i)}{h_g(x, y)} \quad \text{und} \quad v = \frac{q_y(i)}{h_g(x, y)}, \quad (3.64)$$

3.4.4 Identifizierung der Eiskanäle

Die in der Kopplung entwickelte Behandlung der Übergangszone würde den Verhältnissen in der Antarktis in dieser Form noch nicht gerecht werden, denn nach der hier formulierten Kopplung würde entlang der gesamten Schelfeisberandung Eis aus dem Inlandeis ins Schelfeisgebiet fließen. Dies gilt auch für das Oerlemans Modell (siehe Gleichung (3.27), Seite 25). Für reale Schelfeisgebiete trifft das nicht immer zu. Hauptsächlich an wenigen *diskreten* Stellen (Eiskanälen) wird beispielsweise das Ross Schelfeis vom Inlandeis ernährt, wie eine Aufnahme (Abbildung 3.6) mit einem hochauflösenden Radiometer (AVHRR) zeigt [Bindschadler, R., A., and P., L., Vornberger, 1990]. Im Bereich der Transantarktischen Gebirgskette ragt das Gestein relativ steil gegen das Schelfeis empor. Es findet bis auf wenige, unbedeutende Gletscherausflüsse gegenüber den Eiskanälen kein Eiszustrom statt. Um die richtigen Zustromgebiete im Modell zu iden-

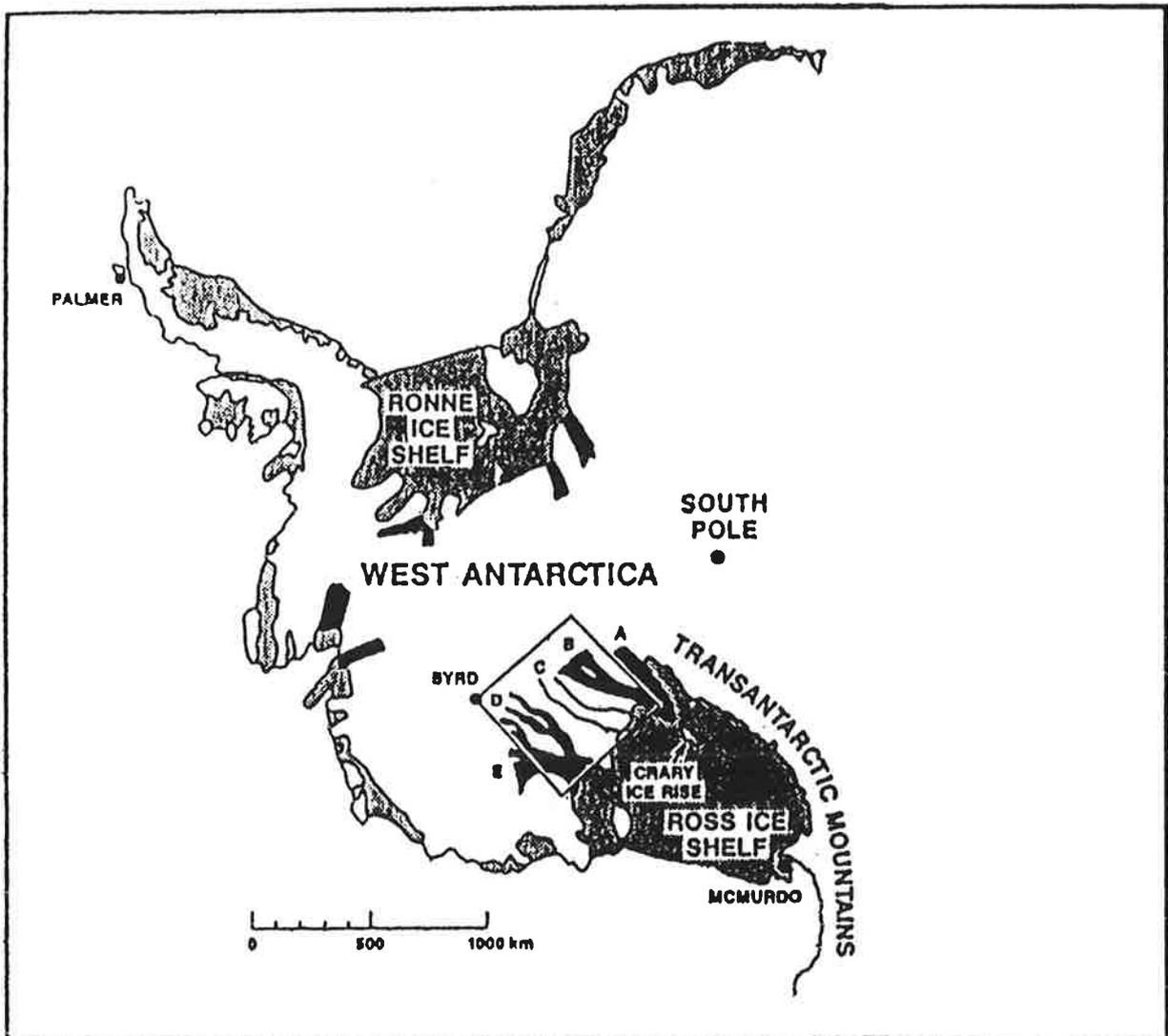


Abbildung 3.6: Darstellung der West-Antarktis mit den bedeutendsten Eiskanälen die das Ross-Schelfeis ernähren nach Aufnahmen mit einem hochauflösenden Radiometer (AVHRR) [Bindschadler, R., A., and P., L., Vornberger, 1990].

tifizieren wurde eine Kopplung oder vielmehr ein Eisfließen in das Schelfeisgebiet hinein, nur dort zugelassen, wo die Eisdicke h_g und die Position der Aufschwimmlinie x_g nach Gleichung (3.16) und Gleichung (3.63) berechnet wird, falls am Schelfeisrand $h_{ss} > h_T$ gilt. Mit dieser Fallunterscheidung findet eine Eiszuströmung ins Schelfeisgebiet *nur* dort statt, wo der Meeresspiegel für die Nachbargitterpunkte des Inlandeises sich oberhalb der Bodentopographie befinden. Weiterhin wird mit dieser Bedingung erreicht, daß kein Eis aus der Transantarktischen Gebirgskette ins Schelfeisgebiet fließt. Wie gut die Eiskanäle getroffen werden, wird mit dem numerischen Experiment (G) Seite 78 untersucht.

3.4.5 Grenzen der Kopplung

Im Modell sind alle notwendigen Größen auf dem groben Gitter (100 km) definiert, die Bestimmung der Aufschwimmlinie x_g und der Eisdicke (h_g) aber nicht abhängig von der Gitterauflösung, wenn die Breite der Übergangszone klein gegenüber der Gitterauflösung bleibt. Eine untere Schranke für die Breite der Übergangszone entspricht nach den analytischen Betrachtungen von [Herterich, K., 1990] einer Ausdehnung von 3 km. Damit wird deutlich, daß die Übergangszone nicht gänzlich verschwinden kann. Eine Abschätzung der Breite der Übergangszone Δx ergibt sich nach dieser analytischen Betrachtung wie folgt:

$$\Delta x = \frac{3q_o}{c_{\bar{u}} \cdot h_i^2} , \quad (3.65)$$

mit q_o dem Eisfluß aus dem Inlandeis, h_i die Inlandeisdicke und $c_{\bar{u}}$ eine Größe, die den linearen Abbau des vertikalen Gradienten der horizontalen Eisgeschwindigkeit ($\frac{\partial u}{\partial z} |_{z=0}$) in Fließrichtung beschreibt. Interessant wirkt sich auch der unterschiedliche Einfluß der drei Größen q_o , h_i und $c_{\bar{u}}$ auf die Breite der Übergangszone aus. Bei einer Verringerung des Eisflusses aus dem Inlandeis dehnt sich sofort die Übergangszone aus und wird reduziert, wenn die Eisdicke vom Inlandeis an der Nahtstelle zur Übergangszone anwächst. Weiterführende analytische Untersuchungen hierzu sind bei [Herterich, K., 1990] zu finden.

Eine obere Schranke für die Breite der Übergangszone ist wesentlich schwerer zu finden als eine untere Schranke da nicht bekannt ist welche Werte die einzelnen Einflußgrößen in extremen Situationen annehmen können. Jedoch läßt sich mit den üblichen in der Übergangszone vorkommenden Werten von $q_o = 1 \text{ km}^2/a$, $h_i = 1 \text{ km}$ und $c_{\bar{u}} = 10^{-1} \text{ km} \cdot a^{-1}$ eine Breite von etwa 30 km abschätzen. Ein Vergleich der Übergangsbreite zwischen Modell und beobachteten Eisflüssen der Eiskanäle (A,B,C,D,E,F) im Ross Schelfeis nach Gleichung (3.65) findet man in Tabelle 5.10 und Tabelle 5.11 auf

der Seite 79. Dieser Vergleich beruht nicht allein auf reinen Beobachtungen, da die Breiten der Übergangszonen der Eiskanäle bis heute noch nicht exakt vermessen werden konnten. Doch bewegen sich diese indirekt bestimmten Breiten der Übergangszonen im Rahmen der oben angegebenen Schranken.

Einen Einblick wie die Durchführung der zeitlichen Integration der Teilmodelle und wie die Übergangzone im numerischen Gitter berücksichtigt wird, ist im Kapitel 4 dargestellt.

Kapitel 4

Numerik der Eismodelle

4.1 Kopplung der Teilmodelle

Nach jedem Zeitschritt des Inlandeismodells werden die Positionen der Schwimmpunkte und die Eisdicken an den Schwimmpunkten durch das Modell der Übergangszone bestimmt. Anschließend wird die zugehörige Eisdickenverteilung mit dem entsprechenden Schelfeismodell berechnet. Dabei besteht die Möglichkeit mit dem quasistationären Schelfeismodell Fragen im Paläoklima zu beantworten, oder für Probleme der Gegenwart das prognostische Schelfeismodell anzuwenden.

4.2 Numerik des Inlandeismodells

Das Inlandeismodell ist bereits veröffentlicht [Herterich, K., 1988; Calov, R., 1989] und so soll an dieser Stelle nur kurz erklärt werden, wie sich im Prinzip die Modellvariablen aus den im Kapitel 3.2 beschriebenen Gleichungen berechnen lassen.

Für ein genügend dickes Eisschild werden die Modellvariablen in folgender Reihenfolge beschrieben:

1. Die Geschwindigkeiten ergeben sich aus der Form des Eisschildes und der Temperaturverteilung im Eisinneren (Gleichung 3.3) zum Anfangszeitpunkt $t = t_o$. Der Eisfluß ergibt sich durch vertikale Integration der Horizontalgeschwindigkeiten.
2. Die zeitliche Änderung der Eisdicke wird aus dem in Schritt (1.) berechneten Eisfluß bestimmt (Gleichung 3.1).
3. Die Energiebilanz (Gleichung 3.2) liefert die Temperaturverteilung für den nächsten Zeitschritt $t = t_o + \Delta t$. Für die advektiven Wärmeflüsse werden hier die

Geschwindigkeiten von Schritt (1.) verwendet.

Da das Inlandeismodell ein Mehrschichtenmodell ist, sind die Temperaturen im Zentrum eines jeden Volumenelements definiert, während die Geschwindigkeitskomponenten im Zentrum der insgesamt sechs Flächen des Volumenelements liegen. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß für das Einschichtenmodell des prognostischen Schelfeismodells (Abschnitt 4.3), um einen kontinuierlichen Übergang zwischen Inlandeis und Schelfeis zu gewährleisten, im Prinzip übernommen wurde. Im Inlandeismodell als auch im Schelfeismodell herrscht die gleiche äquidistante Gitterauflösung von 100 km. Auf diesem Gitter sind die advektiven und diffusiven Wärmeflüsse im Inlandeismodell durch zentrale Differenzenquotienten ausgedrückt. Die zeitlichen Ableitungen der Gleichungen (3.1) und (3.2) werden mit einem Vorwärts - Differenzenquotienten angenähert.

Das numerische Inlandeismodell wurde zunächst am Beispiel der Antarktis getestet [Herterich, K., 1988]. In einem numerischen Experiment wurde bei festgehaltener heutiger Dickenverteilung und der Annahme, daß sich die Antarktis in einem stationären Zustand befindet, die Temperaturgleichung (Gleichung (3.2)) über 150 000 Jahre integriert, bis sich eine stationäre Temperaturverteilung im Modell eingestellt hatte. Die Güte des Modells ist aus Abbildung 4.1 ersichtlich, in der die Bodentemperaturen des Modells dargestellt werden. Es ist zu sehen, daß sich große Gebiete am Eisboden auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt befinden. Die Lage der beobachteten Seen unter dem Eis [Oswald, G.K.A. and G. de Q. Robin, 1973] ist konsistent mit der Lage der modellierten Temperatur am Eisboden.

Eine weitere Anwendung fand das Inlandeismodell zur Simulation eines hypothetischen Inlandeises in Tibet [Calov, R., 1989; Kuhle, M. et al., 1989].

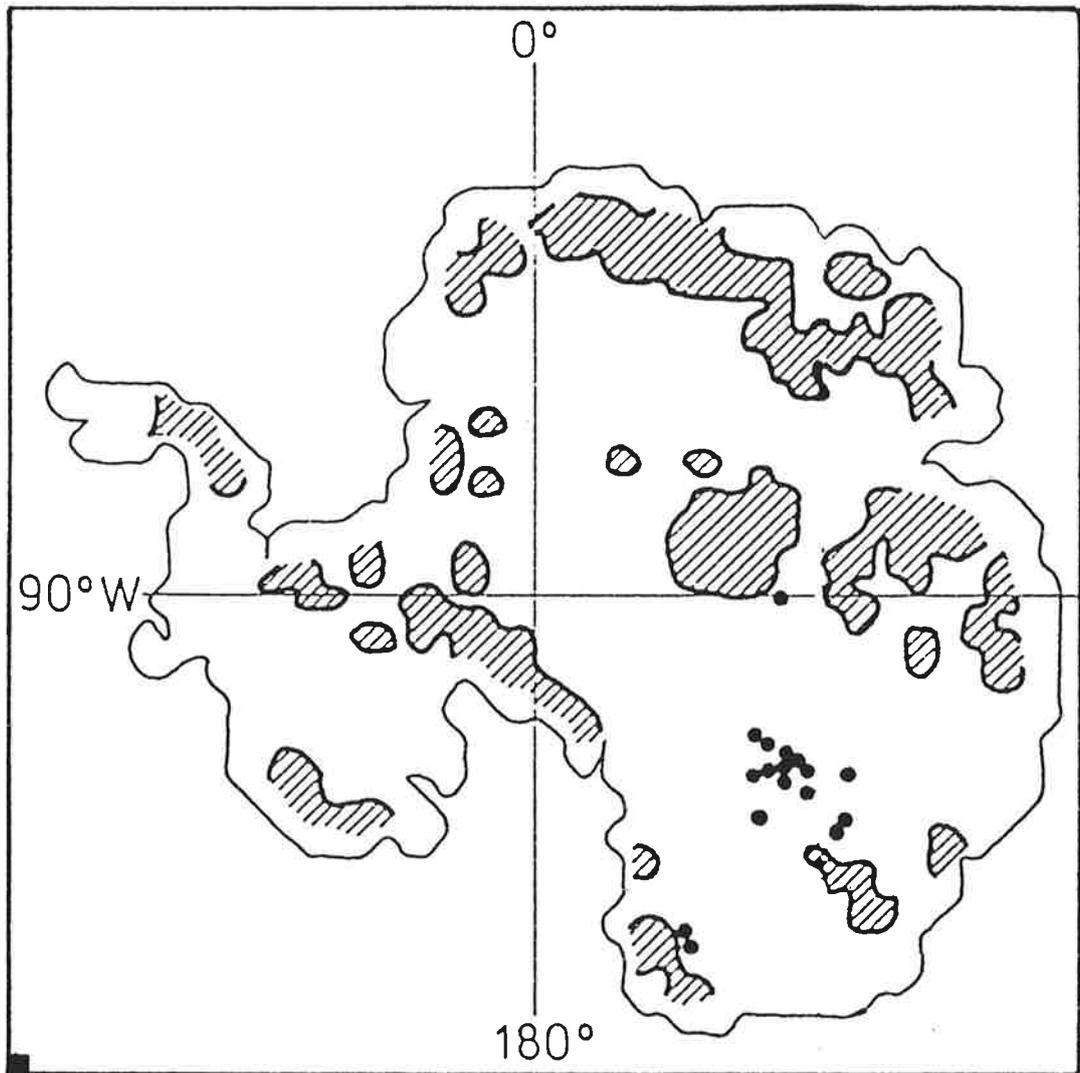


Abbildung 4.1: Modellierung der Bodentemperatur unter dem Antarktischen Inlandeis für den stationären Zustand: In den schraffierten Gebieten ist das Eis festgefroren und liegt sonst auf dem (druckkorrigierten) Schmelzpunkt. Die Kreise bezeichnen die Lage der bisher beobachteten Seen unter dem Eis [Oswald, G.K.A. and G. de Q. Robin, 1973].

4.3 Numerik des prognostischen Schelfeismodells

Um die Geschwindigkeitskomponenten im prognostischen Schelfeismodell zu berechnen, muß ein numerisches Verfahren benutzt werden, da es eine analytische Lösung der Differentialgleichungen (3.39) und (3.40) nicht gibt. Für diesen Differentialgleichungstyp

(nichtlinear, elliptisch) existiert kein Standardlösungsverfahren, siehe [Hackbusch, W. 1986], und es ist nicht sicher, ob es überhaupt eine Lösung gibt. Jedoch wird angenommen, daß die diskretisierte Form von Gleichung (3.39) und (3.40) nebst Gleichung (3.41) eine eindeutige Lösung liefert und das diese näherungsweise mit der Lösung der Differentialgleichung übereinstimmt. Elliptische Differentialgleichungen beschreiben statische Zustände. Es werden Lösungen der Differentialgleichungen gesucht, die mit den Randbedingungen (hier: von Neuman- und Dirichlet- Randbedingungen) des beschränkten Gebietes verträglich sind. Dies geschieht mit einem Iterationsverfahren.

Genauer betrachtet, wird nicht die Lösung der Differentialgleichung erreicht, sondern eine numerische Lösung der diskretisierten Gleichungen. Die Diskretisierung erfolgt, indem die Differentialquotienten der Gleichungen (3.39), (3.40) und (3.41) durch zentrierte Differenzenquotienten in einem äquidistanten Gitter (100 km) ersetzt werden. Für die x-Komponente der Kräftebilanz Gleichung (3.39) sieht die diskretisierte Form folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
 & - \rho g A^{\frac{1}{3}} \left(\frac{h_{s(i+1,j)} - h_{s(i,j)}}{\Delta x} \right) \\
 & + 2 \left[\left(\frac{u_{(i+1,j)} - u_{(i,j)}}{\Delta x^2} \right) f_{(i+1,j)} - \left(\frac{u_{(i,j)} - u_{(i-1,j)}}{\Delta x^2} \right) f_{(i,j)} \right] \\
 & + \left[\left(\frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i+1,j-1)}}{\Delta y \Delta x} \right) f_{(i+1,j)} - \left(\frac{v_{(i,j)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta y \Delta x} \right) f_{(i,j)} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{u_{(i,j+1)} - u_{(i,j)}}{\Delta x^2} + \frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i,j)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i+1/2,j+1/2)} \right. \\
 & \left. - \left[\frac{u_{(i,j)} - u_{(i,j-1)}}{\Delta y^2} + \frac{v_{(i+1,j-1)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i+1/2,j-1/2)} \right\} = 0 .
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Um jetzt die u -Komponente der Eisgeschwindigkeit aus der Gleichung (4.1) zu erhalten, wird diese nach $u_{i,j}$ aufgelöst.

$$\begin{aligned}
 u_{(i,j)} & = \frac{1}{\frac{2f_{(i+1,j)}}{\Delta x^2} + \frac{2f_{(i,j)}}{\Delta x^2} + \frac{f_{(i+1/2,j+1/2)}}{2\Delta y^2} + \frac{f_{(i+1/2,j-1/2)}}{2\Delta y^2}} \\
 & - \left\{ \rho g A^{\frac{1}{3}} \left[\frac{h_{s(i+1,j)} - h_{s(i,j)}}{\Delta x} \right] \right.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i+1,j-1)}}{\Delta x \Delta y} f_{(i+1,j)} - \frac{v_{(i,j)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta x \Delta y} f_{(i,j)} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\left[\frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i,j)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i+1/2,j+1/2)} + \left[\frac{v_{(i+1,j-1)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i+1/2,j-1/2)} \right) \\
& + 2 \left[\frac{u_{(i+1,j)} f_{(i+1,j)} + u_{(i-1,j)} f_{(i,j)}}{\Delta x^2} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left[\frac{u_{(i,j+1)} f_{(i+1/2,j+1/2)} + u_{(i,j-1)} f_{(i+1/2,j-1/2)}}{\Delta y^2} \right] \Bigg\} ,
\end{aligned}$$

analog erfolgt die Auflösung der y-Komponente nach $v_{(i,j)}$:

$$\begin{aligned}
v_{(i,j)} & = \frac{1}{\frac{2f_{(i,j+1)}}{\Delta y^2} + \frac{2f_{(i,j)}}{\Delta y^2} + \frac{f_{(i+1/2,j+1/2)}}{2\Delta x^2} + \frac{f_{(i-1/2,j-1/2)}}{2\Delta x^2}} \quad (4.3) \\
& - \left\{ \rho g A^{\frac{1}{3}} \left[\frac{h_{s(i,j)} - h_{s(i,j+1)}}{\Delta y} \right] \right. \\
& + \left[\frac{u_{(i,j+1)} - u_{(i-1,j+1)}}{\Delta x \Delta y} f_{(i,j+1)} - \frac{u_{(i,j)} - u_{(i-1,j)}}{\Delta x \Delta y} f_{(i,j)} \right] \\
& + \frac{1}{2} \left(\left[\frac{u_{(i,j+1)} - u_{(i,j)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i+1/2,j+1/2)} + \left[\frac{u_{(i-1,j+1)} - u_{(i-1,j)}}{\Delta x \Delta y} \right] f_{(i-1/2,j+1/2)} \right) \\
& + 2 \left[\frac{v_{(i,j+1)} f_{(i,j+1)} + v_{(i,j-1)} f_{(i,j)}}{\Delta y^2} \right] \\
& \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{v_{(i+1,j)} f_{(i+1/2,j+1/2)} + v_{(i-1,j)} f_{(i-1/2,j+1/2)}}{\Delta x^2} \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Dabei ist f der nichtlineare Anteil in den Gleichungen (4.2) und (4.3). Die diskretisierte Form von f lautet:

$$\begin{aligned}
f(i,j) & = \left(\left[\frac{u_{(i,j)} - u_{(i-1,j)}}{\Delta x} \right]^2 + \left[\frac{v_{(i,j)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta y} \right]^2 \right) \\
& + \left[\frac{u_{(i,j)} - u_{(i-1,j)}}{\Delta x} \right] \cdot \left[\frac{v_{(i,j)} - v_{(i,j-1)}}{\Delta y} \right] \quad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{u_{(i,j+1)} - u_{(i,j-1)}}{2\Delta y} + \frac{u_{(i-1,j+1)} - u_{(i-1,j-1)}}{2\Delta y} \right) \frac{1}{2} \right. \\
& \left. + \left(\frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i-1,j)}}{2\Delta x} + \frac{v_{(i+1,j-1)} - v_{(i-1,j-1)}}{2\Delta x} \right) \frac{1}{2} \right]^2 \Big)^{-\frac{1}{3}} .
\end{aligned}$$

Um eine zeitliche Änderung der Eisdicke im Schelfeismodell zu berechnen, wird die Massenbilanz (Gleichung (3.1), Seite 15) benötigt, die eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung ist.

An dieser Stelle ist es jedoch notwendig, etwas über das verwendete Gitter zu wissen, bevor die diskrete Form der Massenbilanz definiert wird. Im Hinblick auf eine Kopplung zwischen Inlandeis und Schelfeis ist es sinnvoll, in beiden Teilmodellen dasselbe Gitter zu benutzen, um bei Grenzverschiebungen zwischen Inlandeis und Schelfeis nicht unnötige Komplikationen hervorzurufen.

Es gibt genau genommen zwei Gitter, wie Abbildung 4.2 andeuten soll. Auf dem Hauptgitter, dargestellt durch die ausgezogenen Linien, sind die Eisdicke h und damit auch die Eisoberfläche h_s sowie der nichtlineare Term f auf den Knotenpunkten definiert. Im Inlandeismodell sind an diesen Knotenpunkten, bis auf den nichtlinearen Term f , ebenfalls die Eisdicke und Eisoberfläche festgelegt. Um einen halben Gitterpunkt von einem Knotenpunkt nach oben verschoben - und damit auf einem Nebengitter - liegt $v_{(i,j)}$. Wiederum einen halben Gitterpunkt von einem Knotenpunkt des Hauptgitters nach rechts verschoben liegt $u_{(i,j)}$. Diese Gitterverschiebungen haben den Vorteil, daß sich numerisch sehr einfach die Eisflüsse $q_{(x)}$, $q_{(y)}$ *in* und *aus* einer Volumenzelle (grau unterlegte Fläche in der Skizze) berechnen lassen. Um von einem Zeitpunkt t zu einem

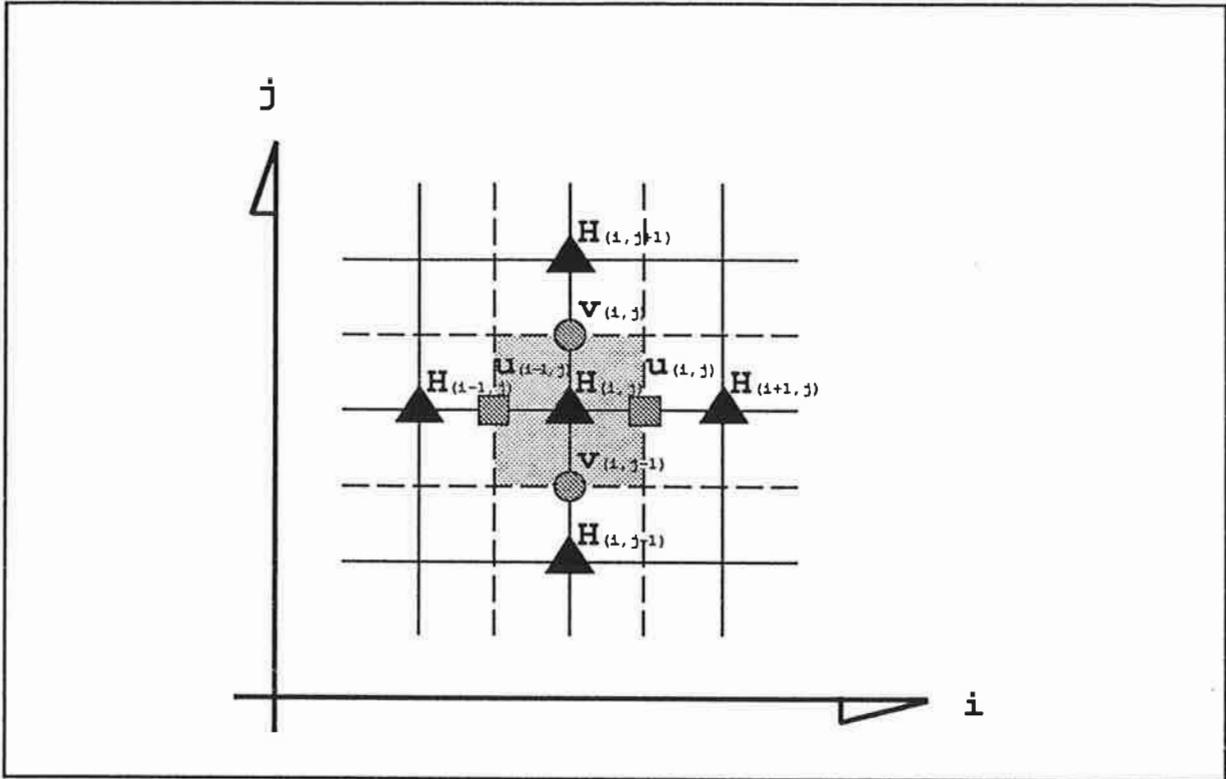


Abbildung 4.2: Berechnung der Eisdickenänderung nach Gleichung (4.5) im numerischen Gitter. Die grau unterlegte Fläche zeigt die Zelle in der die neue Eisdicke bestimmt wird.

Zeitpunkt $t \doteq t_1$ zu gelangen, wird auf allen Gitterpunkten im Hauptgitter von der Anfangseisdickenverteilung $h_{(i,j)}$ eine neue Eisdicke $h_{neu(i,j)}$ wie folgt bestimmt:

$$\begin{aligned}
 h_{neu(i,j)} = & h_{(i,j)} + \left\{ \left[\frac{h_{(i,j+1)} + h_{(i,j)}}{2} \cdot v_{neu(i,j)} - \frac{h_{(i,j-1)} + h_{(i,j)}}{2} \cdot v_{neu(i,j-1)} \right] / \Delta y \right. \\
 & + \left[\frac{h_{(i+1,j)} + h_{(i,j)}}{2} \cdot u_{neu(i,j)} - \frac{h_{(i-1,j)} + h_{(i,j)}}{2} \cdot u_{neu(i-1,j)} \right] / \Delta x \\
 & \left. + B \right\} \Delta t .
 \end{aligned}
 \tag{4.5}$$

In der numerischen Berechnung der Massenbilanz Gleichung (4.5) tauchen die Terme $v_{neu(i,j)}$ und $u_{neu(i,j)}$ auf. Diese Terme müssen an dieser Stelle im Modell schon bekannt

sein. Sie werden in Anlehnung an [Holten, J. S.191-194, 1979] mit einer iterativen Methode (simultane Relaxation) ermittelt. Sei ν die Anzahl der Iterationen; so wird mit dieser Methode die Näherungsordnung der Iterationen bestimmt. Es konvergiert $v_{(i,j)}^\nu; u_{(i,j)}^\nu$ zur Näherungslösung $v_{(i,j)}^{\nu+1}; u_{(i,j)}^{\nu+1}$ wenn $\nu \rightarrow \infty$ erreicht. Während der Iteration gilt:

$$\begin{aligned} v_{(i,j)}^{\nu+1} &= v_{(i,j)}^\nu + R_v^\nu, \\ u_{(i,j)}^{\nu+1} &= u_{(i,j)}^\nu + R_u^\nu. \end{aligned}$$

Als Residuum (R_v^ν, R_u^ν) wird die Differenz zwischen der Lösung $v_{(i,j)}^\nu; u_{(i,j)}^\nu$ und der Lösung $v_{(i,j)}^{\nu+1}; u_{(i,j)}^{\nu+1}$ bezeichnet. Im Verlaufe der Iterationen werden die Residuen immer kleiner. Numerisch konvergiert die Gleichung, wenn beide Residuen kleiner als die Konvergenzbedingung ($R_v^\nu \leq \xi$) und ($R_u^\nu \leq \xi$) ist.

Zur Berechnung der Geschwindigkeitskomponente $v_{(i,j)}$ nach der diskreten Beziehung (4.3) werden die Werte von u, v und f zum vorherigen Iterationsschritt für die in Abbildung (4.3) bezeichneten Gitterpunkte benötigt.

Wie bei der Diskussion der numerischen Behandlung der Massenbilanz (siehe Seite 53) erörtert, besteht das numerische Gitter aus einem Hauptgitter (ausgezogene Linien) und einem Nebengitter (gestrichelte Linien). Dies gilt ebenso für das Inlandeismodell. Es resultiert für den nichtlinearen Fall ein 21-Punktstern (Abbildung 4.3). Die schwarz ausgefüllten Quadrate bezeichnen die u-Knotenpunkte, die gerasterten Kreise die v-Knotenpunkte. An den durch schraffierten Ellipsen gekennzeichneten Stellen ist der nichtlineare f -Term, die Eisdicke h und die Höhe der Eisoberfläche definiert.

Für den linearen Fall reduziert sich der Stern nicht nur um die (nichtlinearen) f -Terme, sondern es entfallen auch einige damit verbundene u,v-Knotenpunkte, so daß ein 9-Punktstern übrig bleibt.

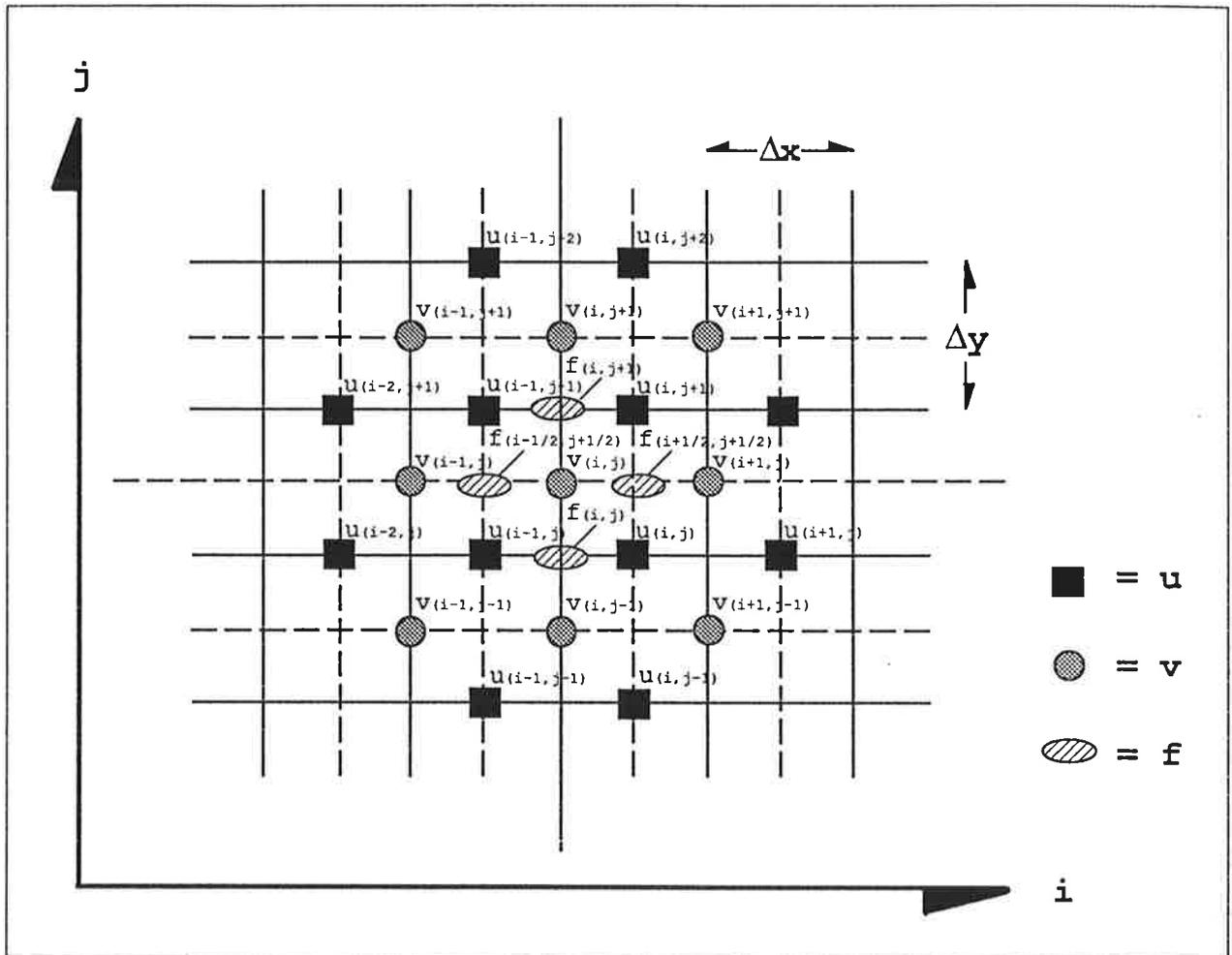


Abbildung 4.3: Charakteristischer 21-Punktstern für die Bestimmung der $v_{(i,j)}$ Komponente im nichtlinearen Fall. Im linearen Fall verringert sich die Anzahl der Punkte, indem alle vier f -Terme (*Ellipsen*) mit $f = 1$ ersetzt werden. Es bleibt dann ein hier nicht extra gekennzeichnetes 9-Punktstern übrig.

Randwerte

Es müssen bei der Randwertbehandlung zwei Fälle gegenüber den inneren Punkten unterschieden werden. Zu den inneren Punkten gehören alle diejenigen zentralen Punkte eines 21-Punktsterns (nichtlinearer Fall, siehe Abbildung 4.3), für die auch alle anderen Gitterpunkte des 21-Punktsterns auf Schelfeisgitterpunkten liegen. Für einen randnahen 21-Punktstern bedeutet dies, daß zwar $v_{(i,j)}$ bzw. $u_{(i,j)}$ innerhalb des numerischen Schelfeisgitters liegen, aber sich einige Knotenpunkte außerhalb des Schelfeisgitters befinden. Auf den Gitterpunkten außerhalb des Schelfeises werden die Geschwindigkeitskomponenten auf Null gesetzt. Echte Randpunkte sind diejenigen Punkte, bei denen der zentrale Punkt (i, j) eines 21-Punktsterns auf dem numerischen Schelfeisgitterrand liegt. Diese Randpunkte werden mit $v_{(i,j)} = 0$ bzw. mit $u_{(i,j)} = 0$ vorgegeben (Dirichlet Randbedingungen), falls kein Eis aus dem Inlandeismodell ins Schelfeismodell fließt. An den Stellen, an denen (über Eisströme) Eis vom Inlandeis in das Schelfeis fließt, ist $u_{(i,j)}, v_{(i,j)} \neq 0$. Im randnahen Bereich hängt die Geschwindigkeit im wesentlichen davon ab, wieviel Knotenpunkte aus dem Gitter herausfallen. Reduziert sich z.B. die für das Schelfeis zu Verfügung stehende Anzahl von Gitterpunkten soweit, daß nur noch randnahe 21-Punktsterne gebildet werden können, wird die Eisgeschwindigkeit ständig unterschätzt.

Eine andere Randbedingung gilt an der Abbruchkante des Schelfeises. Dort, am Übergang vom Schelfeis zum Ozean, gilt die von Neumann Randbedingung $\partial \vec{u} / \partial \vec{s} = 0$ längs der Strömungsrichtung \vec{s} des Schelfeises.

4.4 Numerik der Übergangszone

Durch die Behandlung der Übergangszone als subskaligen Prozeß in diesem verwendeten groben Gitter (100 km), wie im Abschnitt 3.4 diskutiert, liegt der Ort der Aufschwimmgrenze nie direkt auf einem Gitterpunkt, ist aber auf Punkte längs der Gitterlinien, welche die Gitterpunkte verbinden, beschränkt.

Mit dem folgenden Näherungsverfahren wird x_g und h_g , ausgehend von der Inlandeisdicke (h_i) und dem Koeffizienten $\mu = \tan \alpha$ sowie mit der Schwimmbedingung Gleichung (3.16), auf dem Gitter bestimmt.

Zu einem festgesetzten μ , das gleichzeitig die Neigung der Inlandeisoberfläche am Inlandeisrand bestimmt und fester Eisdicke h_i an der Stelle x_i , wird in einem iterativen

Verfahren die Lage des Aufschwimmpunktes und die dortige Eisdicke h_g bestimmt (siehe Abbildung 4.4). Ausgehend vom Gitterpunkt x_i wird zunächst der Verlauf der Höhe der Eisoberfläche für $x > x_i$ mit der Steigung $\mu = \tan \alpha = L_2 / L_1$ festgelegt. Durch eine schrittweise Verlängerung der Strecke L_1 wird schließlich der Punkt $x = x_g$ erreicht, für den gerade die Schwimmbedingung

$$\frac{\rho_w}{\rho_{eis}} [h_{ss} - H_T(x_g)] = h_i - L_2 \quad (4.6)$$

für eine geneigte Bodentopographie H_T erfüllt ist. Dabei kann die unbekannte Größe $H_T(x_g)$ bei bekannter Bodentopographie H_T durch Interpolation bestimmt werden:

$$H_T(x_g) = H_{T(i,j)} + \frac{H_{T(i+1,j)} - H_{T(i,j)}}{\Delta x} (x_g - x_i) . \quad (4.7)$$

Liegt der Ort x_g fest, liegen auch die Distanzen zu den Schelfeisgitterpunkten fest und es können im Fall des quasistationären Schelfeismodells mit der Form (3.26) die Eisdicken an den Schelfeisgitterpunkten bestimmt werden.

Im Modell kann sich die Position der Aufschwimmgrenze x_g beliebig zwischen zwei Gitterpunkten ($x_i < x_g < x_s$) bewegen. Dabei ist x_i im Modell der letzte Inlandeispunkt und x_s der erste Schelfeispunkt (siehe Abbildung 4.4). Tritt nach Gleichung (4.6) der Fall ein, daß $x_g \leq x_i$ oder $x_g \geq x_s$ ist, verläßt x_g die Gitterzelle und bewegt sich entlang der Gitterlinie in die entsprechende Nachbargitterzelle. Diese Bewegung der Aufschwimmgrenze aus einer Gitterzelle zieht sofort auch eine Umverteilung der Schelfeis- und der Inlandeisgitterzellen nach sich.

Kapitel 5

Modellexperimente

Dieses Kapitel umfaßt den zweiten Teil der vorliegenden Arbeit und gibt einen Einblick in die numerischen Experimente, die mit den im ersten Teil vorgestellten unterschiedlichen Modellen gemacht wurden.

Wie im Abschnitt 3.3.2 bei der Entwicklung des quasistationären Schelfeismodells schon angedeutet, ist für die Modellierung auf Zeitskalen größer als 1 000 Jahre das quasistationäre Schelfeismodell ausreichend. Diese Modellentwicklung kommt im nachfolgenden Abschnitt 5.1 zur Anwendung. Nachdem ein Standardexperiment (*I*) festgelegt ist, wird die Empfindlichkeit des gekoppelten Modells (Inlandeis/Übergangszone/ quasistationäres Schelfeis) gegenüber Änderungen in dem Parameter μ sowie der Höhe des Meeresspiegels untersucht. Eine eingehendere Untersuchung des Fließverhaltens im Schelfeis in einer vereinfachten Geometrie erfolgt im Abschnitt 5.2. Dabei findet ein Vergleich statt zwischen dem dynamischen Verhalten eines Schelfeises mit linearem und nichtlinearem Fließgesetz unter Randbedingungen, die sich an Beobachtungen im Ross Schelfeis anlehnen. Die im Abschnitt 5.2 gewonnenen Rückschlüsse für die Modellierung eines prognostischen Schelfeises fließen direkt in den nächsten Abschnitt 5.3 ein. Erst erfolgt eine Untersuchung darüber, ob das Inlandeismodell in der Lage ist realistische Randbedingungen für das prognostische Schelfeismodell (am Beispiel des Ross Schelfeises) zu liefern. In dem Standardexperiment (*II*) wird versucht mit dem gekoppelten System (prognostisches Inlandeis/quasistationäre/Übergangszone/ Ross Schelfeismodell) die beobachteten Eisdicken im Ross Schelfeis möglichst genau zu modellieren. Abschließend wird das Modellverhalten bei einem abgesenkten Meeresspiegel untersucht.

5.1 Experimente mit dem gekoppelten System Inlandeis Schelfeis im Paläoklima

In diesem Abschnitt werden die in Abschnitt 3.3.2 entwickelten Gleichungen für das quasistationäre Schelfeismodell und das Inlandeismodell (Kapitel 3.2, Seite 15) durch die quasistationäre Übergangszone (Abschnitt 3.4, Seite 31) aneinander gekoppelt und auf die Antarktis angewandt.

Ein 55×55 Maschen umfassendes rechtwinkeliges äquidistantes Gitternetz ($\Delta x = \Delta y = 100$ km) rahmt die Antarktis ein und eine Anfangsmaskenverteilung, entsprechend der heutigen Verteilung von Inlandeis, Schelfeis und Schelfmeer, sowie der Tiefsee wird vorgegeben. Die Bodentopographie wird nach der Karte von [Drewry, D.J., 1983] auf das Gitternetz digitalisiert. Das Inlandeismodell befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ des gekoppelten Systems - bezüglich der Eistemperatur - bereits in einem stationären Zustand. Der Schneefall, als obere Randbedingung für das Inlandeis, wird in Anlehnung an Beobachtungen mit einer temperaturabhängigen Funktion vorgegeben [Herterich, K., 1988]. Ebenso findet der geothermische Wärmefluß von $5 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-2}$ als untere Randbedingung Eingang in das Inlandeismodell. Zu dem Zeitpunkt $t = 0$ stehen für das Schelfeis nur die Eisdicken an den vom Modell ausgewählten Gitterpunkten zur Verfügung. Nur an denen gelangt ein Eisfluß nach den Kopplungsbedingungen ins Schelfeisgebiet. Anschließend kann die Eisdickenverteilung nach Gleichung (3.26) im Schelfeis bestimmt werden.

Ausgehend von der modellierten Übergangszone und der daraus resultierenden Bestimmung der Aufschwimmlinie, Gleichung (3.63), ist der Parameter μ frei wählbar, so daß in dem Standardexperiment (I) (Abschnitt 5.1.1) ein Wert des Parameters μ in Gleichung (3.63) gesucht wird, mit dem sich zumindest die Verteilungen der drei größeren Schelfeisgebiete der Antarktis (siehe Abbildung 1.1, Seite 2), das Ross Schelfeis, das Ronne-Filchner Schelfeis, sowie das Amery Schelfeis erfassen lassen [Böhmer, W.J. and K. Herterich, 1990].

Formal beeinflußt in der Gleichung (3.63) auch die Höhe des Meeresspiegels die Position der Aufschwimmgrenze. Anschließend zum Standardexperiment, in dem der heutige Zustand der Antarktis mit seinen Schelfeisgebieten möglichst naturgetreu simuliert werden soll, wird in den nachfolgenden Experimenten A und B die Sensitivität des gekoppelten Systems, gegenüber Änderungen in dem Wert des Parameters μ , sowie gegenüber Änderungen in der Höhe des Meeresspiegels (C und D) geprüft.

5.1.1 Das Standardexperiment (I)

Modellgrundlage des Standardexperimentes ist das eingangs des letzten Abschnittes beschriebene gekoppelte System.

Beobachtungen zeigen, daß das Schelfeis nicht beliebig dünn werden kann, sondern das Eis bricht ab und bildet Tafelberge, wenn eine Schelfeisdicke von ca. 200 m unterschritten wird. In Anlehnung an diese Beobachtungen (siehe auch Kapitel 6) wird die Schelfeisfront im Modell auf die simulierte 200 m Isolinie der Eisdicke gelegt. Der Wert des Parameters μ , Gleichung (3.63), wird für dies Experiment auf 0.05 festgelegt. Der noch freie Parameter d_o in Gleichung (3.26) wurde mit $d_o = 250$ km so gewählt, daß die vom Modell simulierte Schelfeisfront ungefähr mit den Beobachtungen übereinstimmt. Anschließend wird das Modell 10 000 Jahre integriert und damit, gemäß Abschnitt 4.1, Seite 47, sich selbst überlassen. Das Modell bestimmt, wie sich die Verteilung von Inlandeis- und Schelfeisgitterzellen gegebenenfalls ändert (siehe Abschnitt 4.4).

Abbildung 5.1 zeigt in 0.3 km Intervallen die Isolinien der Eisdicken, die mit dem Inlandeismodell berechnet wurden. Die Graustufungen werden bei zunehmender Eisdicke intensiver. Deutlich sind die großen, eisfreien Buchten des Weddelmeeres und des Ross Schelfmeeres auszumachen, die vom Inlandeismodell nicht modelliert wurden.

Im gekoppelten System dagegen sind diese Buchten vom quasistationärem Schelfeismodell erkannt und mit Schelfeisen ausgestattet worden, wie die Eisbedeckung in Abbildung 5.2 zeigt. Die Eisdicken sind in 0.3 km Isolinienabständen durch graue Schattierungen verdeutlicht. Mit zunehmender Eisdicke wird die Graufärbung dunkler. Ein Maßstab in Form einer Gitterzelle ($\Delta x = \Delta y = 100$ km) ist in allen Abbildung, die mit dem Modell gerechnet wurden, links unten eingezeichnet.

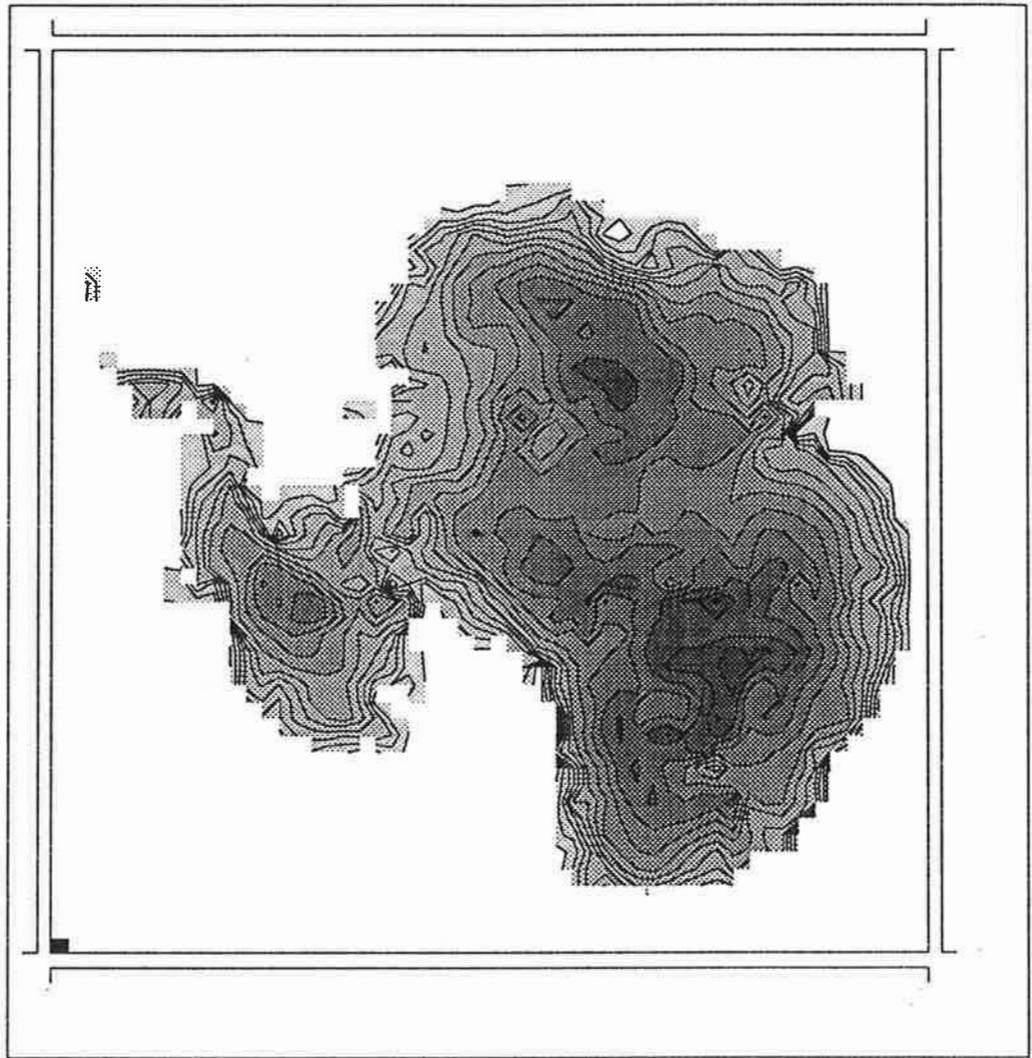


Abbildung 5.1: Isolinien der vom Inlandeismodell berechneten Eisdicken der Antarktis. Die Linien gleicher Höhe sind in 300 m Intervallen eingezeichnet. Die Intensität der Graufärbung nimmt mit zunehmender Höhe zu. Der Maßstab ist durch die Gitterzelle links unten im Bild dargestellt.

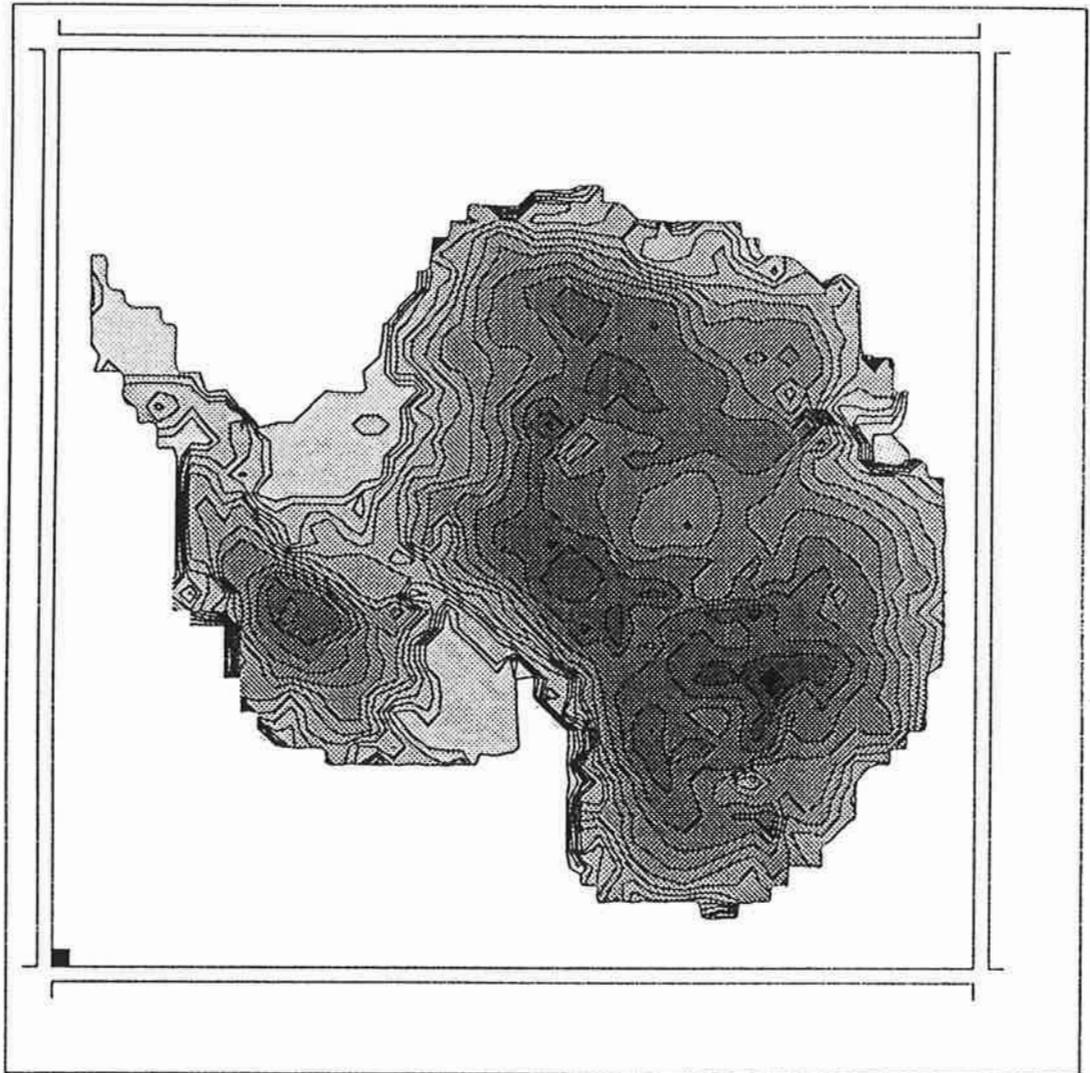


Abbildung 5.2: Isolinien der Eisdicken des gekoppelten Systems von Inlandeis, Schelfeis und quasistationärer Übergangszone nach einer Zeitintegration von 10 000 Jahren mit einem Wert für $\mu = 0.05$. Die Simulation bezeichnet den Referenzzustand für die nachfolgenden Experimente.

Die Simulation ist jedoch nicht perfekt. Trotzdem werden die wesentlichen Eigenschaften der heutigen Schelfeise nachgebildet. Schelfeise bilden sich vorwiegend in den größeren Buchten, wie im Weddelmeer und Rossmeer, sowie im Bereich des Amery-Schelfmeers. An den übrigen Küsten dehnt sich das Schelfeis nur, wenn überhaupt, in Form von kleineren Gebieten aus, so z.B. im Bereich der Antarktischen Halbinsel (Palmer Land).

Abweichungen in der Schelfeisverteilung gegenüber den Beobachtungen entstehen im wesentlichen am Felsrand des Transantarktischen Gebirges im Ostteil des Ross Schelfeises. Entlang dieser Gebirgskette existieren nur einige wenige kleine Auslaßgletscher, wie der Scott Gletscher, der Beardmore Gletscher, der Nimrod Gletscher, sowie der Byrd Gletscher, der noch den größten Ausfluß hat. Diese Gletscher werden durch die Kopplung zum Teil, wegen ihrer geringen horizontalen Ausdehnung gegenüber der Gitterauflösung ($100 \times 100 \text{ km}$), oder wegen der nicht erfüllten Kopplungsbedingung, ($h_{ss} < h_T$), im Übergangsbereich nicht erfaßt (siehe auch Abschnitt 3.4.4).

Eine derartig flankierende Gebirgskette, wie im Ross Schelfeis, ist an den Rändern entlang des Ronne-Filchner Schelfeis nicht vorhanden [Kock, H. and A. Wiegand, 1986], so daß hier die simulierte Schelfeisbedeckung geringere Abweichungen zu den Beobachtungen aufweist.

Das Amery-Schelfeis, das kleinste der drei großen Schelfeise, wird zwar beiderseits von Gebirgszügen eingeengt, doch ist es mit seiner geringen Breite von ca. 400 km, eine direkte Fortsetzung des Lambert Gletschers, der seine Eismassen über die gesamte Breite des Amery-Schelfeises abgibt [Budd, W., 1966]. Diese spezielle geographische Situation, die sehr stark an einen Eiskanal erinnert, wird offensichtlich im gekoppelten System ebenfalls im Rahmen der Auflösung befriedigend wiedergegeben.

5.1.2 Sensitivitätsexperimente

Der Reibungskoeffizient (μ) stellt in der Kopplung eine unbekannte Größe dar, übt aber einen entscheidenden Einfluß auf den Eistransport in die Übergangszone und damit auch in das Schelfeisgebiet aus. In diesem Abschnitt werden zwei numerische Experimente durchgeführt, um die Sensitivität des Modells gegenüber dem Reibungskoeffizient aufzuzeigen. Es wird bei jedem Experiment des gekoppelten Systems vom Standardlauf, der in Abbildung 5.2 dargestellt ist, ausgegangen.

Im Experiment (A) wird der Wert des Parameters μ um den Faktor (1/5) gegenüber

dem Wert des Standardlaufs ($\mu = 0.05$) des Parameters herabgesetzt. In Abbildung 5.3 sind in 0.3 km Intervallen die Isolinien der Eisdicken des gekoppelten Systems nach einer Integrationszeit von 10 000 Modelljahren zu sehen. Schelfeisgebiete, die sich vorher in den großen Buchten des Weddelmeeres und des Rossmeeres zeigten (Abbildung 5.2), existieren nicht mehr. Das Inlandeis hat sich während der Integrationszeit bis zum Rand des Kontinentalschelfs ausgebreitet. Dieser Zustand stimmt in etwa mit der hypothetischen Ausdehnung des Eises in der Antarktis während der letzten großen Eiszeit (Würmeiszeit) vor etwa 18 000 Jahren überein [Thomas, R.H. and C.R. Bentley, 1978].

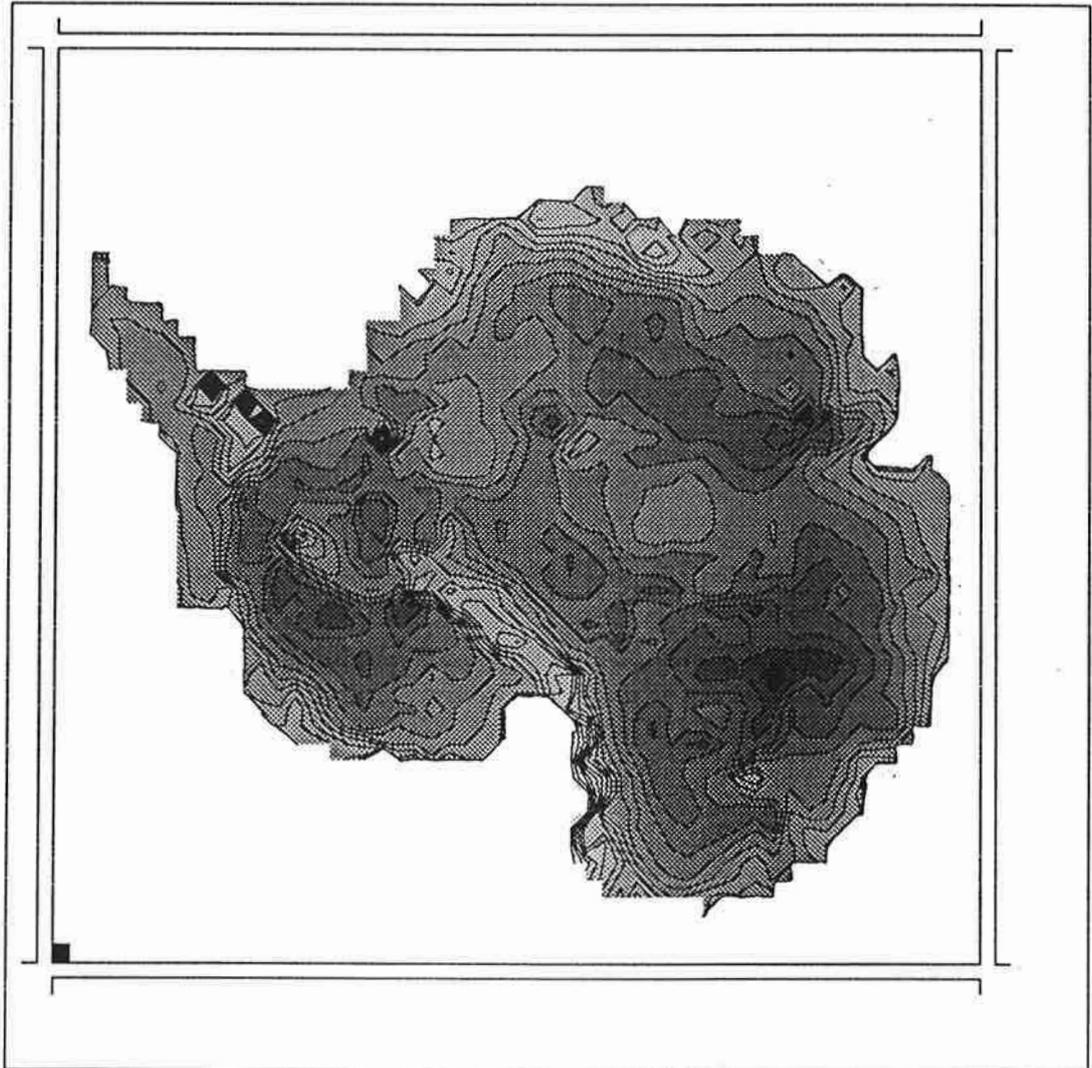


Abbildung 5.3: Isolinien der Eisdicken des gekoppelten Systems von Inlandeis, Schelfeis und quasistationärer Übergangszone nach einer Zeitintegration von 10 000 Jahren mit einem Wert für $\mu = 0.01$.

Interpretation des numerischen Experiments (A)

Bei Abnahme des Reibungskoeffizienten (μ) gegenüber dem Standardwert $\mu = 0.05$, nimmt auch gleichzeitig die zugehörige Steigung der Eisoberfläche am Inlandeisrand zwischen Inlandeisdicke und Schelfeisdicke ab. Damit erniedrigt sich jedoch der Eisfluß aus dem Inlandeis, da sich die Druckdifferenz nach Gleichung (3.49) reduziert hat. Bei gleichen Schneefall nimmt deshalb das Inlandeisvolumen und die Eisdicke am Inlandeisrand zu. Demzufolge ändert sich auch die Position der Aufschwimmgrenze nach Gleichung (3.63) derart, daß die Schwimmgrenze Gleichung (3.16) erst wieder am Kontinentalschelf erreicht wird.

Im Experiment (B) wird der Wert des Parameters μ um den Faktor 5 gegenüber dem Standardwert, $\mu = 0.05$, heraufgesetzt. In Abbildung 5.4 sind in 0.3 km Intervallen die Isolinien der Eisdicken des gekoppelten Systems nach einer Integrationszeit von 10 000 Jahren eingezeichnet. Weite, eisbedeckte Gebiete der West-Antarktis existieren, im Vergleich zu heute, nicht mehr (Abbildung 5.2). Nur in den Bereichen, in denen die Bodentopographie über die heutige Höhe des Meeresspiegel herausragt (siehe auch Abbildung 1.1), befinden sich noch eisbedeckte Flächen. Die großen Schelfeisgebiete, das Ronne-Filchner- und das Ross Schelfeis, existieren nicht mehr.

Interpretation des numerischen Experiments (B)

Bei einer Erhöhung des Reibungskoeffizient μ nimmt auch die Steigung zwischen Inlandeisdicke und Schelfeisdicke zu. Es wird der Eisfluß aus dem Inlandeis stark erhöht, damit fließt aber auch mehr Eis aus dem Übergangsbereich heraus, welches sich nach dem Kopplungsansatz im quasistationärem Gleichgewicht befinden soll. Folglich wird die Eisdicke an der Aufschwimmgrenze kleiner. Infolge der Kriechausdünnungsrate ($\dot{\epsilon}_{xx}$) im Schelfeis, verringert sich die Schelfeisdicke im gesamten Schelfeisgebiet und die Aufschwimmgrenze bewegt sich stromaufwärts.

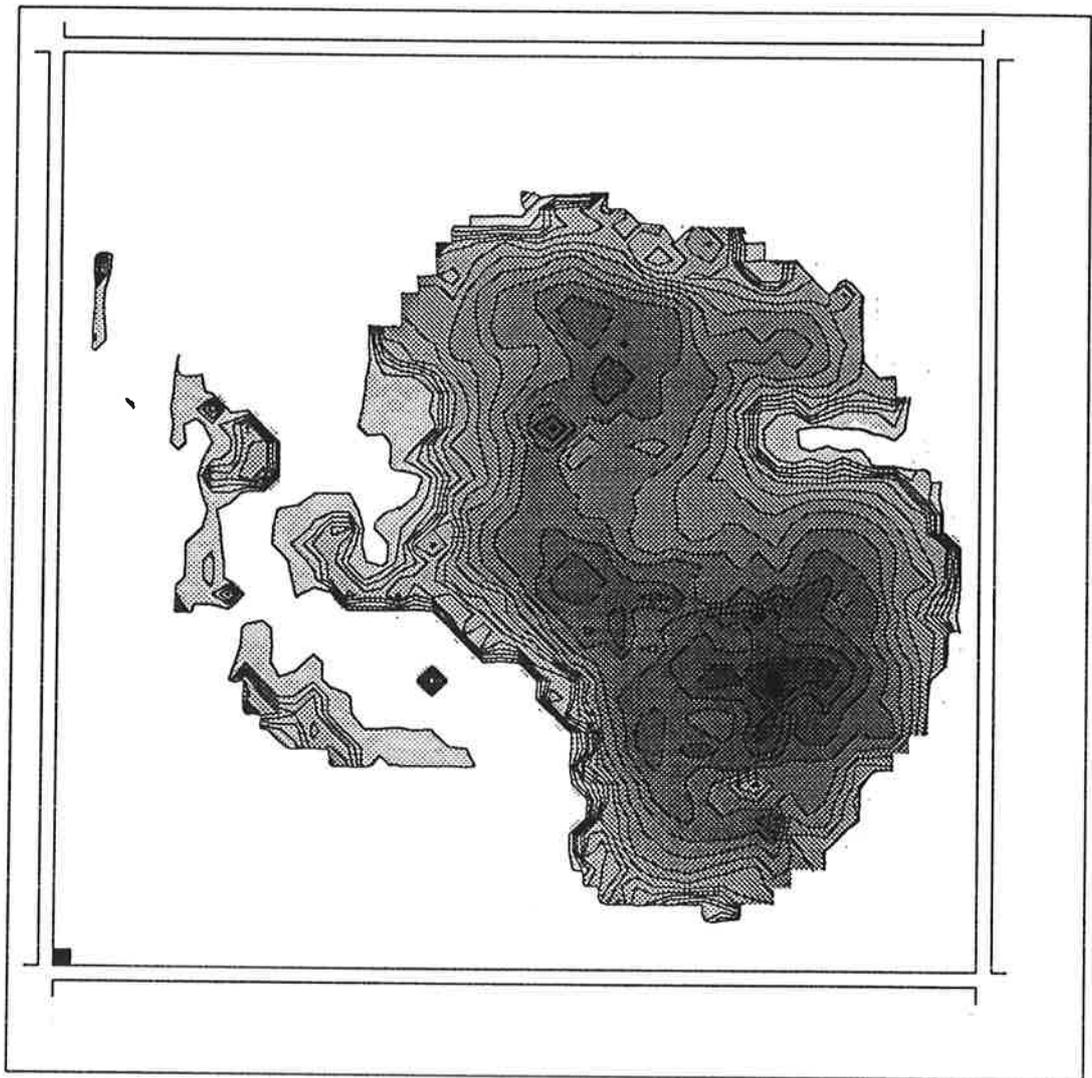


Abbildung 5.4: Isolinien der Eisdicken des gekoppelten Systems von Inlandeis, Schelfeis und quasistationärer Übergangszone nach einer Zeitintegration von 10 000 Jahren mit einem Wert für $\mu = 0.25$.

5.1.3 Meeresspiegelschwankungen

Wie in der Einleitung bereits erwähnt, unterlag auch der Meeresspiegel in der Erdzeitlichen Geschichte größeren Schwankungen. So wird vermutet, daß sich der Meeresspiegel weltweit anhub, als das Laurentidische Eisschild abschmolz. Reaktionen der West-Antarktis auf eine Erhöhung bzw. eine Erniedrigung des Meeresspiegels werden in der Literatur sehr unterschiedlich beurteilt. Modelle ohne Übergangszone wie das von [Thomas, R.H. and C.R. Bentley, 1978] oder das von [Lingle, C.S., 1984] sowie das Modell von [Fastook, J.L., 1984], werden von [Van der Veen, C.J., 1985] sehr heftig kritisiert, denn die Positionsbestimmung der Aufschwimmgrenze hängt von den Eigenschaften der Übergangszone ab. So weicht die Aufschwimmgrenze in Richtung stromaufwärts zurück, wenn die Eisdicke an der Aufschwimmgrenze beispielsweise durch Schmelzen abnimmt und dadurch die Kriechausdünnungsrate ($\dot{\epsilon}_{xx}$) ebenfalls ansteigt. Gestoppt werden kann dieser Vorgang in den Modellen ohne Übergangszone nur, wenn die Scherspannung an den seitlich begrenzenden Schelfeisrändern groß genug wird und die dadurch erzeugte Reibung den Ausfluß aus dem Inlandeis behindert.

Das Modell von Van der Veen beinhaltet eine in Strömungsrichtung 150 km breite Übergangszone, in der zur Bestimmung der Aufschwimmgrenze die Kriechausdünnungsrate auch für die Geschwindigkeitsbestimmung betrachtet wird. Eine Reaktion auf eine plötzliche Meeresspiegeländerung um 50 m fällt im Modell von Van der Veen wesentlich geringer aus, als bei den Modellen ohne Übergangszone.

In diesem vorliegenden gekoppelten Modell hängt die Position der Aufschwimmgrenze wesentlich vom Bodenreibungskoeffizienten ab.

Ausgehend vom Standardlauf wurden jetzt in zwei unterschiedlichen numerischen Experimenten (*C*) und (*D*) eine stetige Meeresspiegeländerung um + 130 m im Experiment (*C*) und um - 130 m im Experiment (*D*) über einen Zeitraum von 10 000 Jahren, zugelassen.

Nach einer gesamten Integrationszeit von jeweils 10 000 Jahren veränderte sich die Verteilung von Inlandeis und Schelfeis in beiden numerischen Experimenten, (*C*) und (*D*), gegenüber dem Standardlauf nur unwesentlich. Damit tendieren diese Modellergebnisse in die gleiche Richtung wie Van der Veens Ergebnisse.

5.2 Fließverhalten unter geometrisch einfachen Randbedingungen

Entsprechend dem Kapitel über das prognostische Schelfeismodell (Abschnitt 3.3.3, S. 28 ff.) und seinen unterschiedlichen Behandlungen des Fließverhaltens des Eises, sollen jetzt Experimente durchgeführt werden, die zeigen, wie unterschiedlich die Eisbewegungen sind, je nach dem, ob ein linearisiertes oder nichtlinearisiertes Fließverhalten angenommen wurde. Die entstehenden prinzipiellen Unterschiede müßten in der Natur zu beobachten sein und geben möglicherweise ein weiteres Indiz für die Anwendbarkeit des empirischen Fließgesetzes.

Das prognostische Schelfeismodell wurde vom Inlandeismodell entkoppelt und zunächst in einer einfachen quadratischen Box gerechnet. Im linearen Fall des numerischen Experimentes ist der nichtlineare Term f in der Gleichung (4.2) und Gleichung (4.3) $f = 1$ gesetzt worden sowie ein entsprechender Wert für A im Fließgesetz. Im nichtlinearen Fall wurden die kompletten Gleichungen (4.2), (4.3) und (4.4) verwendet. In beiden numerischen Experimenten wurde mit denselben Anfangs- und Randbedingungen gerechnet.

Die Boxgeometrie stellt vereinfachte geometrische Verhältnisse gegenüber einem realen Schelfeisgebiet dar (siehe Abbildung 5.5). Am unteren Rand der Aufsicht der Abbildung 5.5 wird der Eiseinstrom in das Schelfeis vorgegeben ($u = 2$ km pro Jahr). An der Schelfeisfront ist die Randbedingung $\partial u / \partial x = 0$. Längs der übrigen Berandung ist $u = v = 0$. Die Integration startet mit folgenden Anfangsbedingungen. An der Eisfront, der Abbruchkante des Schelfeises, beträgt die Anfangseisdicke 0.4 km und steigt mit einer Oberflächenneigung von $1.4 \cdot 10^{-3}$ bis auf 1.8 km am Einstromkanal an, so daß die Eisdickenverteilung einer Keilform entspricht, die sich zur Abbruchkante hin verjüngt. In Abbildung 5.5 sind in der Skizze zum Boxexperiment die beschriebenen geometrischen Verhältnisse in einem Seitenprofil (zx -Ebene) und in einer Aufsicht (xy -Ebene) gezeigt. (Das Seitenprofil entspricht keiner mittigen Ansicht). Wie in der Aufsicht an

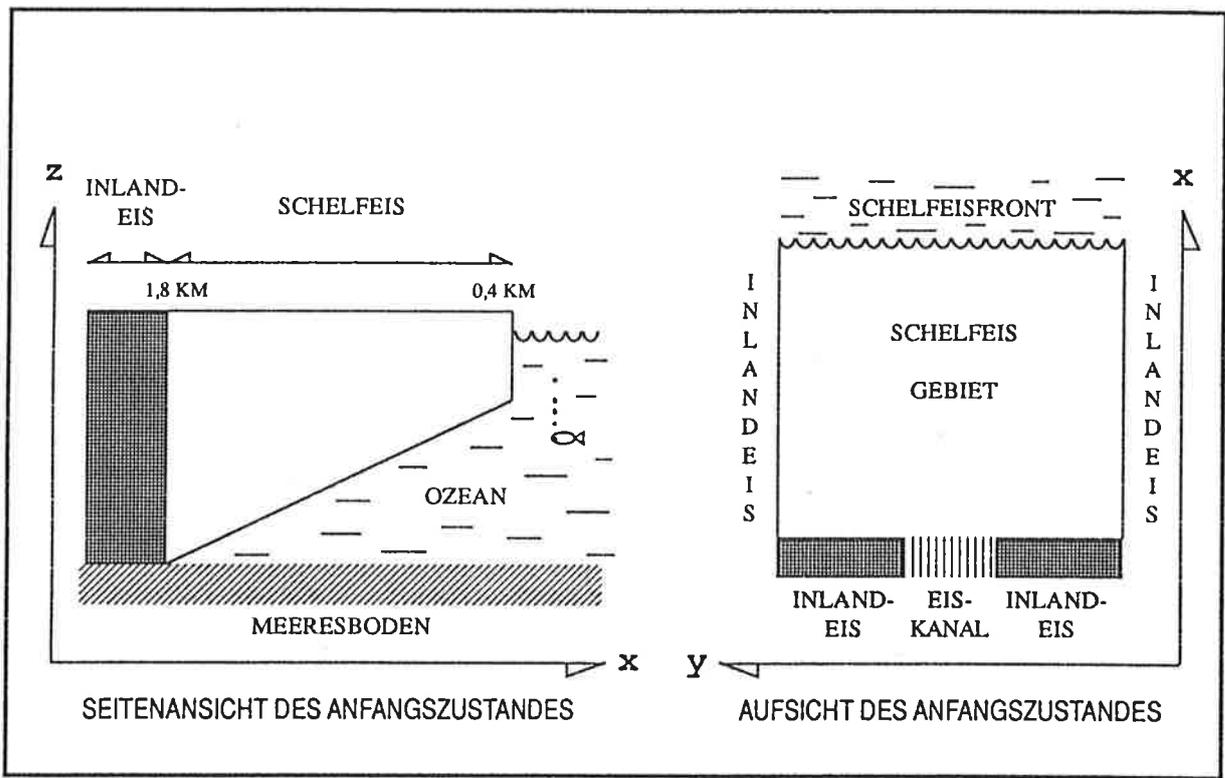


Abbildung 5.5: Skizze zum Boxexperiment mit einem Seitenprofil (zx -Ebene) und einer Aufsicht (xy -Ebene). Die Anfangseisdickenverteilung entspricht einem Keil. Das Schelfeis ist seitlich parallel begrenzt. An der Eisfront bricht das Schelfeis mit konstanter Geschwindigkeit ab. Im Eiskanal (längsschraffiertes Gebiet) strömt das Eis konstant mit 2 km/a ins Integrationsgebiet ein.

dem längsschraffiertem Gebiet zu sehen ist, befindet sich ein Eiskanal in der Bildmitte. Beiderseits des Eiskanals fließt kein Eis ins Schelfeisgebiet hinein. Es gilt dort, wie an den parallelen Seiten, die Randbedingung $u = v = 0$. Eine Übergangszone zwischen Eiskanal und Schelfeis ist hier nicht notwendig.

Das prognostische Schelfeismodell wird für den linearen und nichtlinearen Fall bis ins Gleichgewicht (2 000 Jahre) integriert, dabei wird in der Gleichung (4.5) für die zeitliche Änderung der Eisdickenverteilung der Niederschlag vernachlässigt. In der Bilderserie Abbildung 5.6, Abbildung 5.7, Abbildung 5.8 und Abbildung 5.9 sind Isolinien der

Geschwindigkeiten und der Eisdickenverteilung nach unterschiedlicher Integrationszeit ($t = 0, 150, 250, 500, 1\ 000$ und $2\ 000$ Jahre) dargestellt.

Das lineare Experiment (*E*)

Im linearen Fall (Abbildung 5.6) ist die zur Anfangseisdickenverteilung $t = 0$ zugehörige Eisgeschwindigkeit sehr hoch ($u = 30$ km pro Jahr an der Schelfeisfront). Die Geschwindigkeitskomponenten als Reaktion auf die Anfangseisdickenverteilung sind daher in Abbildung 5.6 (oben links) mit dem Faktor $1/25$ multipliziert worden, da sonst die Vektorpfeile weit über den Bildrahmen hinaus gehen würden.

Die anfangs vorgegebene Keilform der Eisdickenverteilung verschwindet sehr rasch. Schon nach 150 Jahren ist mit Ausnahme der direkten Umgebung des Eiskanals eine fast homogene Verteilung der Eisdicke erreicht. Die anfänglich hohen Geschwindigkeiten, wie sie sich als Reaktion auf die Anfangseisdickenverteilung eingestellt haben, reduzieren sich drastisch mit verschwindender Keilform und bleiben dann von der Größenordnung der Einströmgeschwindigkeit des Eises im Eiskanal. Der Betrag der Eisgeschwindigkeiten nimmt in bezeichnender Weise vom Eiskanal bis hin zur Abbruchkante sowie zu den seitlich begrenzenden Rändern des Schelfeisgebietes ab. In der Hauptströmungsrichtung bei $y/2$ ist der Betrag der Geschwindigkeitsvektoren am größten.

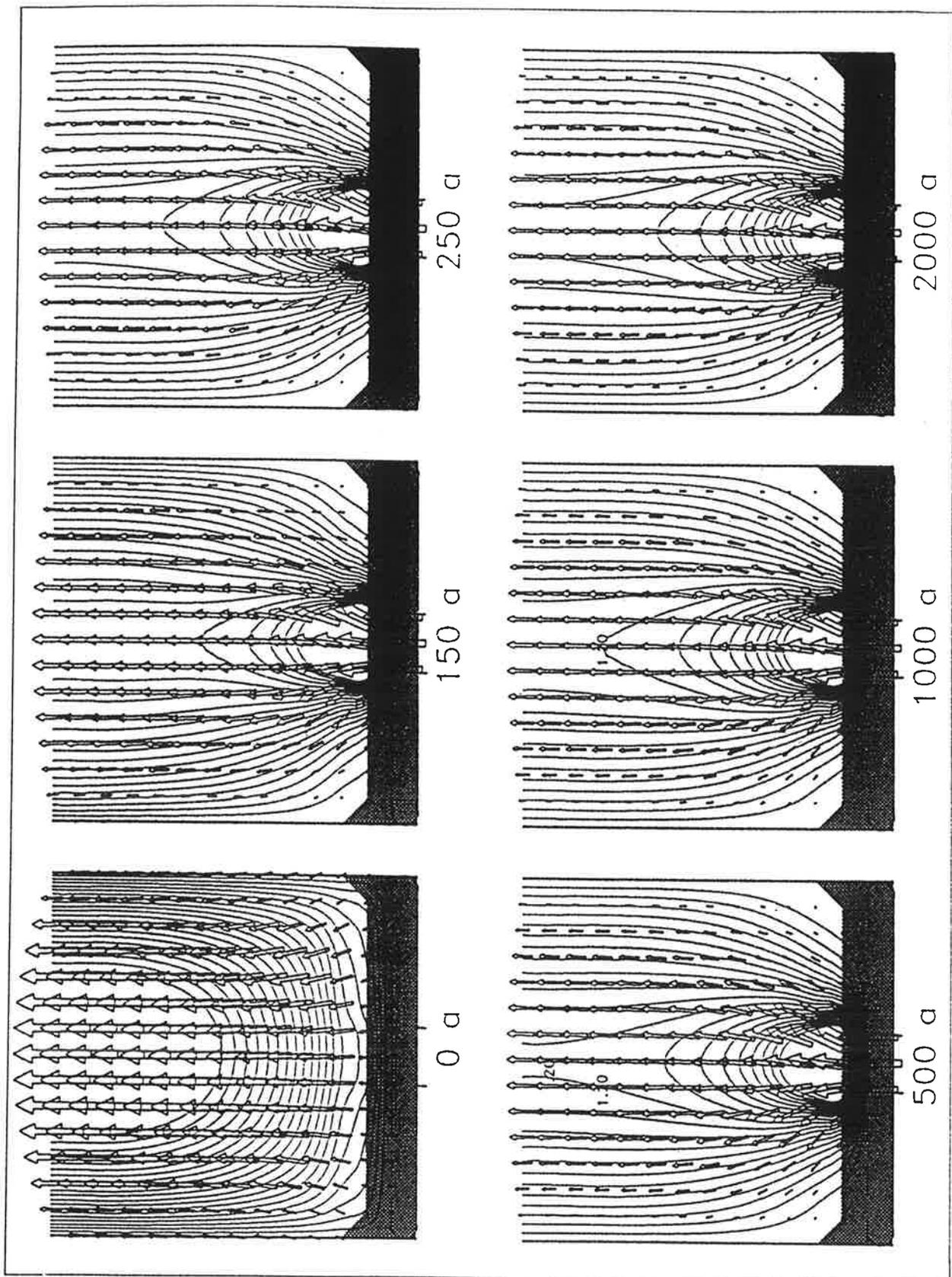


Abbildung 5.6: Isolinien der Eisgeschwindigkeiten [km/a] als Funktion der Zeit für den *linearen Fall* ($f=1$) bei einer Integration über 2 000 Jahre. Die Eis - Einstromgeschwindigkeit wurde an dem markierten Einstromkanal mit 2.0 km/a konstant gehalten. Der Maßstab wechselt nach dem Bild zur Zeit $t = 0$ siehe Text).

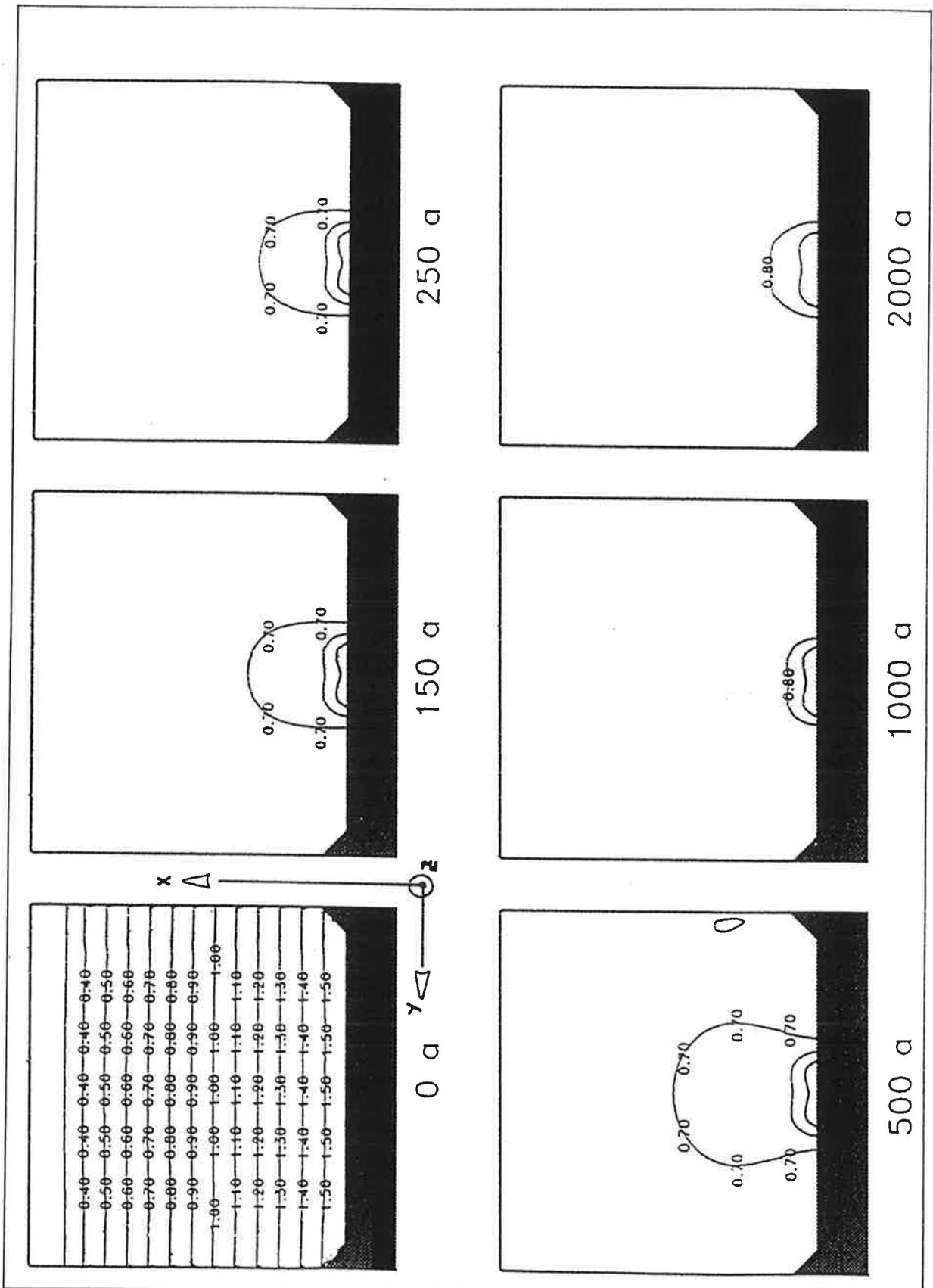


Abbildung 5.7: Isolinen der Eisdicken [km] als Funktion der Zeit für den *linearen Fall* ($f=1$) bei einer Integration über 2 000 Jahre. Die Eisdicke im Einstromkanal wurde mit 1.8 km konstant gehalten.

Das nichtlineare Experiment (F)

Im nichtlinearen Fall ist die Geschwindigkeit an der Schelfeisfront (mit $u \approx 10$ km pro Jahr), mit der das Modell auf die Anfangseisdickenverteilung reagiert, wesentlich geringer, als im linearen Fall. Es entsteht im Verlauf der Integration eine stärker strukturierte Eisoberflächentopographie als im linearen Fall. Reste der Anfangskeilform, in der Nähe der Abbruchkante, sind auch nach 250 Jahren noch deutlich zu erkennen. Die Gleichgewichtseisdickenverteilung im nichtlinearen Fall differiert gegenüber der Gleichgewichtseisdickenverteilung im linearen Fall (E) in großen Bereichen des Schelfeises beinahe um den Faktor zwei. Dagegen unterscheiden sich die Beträge der Geschwindigkeiten nahe dem Gleichgewicht in den beiden Fällen nur unwesentlich. Auch die Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht entspricht in etwa der im linearen Fall.

Vergleicht man die unterschiedlich ausgeprägten Strukturen der Eisoberflächen in den Abbildungen 5.7 und 5.9 mit einer Karte, die auf Grund von Beobachtungsdaten, die während der Messkampagne 1973-78 [Bentley, C.R., et al., 1979] mit Radarmessungen aus der Luft im Ross Schelfeisgebiet, gewonnen wurden, wird deutlich:

- Die Karte zeigt ebenfalls eine stark strukturierte Eisoberfläche (siehe Abbildung 5.12, in der die Beobachtungsdaten auf das verwendete Modellgitter übertragen wurden).
- Die Eisoberflächentopographie der Karte (Abbildung 5.12) hat Ähnlichkeit mit dem nichtlinearen Resultat.
- Aus dem Vergleich ist möglicherweise zu schließen, daß der lineare Fall unrealistisch ist.

Weiterhin bemerkt Bentley et al., daß sich aus ihren Beobachtungen ein höchst komplexes Muster mit Dickenschwankungen, die zumindest teilweise eine komplexe Schelfeisdynamik widerspiegeln, zu finden ist. Interessante Erscheinungen sind: Dickenminima; ein enges, weitgehend verlängertes Rücken- und Trogsystem von 450 oder mehr km Länge; einige wenige Dickenmaxima; steile regionale Neigungen, die von 10 m/km in freischwimmendes Eis übergehen; höchst gewundene Höhenlinien, die auf eine großflächige Turbulenz hinweisen. Sie schließen daraus, daß die Unregelmäßigkeiten vieler dieser Erscheinungen ein dynamisches Ungleichgewicht vermuten lassen. So ist gerade das Vorhandensein von Übergangsstadien im dynamischen System, die das gesamte Schelfeis in einem Zustand sehr raschen Wechsels erscheinen lassen, ein Kennzeichen für ein Ungleichgewicht.

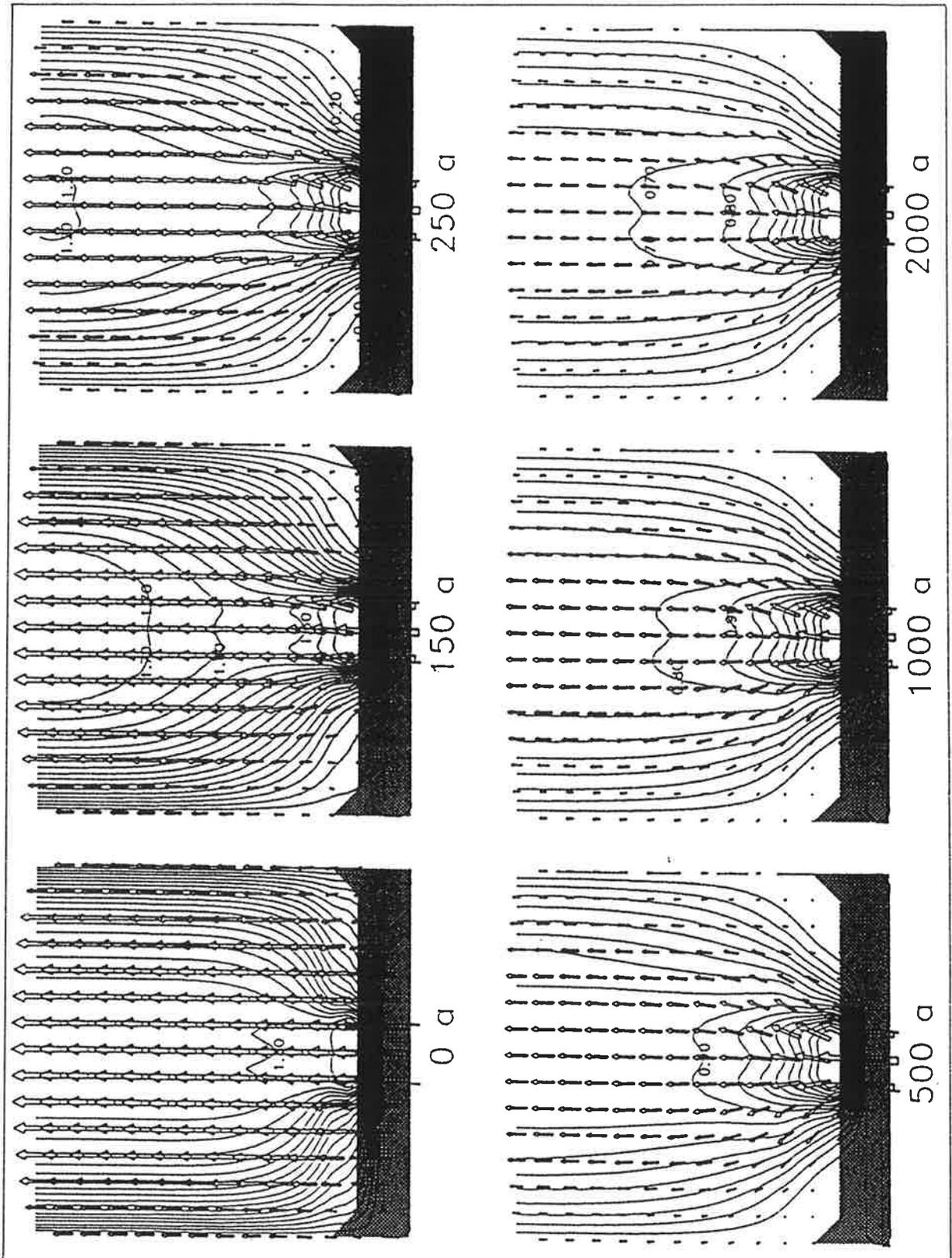


Abbildung 5.8: Isolinien der Eisgeschwindigkeiten [km/a] als Funktion der Zeit für den *nicht-linearen Fall* ($f \neq 1$) bei einer Integration über 2 000 Jahre. Die Eiseinstromgeschwindigkeit wurde an dem markierten Einstromkanal mit 2.0 km/a konstant gehalten.

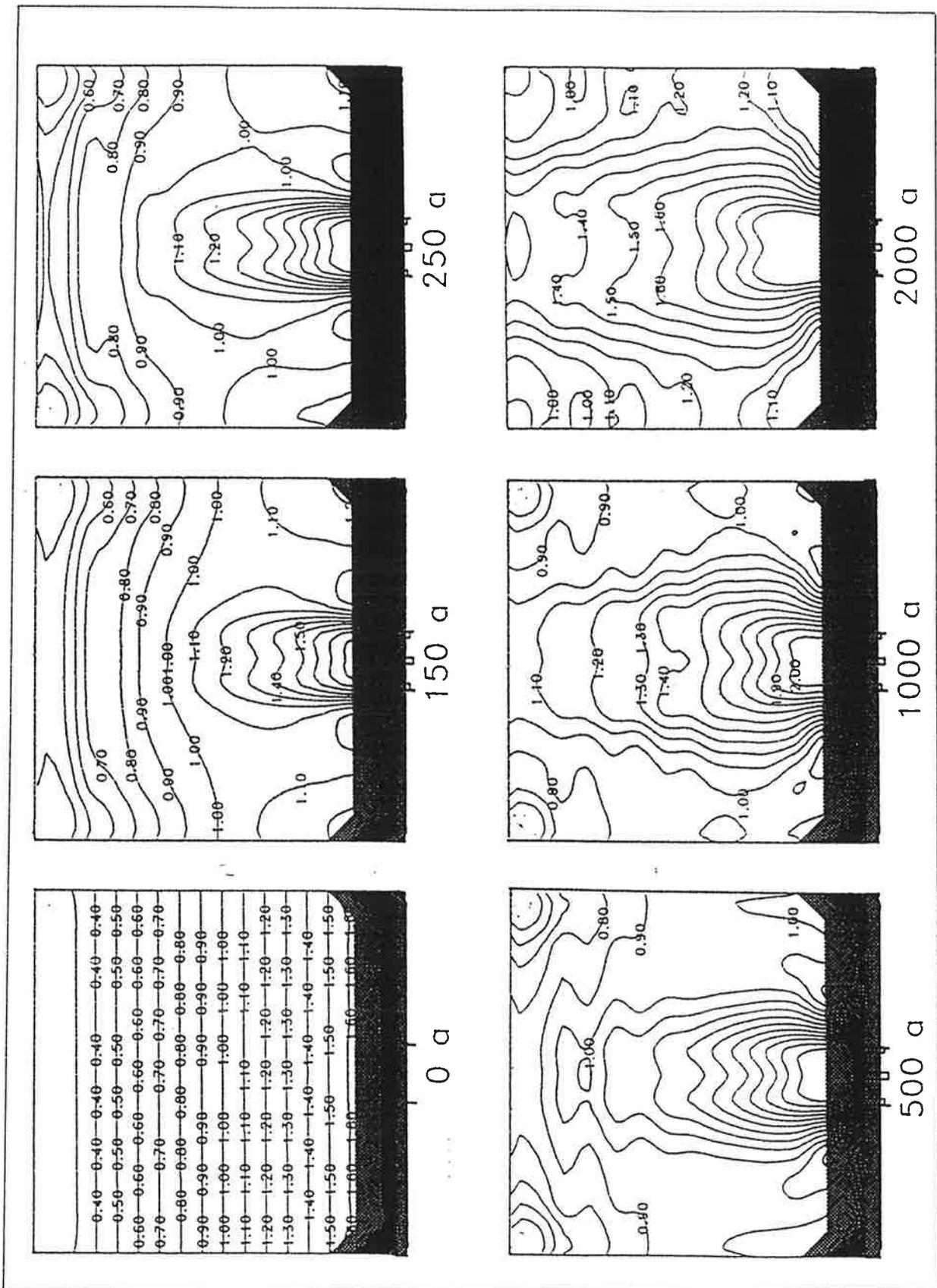


Abbildung 5.9: Isolinien der Eisdicken [km] als Funktion der Zeit für den *nichtlinearen Fall* ($f \neq 1$) bei einer Integration über 2 000 Jahre. Die Eisdicke im Einstromkanal wurde mit 1.8 Km konstant gehalten.

5.3 Zur Kopplung des Inlandeismodells mit dem prognostischen Schelfeismodell

In diesem experimentellen Teil der Arbeit wird, bis auf den folgenden Abschnitt, in dem gekoppelten System das prognostische Inlandeismodell, nach Abschnitt 3.2, das prognostische Schelfeismodell, nach Abschnitt 3.3.3, und eine Übergangszone, nach Abschnitt 3.4 zu Grunde gelegt. Das gekoppelte System wird entsprechend den experimentellen Bedingungen des letzten Kapitels (siehe Abschnitt 4, zweiter Absatz) auf die Antarktis angewandt, wobei allerdings nur das größte Schelfeisgebiet, das Ross Schelfeis, in Verbindung mit dem Inlandeis gebracht wird. Der Grund liegt in der für die Geschwindigkeitskomponenten benötigten Anzahl innerer Gitterpunkte, die in der vorliegenden Modellauflösung von 100 x 100 km gerade noch für das Ross Schelfeis ausreicht. Der Reibungskoeffizient μ erhält den gleichen Wert wie bei dem Standardexperiment im letzten Kapitel.

5.3.1 Vergleich des Modells mit Beobachtungsdaten

In der äquidistanten Modellauflösung von 100 km ist es nur sinnvoll, die größeren Schelfeisgebiete mit Beobachtungen zu vergleichen, da die übrigen Schelfeisgebiete zu klein und die Anzahl der inneren Punkte zu gering ist, um realistische Geschwindigkeiten zu erhalten. Wie in Abschnitt 4.3 (Absatz Randwerte) angedeutet, tritt hier genau der Fall ein, daß außer im Ross Schelfeis, auch im Ronne-Filchner Schelfeis und im Amery Schelfeis, nur noch Randpunkte und randnahe Punkte im Modell zur Geschwindigkeitsberechnung vorliegen.

Im Ronne-Filchner Schelfeis liegt das Problem eher darin begründet, daß die beiden Eisfluß steuernden Eiserhebungen, die Henry-Korf Erhebung, aus dem Modellgitter herausfallen. Ohne diese Eiserhebungen wird sich im Modell ein erheblich abweichendes Muster der Eisdickenverteilungen gegenüber der Natur ergeben. Werden die Eiserhebungen ins Modellgitter implementiert, reduziert sich die Anzahl der inneren Punkte derart, daß die tatsächlichen Geschwindigkeiten vom Modell unterschätzt werden.

Der Hintergrund dieser Unzulänglichkeit liegt in der Modellentwicklung des gekoppelten Systems, das vornehmlich für Fragestellungen im Bereich des Paläoklimas konzipiert wurde, für die eine horizontale Gitterauflösung von 100 km ausreicht.

5.3.2 Der Übergang zwischen Inlandeis und Ross Schelfeis

Vor einer Rechnung mit dem gekoppelten System Inlandeis-prognostischen Schelfeis, sollte erst überprüft werden, ob der Eistransport aus dem Inlandeismodell in Verbindung mit der Übergangszone in der Lage ist, die beobachteten Eisflüsse und Eisdicken an den beobachteten Orten zu simulieren. Für das numerische Experiment (G) wurde der Zustand des Inlandeismodells, wie im Abschnitt 5.1 (erster Absatz) beschrieben, zu Grunde gelegt und die Übergangszone für das Ross Schelfeisgebiet nach Abschnitt 3.4, mit der dort definierten Möglichkeit Eiskanäle zu finden ($h_{ss} > h_T$), benutzt.

Das numerische Experiment (G)

Wie schon mehrfach darauf hingewiesen, wird das Ross Schelfeis nur durch wenige Eiskanäle (A, B, C, D, E, und F) ernährt. [Thomas, R.H. et al., 1984] haben die Eisgeschwindigkeiten und die Eisdicken in diesen Eiskanälen gemessen. In Tabelle 5.10 sind diese Daten mit den Modellergebnissen verglichen. Bis auf den Eiskanal F sind alle wesentlichen Eiskanäle vom Modell identifiziert worden. Die Abweichungen in den Geschwindigkeiten zwischen Modell und Beobachtungen sind bei dem Eiskanal D und E am größten. Sie werden vom Modell mit ca. 50 % unterschätzt. Die Abweichungen bei den Eisdicken sind geringer als bei den Geschwindigkeiten, sie bewegen sich maximal um $\pm 30\%$. Das Inlandeismodell in Verbindung mit der parameterisierten Form der Übergangszone zwischen Inlandeis und Schelfeis, ist also in der Lage, die sachgerechten Randbedingungen für den Betrieb des prognostischen Schelfeismodells in Übereinstimmung mit den heutigen Beobachtungen zu liefern. Um die Gültigkeit

Beobachtungen			Modell	
Ort	Geschw (m/a)	Eisdicke (m)	Geschw (m/a)	Eisdicke (m)
Eiskanal A	225	1000	230	899
B	750	850	740	664
C	150	650	130	587
D	550	800	260	600
E	650	800	420	490
F	200	650	–	–

Abbildung 5.10: Ein Vergleich von beobachteten und vom Modell berechneten Eisdicken und Geschwindigkeiten der Eiskanäle, die wesentlich für die Erhaltung des Ross Schelfeises beitragen [Thomas, R.,H. et al., 1984].

Beobachtungen		Modell
Ort	Breite (km)	Breite (km)
Eiskanal A	6.75	8.5
B	31.1	50.3
C	10.6	11.3
D	25.8	21.7
E	30.5	52.5
F	14.2	–

Abbildung 5.11: Breitenvergleich der Übergangszonen zwischen Modell und Beobachtungen. Die Breiten sind mit den Eisflüssen nach Tab. 5.10 und der Gleichung (3.65) mit $c_{\dot{u}} = 10^{-1} [\text{a}^{-1}\text{km}^{-1}]$ abgeschätzt worden.

der Kopplung zu überprüfen (siehe Kapitel 3.4.5, Grenzen der Kopplung), wurde die theoretische Breite der Übergangszone nach den Modelldaten und nach den Beobachtungsdaten von [Thomas, R.H. et al., 1984] mit Gleichung (3.65) ermittelt. In Tabelle 5.11 sind die Breiten der Übergangszonen gegenübergestellt. Die berechneten mittleren Breiten der Übergangszonen für die Beobachtungsdaten beträgt $\overline{\Delta x} = 20.9$ km und für die Modelldaten $\overline{\Delta x} = 28.9$ km. Im Einzelfall war die Breite der Übergangszone des Eisstroms B und E mit ca. 35 - 41 % überschätzt worden. Die Breite der Übergangszone des Eisstroms F ließ sich nicht ermitteln, da dieser Eiskanal vom Modell nicht gefunden wird. Jedoch überschreiten die theoretisch ermittelten Übergangsbreiten nicht die Gitterauflösung des Modells, so daß die subskalige Behandlung der Übergangszone im gekoppelten System gewährleistet ist.

Wie in Abbildung 3.6 nach den Aufnahmen mit einem hochauflösenden Radiometer zu sehen ist, befinden sich die Eiskanäle im West-Nordwest Teil des Ross Schelfeises. Die im Modell gefundenen Eiskanäle sind in Abbildung 5.12 eingezeichnet. Die Isolinien der Eisdicken in der Abbildung 5.12 entsprechen den Beobachtungsdaten der Eisdicken des Ross Schelfeises, die während einer Messkampagne 1973-78 [Bentley, C.R., et al., 1979] gewonnen wurden. Die Beobachtungsdaten sind auf das Modellgitter übertragen worden und die 0.8 km und die 0.4 km Isolinien gestrichelt hervorgehoben, um den Vergleich mit den aus dem nachfolgenden Modellexperiment resultierenden Eisdicken, zu erleichtern.

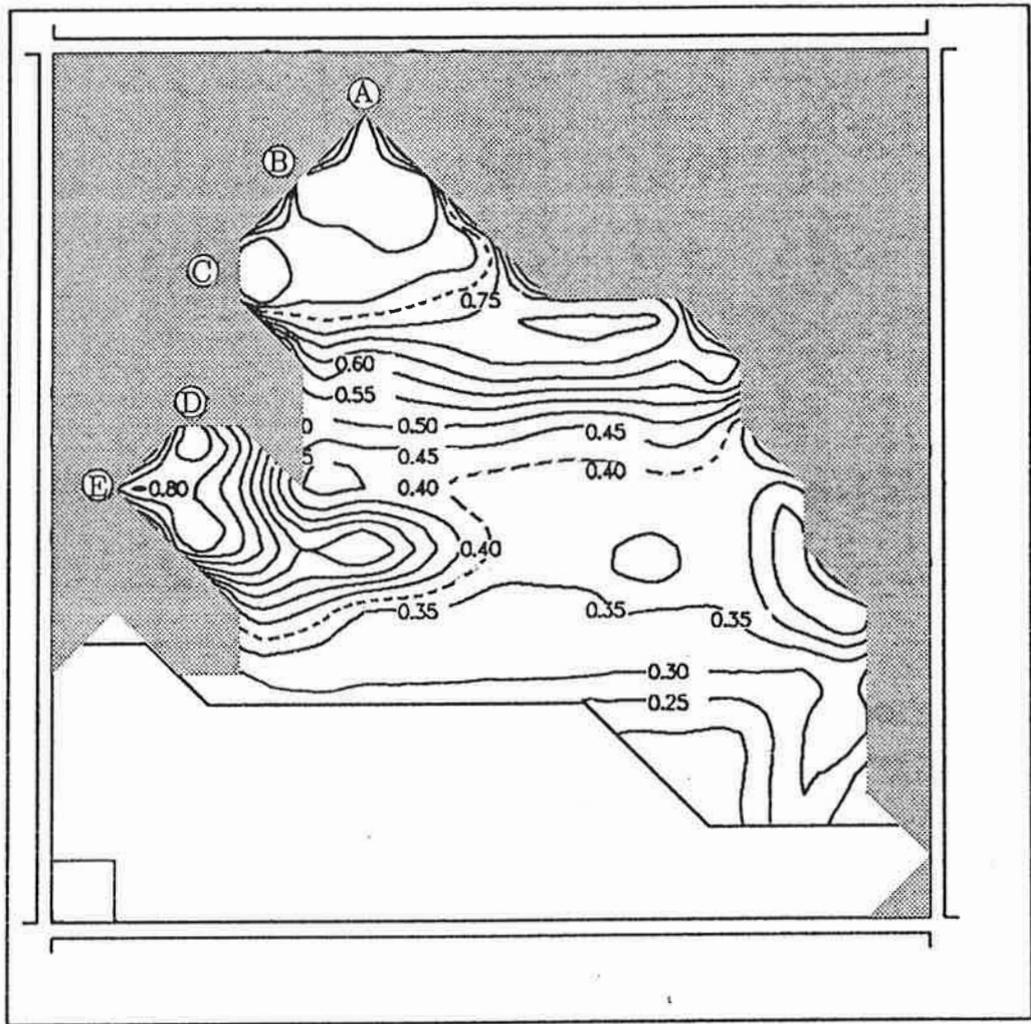


Abbildung 5.12: Die im Modell identifizierten Eisströme (A, B, C, D, und E) des Ross Schelfeises und die beobachteten Eisdickenverteilungen. Die Eisdicken resultieren aus einer hochauflösenden 20 m Isolinienkarte, die auf das Modellgitter übertragen wurde. Die grau unterlegte Fläche deutet das angrenzende Inlandeis an. Die gestrichelten Linien begrenzen die 0.4 km bzw. die 0.8 km Eisdicke.

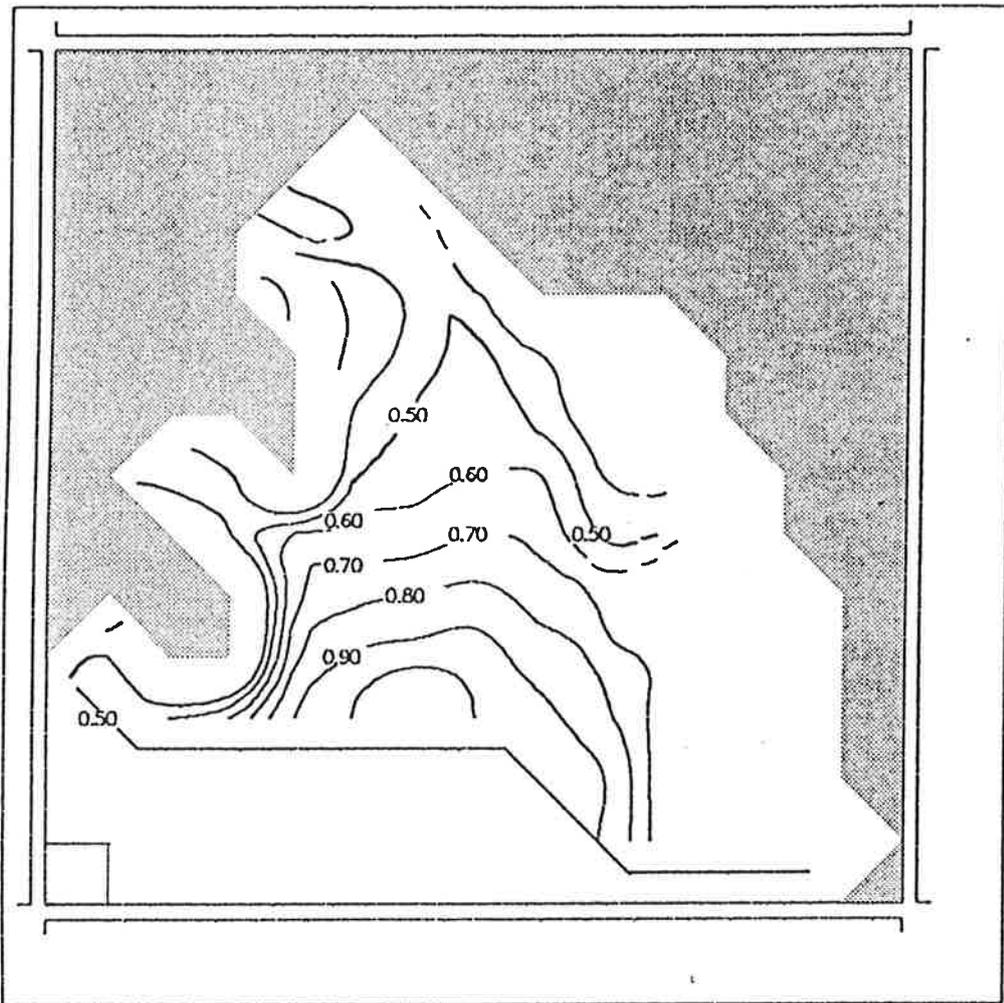


Abbildung 5.13: Isolinien der Eisgeschwindigkeiten [km/a] im Ross Schelfeis. Die Geschwindigkeiten sind mit dem RIGGS-Daten erzeugt [Thomas, R.H. and D.R. MacAyeal, 1982] und auf das verwendete Gitter (100 x 100 km) übertragen worden. Die grau unterlegte Fläche kennzeichnet das angrenzende Inlandeis. Die gestrichelten Isolinien deuten auf Gebiete hin, in denen die Berechnung der Eisgeschwindigkeiten unsicher ist.

5.3.3 Das Standardexperiment (II)

Grundlage des Standardexperiment (II) ist das gekoppelte System von Inlandeis, prognostischem Schelfeismodell und einer quasistationären Übergangszone, deren physikalische Eigenschaften als subskaliger Prozeß im Modellgitter behandelt werden. In der Übergangszone werden, nicht nur die Eisdicke an der Aufschwimmgrenze und die Position der Aufschwimmgrenze, wie bei dem Standardexperiment (I) mit dem quasistationären Schelfeismodell, sondern es wird zusätzlich nach Gleichung (3.64) an den vom Modell identifizierten Eiskanälen, die Geschwindigkeiten berechnet. Diese stellen für das prognostische Schelfeismodell eine notwendige Randbedingung für die Geschwindigkeiten im Schelfeisgebiet dar. Sie sind in Tabelle 5.10 aufgelistet.

Als Anfangseisdickenverteilung wurde eine Keilform, ähnlich wie bei dem Boxexperiment, vorgegeben. Die Eisdicke des Keils wurde jedoch nicht, wie in dem Boxexperiment, willkürlich festgesetzt, sondern durch die Eisdicken der ans Schelfeis angrenzenden Eiskanäle begrenzt. Zur Berechnung der Eisflüsse wurde der Wert des Reibungskoeffizienten, wie bei dem Standardexperiment (I) mit dem quasistationären Schelfeismodell, auf $\mu = 0.05$ festgesetzt. Anschließend wurde das Modell 1 500 Jahre integriert, dabei wurde in der Massenbilanz eine zeitlich und räumlich konstante Jahresschneebilanz mit 15 cm/a an der Schelfeisoberfläche angenommen.

In Abbildung 5.14 sind die Isolinien der modellierten Eisdicken nach einer Integrationszeit von 1 500 Jahren im Ross Schelfeis zu sehen; es sind wieder, wie in Abbildung 5.12, die 0.8 und die 0.4 km Isolinie hervorgehoben. Das angrenzende Inlandeis wurde grau unterlegt. Die modellierten Geschwindigkeitsvektoren sind in Abbildung 5.15 eingezeichnet und das angrenzende Inlandeis ebenfalls grau unterlegt. Um einen Vergleich mit den Geschwindigkeiten des RIGGS-Datensatzes (Abbildung 5.13) zu ermöglichen ist in Abbildung 5.15 die 0.5 und die 1.0 km/a Isolinie der Eisgeschwindigkeit eingezeichnet.

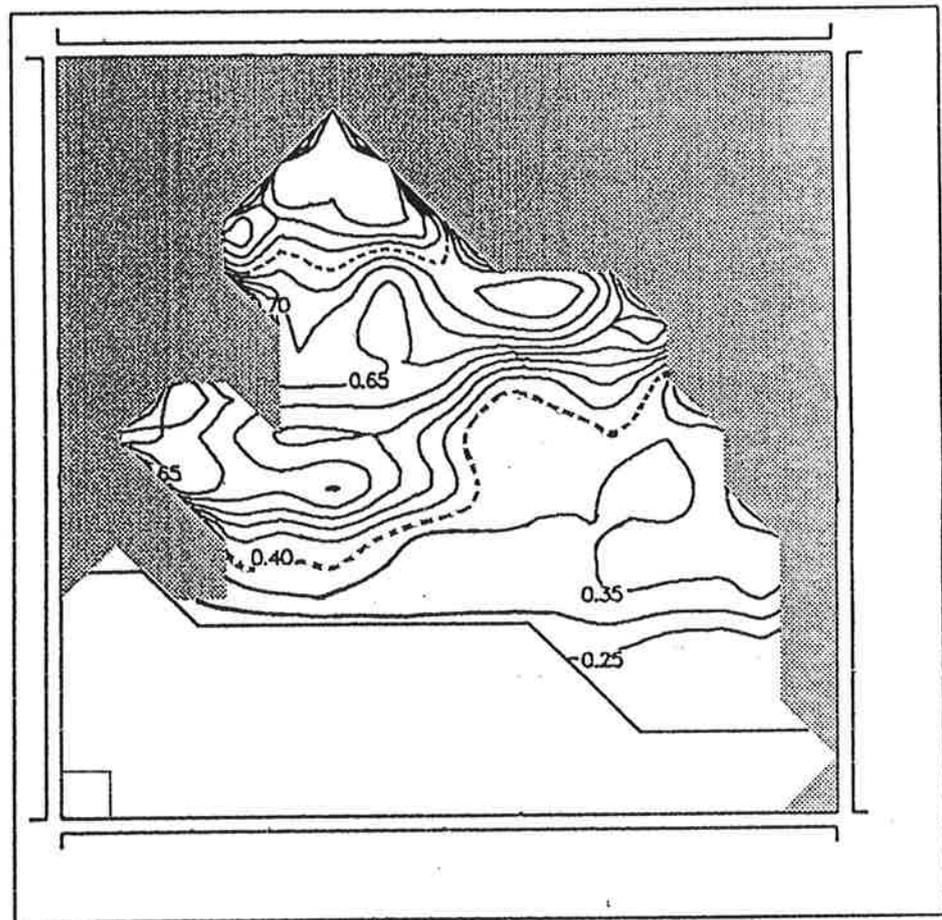


Abbildung 5.14: Isolinien der modellierten Eisdicken [km] im Ross Schelfeis nach einer Integrationszeit von 1 500 Jahren. Die grau unterlegte Fläche kennzeichnet das angrenzende Inlandeis. Die gestrichelten Linien begrenzen die 0.4 km bzw. die 0.8 km Eisdicke.

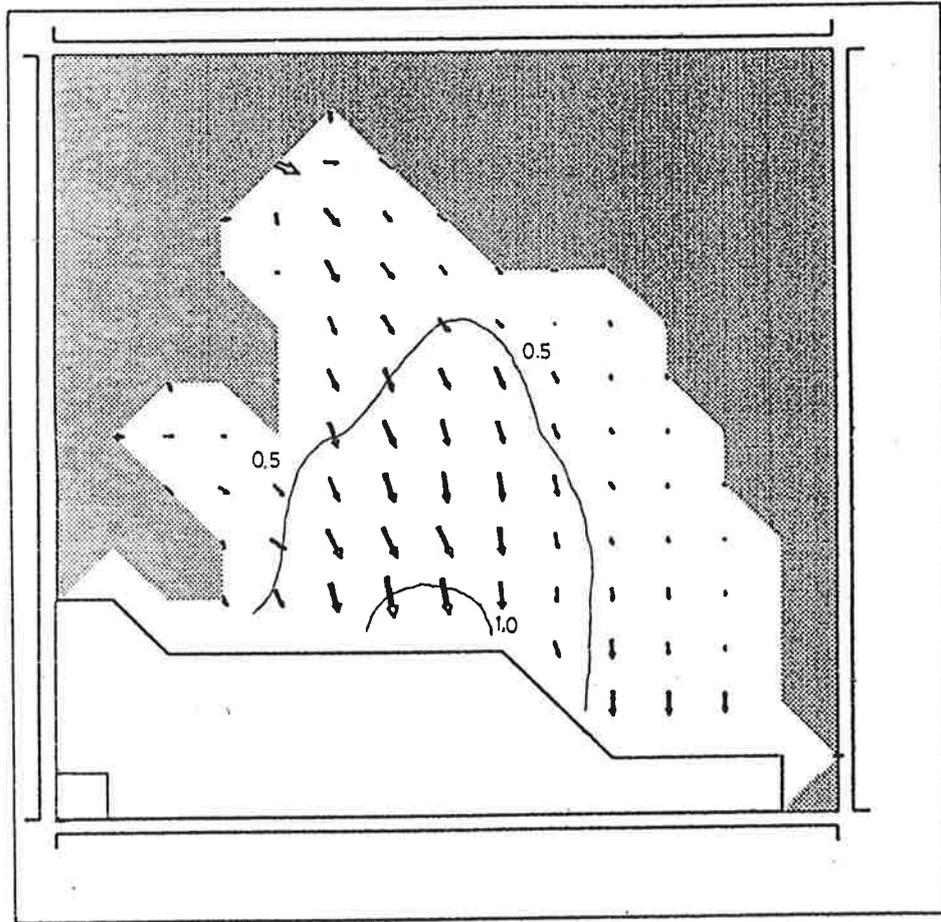


Abbildung 5.15: Geschwindigkeitsvektoren des modellierten Ross Schelfeis mit dem gekoppelten System nach einer Integrationszeit von 1 500 Jahren. Für den Vergleich mit der Abbildung 5.13 ist hier die 0.5 km/a und die 1.0 km/a Isolinie der Geschwindigkeit eingezeichnet. Die grau unterlegte Fläche blendet das angrenzende Inlandeis aus.

Es wird bei dem Vergleich der Isolinien der Abbildung 5.12 mit der Abbildung 5.14 deutlich, daß die simulierte Eisdickenverteilung nahe der beobachteten digitalisierten Eisdickenverteilung liegt. Dabei stimmt die hervorgehobene 0.8 km Isolinie besser als die 0.4 km Isolinie in den Abbildungen überein. Auch die Eisdickenverteilung an der Abbruchkante ist in guter Übereinstimmung bei den Abbildungen. Im Gegensatz zu den Problemen der Eisdickenverteilung bei dem quasistationären Schelfeismodell im Ostteil, entlang dem Transantarktischen Gebirge, des Ross Schelfeisgebietes, treten diese Abweichungen bei den simulierten Eisdicken mit dem prognostischen Schelfeismodell gegenüber den Beobachtungen nicht mehr auf. Damit zeigt sich, daß das prognostische Schelfeismodell eine sehr viel realistischere Modellierung der Eisdickenverteilung erlaubt als das in Abschnitt 3.3.2 beschriebene quasistationäre Schelfeismodell.

Ein Vergleich der simulierten Eisgeschwindigkeiten in der Abbildung 5.15 mit Beobachtungen ist wesentlich schwieriger als ein Vergleich der Eisdicken, da die Eisdicken direkt gemessen werden können [Bentley, C.R. et al., 1979], die Geschwindigkeiten jedoch nur über die Deformation von Bohrlöchern indirekt ermittelt werden. [Thomas, R.H. and D.R. MacAyeal, 1982] legten die Ergebnisse des Ross Ice-Shelf Geophysical and Glaciological Survey (RIGGS) zur Geschwindigkeitsbestimmung im Ross Schelfeis zu Grunde. Mit den RIGGS-Daten und einer angenommenen Verteilung der Abschmelzrate an der Eisunterseite wurden stationäre Temperaturprofile an jeder Meßstation berechnet, so daß mit dem gemessenen Deformationsfeld und dem Fließgesetz letztlich ein Geschwindigkeitsfeld entstand. In Abbildung 5.13 sind die an Beobachtungen angelehnten Geschwindigkeiten in das Modellgitter übertragen worden. Im wesentlichen stimmen die Geschwindigkeiten überein. An der Abbruchkante existieren die größten Geschwindigkeiten mit etwa 1 000 m/a, weiter stromaufwärts nehmen die Geschwindigkeiten in den Beobachtungen jedoch etwas schneller ab als die simulierten Geschwindigkeiten. Dies könnte eventuell auf die nicht korrekte Behandlung der Crary Eiserhebung im Modell sein, die die Eisgeschwindigkeit herabgesetzt.

5.3.4 Ein Eiszeitexperiment

Aus dem existierenden Datenmaterial geht ziemlich sicher hervor, daß das West- Antarktische Inlandeis während der letzten Eiszeit bis zum Rand des Kontinentalschelfs vorgedrungen war. Eine mögliche Ursache wird auf den damaligen um 130 m niedrigen Meeresspiegel zurückgeführt.

Das Modell von [Huybrecht, P., 1990] erklärt ebenfalls diesen eiszeitlichen Zustand der Westantarktis. Dabei verschiebt sich die Aufschwimmgrenze im Modell bis an den

Rand des Kontinentalschelfs der Antarktis. Wird die Bodentopographie der Antarktis relativ zum Meeresspiegel geplottet, zeigt sich bei einem um 130 m abgesenkten Meeresspiegel, daß immer noch weite Bereiche der Westantarktis unterhalb des reduzierten Meeresspiegel liegen. Die Differenz zwischen den heutigen überfluteten Gebieten der Westantarktis und den überfluteten Gebieten, die sich durch einen um 130 m reduzierten Meeresspiegel ergeben würden, ist verschwindend gering. Die deutliche Reaktion des Huybrechtsmodells auf eine Meeresspiegelabsenkung um 130 läßt sich deshalb wohl nicht allein auf eine Vergrößerung der Fläche erklären auf der das Eis auf dem Felsuntergrund aufliegt. Natürlich darf bei diesen Überlegungen nicht die Eintauchtiefe des Schelfeises vernachlässigt werden, wodurch zusätzliche Auflagepunkte im Bereich des Schelfeises geschaffen werden können.

In den Experimenten zur Sensitivität des gekoppelten Modells gegenüber einer Meeresspiegeländerung (mit dem quasistationären Schelfeismodell) zeigte sich, daß das gekoppelte System nicht mit einer weitreichenden Bewegung der Aufschwimmgrenze reagierte, sondern die Verteilung von Inland- Schelfeis Gitterzellen erhalten blieb (numerisches Experiment (C) und (D)). Um zu überprüfen, ob das gekoppelte System (mit dem prognostischen Schelfeismodell) auf eine Absenkung des Meeresspiegels um 130 m anders reagiert, wird, ausgehend vom Standardexperiment (II) in dem numerischen Experiment (H) der Meeresspiegel um 130 m instantan abgesenkt und das Modell einen Zeitschritt integriert.

Ergebnis des numerischen Experiment (H)

Wie zu erwarten, tritt kaum eine Bewegung der Aufschwimmgrenze ein, wie Abbildung 5.16 deutlich zeigt, da die Parameterisierung der Übergangszone in gleicher Weise erfolgt wie beim Experiment (C). Nur im Bereich des Byrd Gletschers und im Bereich des Eisstroms A verschiebt sich die Aufschwimmgrenze um eine Gitterzelle. Bemerkenswert ist jedoch, daß in den Bereichen der Crary Eiserhebung und der Roosevelt Insel, die vorher keinen Kontakt mit dem darüberliegenden Schelfeis im Modell hatten, jetzt Schelfeisflächen mit Grundberührungen aufweisen. Dieses Ergebnis weicht deutlich von dem Ergebnis des numerischen Experimentes (C) ab. Die Ursache liegt in der nun realistischeren Berechnung der Schelfeisdicke mit dem dynamischen prognostischen Schelfeismodell.

Leider reduzieren sich, durch die neu auf Grund liegenden Schelfeisflächen, die für das Schelfeis zur Verfügung stehenden Gitterzellen, so daß eine Geschwindigkeitsberechnung zur Unterschätzung der tatsächlichen Geschwindigkeiten führt. Anzunehmen ist jedoch,

daß sich die Zirkulation im Schelfeis erheblich ändern wird und eine Bewegung der Aufschwimmgrenze von den genannten Eiserhebungen **stromaufwärts** in Richtung zur Aufschwimmgrenze zwischen Inlandeis und Schelfeis zu stande kommt. Da der Ausfluß aus dem Inlandeis in das Schelfeis gleichbleibt, der Ausfluß aus dem Schelfeis dagegen behindert wird, könnte die Schelfeisdicke zunehmen und so zu weiteren Grundberührungen führen. Gerade in dem westlichen Bereich des Ross Schelfeies, in dem auch eine realtiv hohe Eisgeschwindigkeit vorherrscht (im Bereich der Eisfront), wird der Eisfluß durch die Grundberührung des Eises zumindest erheblich gestört.

Wie sich der transiente Zustand im weiteren Verlauf realistisch entwickeln wird, kann jedoch nur beantwortet werden, wenn die Gitterauflösung im Schelfeisgebiet erhöht wird.

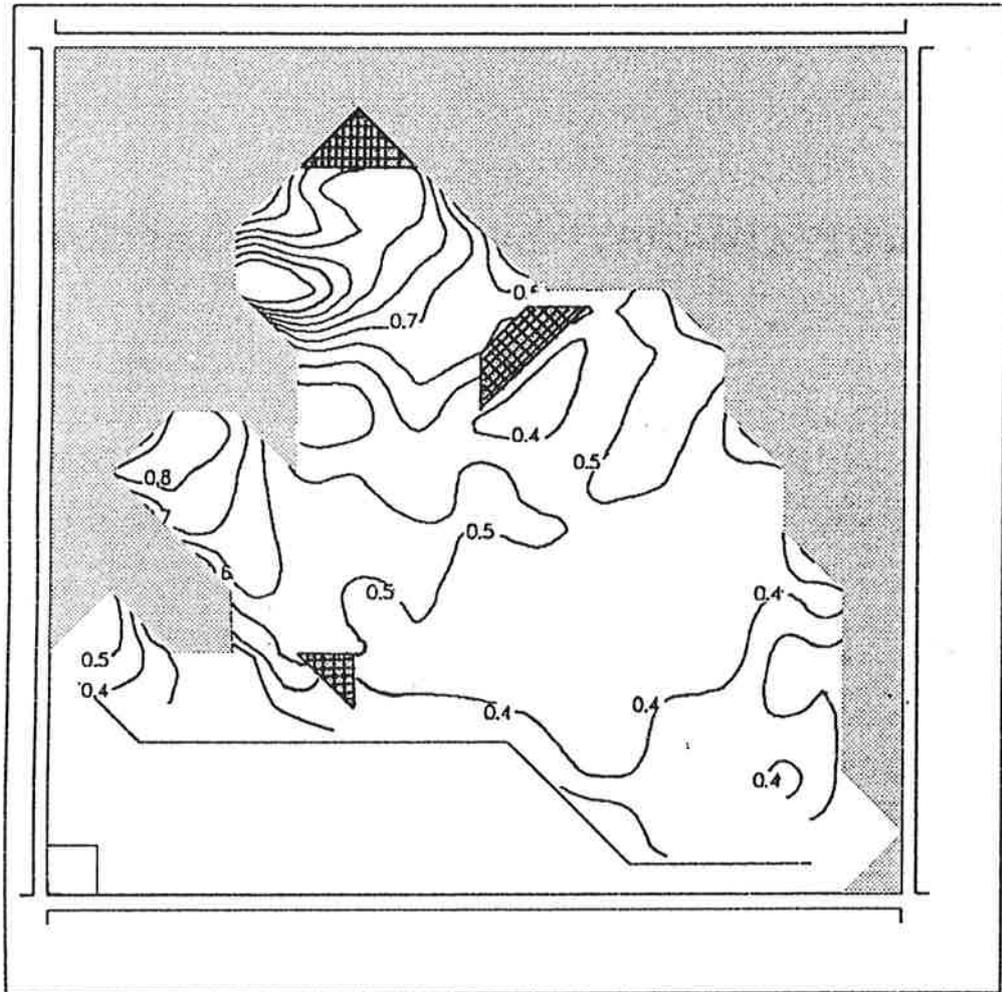


Abbildung 5.16: Verteilung von Eisdicken [km] im Ross Schelfeis nach einer instantanen Absenkung des Meeresspiegel um 130 m. Die schwarzen Flächen bezeichnen die durch die Absenkung hervorgerufenen auf Grund liegenden Schelfeisflächen im Bereich der Crary Eiserhebung und der Roosevelt Insel.

Kapitel 6

Diskussion

Eine der wesentlichen Grundlagen des gekoppelten Systems, ist das Konzept der getrennten Zeitskalen, das sowohl bei der Kopplung des Inlandeismodells mit dem quasi-stationären Schelfeismodell, als auch bei der Kopplung mit dem prognostischem Schelfeismodell eine wesentliche Rolle spielt. Dies Konzept erlaubt es, die in drei Teilgebiete aufgliederte Eisbedeckung der Antarktis, separat zu modellieren. Diese Art der Modellierung ist bisher nur in diesem vorliegenden gekoppelten System verwirklicht worden. In dem einzigen Konkurrenzmodell, das von [Huybrechts, P., 1990], ist der Inlandeisteil des Modells in unwesentlich abgewandelter Form entwickelt worden. Es unterscheidet sich jedoch drastisch in der physikalischen Behandlung der Übergangszone und reagiert auf Meeresspiegeländerungen im Vergleich zu den hier beschriebenen Modell wesentlich empfindlicher.

In der Schelfeismodellierung unterscheiden sich die beiden Modelle in der Formulierung der Eisfront. Während in dem hier entwickelten Modell die Eisfront bei der 200 m Eisdickenisolnie aufhört, rechnet das Huybrechtsmodell das Schelfeisgebiet bis zum Gitterrand. Jedoch liegt der Hauptunterschied nach wie vor in der Behandlung der Übergangszone und in der Ausnutzung des Konzepts der getrennten Zeitskalen, das im Huybrechtsmodell keine Anwendung findet.

Offensichtlich entstehen durch die unterschiedlichen Modellaussagen, die in dieser Arbeit angesprochen wurden (Abschnitt 3.4 und Abschnitt 5.1.3), zwei gegensätzliche Meinungen bei einer Meeresspiegeländerung über die Reaktion der West-Antarktis. Dabei ist insbesondere die Rolle der Übergangszone Gegenstand der Diskussionen.

Das Modell von [Van der Veen, C.J., 1985] und das hier entwickelte gekoppelte System bilden den Gegensatz zu den Modellen ohne Übergangszone, in dem eine Verbindung zwischen Inlandeis- und Schelfeismodell ausschließlich mit einer Übergangszone stattfindet. Die Übergangszone übt, den Modellergebnissen zufolge, eine Pufferwirkung aus, so

daß die Modelle kaum Reaktionen auf Meeresspiegeländerungen im Bereich von ± 100 m zeigen (Abschnitt 5.1.3).

Bei dem vorliegenden Modell zeigt sich, daß für lange Zeitskalen, $t \gg 1\ 000$ Jahre eine einfache quasistationäre Form ausreichend ist, die Eisdickenverteilung der größeren Schelfeisgebiete der Antarktis (Ronne-Filchner, Ross und Amery Schelfeis) zu modellieren (Abschnitt 5.1.1, Abbildung 5.2). Mit dieser gekoppelten Modellversion ist ein Arbeitsmittel entstanden, mit dem weiterführende Untersuchungen auf den langen Zeitskalen des Paläoklimas verwirklicht werden können.

Für Fragen der Gegenwart und der nahen Zukunft wird allerdings schnell sichtbar, daß die grobe Modellauflösung stark einschränkend auf die Modellanwendung wirkt. So reicht diese äquidistante Modellauflösung (100 km) gerade aus, um das Ross Schelfeis, prognostisch in befriedigender Weise zu simulieren (Abschnitt 5.3, Abbildung 5.14 und Abbildung 5.15). Tritt jedoch im Laufe einer Integration eine Verringerung der für das Schelfeis zur Verfügung stehenden Anzahl der Gitterzellen ein, werden die Geschwindigkeiten unrealistisch klein (Abschnitt 4.3).

Es zeigt sich jedoch bei einer alternativen Verwendung eines linearisierten Fließgesetzes, daß dies auf Oberflächenstrukturen führt, die zumindest im Ross Schelfeis nicht anzutreffen sind (Abschnitt 5.2). Demzufolge ist es notwendig zur Modellierung des Ross-Schelfeises das nichtlineare Fließgesetz zu verwenden.

Als eine erste Testrechnung für das gekoppelte System von prognostischen Inland- und Schelfeismodell, die durch die spezielle Formulierung der Übergangszone miteinander verbunden sind, wurde die numerische Modellierung des Ross Schelfeises durchgeführt. Im Rahmen der Auflösung stimmen die erzielten Ergebnisse gut mit den Beobachtungen überein (Abbildung 5.12 mit Abbildung 5.14 und Abbildung 5.13 mit Abbildung 5.15).

Trotz der guten Übereinstimmung von Modelldaten und Beobachtungen, dürfen die Ergebnisse die mit den prognostischen Modellen gewonnen wurden, nicht darüber hinwegtäuschen, daß mit dem gekoppelten System noch keine echten Vorhersagen, im Sinne der prognostischen Wettermodelle, möglich sind. Keines der gekoppelten Modelle oder auch kein derzeit existierendes hochauflösendes Modell des Ronne-Filchner Schelfeis ist in der Lage, auch nur vorherzusagen, welche der größeren Eisgebiete abbrechen wird, oder geschweige denn, den letzten größeren Verlust eines Eisgebietes aus dem Ronne-Filchner Schelfeis im Südsommer 1986 zu simulieren. Alle angesprochenen Modelle beruhen ausschließlich auf der Kontinuumsmechanik, die allein offensichtlich nicht ausreicht diese Problematik zu erfassen. In diesem Zusammenhang seien auch die Spaltenbildungen im Schelfeis genannt, die einen nicht unbeträchtlichen Anteil am

Eisabbruch an der Eisfront haben. Spalten bilden sich vorwiegend im Bereich der Aufschwimmlinie. Sie können Ausdehnungen erlangen, die oft bis zur halben Eisdicke an der Aufschwimmgrenze reichen. Weiterhin wurden Spalten im Bereich der Eiserhebungen durch Radarsondierungen geortet, so z.B. bei der Crary Eiserhebung im Ross Schelfeis [Kenneth, C.J. et al. 1983]. Diese Spalten frieren zwar im Lauf der Eisbewegungen wieder zu, aber es wird vermutet, daß dort Sollbruchstellen entstehen, die dann wieder an der Eisfront aufbrechen.

Welchen Einfluß die Ozeanzirkulation unter dem Eis auf die Schelfeise ausübt und wie deren Wechselwirkungen aussehen, ist bislang ebenso wenig in dynamischen Schelfeismodellen enthalten, wie die erwähnte Spaltenbildung.

Kapitel 7

Ausblick

Eine sinnvolle Weiterführung der Modellierung des gekoppelten Systems liegt in der Erweiterung der Modellauflösung. Die jetzige Auflösung sollte etwa um den Faktor fünf erhöht werden. Damit kann zum einen gewährleistet werden, daß die Anzahl der inneren Gitterpunkte im Schelfeis auch ausreicht um die kleineren Schelfeisgebiete zu modellieren, auch dann, wenn sich durch numerische Experimente die Anzahl der Gitterzellen reduzieren würde, zum anderen wird gleichzeitig eine bessere Darstellung der Eiserhebungen und deren Auswirkung auf den Eisfluß im Schelfeis erreicht.

Weiterhin wäre es mit einem hochauflösenden, gekoppelten Schelfeis-Ozean Modell möglich die Auswirkungen einer thermohalinen Zirkulation unter dem gesamten Schelfeis näher zu studieren. In dem Modell von [Hellmer, H.H and D.J. Olbers, 1989] wird zwar ein Schelfeismodell über den Ozean gelegt, aber die Schelfeisform bleibt immer unverändert.

Wichtig wäre eine genauere Temperaturberechnung im Bodenbereich zwischen Inland- und Schelfeis, da der Bodenreibungskoeffizient, der hier nur als Parameter eingeht, sicher stark temperaturabhängig ist. Wie aus der Modellierung des Inlandeises hervorgeht und aus vereinzelt Daten, liegen große Bereiche, auch entlang der Aufschwimmlinie auf dem druckkorrigierten Schmelzpunkt. Damit besteht die Möglichkeit, daß Wasser am Eisboden oder sogar im Eis gebildet wird, das auch in das Bodensediment eindringen kann. Die Physik solcher Mehrphasensysteme ist bislang in numerischen Eismodellen noch nicht berücksichtigt worden.

Zusammenfassung

Die drei physikalisch unterschiedlichen Eisbereiche der Antarktis, das Inlandeis, das Schelfeis und die Übergangszone zwischen Inland- und Schelfeis, sind auf Grund des Konzeptes der getrennten Zeitskalen separat modelliert worden. Die Teilmodelle wurden anschließend zu einem gekoppelten System zusammengefaßt.

Die quasistationäre Übergangszone verbindet in dem gekoppelten System das prognostische Inlandeismodell entweder mit dem prognostischen oder mit dem analytischen, quasistationären Schelfeismodell. Für die prognostischen Modelle gilt die Massenerhaltung. Kennzeichnend für das Inlandeismodell ist ein Anfangswertproblem, das bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten in der Vertikalen (z -Richtung) auftritt. Vorzugeben sind dabei die Gleitgeschwindigkeiten am Boden. Die Eisgeschwindigkeiten lassen sich diagnostisch aus den lokalen Größen der Eisdicke und der Oberflächenneigung ableiten. Einen analytischen Ausdruck für die horizontalen Eisgeschwindigkeiten läßt sich mit der Flacheisnäherung gewinnen. Kennzeichnend für das prognostische Schelfeismodell ist ein Randwertproblem in der Horizontalen, das bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten für ein geschlossenes Gebiet, auftritt. Dabei sind die Geschwindigkeitskomponenten entlang des Randes zum Inlandeis sowie eine Annahme über die Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten nach x und y entlang der Schelfeisfront vorzugeben. Die Eisgeschwindigkeiten sind tiefenunabhängig und nicht mehr allein durch lokale Größen bestimmbar. Sie ergeben sich diagnostisch aus einem System von zwei nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (elliptisch). Einen analytischen Ausdruck für die Geschwindigkeiten, wie bei dem Inlandeismodell, läßt sich für das Schelfeismodell nicht mehr ableiten. Sie werden mit einem iterativen Verfahren ermittelt. Für das quasistationäre Schelfeismodell wurde das Fließgesetz linearisiert und die Kräftebilanz vereinfacht, so daß sich für die Eisdickenverteilung im Schelfeis ein analytischer Ausdruck finden läßt. Die Eisdicken sind dabei durch ein gewichtetes Mittel der Eisdickenverteilung längs der Schwimmlinie (der Linie an der das Inlandeis zu schwimmen anfängt) ausgedrückt worden.

Die Übergangszone reduziert sich wegen ihrer geringen Breite gegenüber dem Inland- und Schelfeis bei dem hier verwendeten äquidistanten groben Gitter (100 km) zu einer

subskaligen Größe. Die Eisdicke sowie die Breite des Übergangsbereiches in Fließrichtung sind von gleicher Größenordnung, sie können aber nicht Null sein. Dies folgt aus analytischen und numerischen Betrachtungen zur Übergangszone. Die Übergangszone wird daher, im Vergleich zum Inland- und Schelfeis, als quasistationär behandelt. Folglich ist der Eisfluß aus dem Inlandeis plus der Jahresschneebilanz ins Übergangsbereich gleich dem Eisfluß ins Schelfeis. Eine spezielle Eigenschaft der Übergangszone, nämlich die Festlegung der Aufschwimmgrenze und die damit verbundene Eisdicke an der Aufschwimmgrenze (im Modell durch die Impulsbilanz und die Schwimmbedingung realisiert), bestimmt die Kopplung und regelt die Gitterzellenverteilung zwischen Inland- und Schelfeis. Als einzig freier Parameter in dem Kopplungsverfahren bleibt ein Reibungskoeffizient, der durch numerische Experimente festgelegt werden konnte.

Der Anwendungsbereich des gekoppelten Systems wurde vornehmlich für Fragestellungen im Paläoklima festgesetzt. Diese Zielsetzung erforderte es, auf Grund der notwendigen langen Integrationszeit des gekoppelten Systems, zu einer groben Modellauflösung von 100 x 100 km überzugehen. Trotz dieser groben Modellauflösung konnten auch transiente Zustände mit dem gekoppelten System von prognostischem Inland- und prognostischem Schelfeis betrachtet werden. In einem Eiszeitexperiment wird deutlich, daß der letzte Glazialzustand des Ross Schelfeises nicht allein auf Bewegungen der Aufschwimmlinie zurückzuführen ist, sondern vielmehr die blockierende Wirkung der Eishebungen für den Eisfluß wesentlich zum Auffüllen des Schelfeises beigetragen haben muß. Weiterhin ergab sich aus den Experimenten mit einfacher Geometrie, daß für Untersuchungen von transienten Zuständen es notwendig ist, eine komplexe Schelfeisdynamik mit einem nichtlinearen Fließgesetz zu verwenden.

Durch die verwendete und speziell formulierte Übergangszone, im Gegensatz zu anderen einfacheren Modellen, konnte eine erhöhte Sensitivität gegenüber Meeresspiegelschwankungen mit dem gekoppelten System von prognostischem Inland- und quasistationärem Schelfeis nicht bestätigt werden. Dagegen gelang es, eine Abhängigkeit zur Bodenbeschaffenheit und dem damit verbundenen Reibungskoeffizienten in der Übergangszone aufzuzeigen. Die Ergebnisse unterstreichen die Rolle der Übergangszone in der Frage nach der Stabilität der Westantarktis.

Literatur

- Böhmer, W. and K. Herterich** A simplified three-dimensional ice-sheet model including ice shelves; *Annals of Glaciology* Vol.14, 1990.
- Bentley, C.R. et al.** Ice-Thickness Patterns and Dynamik of the Ross ice shelf, *Antarctica Journal of Glaciology*, Vol. 24, No 90, 1979.
- Bindschadler, R.A. and P.L. Vornberger** EOS; *Transactions, American Geophysical Union* (ISN 0096 - 3491) June 5, 1990.
- Budd, W.F.** The Dynamics of the Amery ice shelf; *Journal of Glaciology*, Vol.6, No.45, 1966.
- Budd, W.F.** The longitudinal stress and strain-rate Gradients in ice Mass; *Journal of Glaciology*, Vol.9, No.55, 1970.
- Calov, R.** Zur numerischen Simulation des Aufbaus eines hypothetischen Tibetischen Inlandeis während der Eiszeit; *Diplomarbeit, Max-Planck-Institut*, 1989.
- Drewry, D.J.** *Antarctica in glaciological and geophysical folio*; *Scott Polar Research Institute Cambridge*, 1983.
- Fastook, J.L.** West Antarctica, sea-level controlled marine instability: Past and Future, *Climate Processes and Climate Sensitivity* Hansen J.E. and Takahashi T. (ed.); *Geophysical Monograph 29; Maurice Ewing Vol.5* 1984.
- Glen, W.J.** The flow of ice; *IASH 47, 1958* p171-83.
- Hackbusch, W. (ed.)** *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*; *Teubner Studienbücher Mathematik*; 1986.
- Hellmer, H.H. and D.J. Olbers** A two-dimensional model for the thermohaline circulation under an ice shelf; *Antarctic Science* 1 (4): 325-336, 1989.
- Herterich, K.** On the flow within the transition Zone between Ice Sheet and Ice Shelf, In: *Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet*, (Van der Veen, C.J. and J. Oerlemans, (eds.)) p185-202; *D. Reidel Publishing Company*, 1987.

- Herterich, K.** A Three-Dimensional Model of the Antarctic ice Sheet Annals of Glaciology, Vol.11, 1988.
- Herterich, K.** Modellierung eiszeitlicher Klimaschwankungen; Habilitationsschrift, Max-Planck-Institut, 1990.
- Holten, J. (ed.)** Introduction to Dynamic Meteorology 2nd Edition; International Geophysics Series, Vol. 23, Academic Press, New York, 1979.
- Hutter, K. (ed.)** Theoretical Glaciology. Material Science of ice and mechanics of Glaciers and ice sheets. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1983.
- Huybrechts, P.** The Antarctic ice sheet during the last glacial-interglacial cycle: a three dimensional experiment; Annals of Glaciology Vol.14, 1990.
- Jaeger, J.C. (ed.)** Elasticity, Fracture and Flow with Engineering and Geological Applications, (III. edition); Science Paperbacks by Chapman and Hall, New York.
- Kenneth, C.J. and C.R. Bentley** Fieldstudies of bottom crevasses in the Ross ice-shelf, Antarctica; Journal of Glaciology, Vol. 29, No. 101, 1983.
- Kock, H. and A. Wiegand** Glaciological Geodesy on Filchner ice shelf 1983-86; In: Filchner Ronne Ice-shelf Programme Report No.3 Alfred Wegner Institut for Polar and Marine Research Bremerhaven, FRG, 1986.
- Kuhle, M., K. Herterich and R. Calov** On the ice age glaciation of the Tibetan highlands and its transformation into a 3-d model; GeoJournal 19.2, 201-206, 1989
- Lange, M.A. and MacAyeal, D.R.** Numerical Models of the Filchner - Ronne ice shelf: An Assessment of reinterpreted ice thickness distributions; Journal of Geophysical Research, Vol.91, No. B10, p10457-10462 Sept. 1986.
- Lingle, C.S.** A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean: Application to ice stream E, West Antarktis; Journal of Geophysical Research C: Oceans and Atmosphere, 1989, p3523-3549.
- MacAyeal, D.R. and Thomas, R.H.** The effects of basal melting on the present flow of the Ross ice shelf, Antarctica; Journal of Glaciology, Vol. 32, No.110, 1986.
- MacAyeal, D.R. et. al.** Measured force, Mass and Energy Budgets of the Crary ice - Rise complex, Antarctica; Journal of Glaciology 1987.

- MacAyeal, D.R. and Thomas, R.H.** Numerical modelling of ice shelf motion; *Annals of Glaciology* Vol.3, p189-194, 1982.
- Malvern, L.E. (ed.)** *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*; Prentice-Hall, 1969.
- Nye, J.F.** The mechanics of glaciers flow: *Journal of Glaciology*, Vol. 2, p82-93, 1952a.
- Oswald, G.K.A. and G. de Q. Robin** Lakes beneath the Antarctic ice-sheet; *Nature* 245, 251-254, 19
- Oerlemans, J. and C.J. Van der Veen (eds.)** *Ice sheet and climate*; D. Reidel, Dordrecht, 1984.
- Paterson, W.S.B.** *Ice Sheets and Ice Shelves; Dynamics of snow and ice Masses*; p1-73; S.C. Colbeck (ed.), Academic Press, Inc, 1980.
- Paterson, W.S.B. (ed.)** *The Physics of Glaciers*; 2nd Edition Pergamon Press, Oxford, 1983.
- Pittock, A. B.; L. A. Frakes; D. Janssen; J. A. Peterson; J. W. Zillman (eds.)** *Climate Change and Variability, a Southern Perspective*, 1978.
- Sanderson, J.O. and Doake, C.S.M.** Is vertical shear in an ice shelf negligible; *Journal of Glaciology*, Vol.22, No. 87, 1979.
- Sanderson, J.O.** Equilibrium profile of ice shelves; *Journal of Glaciology*, Vol. 22, No.88, 1979.
- Stephenson, S.N. and R.A. Bindshadler** Observed velocity fluctuations on a major Antarctic ice stream; *Nature* Vol. 334 Aug. 1988.
- Sündermann, A.** Die Anwendung von adaptiven Gittern in zwei einfachen Modellen für eine atmosphärische Rollenzirkulation; *Berichte aus dem Zentrum für Meeres- und Klimaforschung der Universität Hamburg* Nr. 5, Dissertation, 1990.
- Thomas, R.H.** The creep of ice shelves: Theory; *Journal of Glaciology*, Vol.12, No.64 1973a.
- Thomas, R.H.** The creep of ice shelves: Interpretation of observed behaviour; *Journal of Glaciology*, Vol.12, No.64, 1973b.

- Thomas, R.H. and C.R. Bentley** A Model for Holocene Retreat of the West Antarctic ice sheet; *Quaternary Research* 10, p150-170, 1978.
- Thomas, R.H.** Ice shelves: A Review; *Journal of Glaciology*, Vol. 24, No. 90, 1979.
- Thomas, R.H.** The Dynamics of marine ice sheets; *Journal of Glaciology* Vol. 24, No. 90, 1979b.
- Thomas, R.H. and D.R. MacAyeal** Derived characteristics of the Ross ice shelf Antarctica; *Journal of Glaciology*, Vol.28, No.100, 1982.
- Thomas, R.H. et al.** Glaciological studies on the Ross ice shelf, Antarctica, 1973-1978, by R.H. Thomas D.R. MacAyeal, D.H. Eilers and D.R. Gaylord. (in: Hayes, D., and C.R. Bentley (ed.) *The Ross ice shelf: glaciology and geophysics*. Washington DC, American Geophysical Union, p21-53. (Antarctic Research Series, Vol. 42 1984).
- Van der Veen, C.J.** A Note on the equilibrium profile of a free floating ice shelf; *IMOU Report V 83-15*, 1983.
- Van der Veen, C.J.** Response of a marine ice sheet to changes at the grounding line; *Quaternary Research* 24, 257-267, 1985.
- Van der Veen, C.J.** Ice Sheets, Atmospheric CO₂ and Sea Level; Dissertation, Rijksuniversiteit te Utrecht, 1986.
- Van der Veen, C.J.** Longitudinal stresses and basal sliding: a comparative study; *Dynamics of the West Antarctic ice sheet* [Van der Veen, C.J. and J. Oerlemans, (eds.)], Reidel, Dordrecht, 1987.
- Weertman, J.** On the sliding of Glaciers; *Journal of Glaciology*; Vol.3 No.21, 1957a, p33-38.
- Weertman, J.** Deformation of floating ice shelves; *Journal of Glaciology*; Vol.3 No.21, 1957b, p38-45.
- Weertman, J.** Stability of the junction of an ice sheet and an ice shelf; *Journal of Glaciology*, Vol. 13, No.67, 1974.
- Weertman, J.** Glaciology's grand unsolved problem; *Nature* Vol. 260 March 25, 1976.

- EXAMENSARBEIT Nr. 1
Juli 1990
Modellierung des gekoppelten Systems
Ozean-Atmosphäre in den Tropen
Mojib Latif
- EXAMENSARBEIT Nr. 2
Juli 1990
Zur Dynamik des antarktischen Zirkumpolar-
stromes
Jörg-Olaf Wolff
- EXAMENSARBEIT Nr. 3
Juli 1990
Zur Erniedrigung des atmosphärischen
Kohlendioxidgehalts durch den Weltozean
während der letzten Eiszeit
Christoph Heinze
- EXAMENSARBEIT Nr. 4
August 1990
Analysis and Prediction of the El Niño
Southern Oscillation Phenomenon using
Principal Oscillation Pattern Analysis
Jin-Song Xu
- EXAMENSARBEIT Nr. 5
Dezember 1990
Untersuchung zur niederfrequenten
Variabilität der Meeresoberflächen-
temperatur im Nordpazifik
Ute Luksch
- EXAMENSARBEIT Nr. 6
Dezember 1990
Meereismodellierung im Südlichen Ozean
Achim Stössel
- EXAMENSARBEIT Nr. 7
Dezember 1990
Principal Interaction/Oscillation Patterns
Theorie und Analysen
zum El Niño/Southern Oscillation-Phänomen
Udo Weese
- EXAMENSARBEIT Nr. 8
Dezember 1990
Bestimmung des Temperaturprofils der
Troposphäre mit einem Zwei-Frequenz-LIDAR
Felix A. Theopold
- EXAMENSARBEIT Nr. 9
Januar 1991
Modellierung des gekoppelten Systems:
Inlandeis, Übergangszone und Schelfeis
der Antarktis
Wolfgang Böhmer

ISSN 0938-5177