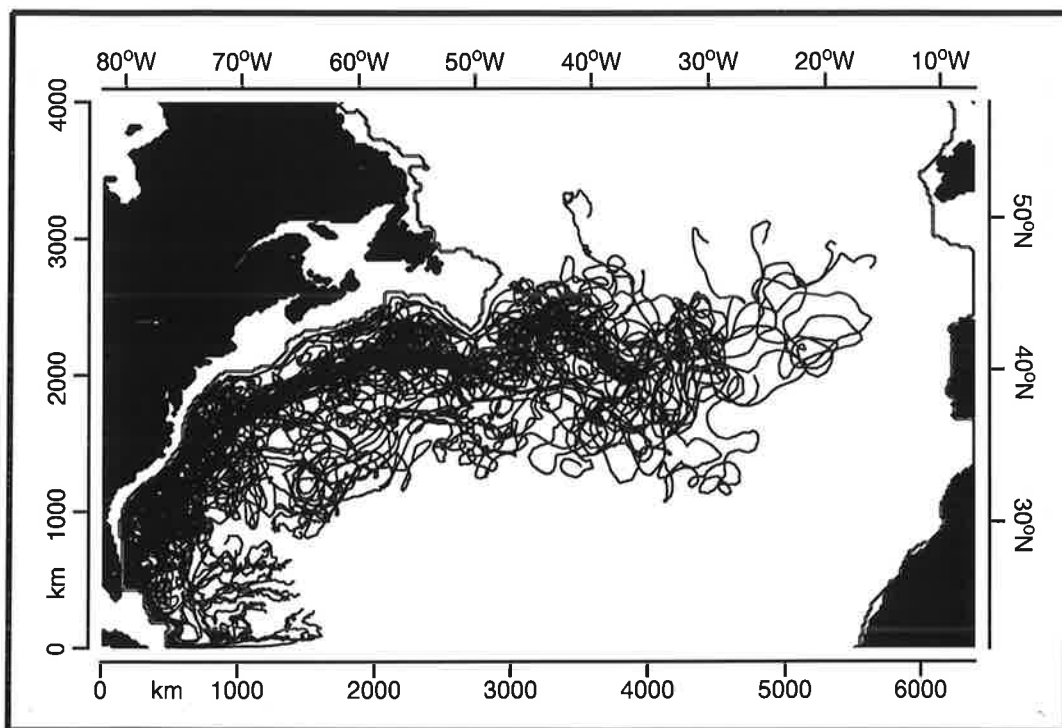




# Max-Planck-Institut für Meteorologie

## EXAMENSARBEIT Nr. 37



TURBULENZCHARAKTERISTIKEN VON  
GOLFSTROMTRAJEKTORIEN IN EINEM  
QUASIGEOSTROPHISCHEN ZIRKULATIONSMODELL  
BASIEREND AUF LANGRANGE'SCHEN VORTICITYTRACERN

VON

Miguel Zorita Calvo

HAMBURG, März 1996

Dissertation im Rahmen des Promotionsverfahrens

Autor:

Miguel Zorita Calvo

Max-Planck-Institut  
für Meteorologie

MAX-PLANCK-INSTITUT  
FÜR METEOROLOGIE  
BUNDESSTRASSE 55  
D-20146 Hamburg  
F.R. GERMANY

Tel.: +49-(0)40-4 11 73-0  
Telefax: +49-(0)40-4 11 73-298  
E-Mail: <name> @ dkrz.de

ISSN 0938-5177

Turbulenzcharakteristiken von  
Golfstromtrajektorien in einem  
quasigeostrophischen Zirkulationsmodell  
basierend auf Lagrange'schen Vorticitytracern

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften im Fachbereich  
Geowissenschaften  
der Universität Hamburg

vorgelegt von  
Miguel Zorita Calvo  
aus León (Spanien)

Hamburg

1996

Als Dissertation angenommen vom Fachbereich Geowissenschaften der  
Universität Hamburg

auf Grund der Gutachten von Prof. Dr. J. Sündermann

und Dr. E. Maier-Reimer

Hamburg, den 7. Februar 1996

Prof. Dr. M. Dunst

Sprecher des Fachbereichs Geowissenschaften



---

## Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit werden die Turbulenzeigenschaften der windgetriebenen Zirkulation im Nordatlantik zwischen  $22^{\circ}\text{N}$  und  $58^{\circ}\text{N}$  mit einem wirbelauflösenden Zweischichtenmodell untersucht, das auf den quasigeostrophischen Gleichungen basiert. Während herkömmliche Modelle ausschließlich mit Euler'schen Koordinaten arbeiten, werden hier sowohl Euler'sche als auch Lagrange'sche Koordinaten verwendet. Die Grundlage für dieses Modell stellt die Betrachtung des Ozeans als eine finite Zahl Wasserkörper dar, die potentielle Vorticity transportieren ("Vorticitytracer"). Die Lagrange'sche potentielle Vorticity wird im Modell strikt erhalten. Die mit dem Modell verbundene numerische Viskosität läßt sich auf ein Minimum reduzieren.

Das Modell liefert eine wirklichkeitsnahe Simulation der zonalen und meridionalen Skalen der mittleren und transienten Felder im Nordatlantik, die bei herkömmlichen Modellen nur unter einer viel höheren vertikalen Auflösung zu erreichen ist. Es wird eine sehr große Ähnlichkeit zwischen den vom Modell simulierten und beobachteten Golfstromtrajektorien festgestellt. Die Turbulenzeigenschaften werden mit Hilfe einer statistischen Untersuchung von Partikelensembeln bestimmt und mit Beobachtungsdaten verglichen. Daraus werden Diffusionskoeffizienten abgeleitet und als mögliche Parameterisierung der Wirbeldiffusion vorgeschlagen. Die beobachtete Wirbeldiffusion wird vom Modell mit kleinen Ausnahmen quantitativ richtig wiedergegeben. Der Transport von potentieller Vorticity durch das Wirbelfeld modifiziert im Modell, wie schon in theoretischen Überlegungen diskutiert (Holland et al., 1984) und auch durch Beobachtungen verifiziert, den nordwärtigen Gradienten von planetarischer Vorticity. Es entstehen Regionen mit weitgehend homogener potentieller Vorticity. Andererseits bewirkt dieser Transport aber auch eine Verstärkung des mittleren Golfstroms. Der meridionale Wärmetransport durch das Wirbelfeld wird diskutiert.



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Kapitel 1: Einleitung</b>	<b>Seite 1</b>
------------------------------	----------------

---

<b>Kapitel 2: Das quasigeostrophische Modell mit dynamisch gekoppelten Euler-Lagrange'schen Koordinaten</b>	<b>Seite 7</b>
---	----------------

---

2.1 Quasigeostrophische Gleichungen und Approximationen	7
2.2 Numerische Lösung der quasigeostrophischen Gleichungen	10
2.3 Anwendung auf die Simulation des Golfstroms: Modellparameter	18
2.3.1 Topographie und allgemeine Modellparameter	18
2.3.2 Äußere Kräfte, Reibung und Randbedingungen	22

<b>Kapitel 3: Stabilitätsexperimente</b>	<b>Seite 27</b>
--	-----------------

---

3.1 "Spin-up"	27
3.2 Strömungscharakteristika der stabilen Experimente: Mittlere Stromfunktion und kinetische Energie der Wirbel	33
3.3 Tiefe der Thermokline und potentielle Energie im zentralen Experiment	47
3.4 Verteilung der Wasserelemente im Modell	50
3.5 Vorticitybilanz einzelner Wasserelemente	53

<b>Kapitel 4: Statistische Turbulenzeigenschaften und Parameterisierung quasigeostrophischer Wirbel</b>	<b>Seite 59</b>
---	-----------------

---

4.1 Grundlagen und Beschreibung des Experimentes	60
4.2 Lagrange'sche Korrelationen	68
4.3 Energiespektren	73
4.4 Diffusionskoeffizienten	78

<b>Kapitel 5: Transport von potentieller Vorticity durch das Wirbelfeld</b>	<b>Seite 89</b>
---	-----------------

---

5.1 Vorticitytransport und die mittlere Zirkulation	89
5.2 Globaler Vorticity- und Wärmetransport	100

<b>Kapitel 6: Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>Seite 103</b>
--	------------------

---

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>Seite 107</b>
-----------------------------	------------------

---

<b>Anhang</b>	<b>Seite 113</b>
---------------	------------------

---



---

## Einleitung

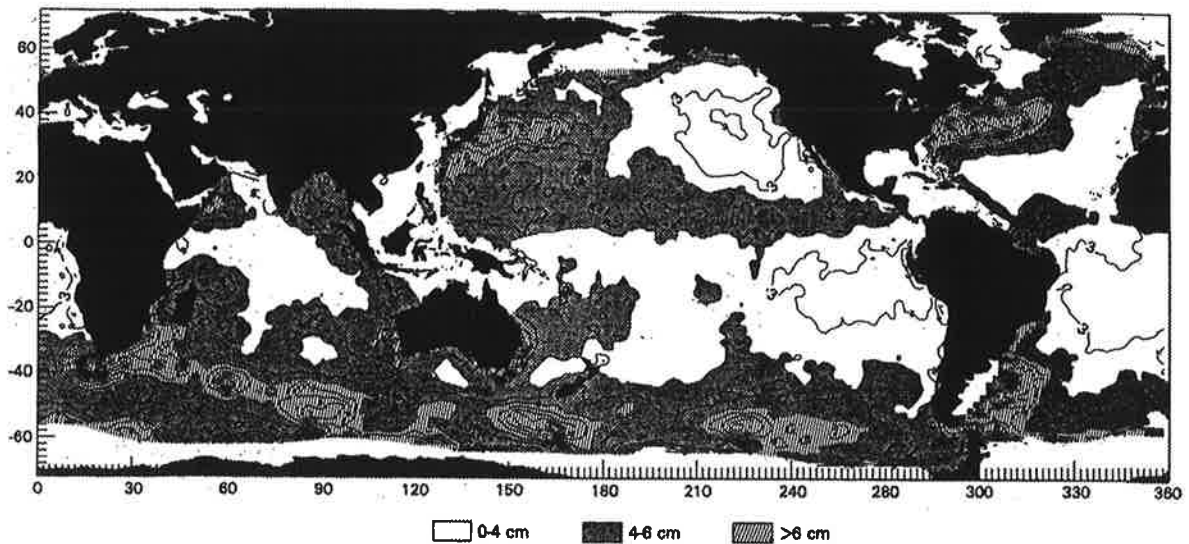
---

Bei der Dynamik des globalen Klimas spielen die Ozeane eine ähnliche physikalische Rolle wie die Atmosphäre, vor allem für den polwärtigen Wärmetransport. Obwohl es sich in beiden Fällen um turbulente Medien handelt, die sich grundsätzlich mit denselben Gleichungen und Annäherungen beschreiben lassen (mit der Navier-Stokes-Gleichung und der hydrostatischen Approximation), bestehen in den physikalischen Eigenschaften dennoch große Unterschiede, die sich in den Zeit-Raum-Skalen der Strömungen widerspiegeln. Ein klares Beispiel dafür liefern die zweidimensionalen Wirbel, die schnell rotierende turbulente Flüssigkeiten kennzeichnen. Deren Durchmesser liegen in der Größenordnung von 10 km im Ozean und 1000 km in der Atmosphäre (Gill, 1982). Hinsichtlich der Untersuchung mesoskaliger Wirbel hat sich diese Tatsache lange Zeit als großes Handicap bei der numerischer Modellierung der Ozeane, im Vergleich zur Atmosphäre, erwiesen.

Abbildung 1 zeigt die von Satelliten gemessene Standardabweichung der Auslenkung der Oberfläche ohne die Einflüsse der Gezeiten (siehe Cheney et al., 1983). Darin ist zu sehen, wie die sogenannte geostrophische Turbulenz große Teile der Ozeane bedeckt. Starke Variabilität findet in Gebieten statt, in denen die mittlere Zirkulation ebenfalls besonders intensiv und wichtig für das Klimasystem ist: Golfstrom, Kuroshiostrom, Antarktischer Zirkumpolarstrom, Agulhasstrom und Falklandstrom. Das läßt die Vermutung zu, daß zwischen der geostrophischen Turbulenz und der mittleren Zirkulation ein Zusammenhang existiert, dessen Wurzeln in der Dynamik des Systems liegen.

Der Untersuchung dieser letzten Frage gilt die numerische Modellierung mittels wirbelauflösender Modelle. Dafür ist ein Verständnis der Zeitskalen der Prozesse, die eine Rolle in der globalen Zirkulation spielen, nämlich der windgetriebenen Zirkulation und der thermohalinen Zirkulation, von großem Nutzen: Die Reaktionszeit der windgetriebenen Zirkulation, die im wesentlichen der zweidimensionalen geostrophischen Turbulenz Rechnung trägt, liegt bei einer Größenordnung von etwa 10 Jahren. Die Reaktionszeit der thermohalinen Zirkulation, die für die vertikale Dichteschichtung verantwortlich ist, liegt dagegen in der Größenordnung von etwa 1000 Jahren (Gill, 1982). Die windgetriebene Zirkulation kann deshalb als auf eine konstante vertikale Dichtestruktur gestützt betrachtet werden.

SEASAT ALTIMETER  
MESOSCALE VARIABILITY



**Abbildung 1:** Aus Altimetriedaten des Satelliten SEASAT berechnete Standardabweichung der Auslenkung der Oberfläche (aus Cheney et al., 1983).

Die zur Untersuchung der mesoskaligen Wirbel am besten geeigneten Ozeanmodelle sind diejenigen Modelle, die auf den quasigeostrophischen Gleichungen beruhen. Sie beschreiben die Erhaltung der sogenannten potentiellen Vorticity, wobei Vorticity die allgemein bekannte englische Bezeichnung für den Begriff Wirbelstromstärke ist (siehe z. B. Washington und Parkinson, 1986). Diese Gleichungen drücken im wesentlichen das bestehende Gleichgewicht zwischen der Coriolis-Kraft und den Druckgradientkräften, das sogenannte geostrophische Gleichgewicht, aus.

Gegenüber der Anwendung von auf den primitiven Gleichungen basierenden Modellen, die die thermohaline Zirkulation mitberücksichtigen, ist das numerische Verfahren bei den quasigeostrophischen Modellen wesentlich schneller. Da im Gegensatz zu den auf den primitiven Gleichungen beruhenden Modellen in den quasigeostrophischen Modellen keine thermohaline Zirkulation enthalten ist, ist ein Verständnis der vom Modell simulierten Dynamik entsprechend einfacher.

Die quasigeostrophische Dynamik setzt jedoch eine Reihe von Annäherungen und Einschränkungen voraus:

- Es handelt sich um ein- oder mehrschichtige Modelle, bei denen die Dichte jeder Schicht festgelegt ist.

- ❑ Die meridionale Ausdehnung des zu untersuchenden ozeanischen Beckens ist begrenzt (kann nicht beliebig groß sein).
- ❑ Die Gleichungen sind in äquaturnahen Breiten nicht anwendbar.
- ❑ Große Gradienten der Bodentopographie sind nicht erlaubt. Trotz einer im Modell notwendigen Glättung können die großen topographischen Merkmale aber erhalten bleiben.

Durch diese Einschränkungen kann die oben erwähnte fundamentale physikalische Größe in den prognostischen Gleichungen dieser Modelle, die potentielle Vorticity

$$q = \frac{f + \varphi}{h}$$

( $f$  = Coriolisfaktor,  $\varphi$  = relative Vorticity und  $h$  = vertikale Länge eines Wasserelements) linearisiert werden:

$$q = \frac{H_0 f + H_0 \varphi - f_0 \cdot \Delta H}{H_0^2}$$

Hier sind  $f_0$  und  $H_0$  mittlere Werte von  $f$  und  $H$ ,  $\Delta H$  stellt kleine Abweichungen von  $H$  gegenüber  $H_0$  dar.

Die besondere Rolle der potentiellen Vorticity in der quasigeostrophischen Zirkulation besteht darin, daß sie in Abwesenheit von externen Kräften wie Windsschubspannung und Bodenreibung die einzige dynamische Erhaltungsgröße jedes einzelnen Lagrange'schen Wasserelementes in einem idealen Ozean, d. h. ohne interne Viskosität, ist:

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

Eine anschauliche Interpretation der physikalischen Bedeutung der potentiellen Vorticity liefert der Vergleich mit dem Drehimpuls einer elementaren Wassersäule in einer Schicht im Ozean. Der Drehimpuls ist direkt proportional zur potentiellen Vorticity, wobei die Winkelgeschwindigkeit proportional zur totalen Vorticity  $f + \varphi$  und das Trägheitsmoment umgekehrt proportional zur Dicke der Schicht  $h$  sind. Die einzigen Kräfte, die dem Vergleich nach in der Lage wären, den Drehimpuls ändern zu können, sind nichtzentrale Kräfte. Die Druckkräfte im Ozean können als zentrale Kräfte, die auf jede Wassersäule wirken, betrachtet werden.

Die ersten numerischen Experimente mit quasigeostrophischen Modellen wurden u. a. von Holland (1978) und McWilliams et al. (1978) mit idealisierten geschlossenen Becken und zonalen Kanälen (d. h. mit periodischen Randbedingungen) zur Untersuchung des Golfstro-

mes bzw. des antarktischen Zirkumpolarstromes durchgeführt. Dabei wurden Euler'sche Koordinaten und eine Verteilung der Variablen nach dem C-Schema (s. Arakawa und Lamb, 1977) verwendet. Die nichtlinearen Advektionsterme wurden ebenfalls nach der Formulierung von Arakawa behandelt, die die strikte Erhaltung der totalen, d. h. der volumenintegrierten, Energie und der quadratischen Vorticity (der sog. Enstrophie) erlaubt. Die prognostischen Gleichungen werden mit der sog. "Leap-Frog-Methode" (siehe z. B. Press et al., 1986) gelöst. In den daraus resultierenden Finite-Differenzen-Gleichungen werden drei aufeinanderfolgende Zeitschritte verbunden. Vom numerischen Gesichtspunkt her ist dieses Verfahren zwar stabil, erzeugt aber im Laufe der Integration zwei auseinanderklaffende unabhängige Lösungen, was die Addition eines zusätzlichen, rein numerischen Diffusionsterms im Modell, wie z.B. eines dämpfenden Vorwärtsschrittes oder eines Filters, erfordert.

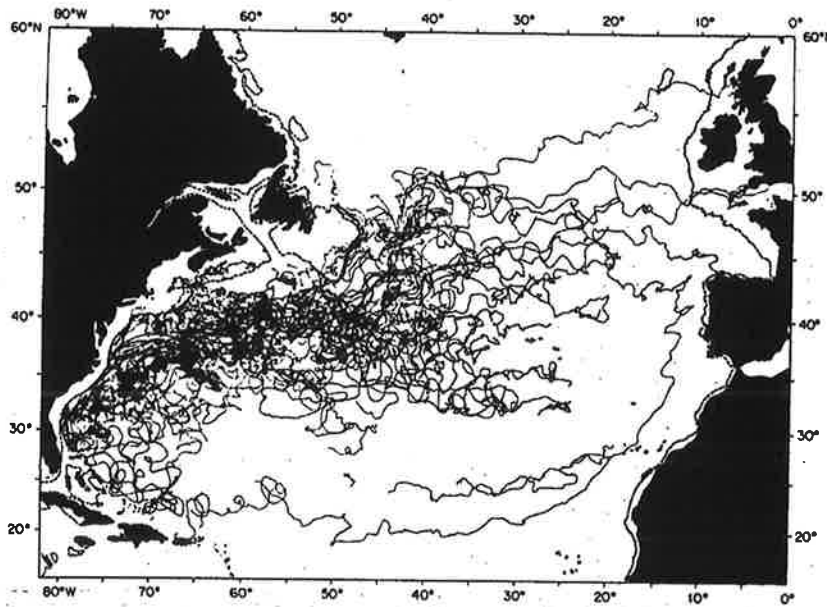
Vergleiche von Ergebnissen aus mit Euler'schen Modellen durchgeführten Experimenten mit Beobachtungsdaten im Nordatlantik zeigen eine gute Übereinstimmung bei der meridionalen Struktur der kinetischen Energie der transienten Wirbel (Schmitz and Holland, 1982). Die Modelle vermögen aber weder deren zonale Struktur, noch die zonale Ausdehnung des Golfstromes richtig wiederzugeben. Beide werden um mindestens einen Faktor zwei unterschätzt. Holland und Schmitz (1985) und Barnier et al. (1991) schlagen einen Zusammenhang zwischen der oben erwähnten Diskrepanz und der vertikalen Auflösung des Modells vor, so daß durch zusätzliche Schichten eine realistischere Simulation zu erreichen wäre. Sie lassen aber die Möglichkeit offen, daß eine bessere Übereinstimmung auch durch Änderungen an den physikalischen Prozessen des Modells erzielt werden könnte.

Dieser letzte Punkt wirft erneut die für das Verständnis der Zirkulation fundamentale Frage auf, in welcher Form und wie stark die mittlere Zirkulation und das transiente Wirbelfeld einander beeinflussen. Demzufolge könnte das turbulente Wirbelfeld nicht nur direkte Einflüsse durch den unmittelbaren Wärmetransport auf das Klima haben, sondern auch indirekte Effekte durch die gegebenenfalls von ihm verursachte Änderung der mittleren Zirkulation, die ebenfalls Wärme transportiert. Die Antwort auf die Frage, ob die rein Euler'schen numerischen Modelle imstande sind, diese Wechselwirkung richtig zu reproduzieren, ist nicht nur von theoretischer Bedeutung, sondern auch in der Praxis wichtig, wenn eine richtige Parametrisierung der Wirbeleffekte in nichtwirbelauflösenden Modellen, wie sie für die globale Klimamodellierung verwendet werden, erzielt werden soll.

Die hier genannten gebräuchlichen Euler'schen Modelle erweisen sich für die Simulation der Lagrange'schen Eigenschaften als nur beschränkt geeignet. Der Grund dafür liegt in der nicht korrekten Advektion der nicht gut genug aufgelösten Wellen, im sogenannten "Aliasing" (Ramsden and Holloway, 1991; Haidvogel, 1982). Hierdurch bedingt wird die Lagrange'sche



potentielle Vorticity nicht strikt erhalten, was dem Grundsatz der Modellgleichungen widerspricht. Außerdem wird ein Vergleich von simulierten Lagrange'schen Trajektorien mit bestimmten Lagrange'schen Beobachtungsdaten, wie z.B. Trajektorien von schwimmenden Bojen, dadurch beeinträchtigt. Eine Analyse solcher Trajektorien ist aber von großer Bedeutung, da sie die im Ozean stattfindenden Transportmechanismen, nicht nur von Vorticity, illustrieren, was eine Basis für die angestrebte Parameterisierung der Transporte durch das Wirbelfeld bilden kann. Das wird in der Abbildung 2 anschaulich demonstriert, in der die Bahnen von 110 an der Oberfläche schwimmenden Bojen dargestellt sind (Richardson, 1981).



**Abbildung 2:** Trajektorien von 110 Bojen zwischen 1971 und 1981 (aus Richardson, 1981).

In der vorliegenden Arbeit wird die Möglichkeit untersucht, die oben genannten Mängel der Euler'schen Modelle durch die Anwendung eines von Maier-Reimer (1988) vorgeschlagenen Euler-Lagrange'schen Verfahrens zu umgehen. Es stellt eine Abwandlung der sogenannten "Particle-In-Cell-Methoden" (siehe z. B. Dippner, 1990; Pavia und Cushman-Roisin, 1988) dar, die in der Plasmaphysik erfolgreich angewandt worden sind. Im wesentlichen handelt es sich bei dieser Prozedur darum, den Ozean als eine "große", aber endliche Zahl von Partikeln anzusehen, wobei jedes dieser Partikel als "Tracer" der potentiellen Vorticity gilt. Die Advektionsgeschwindigkeiten der einzelnen Partikel werden mit Hilfe der auf Gitterpunkte zu interpolierenden potentiellen Vorticity und der anschließend zu lösenden Poisson-Gleichungen ermittelt.

Im Kapitel 2 wird das bei der Simulation des Golfstromes im Nordatlantik angewandte Modell ausführlich vorgestellt. Im Kapitel 3 werden die durchgeführten Stabilitätsexperimente und bestimmte Aspekte des für die weiteren Untersuchungen verwendeten zentralen Experimentes beschrieben. Im Kapitel 4 werden die realisierten statistischen Modelluntersuchungen hinsichtlich einer möglichen Parameterisierung der mesoskaligen Wirbel dargelegt. Kapitel 5 widmet sich einer ausführlichen Diskussion über die potentielle Vorticity und die Bedeutung der Turbulenz für die großräumige Zirkulation. Als Abschluß werden eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick gegeben.

## Das quasigeostrophische Modell mit dynamisch gekoppelten Euler-Lagrange'schen Koordinaten

### 2.1 Quasigeostrophische Gleichungen und Approximationen

Die in diesem numerischen Modell angewandten Gleichungen entsprechen den klassischen quasigeostrophischen Gleichungen für eine zweischichtige Wassermasse unter Rotation auf einer  $\beta$ -Fläche, die die rotationsbedingte zweidimensionale Turbulenz beschreiben. Eine anschauliche Ableitung aus den Flachwassergleichungen ist z. B. in der Arbeit von Salmon (1982) zu finden. Eine eingehendere Diskussion liefern Apel (1988), Gill (1982), Lesieur (1990), Pedlosky (1979), Rhines (1979) sowie Washington und Parkinson (1986). Damit werden der barotrope Modus und der erste barokline Modus des Ozeans dargestellt. Das ist zugleich eine erste Approximation der vertikalen Struktur der Wasserdichte im Ozean. Die Position der Zwischenfläche im Modell repräsentiert die Lage der Thermokline im Ozean. Es ist in diesem Zusammenhang darauf hinzuweisen, daß eine Erweiterung des Modells auf mehrere Schichten in sich keinerlei theoretische Schwierigkeiten birgt. Es handelt sich ausschließlich darum, einen Kompromiß zwischen einer immer wünschenswerten höheren vertikalen Auflösung und den zur Verfügung stehenden Computerressourcen zu finden. Die Einführung zusätzlicher barokliner Moden (höhere vertikale Auflösung) bedingt wegen der notwendigen numerischen Stabilität des Modells eine weitere Verfeinerung der horizontalen und zeitlichen Auflösung.

In einem Euler'schen Koordinatensystem lauten die quasigeostrophischen Gleichungen, die die zeitliche Veränderung der potentiellen Vorticity berücksichtigen, wie folgt (siehe Tab. 1 und Abb. 3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + J(\psi_1, q_1) &= S + V_1 \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + J(\psi_2, q_2) &= R + V_2 \end{aligned} \tag{GL 1}$$

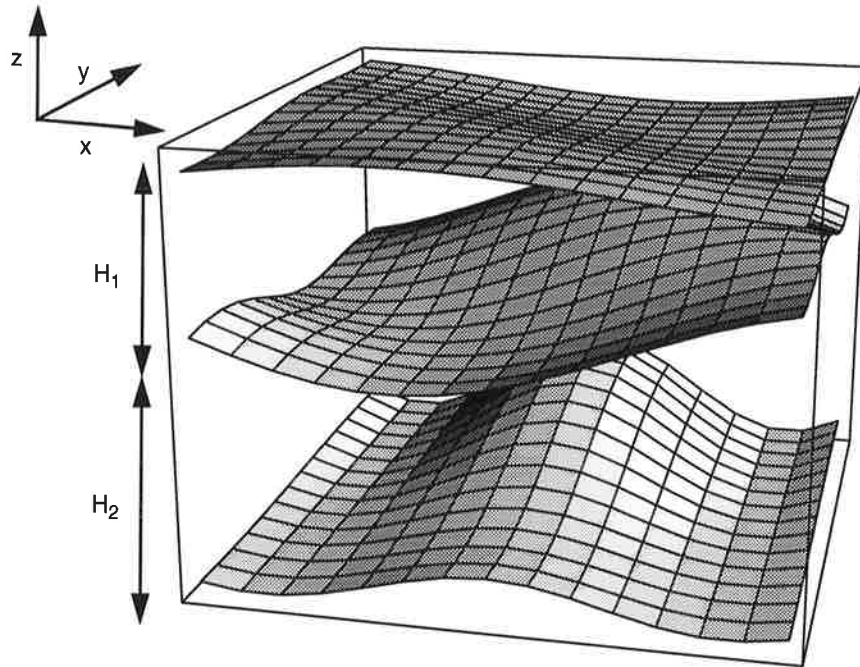
**Tabelle 1:** Bedeutung der einzelnen Elemente in den quasigeostrophischen Gleichungen.

$q_1 \equiv q_1(t, x, y)$	Potentielle Vorticity der Oberschicht
$q_2 \equiv q_2(t, x, y)$	Potentielle Vorticity der Bodenschicht
$\psi_1 \equiv \psi_1(t, x, y)$	Stromfunktion der Oberschicht
$\psi_2 \equiv \psi_2(t, x, y)$	Stromfunktion der Bodenschicht
$H_1$	Mittlere Tiefe der Oberschicht
$H_2$	Mittlere Tiefe der Bodenschicht
$f = f_0 + \beta(y - y_0)$	Coriolisfaktor (gemäß der $\beta$ -Ebene-Approximation)
$B \equiv B(x, y)$	Abweichung der Bodentopographie von einem flachen Boden
$g' = g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)}$	Reduzierte Gravitationskonstante (wobei $\rho_i$ die Dichte der Schicht $i$ darstellt)
$ \eta  = \left  \frac{f_0}{g'} (\psi_2 - \psi_1) \right $	Abweichung der Schichtenzwischenfläche von der horizontalen Position
$S$	Rotation der Windschubspannung
$R$	Bodenreibungsterm
$V_i$	Viskositätsterm (laterale Reibung) der Schicht $i$
$\nabla^2 F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$	Zweidimensionaler Laplace-Operator
$J(F, G) \equiv \frac{\partial F \partial G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial F \partial G}{\partial y \partial x}$	Jacobi-Operator

Die durch die quasigeostrophische Approximation gegebene linearisierte Form der potentiellen Vorticity ist:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= H_1 (\nabla^2 \psi_1 + f) + \frac{f_0^2}{g'} (\psi_2 - \psi_1) \\
 q_2 &= H_2 (\nabla^2 \psi_2 + f) - \frac{f_0^2}{g'} (\psi_2 - \psi_1) + f_0 B
 \end{aligned}
 \tag{GL 2}$$

Die potentielle Vorticity jeder Schicht besteht aus drei Termen. Entsprechend der Reihenfolge in den Gleichungen GL 2 sind das die relative Vorticity, die planetare Vorticity und ein Deh-



**Abbildung 3:** Dreidimensionale Darstellung des Zweischichtenmodells: Oberfläche, Schichtengrenzfläche und Bodentopographie.

nungsterm, im Englischen “Stretching-Term” genannt. Bei der Bodenschicht kommt noch ein Term hinzu, der die Wirkung der Bodentopographie als eine Art zusätzliche Ausdehnung bzw. Kompression der unteren Schicht beschreibt.

Der Rahmen, innerhalb dessen die quasigeostrophischen Gleichungen Gültigkeit besitzen, wird durch die zugrundeliegenden Approximationen festgesetzt. Sie können wie folgt zusammengefaßt werden:

- ❑ Die Dichtestruktur wird im Modell von Anfang an vorgeschrieben und bleibt im Laufe der Zeit konstant. Die Temperatur und der Salzgehalt, die die Wasserdichte in erster Linie bestimmen, sind keine prognostischen Variablen. Das heißt, die thermohaline Zirkulation wird nicht berücksichtigt, sondern nur die windgetriebene Zirkulation.
- ❑ Hydrostatische Approximation oder “Shallow-water“-Approximation (beide sind gleichbedeutend; siehe Gill, 1982), d. h.,  $D/L \ll 1$ , wobei  $D$  die Ozeantiefe und  $L$  die Raumskala der horizontalen Variabilität sind. Die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten sind in jeder Schicht tiefenunabhängig.
- ❑  $\beta$ -Ebene- Approximation, d. h., Linearisierung des Coriolisfaktors:  $f = f_0 + \beta y$ . Diese Näherung erfordert  $\beta L_y / f_0 \ll 1$ , wobei  $L_y$  die meridionale Modellausdehnung ist. Dies begrenzt die meridionale Ausdehnung des Modells.

- Geostrophische Approximation, d. h. die Rossbyzahl  $R_0 = U / (L f_0) \ll 1$ , wobei  $U$  die typische Geschwindigkeit der zu untersuchenden Strömungen ist. Diese Näherung besagt, daß die Gleichungen nur Strömungen beschreiben können, deren Zeitskalen viel größer sind, als die effektive Rotationszeit des Systems. Die Corioliskraft, die durch das Zusammenwirken mit den Druckkräften das geostrophische Gleichgewicht ermöglichen soll, ist am Äquator gleich Null, was die Anwendung des Modells in äquatornahen Regionen verbietet.
- Die Schwankungen der Zwischenfläche  $|f_0 (\psi_2 - \psi_1) / g|$  sind klein im Vergleich zur Dicke jeder Schicht  $H_i$ . Dasselbe gilt für die Schwankungen der Bodentopographie  $B$  gegenüber der Dicke der unteren Schicht  $H_2$ .

Die geostrophischen Geschwindigkeitsfelder in der  $i$ -Schicht lassen sich per Definition aus den Stromfunktionen ableiten:

$$\begin{aligned} u_i &= -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ v_i &= \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \end{aligned} \tag{GL 3}$$

Damit wird klar, daß der Jacobi-Term in den Gleichungen die Advektion von potentieller Vorticity darstellt.

Vom Lagrange'schen Gesichtspunkt aus nehmen die prognostischen Gleichungen die folgende, äquivalente Form an:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= S + V_1 \\ \frac{dq_2}{dt} &= R + V_2 \end{aligned} \tag{GL 4}$$

wobei der Operator  $d/dt$  die totale Ableitung, d. h. die auf materielle Wasserpartikel bezogene Ableitung ist. Während die Berechnung des Jacobi-Terms mit Lagrange'schen Koordinaten daher trivial ist (Advektion von Partikeln), wird die Umsetzung der Reibungsterme dafür schwieriger. Bei Modellen mit Euler'schen Koordinaten finden wir die umgekehrte Situation: Reibung ist trivial, aber Advektion führt zu dem erwähnten Aliasing.

## 2.2 Numerische Lösung der quasigeostrophischen Gleichungen

Im vorliegenden Modell wird das Wasser als eine anfänglich festgelegte, endliche Zahl Lagrange'scher Partikel in jeder Schicht mit jeweils einem bestimmten Wert der potentiellen Vor-

ticity  $Q_n$  betrachtet. In gewisser Hinsicht gleichen diese Partikel rotierenden zylindrischen Wasserelementen. Die Änderung der potentiellen Vorticity eines Partikels im Verlauf der Zeit läßt sich durch die numerische Integration der Lagrange'schen Form der prognostischen quasigeostrophischen Gleichungen ermitteln:

$$Q_n(t + \Delta t) = Q_n(t) + \int_t^{t+\Delta t} \text{Forcing}(\tau, x_n(\tau), y_n(\tau)) d\tau \quad (\text{GL 5})$$

Die von jedem Partikel gezogene Bahn, d. h. die im Zeitverlauf von jedem Wasserelement belegte Position, wird aufgrund der Advektionsgeschwindigkeiten mit Hilfe der Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung (Press et al., 1986) bestimmt, natürlich vorausgesetzt, daß die Stromfunktionen bekannt sind (siehe GL 3). Diese lassen sich anhand der räumlichen Verteilung der potentiellen Vorticity auf einem Euler'schen Gitter und der diagnostischen Gleichungen GL 2 unter Anwendung einer Finite-Differenzen-Methode ableiten.

Die gewichtete Interpolation der potentiellen Vorticity der einzelnen Lagrange'schen Partikel auf die Gitterpunkte ermöglicht die Bestimmung der räumlichen Verteilung der potentiellen Vorticity. Im hiesigen Modell werden bilineare Interpolationen verwendet (siehe Abb. 4):

$$q_{i,j} = \frac{\sum_{n \in Z_{i,j}} Q_n \gamma_n \delta_n + \sum_{m \in Z_{i-1,j}} Q_m \alpha_m \delta_m + \sum_{l \in Z_{i,j-1}} Q_l \gamma_l \beta_l + \sum_{k \in Z_{i-1,j-1}} Q_k \alpha_k \beta_k}{\sum_{n \in Z_{i,j}} \gamma_n \delta_n + \sum_{m \in Z_{i-1,j}} \alpha_m \delta_m + \sum_{l \in Z_{i,j-1}} \gamma_l \beta_l + \sum_{k \in Z_{i-1,j-1}} \alpha_k \beta_k} \quad (\text{GL 6})$$

wobei n, m, l und k die jeweils in den am Gitterpunkt i,j angrenzenden Gitterzellen befindlichen Partikel bezeichnen.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  sind dimensionslose Faktoren für jedes Partikel, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \alpha_n + \gamma_n &= 1 \\ \beta_n + \delta_n &= 1 \end{aligned}$$

Die gekoppelten diagnostischen Gleichungen (GL 2) lassen sich durch die Einführung von zwei Normalmoden, dem barotropen und dem baroklinen Modus, in zwei voneinander unabhängige Differentialgleichungen umwandeln:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_{bt} &= R_{bt} \\ \nabla^2 \phi_{bc} - \lambda^2 \phi_{bc} &= R_{bc} \end{aligned} \quad (\text{GL 7})$$

wobei  $\phi_{bt}$  und  $\phi_{bc}$  die barotrope bzw. die barokline Stromfunktion sind

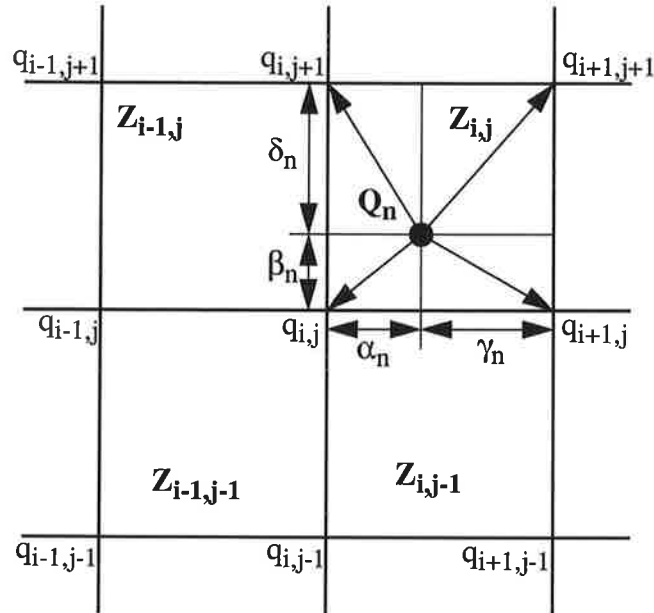


Abbildung 4: Bilineare Interpolation der potentiellen Vorticity eines Partikels.

$$\begin{aligned}\phi_{bt} &= H_1 \psi_1 + H_2 \psi_2 \\ \phi_{bc} &= \psi_1 - \psi_2\end{aligned}\tag{GL 8}$$

und

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{f_0^2}{g'} \left( \frac{H_1 + H_2}{H_1 H_2} \right) \\ R_{bt} &= q_1 + q_2 - (H_1 + H_2) f - f_0 B \\ R_{bc} &= \frac{q_1}{H_1} - \frac{(q_2 - f_0 B)}{H_2}\end{aligned}\tag{GL 9}$$

wobei  $\lambda^{-1}$  den Wert des baroklinen Rossby-Radius ergibt.

Da in einem geschlossenen Becken die Ränder gegenüber der Masse undurchlässig sind, müssen die Stromfunktionen in jedem Zeitschritt an diesen Punkten den gleichen Wert aufweisen, damit die Geschwindigkeitskomponenten normal zum Rand dort Null sein können (siehe GL 3). Das heißt:

$$\begin{aligned}\phi_{bt}(t, x_{Rand}, y_{Rand}) &= C_{bt}(t) \\ \phi_{bc}(t, x_{Rand}, y_{Rand}) &= C_{bc}(t)\end{aligned}\tag{GL 10}$$

Die Funktion  $C_{bt}$  läßt sich für alle Zeitschritte auf Null festsetzen, ohne daß deswegen Information verlorengeht, da die Funktion  $\phi_{bt}(t, x, y) - C_{bt}(t)$  ebenfalls eine gültige Lösung der Glei-



chung GL 7 darstellt. Der Faktor  $C_{bc}$  kann andererseits bestimmt werden, indem die Massenerhaltung herangezogen wird:

$$\iint (\psi_1 - \psi_2) dx dy = \iint \phi_{bc} dx dy = 0 \quad (\text{GL 11})$$

d. h., daß das Flächenintegral der Auslenkung der Zwischenfläche Null sein muß.

Die Lösung der baroklinen Gleichung in GL 7 läßt sich als Summe zweier Funktionen  $\phi_0$  und  $\phi_1$  ausdrücken:

$$\phi_{bc}(t, x, y) = \phi_1(t, x, y) + C_{bc}(t) \phi_0(x, y) \quad (\text{GL 12})$$

, die die folgenden Differentialgleichungen und Randbedingungen erfüllen müssen:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_0 - \lambda^2 \phi_0 &= 0 \\ \phi_0(x_{Rand}, y_{Rand}) &= 1 \end{aligned} \quad (\text{GL 13})$$

und

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 - \lambda^2 \phi_1 &= R_{bc} \\ \phi_1(t, x_{Rand}, y_{Rand}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{GL 14})$$

Der Faktor  $C_{bc}$  ergibt sich dann, wie gesagt, aus der Massenerhaltungsgleichung GL 11:

$$C_{bc} = - \frac{\iint \phi_1 dx dy}{\iint \phi_0 dx dy} \quad (\text{GL 15})$$

Die Funktion  $\phi_0$  und deren Raumintegral brauchen nur einmal, und zwar vor dem Beginn der Modellintegration, bestimmt zu werden. Dafür müssen  $\phi_1$  und  $\phi_{bt}$  in jedem Zeitschritt neu berechnet werden, da die Verteilung der potentiellen Vorticity und daher auch  $R_{bt}$  und  $R_{bc}$  im Verlauf der Integration variieren.

Die Poisson-Gleichungen GL 7, 13 und 14, als Finite-Differenzen-Gleichungen betrachtet, lassen sich bei rechteckigen Becken einfach durch direkte spektrale Methoden wie F.F.T. ("Fast Fourier Transform"; siehe z. B. Press et al., 1986) lösen. Bei krummen Küstenlinien kann man entweder von iterativen Methoden, wie z. B. S.O.R. ("Simultaneous-Over-Relaxation"; siehe z. B. Press et al., 1986) oder von direkten Methoden unter Anwendung der sogenannten "Capacitance-Matrix-Methode" (Cummins und Mysak, 1988) Gebrauch machen. Die iterativen Methoden sind relativ einfach zu programmieren, verlangen allerdings viel mehr CPU-Zeit, und ihre Genauigkeit hängt von einem frei gewählten Konvergenzkriterium ab. Bei

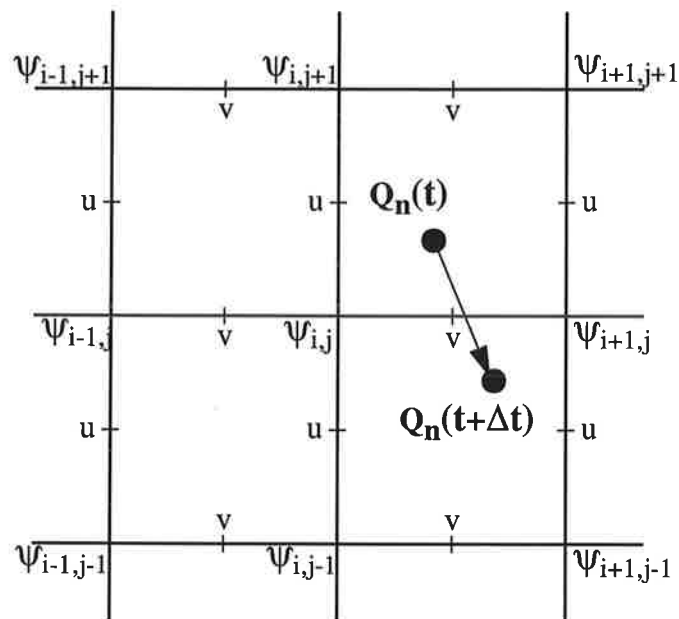
den hier vorgelegten Experimenten wurde eine auf F.F.T. basierende direkte Methode bevorzugt. Eine genauere Beschreibung ist im Anhang gegeben.

Nachdem die barotrope und die barokline Stromfunktion bekannt sind, muß man nur die Transformation GL 8 umkehren, um die Stromfunktionen beider Schichten zu bekommen:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\phi_{bt} + H_2 \phi_{bc}}{H_1 + H_2} \\ \psi_2 &= \frac{\phi_{bt} - H_1 \phi_{bc}}{H_1 + H_2} \end{aligned} \tag{GL 16}$$

Zuletzt wird die Advektionsgeschwindigkeit eines Partikels ermittelt, indem eine bilineare Interpolation vorgenommen wird (siehe die Verteilung der Geschwindigkeitskomponenten in Abb. 5):

$$\begin{aligned} v_n &= \delta_n \frac{(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j})}{\Delta x} + \beta_n \frac{(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i,j+1})}{\Delta x} \\ u_n &= -\gamma_n \frac{(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j})}{\Delta x} - \alpha_n \frac{(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j})}{\Delta x} \end{aligned} \tag{GL 17}$$



**Abbildung 5:** Horizontale Verteilung der Stromfunktion und der Geschwindigkeitskomponenten im Modell.

Dieses Verfahren setzt voraus, daß die Partikelverteilung im Laufe der Modellintegration weitgehend homogen bleibt, d. h., daß die Partikel sich nicht irgendwo im räumlichen Integrationsbereich anhäufen. Da die Partikelzahl von Anfang an als konstant festgelegt wurde und es keine Quellen und Senken von Partikeln gibt, würde das gleichzeitig zur Entstehung von Gebieten mit leeren Gitterzellen führen. Eine flächendeckende Verteilung gewährleistet jedoch, daß die daraus gewonnenen, interpolierten Euler'schen Vorticityfelder für den Wasserzustand repräsentativ sind. In erster Approximation sollte die Zahl der Partikel in einer Zelle ("Zellenpopulation") der Poisson-Statistik folgen (Maier-Reimer und Sündermann, 1982). Die Wahrscheinlichkeit  $p$   $l$ -Partikel in einer Zelle zu finden, ist demnach:

$$p(l) = e^{-m} \frac{m^l}{l!} \quad (\text{GL 18})$$

wobei  $m$  die mittlere Partikelzahl pro Gitterzelle ist. Im Modell sollte  $m$  groß genug sein, so daß die Wahrscheinlichkeit  $e^{-m}$ , keine Partikel in einer Zelle zu finden, vernachlässigbar ist. Bei  $m = 5$  wäre diese Wahrscheinlichkeit ca.  $6 \times 10^{-3}$ . Dieses Problem ist trotzdem nicht so einfach zu behandeln, da die Zellenpopulation von verschiedenen Zellen nicht unabhängig voneinander ist und die Partikel dynamisch aktiv sind.

Damit die numerische Prozedur im Verlauf der Modellintegration stabil bleibt (im Sinne der integralen Energieerhaltung in Abwesenheit von Energiequellen und -senken), wird ein weiterer Zwischenschritt hinzugefügt, in dem effektive Stromfunktionen für die in der Runge-Kutta-Methode benutzten Advektionsgeschwindigkeiten gefunden werden sollen. Dieses Vorgehen trägt der Tatsache Rechnung, daß die Stromfunktionsfelder sich auch im Laufe der Advektion der Partikel zwischen  $t$  und  $t + \Delta t$  verändern. Es handelt sich im wesentlichen um die Anwendung einer Art Prädiktor-Korrektor-Methode (Press et al., 1986). In der Praxis sieht es so aus:

- Erstens werden neue Stromfunktionsfelder  $\psi^*(t + \Delta t)$  aus den prognostischen Gleichungen (GL 1) mittels einer einfachen "Forward-in-time"-Methode im Euler'schen Koordinatensystem abgeleitet (Stress-, Reibungs- und Viskositätsterme werden hier nicht berücksichtigt):

$$\begin{aligned} \frac{q_1^*(t + \Delta t) - q_1(t)}{\Delta t} + J(\psi_1(t), q_1(t)) &= 0 \\ \frac{q_2^*(t + \Delta t) - q_2(t)}{\Delta t} + J(\psi_2(t), q_2(t)) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{GL 19})$$

Anders ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 H_1 \nabla^2 \psi_1^* (t + \Delta t) + \frac{f_0^2}{g} [\psi_2^* (t + \Delta t) - \psi_1^* (t + \Delta t)] &= R_1^* (t) \\
 H_2 \nabla^2 \psi_2^* (t + \Delta t) - \frac{f_0^2}{g} [\psi_2^* (t + \Delta t) - \psi_1^* (t + \Delta t)] &= R_2^* (t)
 \end{aligned}
 \tag{GL 20}$$

wobei  $R_1^*$  und  $R_2^*$  bekannt sind:

$$\begin{aligned}
 R_1^* (t) &= q_1 (t) - H_1 f - \Delta t J (\psi_1 (t), q_1 (t)) \\
 R_2^* (t) &= q_2 (t) - H_2 f - f_0 B - \Delta t J (\psi_2 (t), q_2 (t))
 \end{aligned}
 \tag{GL 21}$$

Die im Modell verwendete Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung des Jacobi-Operators  $J$  lautet:

$$[J (\psi, q)]_{i,j} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta x} \cdot \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2\Delta x} - \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta x} \cdot \frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2\Delta x}
 \tag{GL 22}$$

Sie entspricht der von Arakawa mit der Bezeichnung  $J_1$  versehenen Approximation des Jacobi-Operators (siehe Arakawa und Lamb, 1977). Die Verwendung von anderen in Arakawa und Lamb (1977) diskutierten Approximationen des Jacobi-Operators wurde ebenfalls getestet, brachte aber keinen Vorteil. Die neuen Poisson-Gleichungen (GL 20) werden hier auf dieselbe Art und Weise gelöst (d. h. mit Hilfe von Normalmoden), wie oben beschrieben.

- Zweitens werden die originalen Stromfunktionen mit denen auf diese Weise gewonnenen neuen Stromfunktionen linear addiert, um die passenden Felder zu bekommen:

$$\begin{aligned}
 \psi_i^{\text{advektion}} &= (1 - \omega) \cdot \psi_i + \omega \cdot \psi_i^* \\
 \omega &\in [0, 1] \quad i = 1, 2
 \end{aligned}
 \tag{GL 23}$$

wobei  $\omega$  stets den gleichen Wert bei allen Zeitschritten in der Modellintegration behält.

Es besteht selbstverständlich die Möglichkeit, diesen Zwischenschritt anders zu gestalten als hier beschrieben. Zum Beispiel wurde auch getestet, die Stromfunktionsfelder  $\psi^*$  nicht direkt im Euler'schen Koordinatensystem abzuleiten, sondern die Partikel zunächst mit den bereits errechneten Stromfunktionsfeldern  $\psi$  zu advehieren und deren potentielle Vorticity auf die Gitterpunkte zu interpolieren, um schließlich im Euler'schen Koordinatensystem mit Hilfe der diagnostischen Gleichungen GL 2, wie in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt, die angestrebten Felder  $\psi^*$  zu erhalten. Angesichts dessen, daß in der Praxis die für die Berechnung der interpolierten Vorticityfelder und Advektionsgeschwindigkeiten benötigte CPU-Zeit auf einem Vektorrechner (im hiesigen Fall Cray-2 und Cray-90) viel größer ist als die für die

im Gegensatz dazu sehr leicht vektorisierbare Lösung der Poisson-Gleichungen, bedeutet das leider einen vergleichsweise großen Nachteil.

Einen Überblick der geschilderten Schritte bei der numerischen Lösung der Gleichungen verschafft Abb. 6.

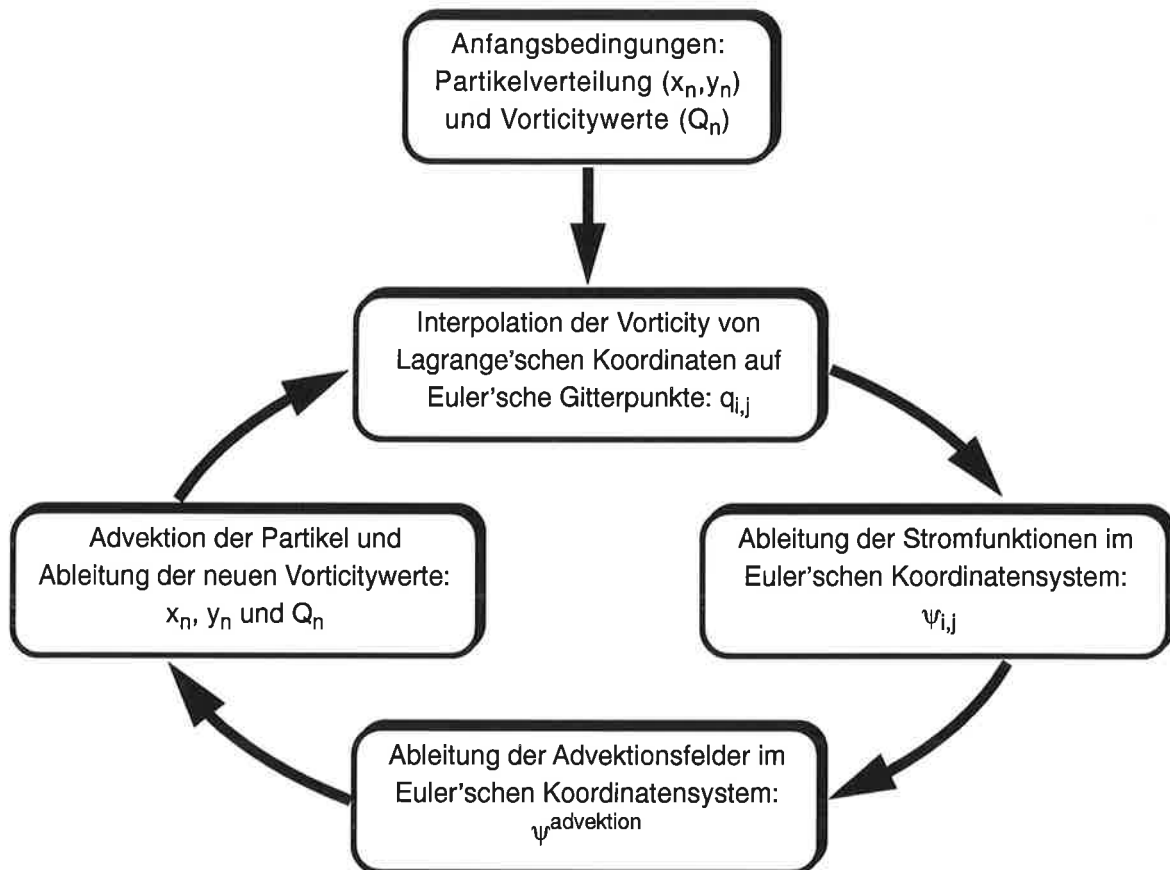


Abbildung 6: Zusammenfassung des numerischen Verfahrens.

Bei den auf rein Euler'schen Koordinaten basierenden Modellen wird das Auftreten nicht linearer Instabilitäten vermieden, indem die verwendete Form des Jacobi-Operators die Erhaltung der integralen Größen Energie und Enstrophie (Flächenintegral des Quadrats der potentiellen Vorticity) sicherstellt (siehe Arakawa und Lamb, 1977). In dem hier vorgelegten Lagrange'schen Modell wird dieser Term jedoch durch die Advektion der Partikel simuliert. Die Enstrophieerhaltung ist bereits durch die Erhaltung der potentiellen Vorticity für jedes Wasserelement gewährleistet.

Bei  $\omega = 0$  (d.h. beim völlig expliziten Verfahren) ist anzunehmen, daß das Modell im Sinne einer durch die numerische Prozedur herbeigeführten Zunahme der totalen Energie instabil

werden wird. Diese Überlegung wird durch die Analogie mit der allgemeinen semiimpliziten Wellenlösung der vereinfachten linearen, homogenen Advektionsgleichung mit Euler'schen Koordinaten veranlaßt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\nabla^2 \psi(t + \Delta t) - \nabla^2 \psi(t)}{\Delta t} + \beta \left[ \omega \frac{\partial}{\partial x} \psi(t + \Delta t) + (1 - \omega) \frac{\partial}{\partial x} \psi(t) \right] = 0 \quad (\text{GL 24})$$

$$\psi(t, x, y) = \phi(t) \cdot e^{i(\kappa x + \mu y)}$$

$$|\phi(t + \Delta t)| = \left| \frac{-\kappa^2 - \mu^2 - i\beta\Delta t\kappa(1 - \omega)}{-\kappa^2 - \mu^2 + i\beta\Delta t\kappa\omega} \right| |\phi(t)| \quad (\text{GL 25})$$

Bei  $\omega < 0.5$  ist die Lösung instabil (siehe GL 25). Bei  $\omega > 0.5$  ergeben sich gedämpfte Lösungen. Nur wenn  $\omega = 0.5$ , bleibt der Betrag der Wellenlösung unverändert. Im folgenden Kapitel werden Ergebnisse von Experimenten mit verschiedenen Werten dieses Parameters zum Zweck des Vergleichs präsentiert.

## 2.3 Anwendung auf die Simulation des Golfstroms: Modellparameter

### 2.3.1 Topographie und allgemeine Modellparameter

Die Durchführbarkeit des vorgestellten quasigeostrophischen numerischen Modells wird bei der Simulation des Golfstroms im Nordatlantik untersucht. Es wird ein Teil des Nordatlantiks zwischen  $22^\circ$  und  $58^\circ$  nördlicher Breite und zwischen  $82^\circ$  und  $7^\circ$  westlicher Länge betrachtet. Diese sphärische Fläche wird auf das im Modell  $6400 \text{ km} \times 4000 \text{ km}$  große kartesische, rechteckige Integrationsgebiet projiziert. Es handelt sich dabei um eine auf  $40^\circ \text{ N}$  zentrierte zylindrische Projektion, die eine zonale Verzerrung außerhalb des  $40.$  Breitengrades mit sich bringt (siehe Abb. 7). Dabei werden im Modell zwei für die Masse undurchlässige künstliche Grenzen entlang des  $22.$  und  $58.$  Breitengrades eingeführt. Es wurden die topographischen Daten des Datensatzes ETOPO 5 (U.S. Dept. Commerce, 1983) benutzt, die eine Genauigkeit von  $1/12^\circ \times 1/12^\circ$  aufweisen.

Der mit der notwendigen räumlichen Diskretisierung zusammenhängende Gitterabstand beträgt  $20 \text{ km}$  für beide Koordinatenrichtungen. Es gibt daher  $321 \times 201$  Gitterpunkte, die aber nicht alle zum Wasserbereich gehören. Die Schichtdicken im Modell werden auf  $1000 \text{ m}$  für die obere Schicht bzw. auf  $4000 \text{ m}$  für die untere Schicht festgesetzt. Wie im ersten Abschnitt erwähnt, muß die Bodentopographie einer Glättung unterzogen werden, bevor sie ins Modell übertragen werden kann. Die Glättung muß unter anderem sicherstellen, daß die

Bodentopographie auf die unterste Wasserschicht beschränkt bleibt. Für die Glättung gilt im einzelnen (siehe Abb. 8):

- Wasserpunkte mit einer Tiefe von weniger als 200 Meter gelten als Landpunkte. Inseln gelten im Modell als Wasserpunkte.
- Werte der Bodentiefe, die kleiner als 3000 m sind, werden auf 3000 m gesetzt, Inseln eingeschlossen. Werte über 6000 m Tiefe werden auf 6000 m beschränkt.
- Abschließend wird der Wert auf einem Gitterpunkt mit denen seiner vier nächsten Nachbarnpunkte wie folgt gemittelt:

$$T_{i,j}^* = \frac{M_{i-1,j}T_{i-1,j} + M_{i,j-1}T_{i,j-1} + M_{i+1,j}T_{i+1,j} + M_{i,j+1}T_{i,j+1} + 4T_{i,j}}{M_{i-1,j} + M_{i,j-1} + M_{i+1,j} + M_{i,j+1} + 4}$$

wobei  $T$  das alte Tiefenfeld,  $M$  das Maskenfeld (Null für Landpunkte und Eins für Wasserpunkte) und  $T^*$  das neue Tiefenfeld sind. Dreißigmal wird dieser Vorgang immer mit dem zuletzt entstandenen Tiefenfeld als Input wiederholt.

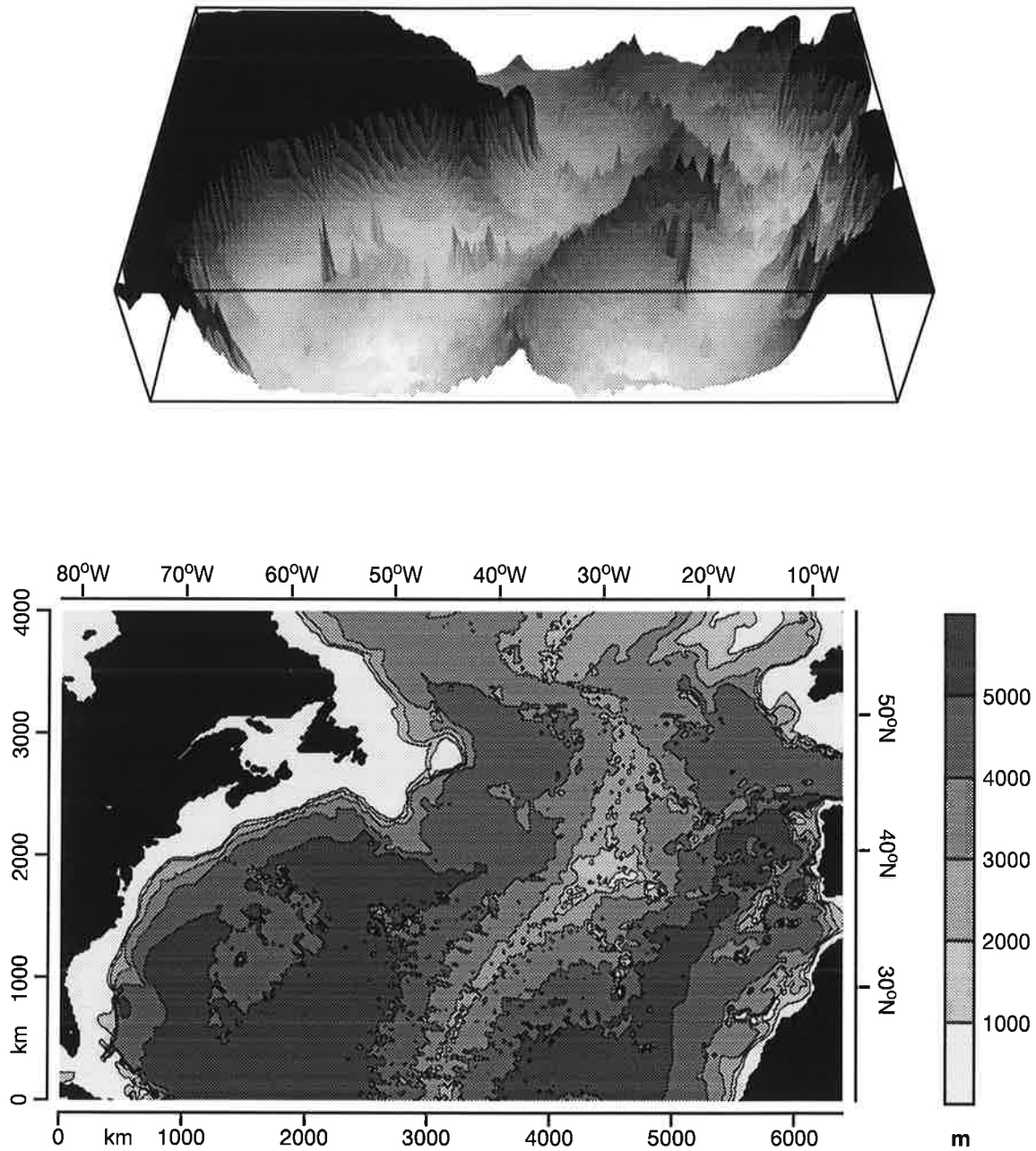
Die Abweichung von flachem Boden in den quasigeostrophischen Gleichungen ist schließlich:

$$B_{i,j} = 5000 \text{ m} - T_{i,j}$$

Von den insgesamt 64000 Gitterzellen zählen 48311 zum Ozean. Die Küstenlänge beträgt im Modell 15760 km.

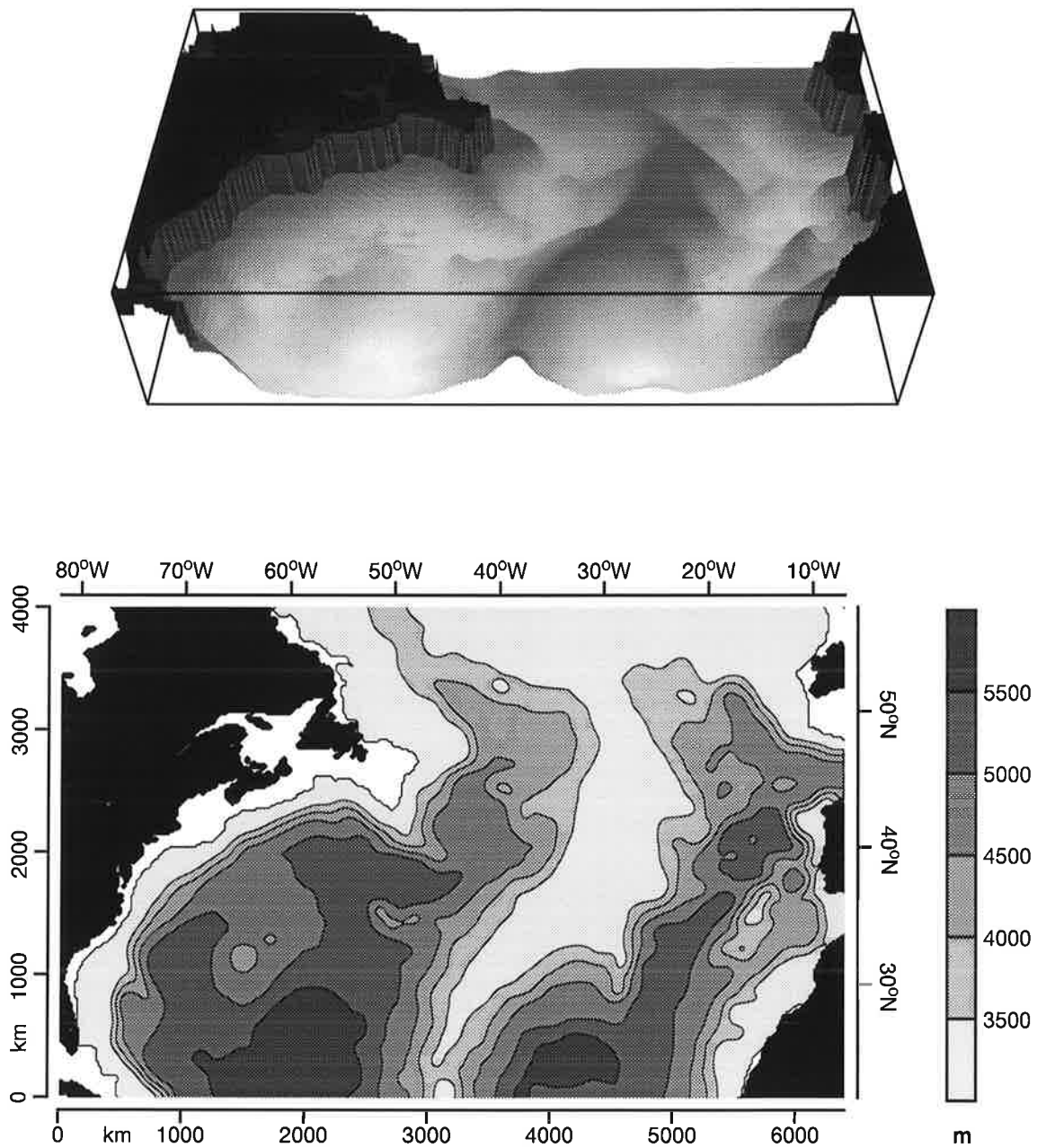
Der Coriolisfaktor  $f_0$  und der  $\beta$ -Faktor betragen bei der Referenzbreite ( $40^\circ$  N)  $9.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  bzw.  $1.8 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Die reduzierte Gravitationskonstante  $g'$  ist  $0.02 \text{ m s}^{-2}$ . Das ergibt einen baroklinen Rossby-Radius von etwa 43 km, der größer als der Gitterabstand ist. Das heißt, daß das Modell im Prinzip imstande ist, barokline Wirbel explizit aufzulösen. Der in der Integration verwendete Zeitschritt beträgt 4 Stunden. Die verschiedenen Modellparameter sind in Tab. 2 zusammengefaßt.

Die Zahl der in jeder Wasserschicht eingesetzten Lagrange'schen Partikel, welche die Information über die potentielle Vorticity transportieren, beträgt 241555. Das bedeutet eine durchschnittliche Dichte von fünf Partikeln je Gitterzelle im Wasserbereich. Falls es nicht möglich ist, die potentielle Vorticity auf einem Gitterpunkt zu einem Zeitpunkt zu ermitteln ist, weil es keine Wasserelemente in den vier benachbarten Gitterzellen gibt, behält die potentielle Vorticity den gleichen Wert wie im vorherigen Zeitpunkt, bleibt also in diesem Zeitschritt unverändert.



**Abbildung 7:** 3-D- und 2-D-Darstellung der Topographie des Nordatlantiks. Die Skala bezieht sich nur auf den Isolinienplot und gibt die Bodentiefe in Meter an.





**Abbildung 8:** 3-D- und 2-D-Darstellung der Bodentopographie im Modell. Die Skala bezieht sich auf das untere Bild und gibt die Bodentiefe in Meter an.

### 2.3.2 Äußere Kräfte, Reibung und Randbedingungen

Die einzigen Quellen und Senken von potentieller Vorticity in diesem Modell stellen der Windschub in der oberen Schicht, die Bodenreibung in der unteren Schicht und die laterale Reibung (Viskosität) in beiden Schichten dar. Es gibt keinen vertikalen Reibungsterm zwischen den beiden Schichten. Die zeitliche Veränderung der potentiellen Vorticity eines Partikels  $Q_n$  wird daher von diesen Termen bestimmt:

$$\begin{aligned} Q_n(t + \Delta t) &= Q_n(t) + \Delta t(S + V_1) && \text{(Oberschicht)} \\ Q_n(t + \Delta t) &= Q_n(t) + \Delta t(R + V_2) && \text{(Bodenschicht)} \end{aligned} \quad (\text{GL 26})$$

● *Rotation der Windschubspannung*

$$S = S_0 \sin \left\{ \frac{2\pi}{L} [a(x - x_0) + (y - y_0)] \right\} + K \quad (\text{GL 27})$$

und

$$\iint_{\text{Wasserfläche}} S dx dy = 0$$

wobei

$S_0 = 1 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$	$x_0 = 3200 \text{ km}$
$L = 4800 \text{ km}$	$y_0 = 2500 \text{ km}$
$a = -0.2$	$K = -3.4256 \times 10^{-12} \text{ m s}^{-2}$

Die Konstante  $K$  dient dazu, daß keine Nettokreiszirkulation durch die Einführung der in der Realität nicht vorhandenen geschlossenen Nord- und Südränder hervorgerufen wird.

Die Funktion  $S$  versucht, die großskaligen Merkmale der beobachteten Verteilung des mittleren Windstress im Nordatlantik zu reproduzieren, nämlich die Größenordnung der Rotation und die Neigung der Linien gleicher Rotation gegenüber den Breitenkreisen (Willebrand, 1978; Hellerman und Rosenstein, 1983).

Der direkte Einfluß des Windschubs auf die gesamte Masse des Ozeans auf ebenem Boden zeigt sich in der Sverdrup'schen Theorie, die den linearen, stationären Zustand beschreibt:

$$\beta \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = S \quad (\text{GL 28})$$

Der daraus abgeleitete Sverdrup'sche Transport wird in der Abb. 9 gezeigt.

● *Bodenreibung*

$$R = -\epsilon H_2 \nabla^2 \psi_2 \Big|_{\text{eff}} \quad (\text{GL 29})$$

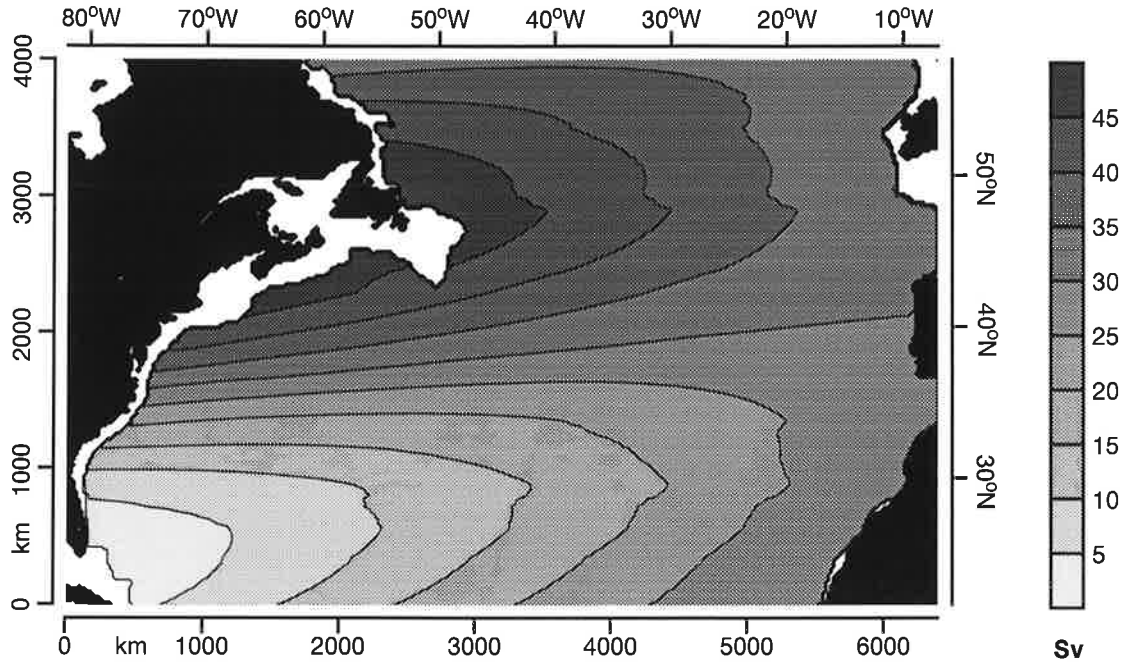


Abbildung 9: Sverdrup'scher Wassertransport auf ebenem Boden (  $1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 / \text{s}$  ).

wobei  $\varepsilon = 1 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$  und

$$\nabla^2 \psi_2 \Big|_{eff} = \gamma_n \delta_n \nabla^2 \psi_2 \Big|_{i,j} + \alpha_n \delta_n \nabla^2 \psi_2 \Big|_{i+1,j} + \gamma_n \beta_n \nabla^2 \psi_2 \Big|_{i,j+1} + \alpha_n \beta_n \nabla^2 \psi_2 \Big|_{i+1,j+1}$$

Die Abklingzeit wird durch den Parameter  $\varepsilon$  gegeben und beträgt in diesem Fall unge-

fähr 115 Tage.  $\nabla^2 \psi_2 \Big|_{eff}$  repräsentiert die relative Vorticity der Strömung in der Bodenschicht auf der Position des Wasserelements und wird mit Hilfe einer bilinearen Interpolation der abgeleiteten relativen Vorticity auf den benachbarten Gitterpunkten berechnet. Diese werden anhand der Werte der Stromfunktion und der Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung im Euler'schen Koordinatensystem berechnet.

● *Laterale Reibung in der i-ten Schicht*

$$V_i = A_H \frac{1}{(\Delta x)^2} (Q_{eff} - Q_n) \quad (\text{GL 30})$$

wobei  $A_H = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$  und

$$Q_{eff} = \gamma_n \delta_n q_{i,j} + \alpha_n \delta_n q_{i+1,j} + \gamma_n \beta_n q_{i,j+1} + \alpha_n \beta_n q_{i+1,j+1}$$

Daraus ergibt sich eine charakteristische Zeit von etwa 463 Tage bei der Annahme eines Gitterabstands ( $\Delta x$ ) von 20 km .

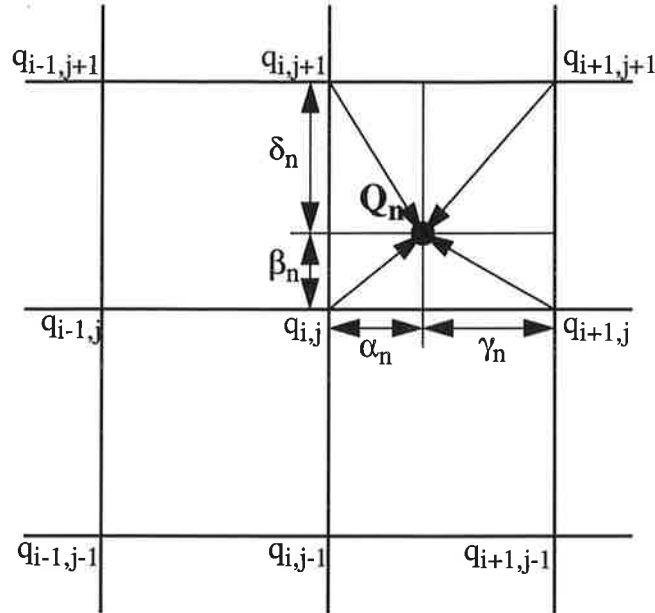


Abbildung 10: Laterale Reibung.

Ein Wasserelement gewinnt an potentieller Vorticity, wenn die Umgebung eine höhere potentielle Vorticity aufweist und umgekehrt. Das heißt, jedes Partikel neigt dazu, sich an den momentanen lokalen Zustand der potentiellen Vorticity anzupassen. Inwieweit die potentielle Vorticity der Partikel von der der Umgebung abweicht, hängt direkt von den in ihrer Nähe mitströmenden Partikeln ab, die die Werte  $q_{i,j}$  mitbestimmen (siehe Abb. 10).

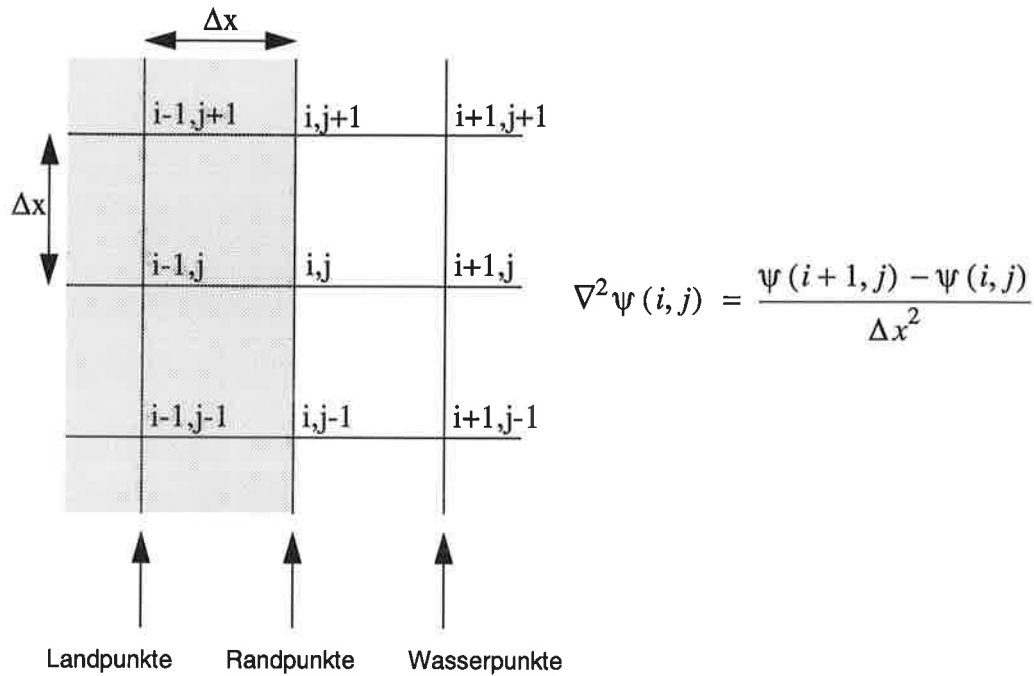
Der Rand beeinflusst auch die potentielle Vorticity der in seiner Nähe befindlichen Partikel. Dies erfolgt ebenfalls durch die Werte  $q_{i,j}$  der Randpunkte:

$$q_1|_R = H_1 \nabla^2 \psi_1|_R + H_1 f|_R + \frac{f_o^2}{g'} (\psi_2|_R - \psi_1|_R) \quad (\text{GL 31})$$

$$q_2|_R = H_2 \nabla^2 \psi_2|_R + H_2 f|_R - \frac{f_o^2}{g'} (\psi_2|_R - \psi_1|_R) + f_o B|_R$$

Die Werte der Stromfunktionen an den Rändern sind zu jedem Zeitpunkt festgelegt. Es bleibt dennoch die Möglichkeit offen, den Wert der relativen Vorticity auf den Randpunkten frei zu bestimmen.

Die hier verwendete Randbedingung für die relative Vorticity ist in der Abb. 11 zu sehen. Sie resultiert aus der Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung des Laplace-Operators, wenn man den Landpunkten den gleichen Wert der Stromfunktion gibt, wie den Randpunkten. Diese Bedingung ist zwar keine volle Nicht-Gleit-Bedin-



**Abbildung 11:** Randbedingung für die relative Vorticity im Modell.

gung (bei der in der Abb. 11 gezeigten Situation ist die vorgeschriebene relative Vorticity um einen Faktor zwei kleiner, als mit der sog. "No-Slip-Condition"), sie erfüllt aber die angestrebte Aufgabe, die laterale Randströmung zum Teil abzubremsen, und sie ist bei krummen Küstenlinien einfacher in das Modell einzubauen.

**Tabelle 2:** Überblick über die Modellparameter

Tiefe der Oberschicht	$H_1 = 1000 \text{ m}$	Beckenlänge	$L_x = 6400 \text{ km}$
Tiefe der Bodenschicht	$H_2 = 4000 \text{ m}$	Beckenbreite	$L_y = 4000 \text{ km}$
Zentrale Referenzbreite	$40^\circ\text{N}$	Coriolisparameter der Referenzbreite	$f_0 = 9.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$
Reduzierte Gravitationskonstante	$g' = 0.02 \text{ m s}^{-2}$	$\beta$ -Faktor der Referenzbreite	$\beta = 1.8 \times 10^{-11} \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$
Zahl der Wasserpartikel pro Schicht	241555	Barokliner Rossby-Radius	43 km
Mittlere Partikeldichte	$5 / 400 \text{ km}^2$	Modellzeitschritt	4 Stunden
Gitterabstand (beide Richtungen)	20 km	Gesamte Wasserfläche des Modells	$19.3244 \times 10^6 \text{ km}^2$
Größte Wassertiefe	5954 m	Maximale Rotation des Windschubes (pro Einheitsdichte)	$S_0 = 1 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$
Niedrigste Wassertiefe	3000 m	Parameter der Bodenreibung	$\epsilon = 1 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$
Geographische Ausdehnung	$22^\circ\text{N bis } 58^\circ\text{N}$ $82^\circ\text{W bis } 7^\circ\text{W}$	Parameter der lateralen Reibung	$A_H = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

## Stabilitätsexperimente

Im folgenden werden Ergebnisse von Experimenten gezeigt, die mit verschiedenen Werten des Stabilitätsparameters  $\omega$  durchgeführt wurden. Wie schon im Abschnitt 2.2 erläutert wurde, gibt dieser Parameter Information darüber, wo zwischen der völlig expliziten ( $\omega = 0$ ) und der völlig impliziten ( $\omega = 1$ ) Form sich das numerische Verfahren befindet.

In erster Linie will man untersuchen, ob und bei welchem Wert von  $\omega$  das Modell stabil wird, d. h., ob ein dynamischer Gleichgewichtszustand erreicht wird oder nicht, und wie das Modell auf Änderungen von  $\omega$  reagiert. Damit befaßt sich Abschnitt 3.1.

Im Abschnitt 3.2 werden die stabilen Experimente anhand der mittleren Stromfunktion und der kinetischen Energie der Wirbel untereinander und mit Beobachtungsdaten verglichen. Das zentrale Experiment  $\omega = 0.5$ , das als Basis für weitere Experimente in den nächsten Kapiteln Verwendung finden wird, wird mit einigen Momentaufnahmen und Zeitdiagrammen der Strömung in der Oberschicht ergänzt, die die Variabilität des simulierten Golfstroms veranschaulichen sollen.

Abschnitt 3.3 beinhaltet eine Diskussion über die Lage der Thermokline und die damit verbundenen potentiellen Energie im zentralen Experiment.

Die zwei letzten Abschnitte dieses Kapitels werden sich mit einer Schilderung des Gleichgewichtszustands des zentralen Experimentes bezüglich der einzelnen Wasserelemente befassen: Verteilung der Wasserelemente (3.4) und Vorticitybilanz (3.5).

### 3.1 “Spin-up”

Die Anfangslage entspricht der Stillstandssituation, in der die Stromfunktionen beider Schichten überall den gleichen konstanten Wert annehmen. Mit den im vorigen Kapitel gewählten Randbedingungen ist dieser Wert gleich Null. Das bedeutet, daß auch

- die relativen Vorticities  $\rightarrow H_i \nabla^2 \psi_i$

- die kinetischen Energien  $\rightarrow \frac{1}{2} H_i (\nabla \psi_i)^2$
- und die potentielle Energie  $\rightarrow \frac{1}{2} \frac{f_0^2}{g'} (\psi_1 - \psi_2)^2$

in der Ausgangssituation Null sind. Man beachte, daß die beiden letzten Terme Energien pro Dichte- und Flächeneinheit darstellen.

Die einzigen Energie-, Impuls- und Vorticityquellen im Modell stellt der Windschub an der Oberfläche dar. Von Anfang an beträgt er den im vorigen Kapitel dargelegten, zeitlich konstanten Wert. Als Energie-, Impuls- und Vorticitysenken dienen die in beiden Schichten aktive laterale Reibung und die Bodenreibung in der unteren Schicht. Da es keinen Reibungsterm zwischen den beiden, im Modell bestehenden Schichten gibt, können die Strömungen in der unteren Schicht allein durch die Schubkräfte gegen die Zwischenfläche angetrieben werden. Dieser Prozess bewirkt einen insgesamt positiven Energie- und Impulsfluß von der Ober- schicht in die Bodenschicht.

Die Wasserelemente werden am Anfang jedes Experimentes über alle Gitterzellen gleichmäßig verteilt. Sie verfügen in beiden Schichten lediglich über planetare Vorticity, die in der Bodenschicht durch den Bodentopographieterm korrigiert wird (s. GL 2).

Als Basis für den Vergleich zwischen den verschiedenen Stabilitätsexperimenten dient die zeitliche Entwicklung der totalen, kinetischen und potentiellen Energie. Der Grund für dieses Vorgehen ist, daß das hier verwendete numerische Verfahren die Erhaltung der potentiellen Vorticity ausdrücklich gewährleistet. Im Gegensatz zu Euler'schen Modellen gewährleistet es jedoch nicht die Erhaltung der totalen Energie.

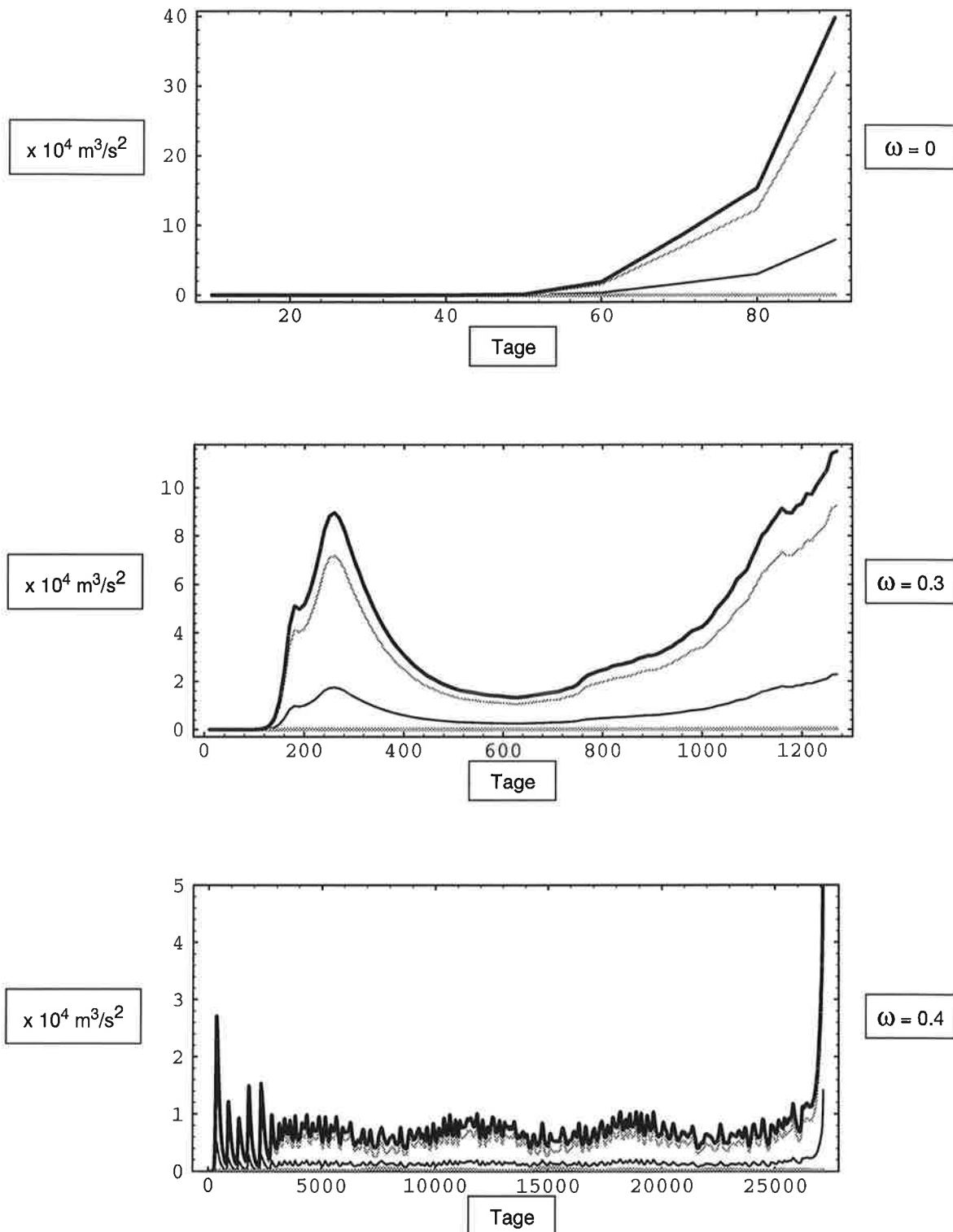
Es sind neun Experimente mit folgenden Werten von  $\omega$  gemacht worden: 0, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 und 1. Die Länge der Modellläufe ist unterschiedlich. Auf der einen Seite befinden sich die Experimente mit  $\omega < 0.5$ , bei denen die Gesamtenergie (Flächenintegral der Summe von kinetischer und potentieller Energie) ab einem bestimmten Zeitpunkt kontinuierlich zunahm, so daß die Modellläufe  $\omega = 0$  und  $\omega = 0.3$  nach 93 bzw. 1276 Tage abgebrochen wurden. Bemerkenswert ist der Modellauf  $\omega = 0.4$ , der 27134 Tage bis zum Abbruch des Experimentes brauchte und der in dieser Zeit ein scheinbares Gleichgewicht erreichte, allerdings mit unwahrscheinlich hohen Transport- und Energiewerten im Vergleich zu den stabilen Experimenten (etwa hundertmal größer: 10000 Sv bzw.  $10000 \text{ m}^3/\text{s}^2$ ). Auf der anderen Seite stellte sich in den Experimenten mit  $\omega > 0.5$  auf verschiedenen Niveaus immer ein Gleichgewicht ein. Die Länge der Zeitreihen beträgt hier 12900 Tage, ausgenommen das Experiment  $\omega = 0.6$  (18900 Tage). Zuletzt bleibt das zentrale Experiment  $\omega = 0.5$ , auf das sich die Arbeit in den



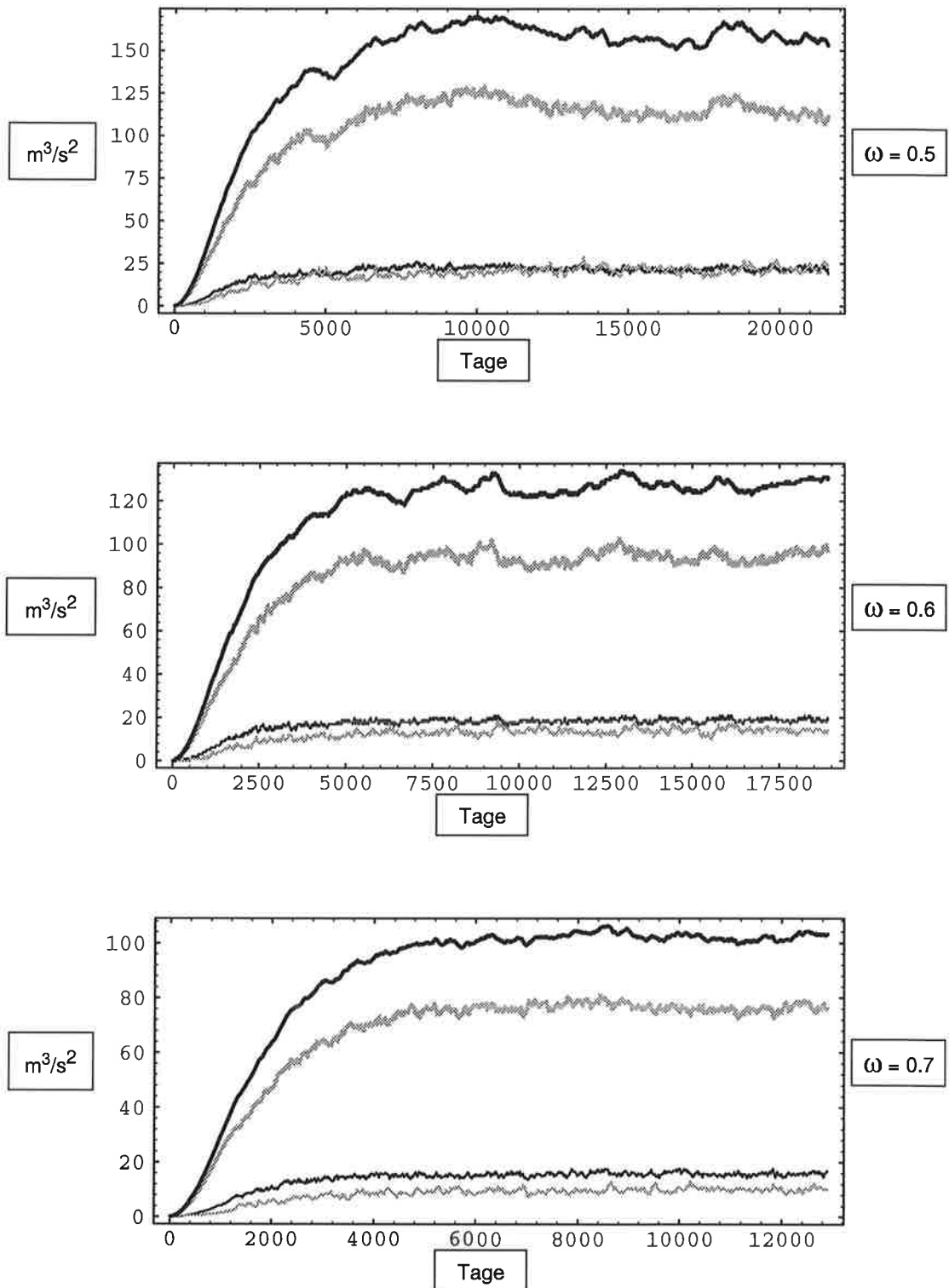
folgenden Kapiteln konzentrieren wird und von dem insgesamt 22200 Tage gerechnet wurden.

Die einzelnen Beiträge zur Gesamtenergie (in Energieeinheiten pro Dichte- und Flächeneinheit) werden in Abb. 12a bis 12c gezeigt. Die Kurven der drei instabilen Experimente zeigen, daß es sich dabei um die Instabilität des barotropen Modus handelt. Die potentielle Energie, assoziiert mit dem baroklinen Modus, bleibt vernachlässigbar klein. Das Modell verhält sich in diesen Fällen, als ob es nur eine Schicht gäbe.

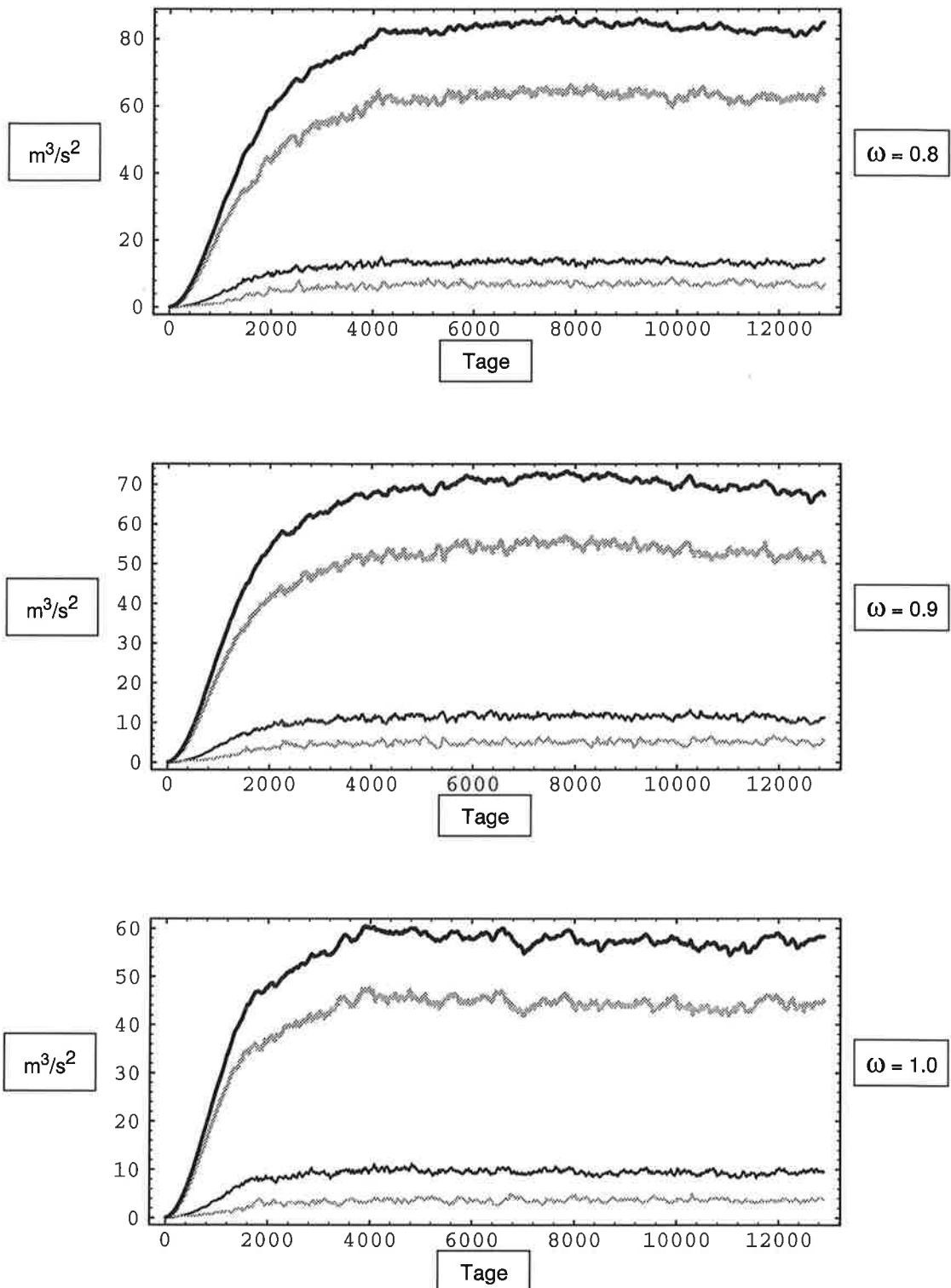
Ein Vergleich zwischen den verschiedenen stabilen Experimenten zeigt, daß die Gesamtenergie von ungefähr  $170 \text{ m}^3/\text{s}^2$  bei  $\omega = 0.5$  auf  $60 \text{ m}^3/\text{s}^2$  bei  $\omega = 1$  zurückgeht. Bei den stabilen Experimenten ist außerdem zu beobachten, daß die kinetische Energie der unteren Schicht mit zunehmendem Faktor  $\omega$  einen immer kleineren Anteil an der Gesamtenergie besitzt. Das bedeutet, daß die Prozesse, die dem Energiefluß von der Oberschicht in die Bodenschicht Rechnung tragen, mit zunehmendem Faktor  $\omega$  an Wirksamkeit verlieren.



**Abbildung 12a:** Zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie (dicke, schwarze Linie), der potentiellen Energie (dicke, graue Linie), der kinetischen Energie der Oberschicht (dünne, schwarze Linie) und der kinetischen Energie der Bodenschicht (dünne, graue Linie). Einheiten: Energie pro Dichte- und Flächeneinheit.



**Abbildung 12b:** Zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie (dicke, schwarze Linie), der potentiellen Energie (dicke, graue Linie), der kinetischen Energie der Oberschicht (dünne, schwarze Linie) und der kinetischen Energie der Bodenschicht (dünne, graue Linie). Einheiten: Energie pro Dichte- und Flächeneinheit.



**Abbildung 12c:** Zeitliche Entwicklung der Gesamtenergie (dicke, schwarze Linie), der potentiellen Energie (dicke, graue Linie), der kinetischen Energie der Oberschicht (dünne, schwarze Linie) und der kinetischen Energie der Bodenschicht (dünne, graue Linie). Einheiten: Energie pro Dichte- und Flächeneinheit.

### 3.2 Strömungscharakteristika der stabilen Experimente: Mittlere Stromfunktion und kinetische Energie der Wirbel

Im Vergleich zu der Gesamtenergie erfährt der maximale Wassertransport des Golfstroms in den stabilen Experimenten (Bilder hier nicht gezeigt) nur einen leichten Rückgang: von etwa 160 Sv bei  $\omega = 0.5$  auf 120 Sv bei  $\omega = 1$ . Das läßt sich erklären, wenn man die räumlichen Unterschiede der verschiedenen Experimente in Betracht zieht. (Die Mittelungsquerstriche und die normalen Striche bedeuten im folgenden Zeitmittelwerte der Felder bzw. Abweichungen von diesen Mittelwerten über die letzten 3000 Tage der jeweiligen Integration). Zu diesem Zweck werden in den Abb. 13a bis 13c die mittleren Stromfunktionsfelder  $\overline{\psi}_i$  der Experimente  $\omega = 0.5, 0.7$  und  $1.0$  dargestellt. Je größer der Faktor  $\omega$  wird, desto schwächer zeigt sich die mittlere Zirkulation, hauptsächlich erkennbar an der Gesamtlänge des Jets. Es ist an dieser Stelle angebracht, sich an die Lösung der linearen quasigeostrophischen Gleichungen, d. h. des sogenannten Sverdrup'schen Problems (siehe Abb. 9), zu erinnern. Es zeigt sich, daß die Nichtlinearität der Gleichungen der Grund für die Bildung einer konzentrierten zonalen Strömung ist. Während im linearen Zustand nur ein Höchsttransport von ca.  $50 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$  zu erreichen wäre, sind die Transporte allein in der Oberschicht über  $100 \times 10^6 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Die bis zu diesem Punkt genannten Abweichungen zwischen den verschiedenen stabilen semiimpliziten Lösungen lassen sich physikalisch anhand der zeitgemittelten quasigeostrophischen Gleichungen GL 1 erklären:

$$\frac{\partial \overline{q}_i}{\partial t} + J(\overline{\psi}_i, \overline{q}_i) = \overline{F}_i - \overline{J(\psi'_i, q'_i)} \quad (\text{GL 32})$$

Die wichtigste Rolle spielt dabei die Advektion von potentieller Vorticity durch das nicht stationäre Wirbelfeld (zweiter Term der rechten Seite von Gleichung GL 32). Die Differenz zwischen den Experimenten liegt im unterschiedlichen Wert dieses Termes begründet. In Abwesenheit von einem Wirbelfeld ist dieser Term Null, und es wäre kein Unterschied in der mittleren Stromfunktion festzustellen.

Daß die durch die Nichtlinearität der Gleichungen erzeugten Wirbelfelder in den verschiedenen Experimenten nicht gleich sind, ist in den Abb. 14a bis 14c zu sehen, in denen die kinetischen Energien pro Masseneinheit  $\overline{(\nabla \psi'_i)^2}/2$  dargestellt werden. Daraus ergibt sich ein ähnliches Bild wie bei den mittleren Stromfunktionen: Mit einer Zunahme des Faktors  $\omega$  geht eine Schwächung der Intensität und zonale Ausdehnung des Wirbelfeldes einher. Man kann diese Tatsache so interpretieren, daß die nicht-stationären Wirbel eine Stärkung der mittleren Strömung bewirken, anstatt sie abzuschwächen. Es würde sich um eine Art negativer Wirbelviskosität handeln (Rhines und Holland, 1979). Deshalb ist es bei wirbelauflösenden Model-

len so wichtig, eine korrekte Simulation des Wirbelfeldes zu erreichen, damit die mittleren Eigenschaften der Strömung richtig wiedergegeben werden können. Weil das zentrale Experiment  $\omega = 0.5$  die kleinste numerische Viskosität von all den hier durchgeführten Experimenten beinhaltet, wird es als Basis in den folgenden Kapiteln verwendet.

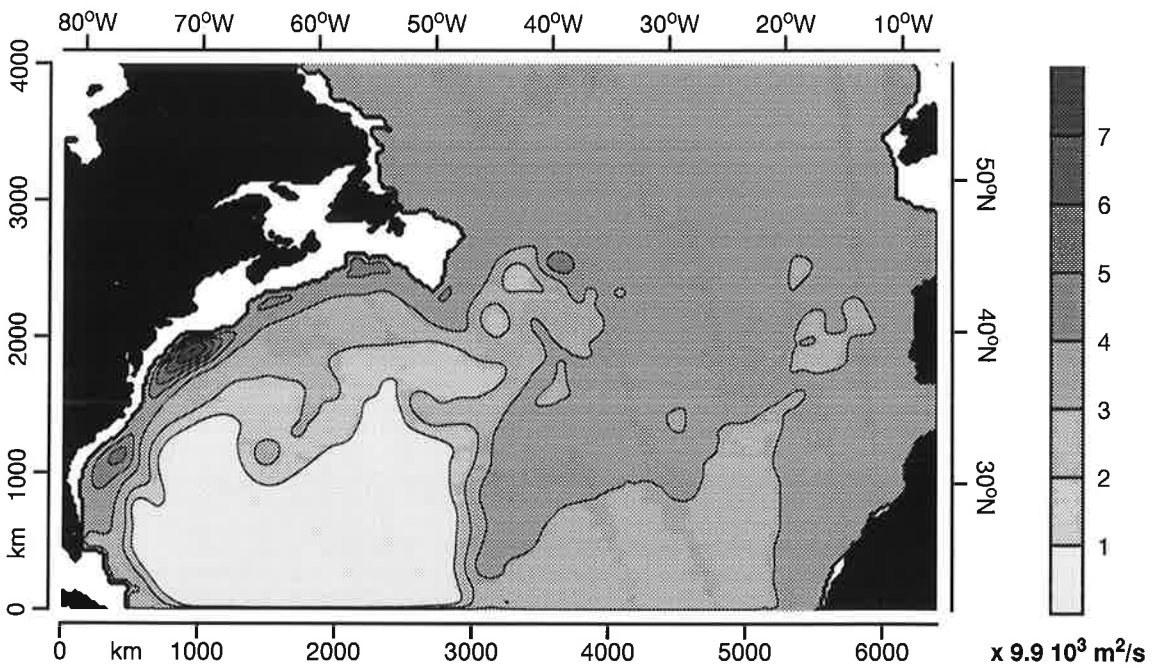
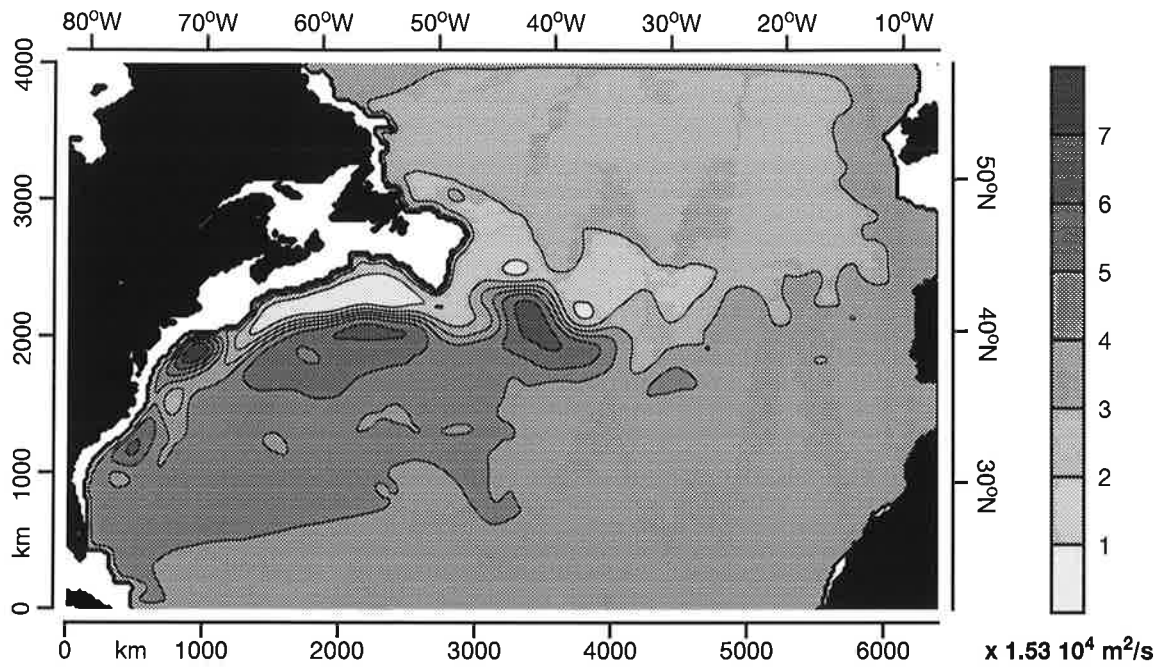
Die hier gezeigten mittleren Felder des Experimentes  $\omega = 1$  weisen gewisse Ähnlichkeiten zu den herkömmlichen, auf Euler'schen Koordinaten basierenden Zweischichtenmodellen auf. Bei höherer vertikaler und horizontaler Auflösung in diesen Modellen wird eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen und auch mit dem hiesigen Experiment  $\omega = 0.5$  erreicht (Holland, 1985, 1986; Holland und Schmitz, 1985; Holland et al., 1983; Schmitz und Holland, 1982, 1986). Hua (1994) hat nachgewiesen, daß eine höhere Auflösung ebenfalls eine bessere Simulation der Lagrange'schen potentiellen Vorticity, die in diesen Modellen nur annähernd erhalten wird, zustande bringt. Sie schlägt vor, gerade die Lagrange'sche potentielle Vorticity als Maßstab zu benutzen, um die "Güte" der Modelle zu bewerten.

Abb. 15 zeigt Abschätzungen der kinetischen Energie der Wirbel, die an der Oberfläche aus Bojendaten (Richardson, 1983; Brügge, 1995) und in einer Tiefe von 4000 m aus Daten von an bestimmten Positionen befestigten Meßgeräten (Schmitz, 1984) gemacht worden sind. Die Werte in der Oberschicht sowie die zonale Ausdehnung im zentralen Experiment stimmen gut mit den Beobachtungen überein (s. auch Richardson, 1985). Es scheint aber, daß die kinetische Energie der Bodenschicht dagegen besonders im östlichen Teil leicht überschätzt wird. Das könnte auf die hier verwendete geglättete Bodentopographie zurückzuführen sein.

Ein auffälliger Mangel der Simulation der mittleren Zirkulation in den drei gezeigten stabilen Experimenten ist die Position, an welcher der Golfstrom die nordamerikanische Küste Richtung Osten verläßt. Im Modell bildet sich ein stationärer antizyklonaler Wirbel nördlich des Kap Hatteras, so daß der Jet nicht bei dieser Breite, sondern weiter nördlich davon entsteht (Stommel 1965). Eine korrekte Simulation dieses Aspektes der Zirkulation würde eine bessere Wiedergabe der Windverhältnisse, wahrscheinlich auch eine Veränderung der Randbedingungen und der lokalen Reibung sowie eine bessere Wiedergabe der lokalen Bodentopographie (Richardson, 1981) erfordern. Letzteres ist in einem quasigeostrophischen Modell aufgrund der vorgegebenen Approximationen nicht möglich. Kurioserweise weist eine Simulation der nordatlantischen Zirkulation mit Hilfe eines wirbelauflösenden auf den primitiven Gleichungen beruhenden Modell (mit  $1/6^\circ \times 1/5^\circ$  horizontaler Auflösung) mit realer Topographie ebenfalls einen ähnlichen stationären Wirbel auf (s. Beckmann et al., 1994).

Einen Eindruck der zeitlichen und räumlichen Variabilität der Zirkulation in der Oberschicht, die uns in erster Linie im nächsten Kapitel beschäftigen wird, vermitteln die hier gezeigten Bilder der Momentaufnahme der Stromfunktion in Abständen von 30 Tagen (Abb. 16a bis

16c) und die Zeit-Breite-Diagramme (sogenannte Hovmöller-Diagramme) der Stromfunktion bei  $60^{\circ}\text{W}$  und  $30^{\circ}\text{W}$  der letzten 3000 Tage der Integration (Abb. 17). Die zentrale Strömung ist von Wirbeln, vorwiegend von zyklonalen Wirbeln, und Meandern dominiert. Besonders aktiv ist die Produktion von Wirbeln in der Region südöstlich der "Grand Banks" von Neufundland, wo sich der Jet allmählich völlig in Wirbeln auflöst. Der Jet bei  $60^{\circ}\text{W}$  zeigt sich dagegen sehr konstant mit einem Wassertransport von etwa 100 Sv und mit sehr kleinen Schwankungen um den 40. Breitengrad. Dagegen zeigt die Strömung bei  $30^{\circ}\text{W}$  keinen erkennbaren Jet mehr. Sie besteht fast ausschließlich aus Wirbeln.



**Abbildung 13a:** Mittlere Stromfunktion der Oberschicht (oberes Bild) und der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 0.5$ .



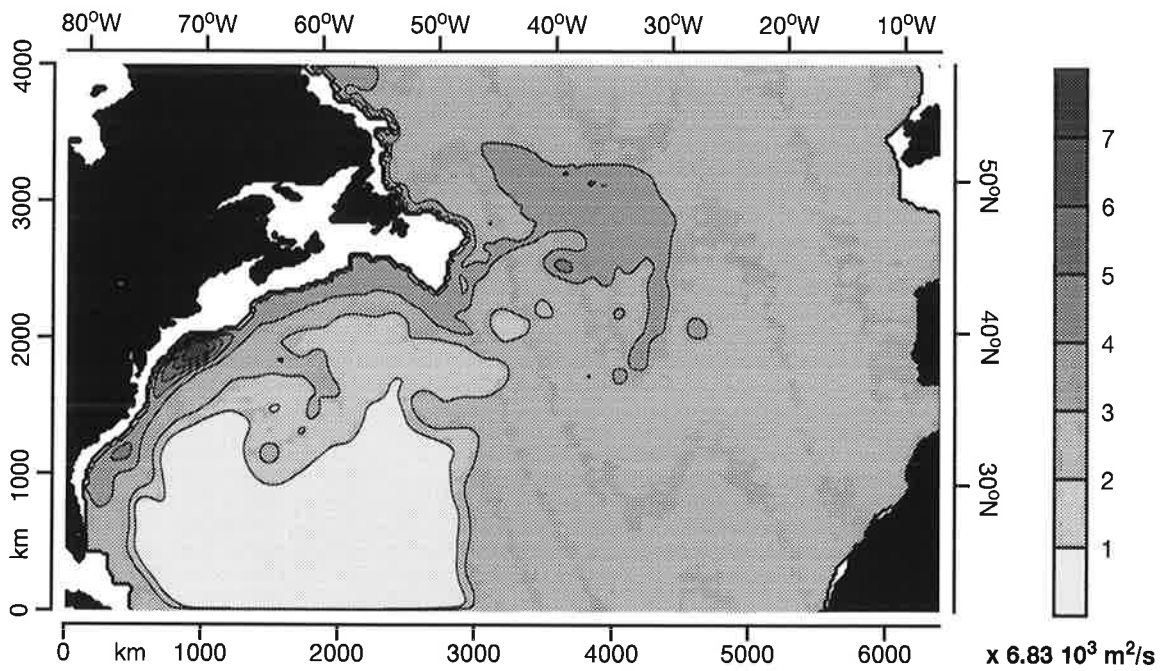
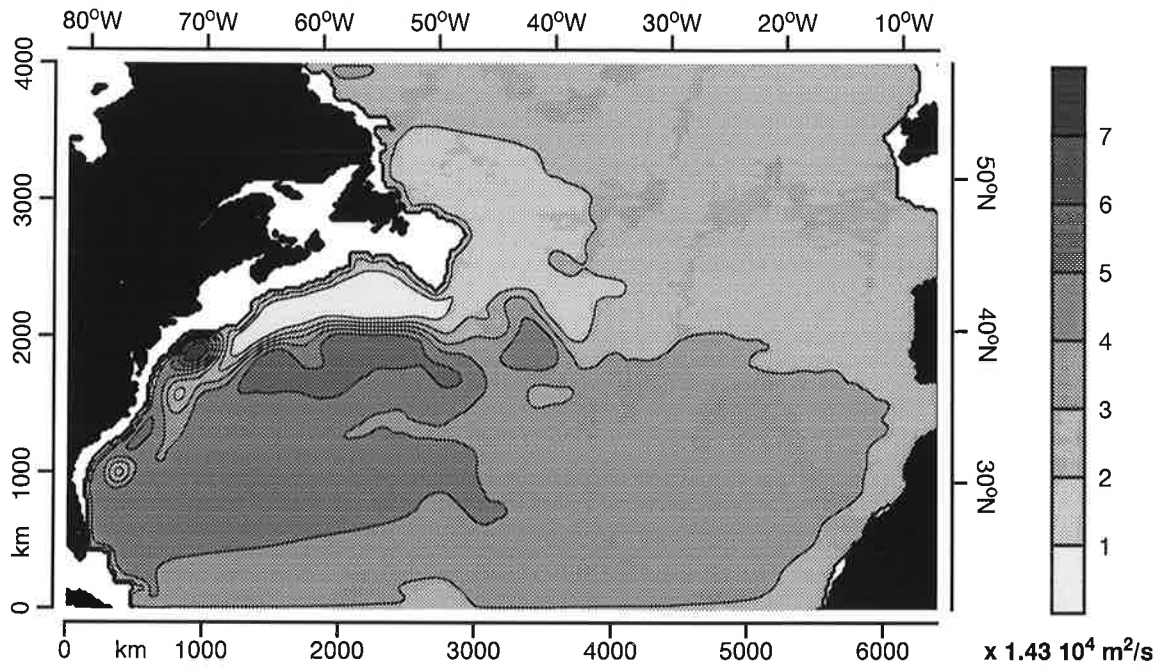
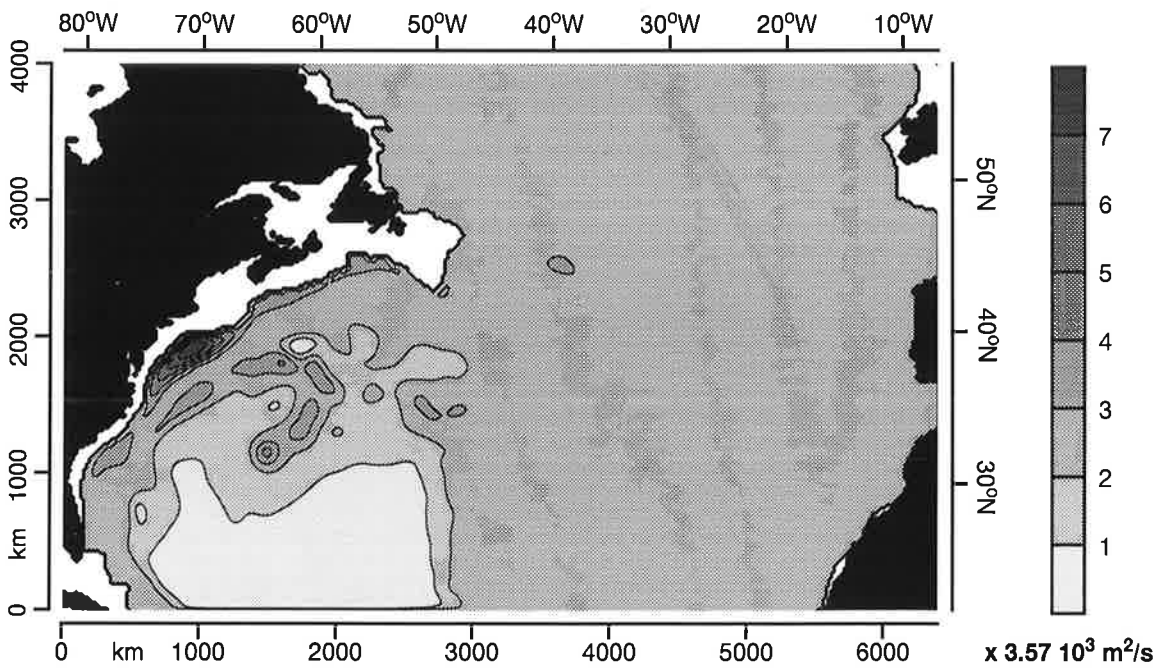
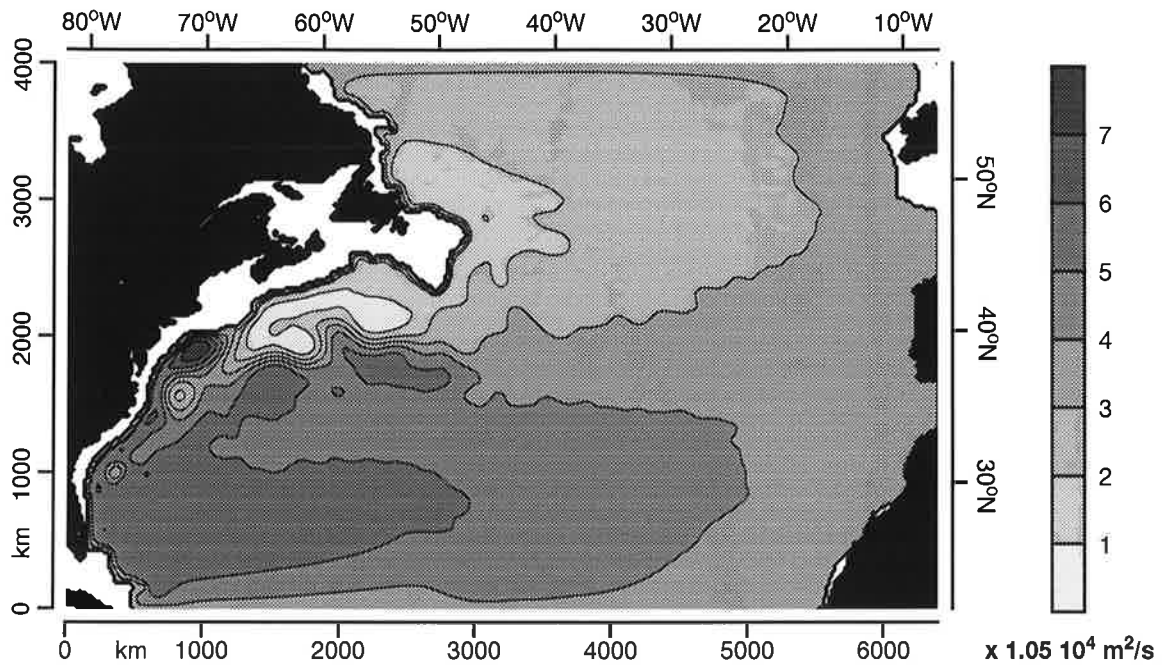
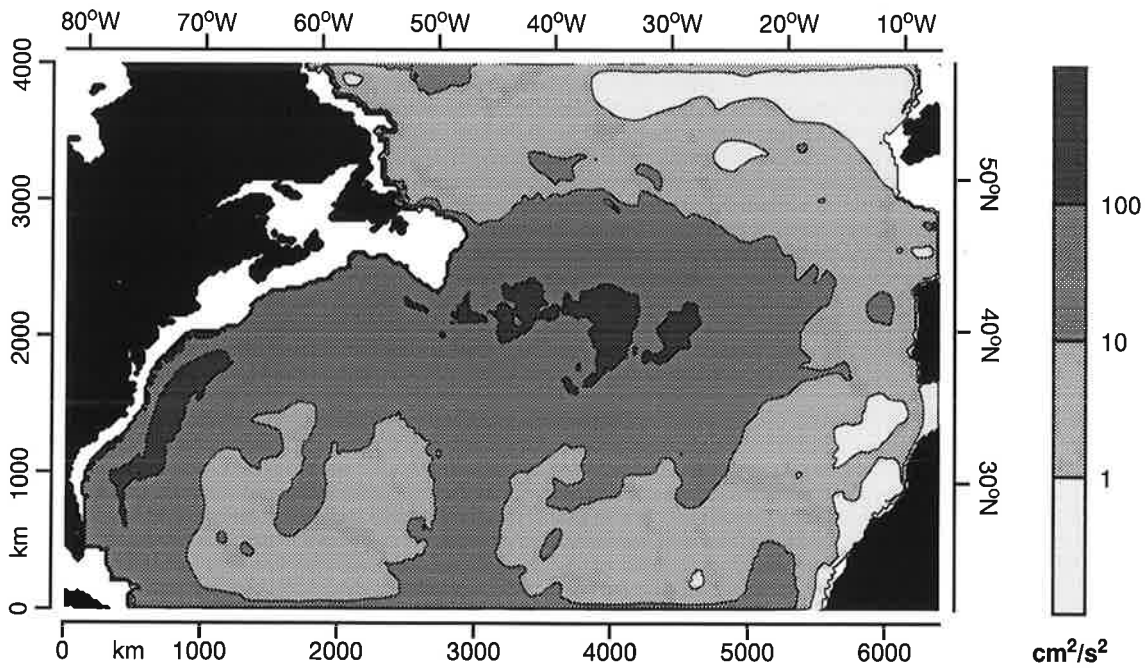
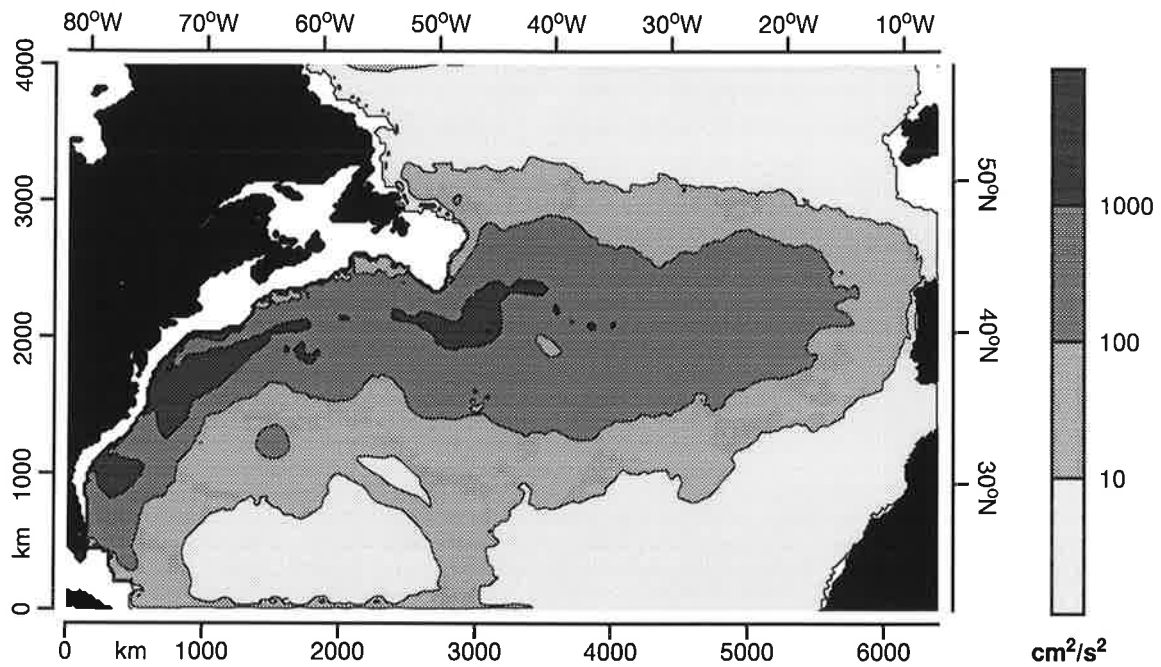


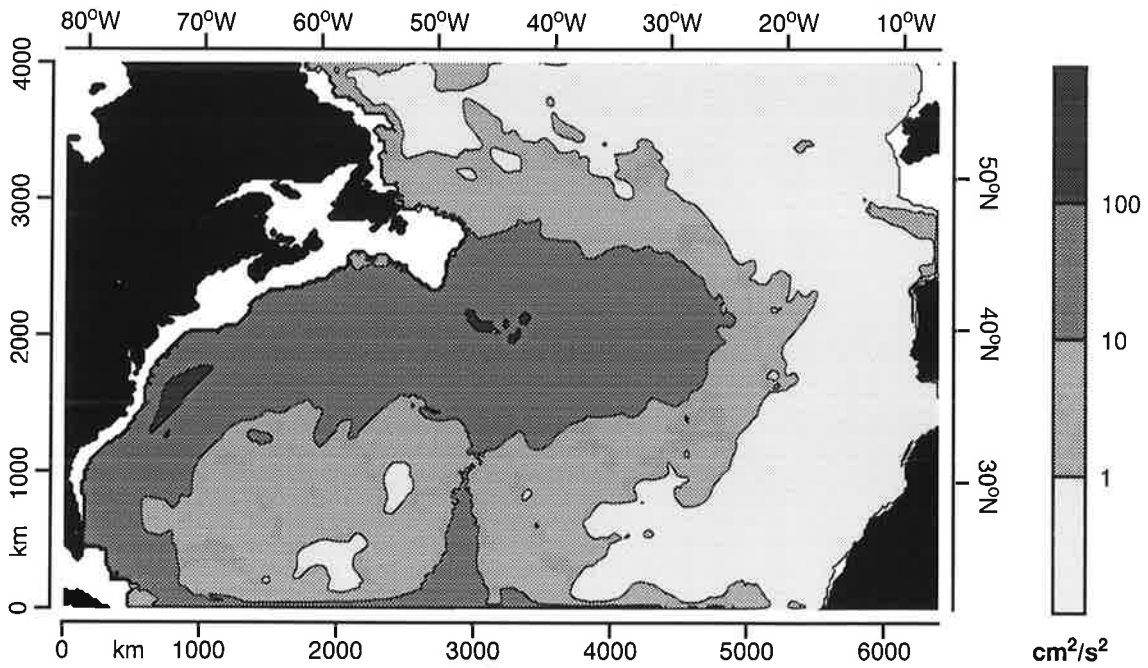
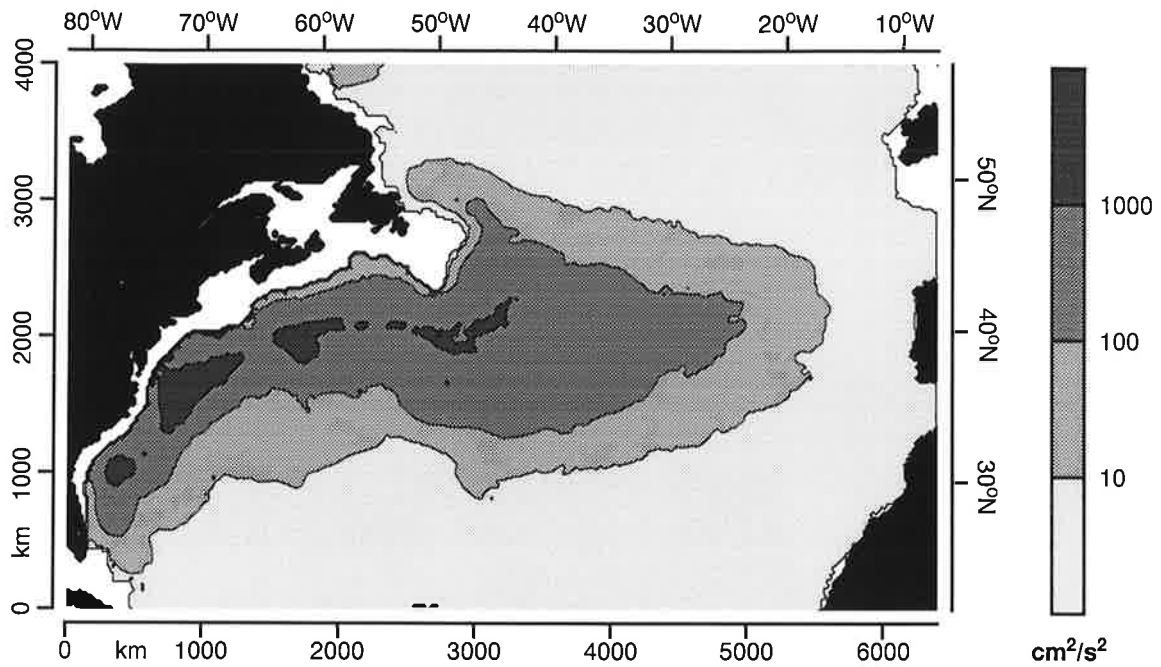
Abbildung 13b: Mittlere Stromfunktion der Oberschicht (oberes Bild) und der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 0.7$ .



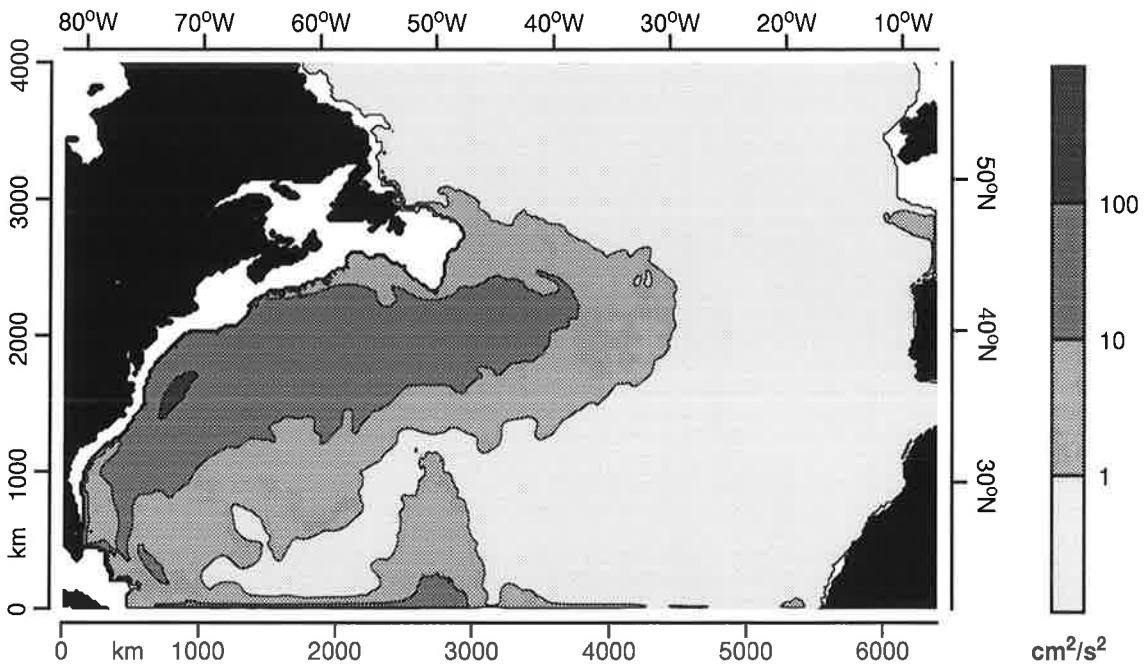
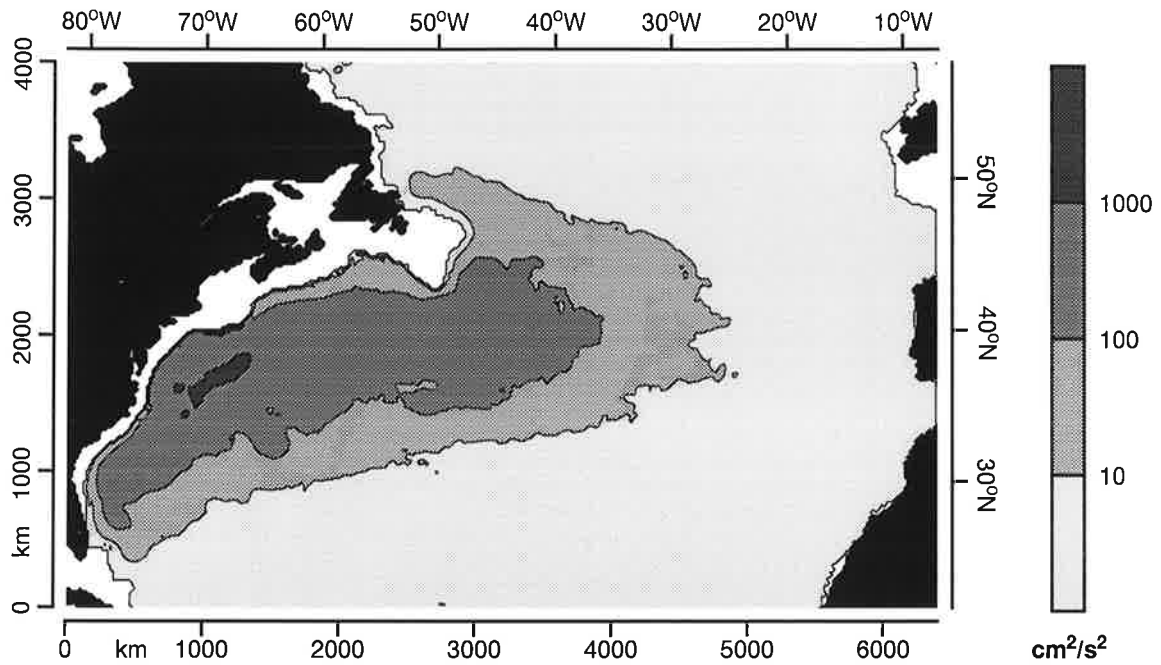
**Abbildung 13c:** Mittlere Stromfunktion der Oberschicht (oberes Bild) und der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 1$ .



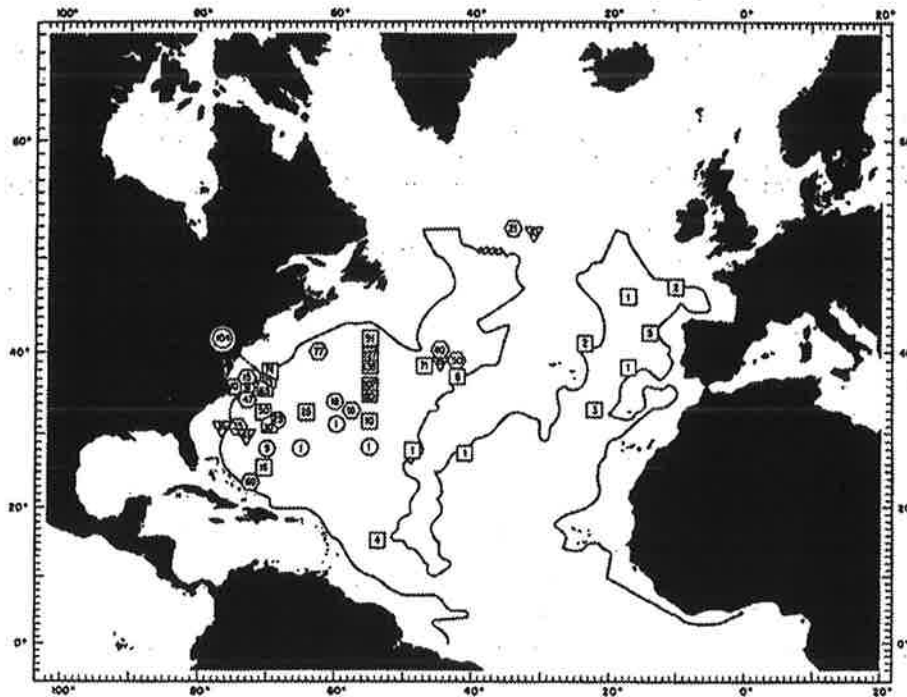
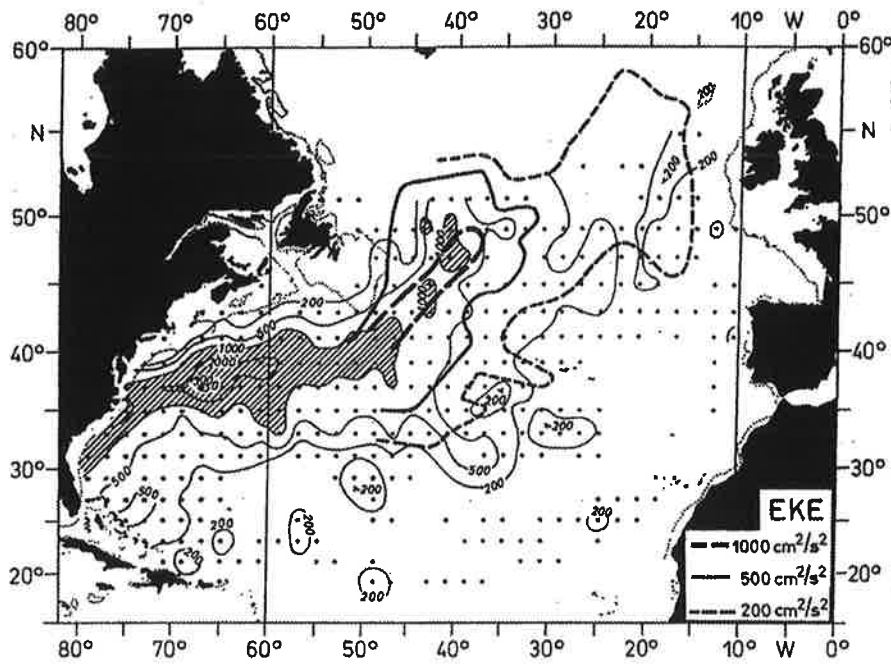
**Abbildung 14a:** Kinetische Energie (pro Masseneinheit) der transienten Störungen in der Oberschicht (oberes Bild) und in der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 0.5$ .



**Abbildung 14b:** Kinetische Energie (pro Masseneinheit) der transienten Störungen in der Oberschicht (oberes Bild) und in der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 0.7$ .

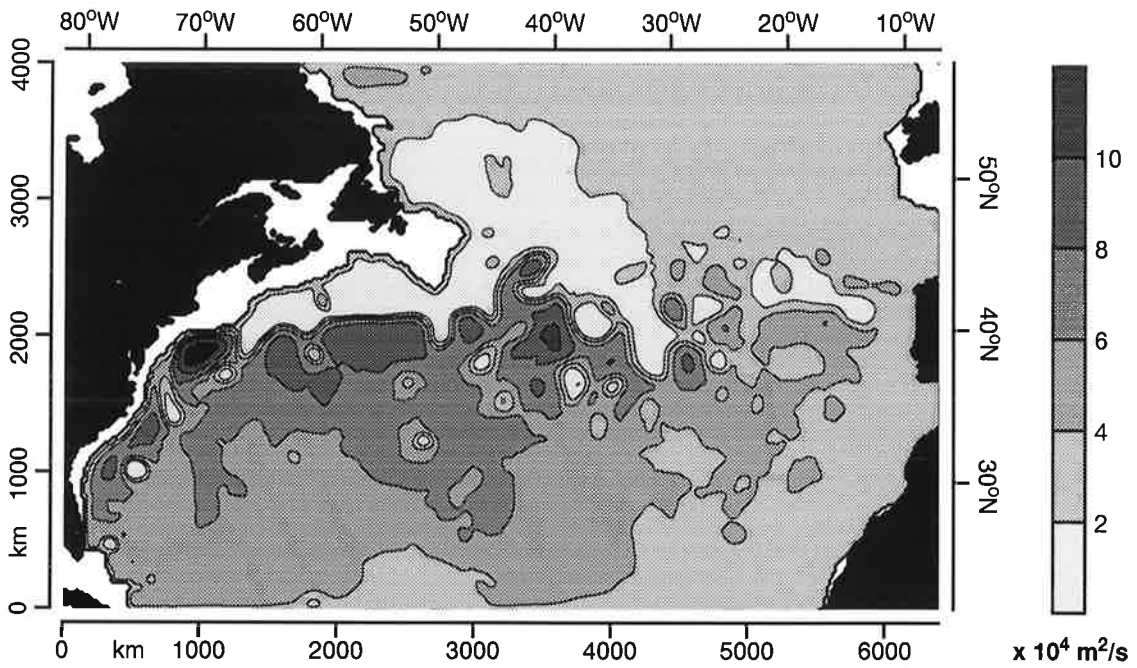
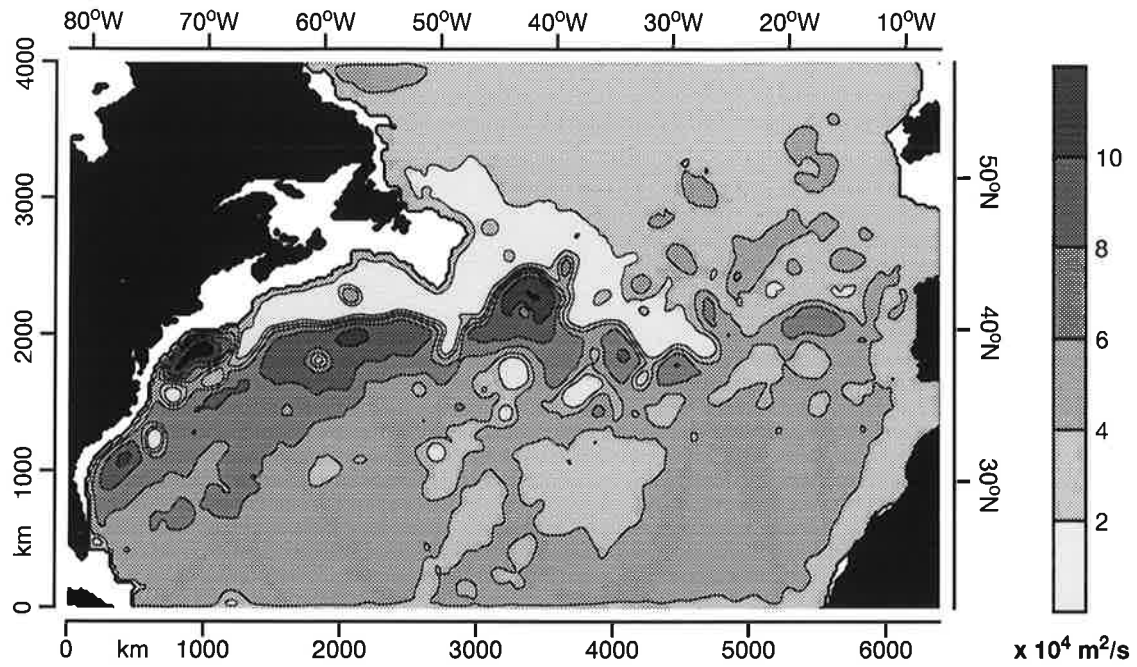


**Abbildung 14c:** Kinetische Energie (pro Masseneinheit) der transienten Störungen in der Oberschicht (oberes Bild) und in der Bodenschicht (unteres Bild) im Experiment  $\omega = 1$ .

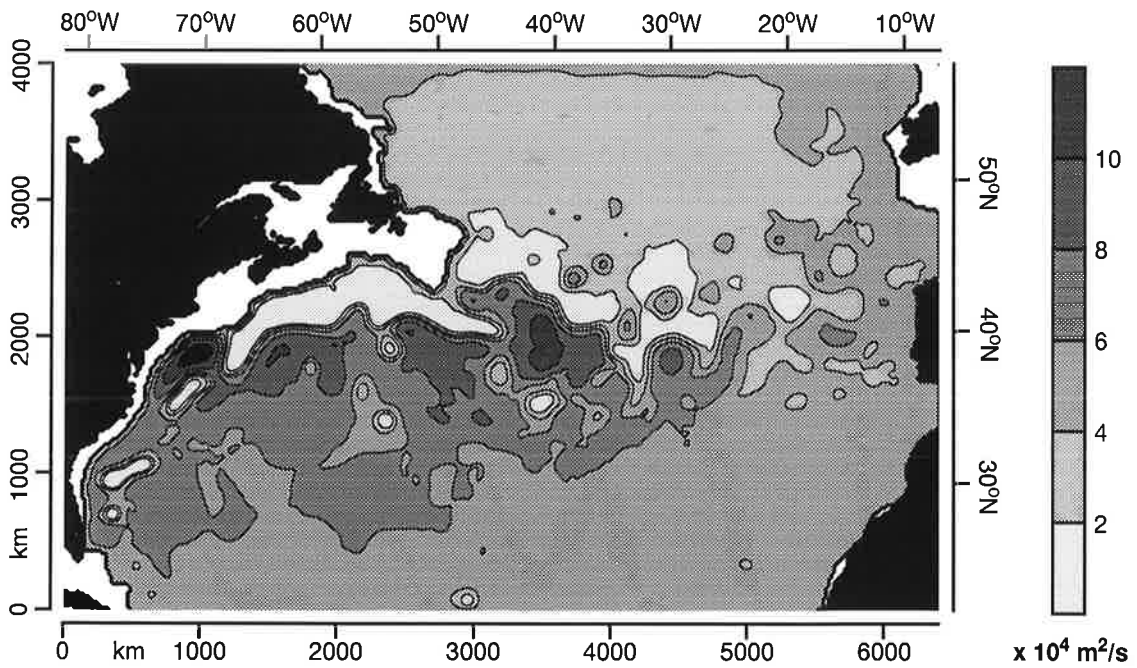
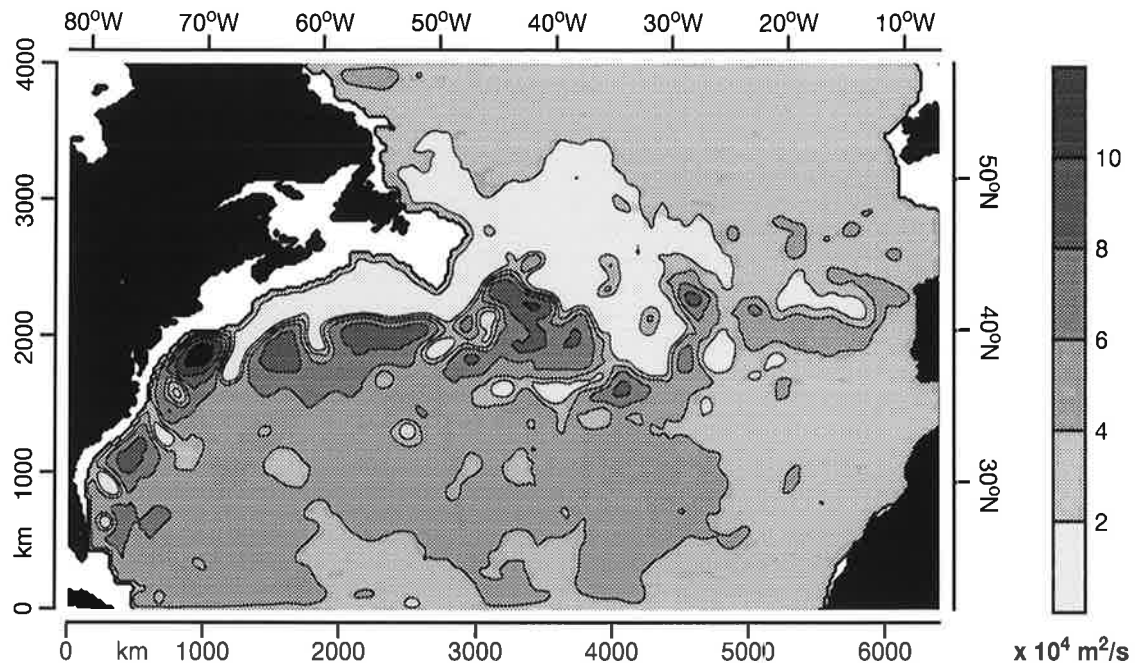


**Abbildung 15:** Aus Beobachtungen geschätzte kinetische Energie der Wirbel pro Masseneinheit ( $\text{cm}^2/\text{s}^2$ ) an der Oberfläche (oberes Bild: aus Richardson, 1983; mit Korrekturen von Brügge, 1995) und in einer Tiefe von 4000 m (unteres Bild: aus Schmitz, 1984).



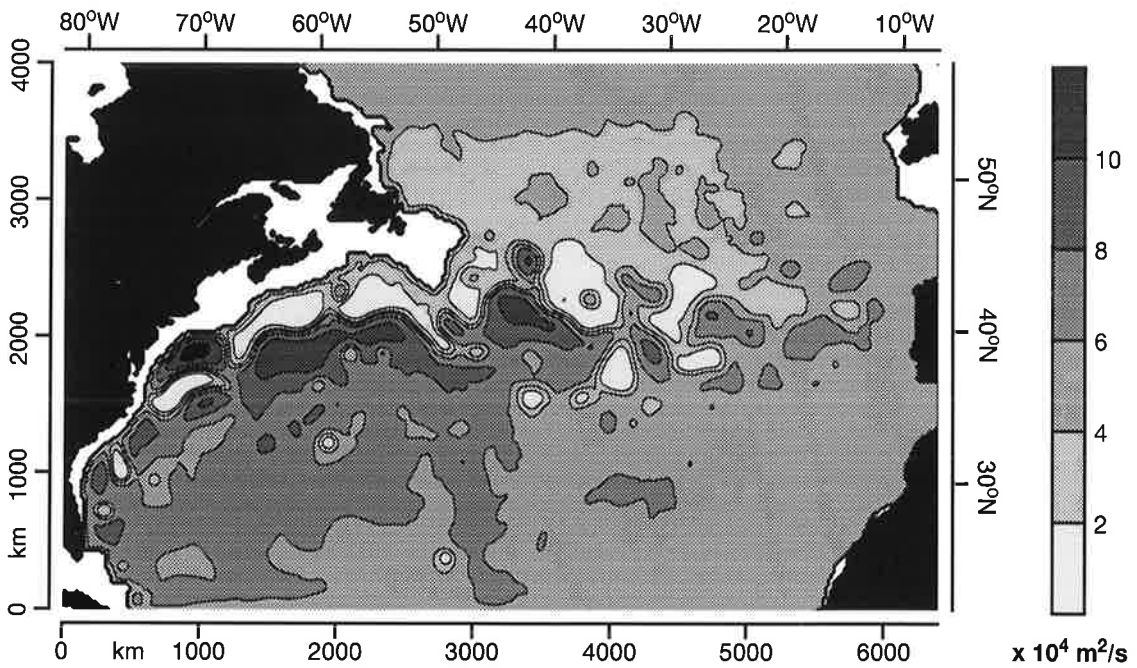
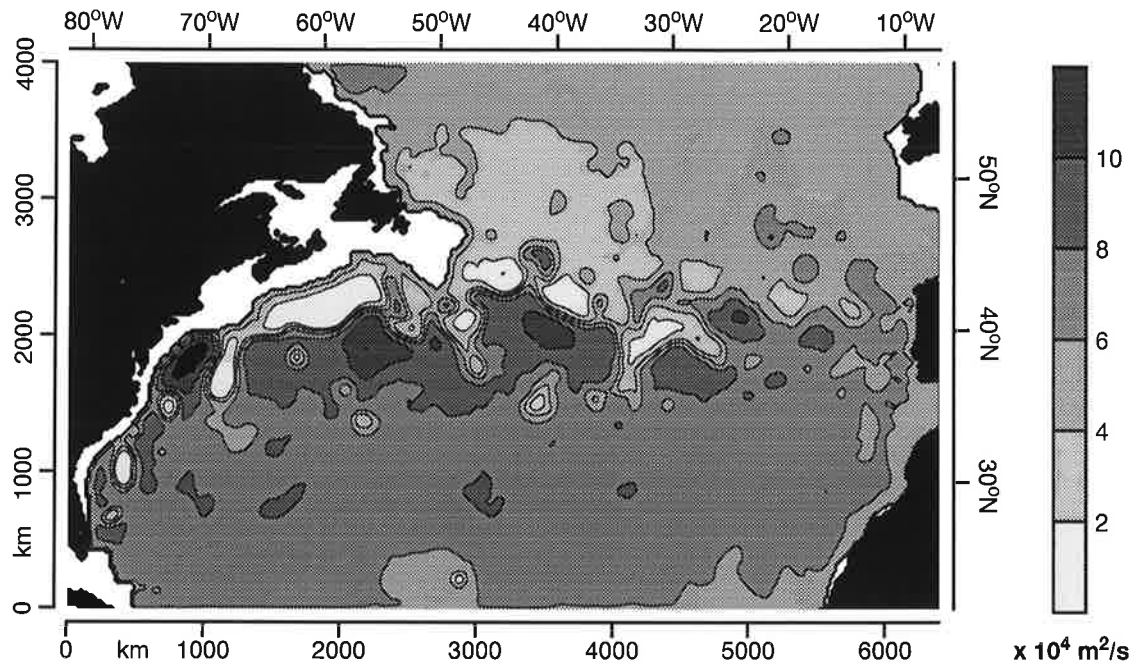


**Abbildung 16a:** Momentaufnahme der Stromfunktion der Oberschicht nach 19200 Tagen (oben) und nach 19230 Tagen (unten).

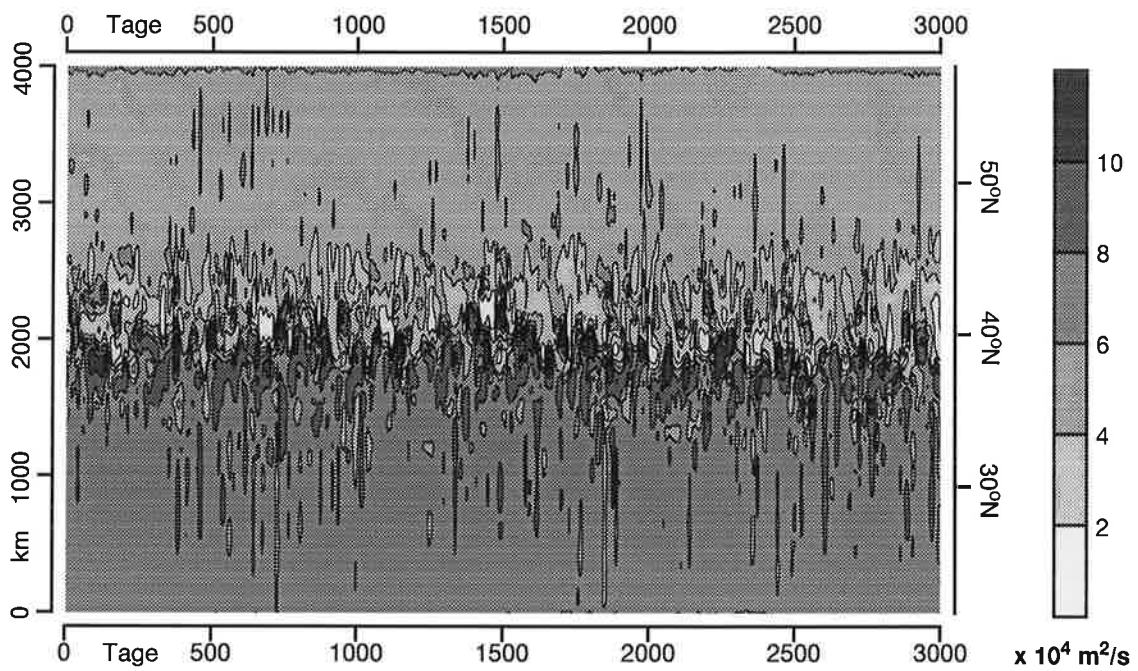
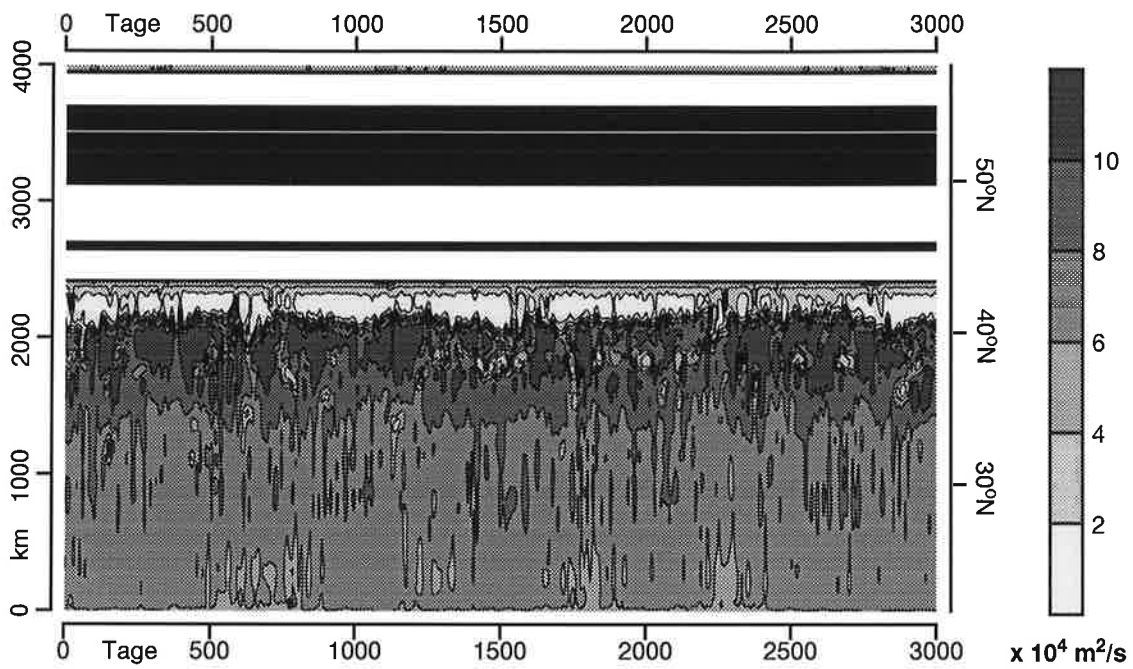


**Abbildung 16b:** Momentaufnahme der Stromfunktion der Oberschicht nach 19260 Tagen (oben) und nach 19290 Tagen (unten).





**Abbildung 16c:** Momentaufnahme der Stromfunktion der Oberschicht nach 19320 Tagen (oben) und nach 19350 Tagen (unten).



**Abbildung 17:** Hovmöller-Diagramm der Stromfunktion der Oberschicht bei 60°W (oberes Bild) und 30°W (unteres Bild) vom 19200. bis zum 22200. Tage.

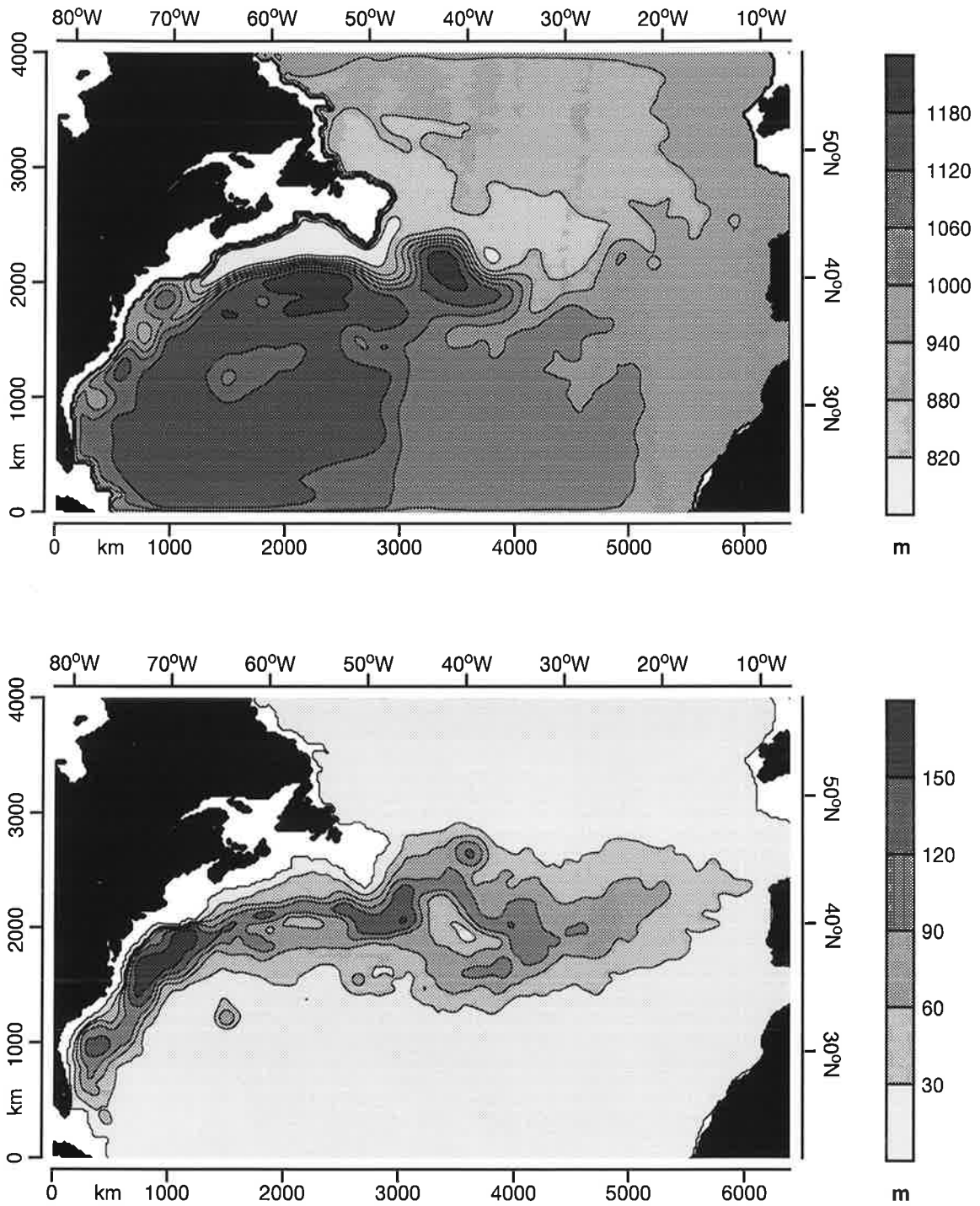
### 3.3 Tiefe der Thermokline und potentielle Energie im zentralen Experiment

Die mittlere Zirkulation und die Wirbelaktivität spiegeln sich ebenfalls in der mittlere Tiefe der Thermokline, die im Zweischichtenmodell der Tiefe der Zwischenfläche entspricht, bzw. in ihrer Varianz wider (siehe Abb. 18). Zyklonale barokline Wirbel sind durch eine Anhebung der Thermokline gegenüber dem mittleren Zustand gekennzeichnet, antizyklonale Wirbel sind mit der umgekehrten Wirkung verbunden. Das heißt, daß die Bewegung solcher Wirbel auch einen Transport von Wärme mit sich bringt, wenn man den Dichtenunterschied zwischen der leichteren Oberschicht und der Bodenschicht als Temperaturunterschied betrachtet. Auf diese Frage wird man im Abschnitt 5.2 zurückkommen. Die mittlere potentielle Energie der nicht stationären Wirbel im Modell läßt sich außerdem aus der Varianz der Tiefe der Zwischenfläche  $\overline{\eta'^2}$  ableiten:

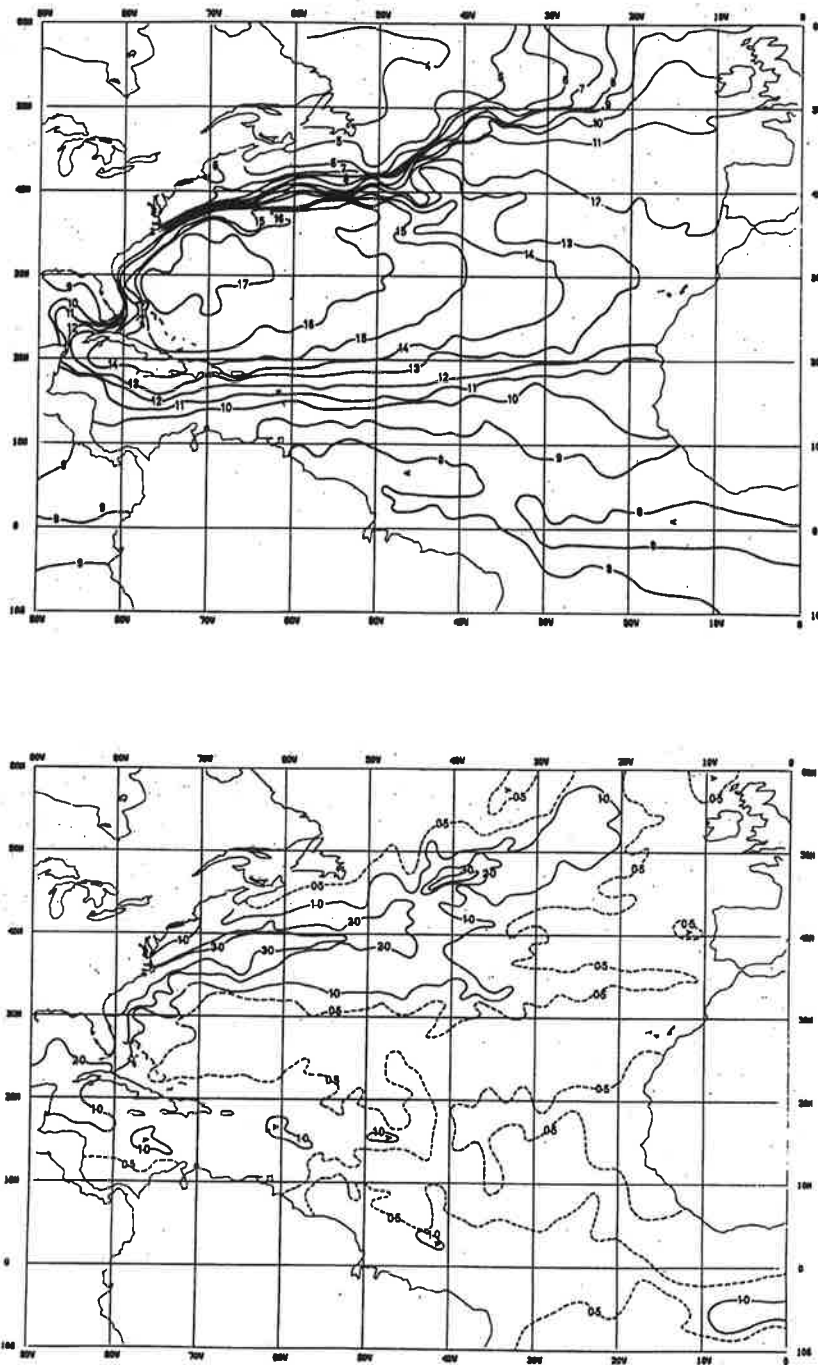
$$\frac{1}{2}g'\overline{\eta'^2} = \frac{f_0^2}{2g'} \cdot \overline{(\psi'_1 - \psi'_2)^2} \quad (\text{GL 33})$$

Die vom Modell simulierte Standardabweichung der Zwischenfläche (über 150 m) deckt sich verhältnismäßig gut mit der von Dantzer (1977) aus Beobachtungsdaten ermittelten Standardabweichung der 15°-Isotherme im Nordatlantik.

Es läßt sich ein direkter Zusammenhang zwischen der Tiefe der Zwischenfläche in einem quasigeostrophischen Modell und der Temperatur in einer bestimmten Tiefe im realen Ozean herstellen. Größere Tiefen im Modell würden in diesem Sinne einer höheren Temperatur gleichkommen. Zum Vergleich mit der hier simulierten Tiefe der Thermokline und deren Standardabweichung werden in Abb. 19 die beobachtete mittlere Temperatur in einer Tiefe von 400 m und deren Standardabweichung im Nordatlantik gezeigt (Emery, 1983). In beiden Fällen besteht eine sehr gute Übereinstimmung bei der zonalen Struktur der Felder. Die nordöstliche Richtung der nordatlantischen Zirkulation östlich der "Grand Banks" von Neufundland wird, wie ebenfalls in den Bildern der mittleren Stromfunktion und der kinetischen Energie der Wirbel beobachtet, verständlicherweise nicht richtig reproduziert. Gründe dafür können die Annahme eines geschlossenen Beckens sein sowie die Vernachlässigung der thermohalinen Zirkulation.



**Abbildung 18:** Mittlere Tiefe der Schichtzwischenfläche (oben) und Standardabweichung der Tiefe der Schichtzwischenfläche (unten) im Modell.



**Abbildung 19:** Mittlere Temperatur (oberes Bild) und Standardabweichung der Temperatur (unteres Bild) in einer Tiefe von 400 m im Nordatlantik aus Emery (1983).

### 3.4 Verteilung der Wasserelemente im Modell

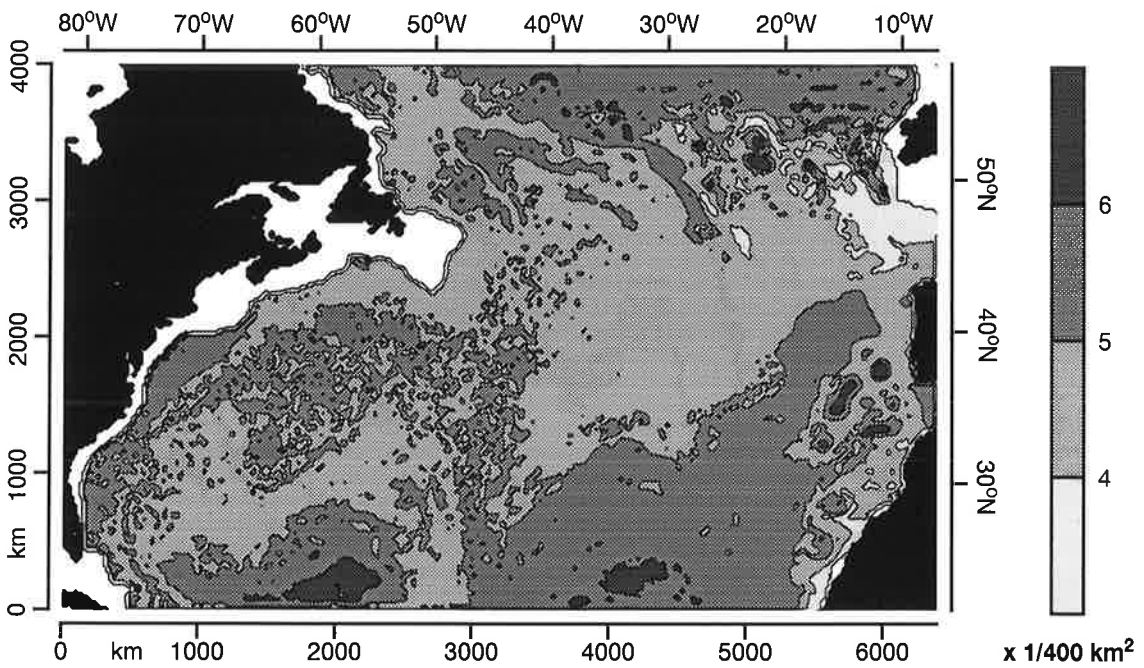
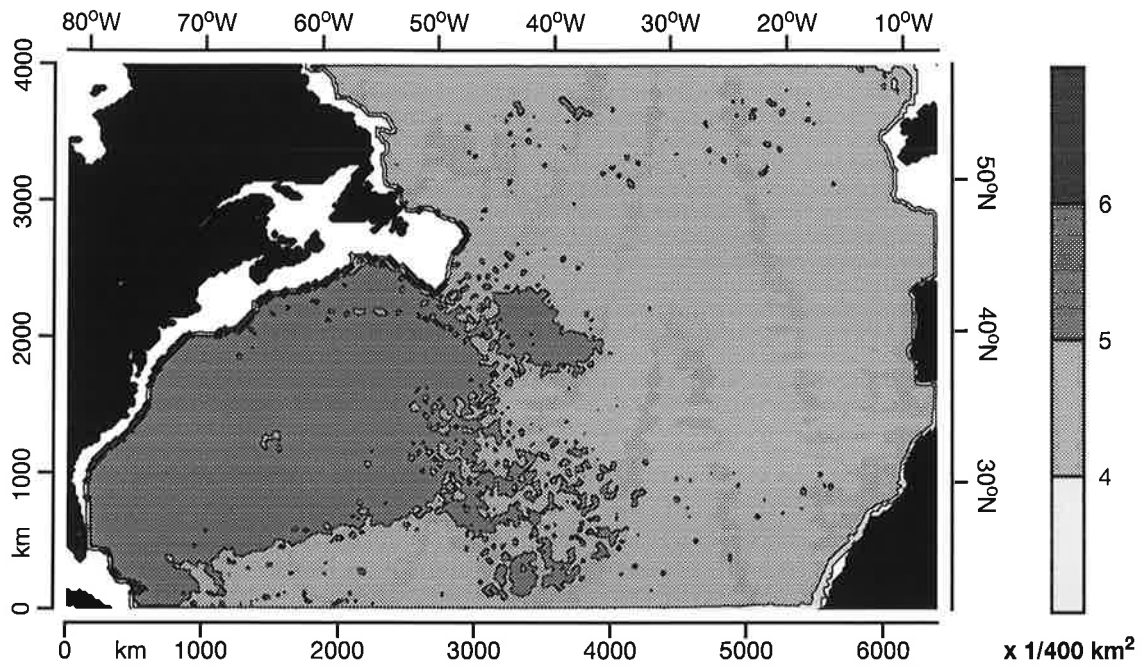
In diesem Kapitel wird erörtert, wie das Modell in einem bestimmten Intervall des Parameters  $\omega$  ein Gleichgewicht in der Energie erreicht und wie dieses Gleichgewicht aussieht. Eine erste Frage, die sich dabei stellt, ist, wie die Wasserelemente im Modell – es handelt sich schließlich um eine finite Zahl von Partikeln – in diesem Zustand verteilt werden, zumal die Berechnung der potentiellen Vorticity in den Gitterpunkten auf der Interpolation der potentiellen Vorticity jedes Partikels beruht. Dieser Punkt ist von praktischem Interesse im Modell und wurde schon im Abschnitt 2.2 angesprochen.

Um eine Antwort auf diese Frage zu geben, wird zunächst in Abb. 20 die mittlere Partikeldichte der letzten 3000 Tage des zentralen Experimentes gezeigt. Das Bild, das sich von der Oberschicht bietet, ist sehr befriedigend, da es keine großen Abweichungen von der anfänglichen Zahl von fünf Partikeln je Gitterzelle, d. h. fünf Partikel pro  $400 \text{ km}^2$ , gibt. Die Dichte bleibt bis auf einen schmalen Streifen am östlichen Rand zwischen 4 und 6 Partikeln je Gitterzelle. Es ist dennoch eine leichte Anhäufung von Wasserelementen im energiereicheren westlichen Teil festzustellen. Die Partikeldichte in der Bodenschicht weist größere Schwankungen auf, als in der Oberschicht. Diese Schwankungen zeigen Ähnlichkeiten mit der Bodentopographie, was verständlich ist, wenn man deren Rolle in der Dynamik der Bodenschicht bedenkt.

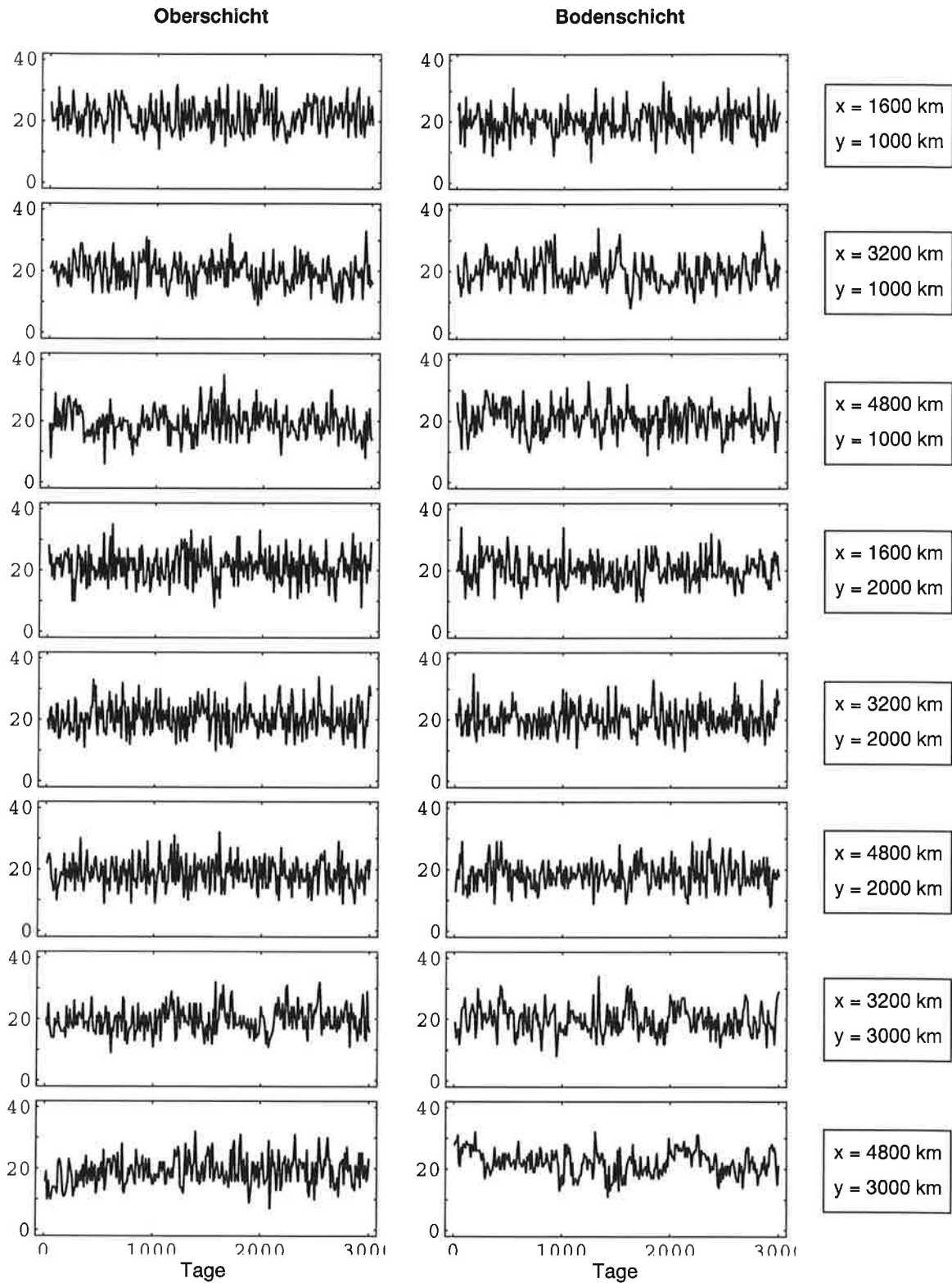
Es bleibt jedoch die Frage, wie ausgeprägt die zeitlichen Schwankungen, d. h. die Varianz, ist. Es erscheint zumindest möglich, daß zeitweise größere Lücken auftreten oder Verschiebungen stattfinden könnten. Um dieser Frage nachzugehen, werden in Abb. 21 die Zeitreihen der Anzahl von Partikeln in beiden Schichten gezeigt, welche im Interpolationsverfahren zur potentiellen Vorticity an acht in gleichmäßigen Abständen verteilten Punkten beitragen. Dabei werden keine Langzeitschwankungen oder Tendenzen bemerkbar. Die Varianz der acht ausgewählten Punkte ist in jeder Schicht vergleichbar.

Zuletzt wird in Abb. 22 die Zahl der Gitterpunkte dargestellt, die keine Partikel in den vier angrenzenden Zellen zu einem bestimmten Zeitpunkt haben (d.h., kein Wasserelement trägt unmittelbar zum Wert der potentiellen Vorticity dieses Punktes bei). Auch hier ergibt sich das Bild einer von größeren Schwankungen gekennzeichneten Bodenschicht. Dennoch bleibt die Zahl dieser Gitterpunkte in beiden Schichten in bezug auf die gesamte Zahl von Gitterpunkten im Modell sehr klein.



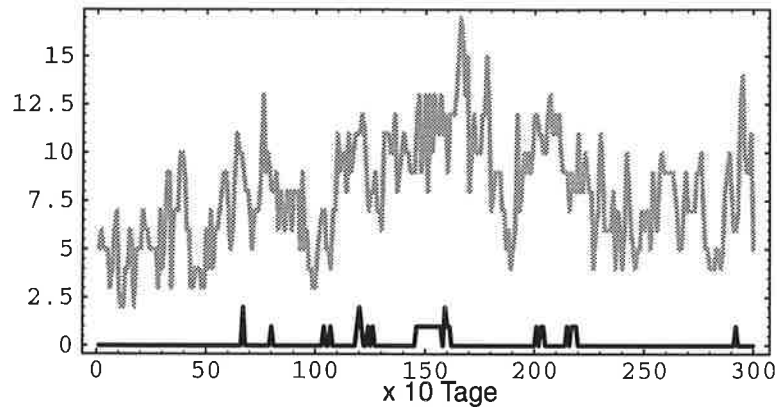


**Abbildung 20:** Mittlere Partikeldichte des zentralen Experimentes in der Oberschicht (oberes Bild) und in der Bodenschicht (unteres Bild).



**Abbildung 21:** Zahl der Partikel, die im Interpolationsverfahren mit der potentiellen Vorticity zu den ausgewählten Gitterpunkten beitragen (Zeitintervall: vom Tag 19200 bis 22200).



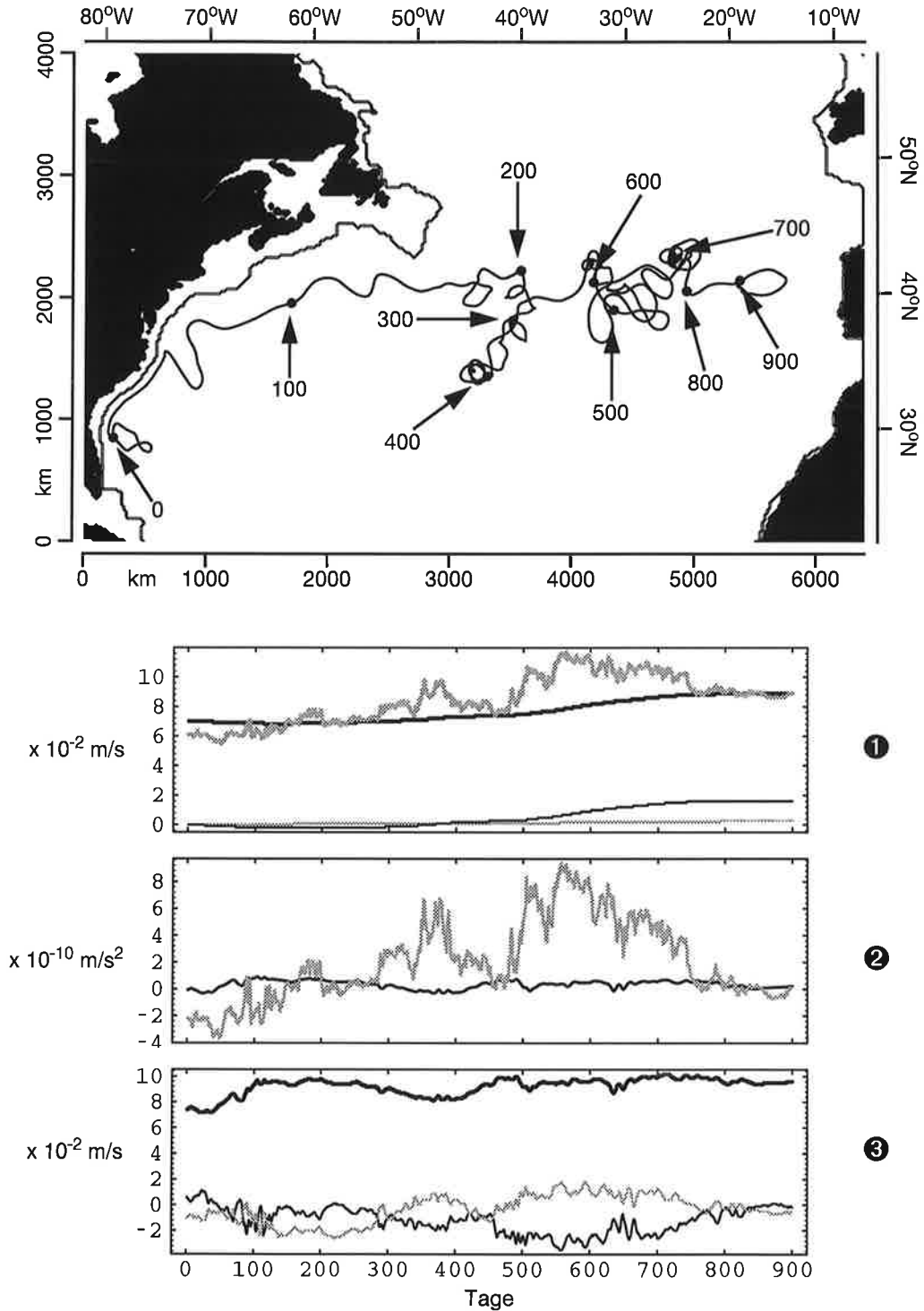


**Abbildung 22:** Zahl der Gitterpunkte ohne Beitrag von Partikeln im Zeitraum 19200-22200 bei der Oberschicht (schwarze Linie) und der Bodenschicht (graue Linie).

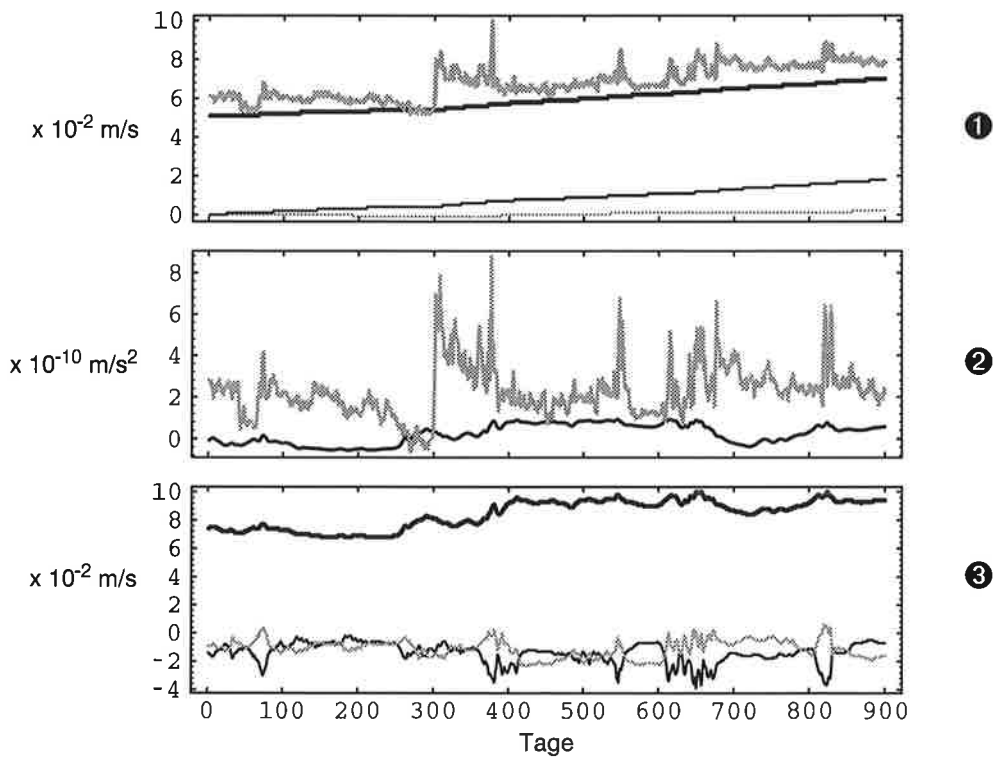
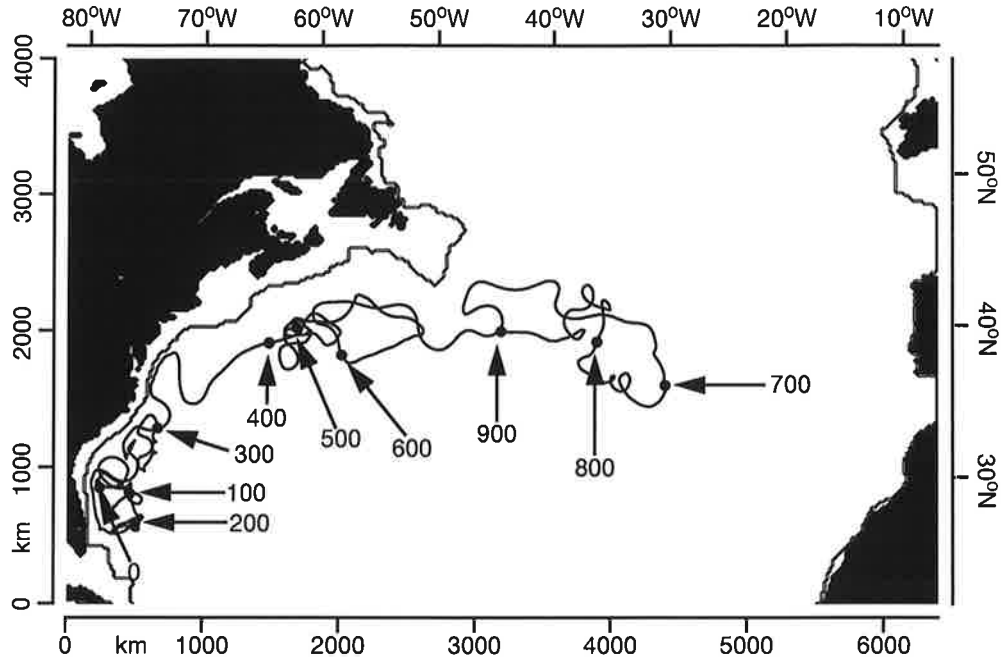
### 3.5 Vorticitybilanz einzelner Wasserelemente

Einen interessanten Punkt in der Beschreibung des Modells stellt die Vorticitybilanz einzelner Wasserelemente dar. Sie ist bei einem herkömmlichen quasigeostrophischen Modell von Lozier und Riser (1989, 1990) und auch aus Beobachtungsdaten des Golfstromes von Bower (1989) behandelt worden. Im hiesigen Modell wird diese Frage nachstehend anhand von vier Beispielen, zwei pro Schicht, diskutiert. Jedes Beispiel, das in Abb. 23a bis 23d zu sehen ist, beschreibt die Trajektorie eines Wasserkörpers in einem Zeitraum von 900 Tagen und die jeweilige Änderung der potentiellen Vorticity aufgrund von Windschub, lateraler Reibung und Bodenreibung. Außerdem wird das Gewicht der einzelnen Komponenten der potentiellen Vorticity, d. h. relativer und planetarer Vorticity, Stretching- und Bodentopographieterm, dargestellt. Es ist interessant zu beobachten, daß die Bahnen der zwei Wasserkörper in der Oberschicht, die anfangs fast die gleiche Position hatten, sehr schnell auseinander driften – ein Zeichen für das turbulente Verhalten des Modells.

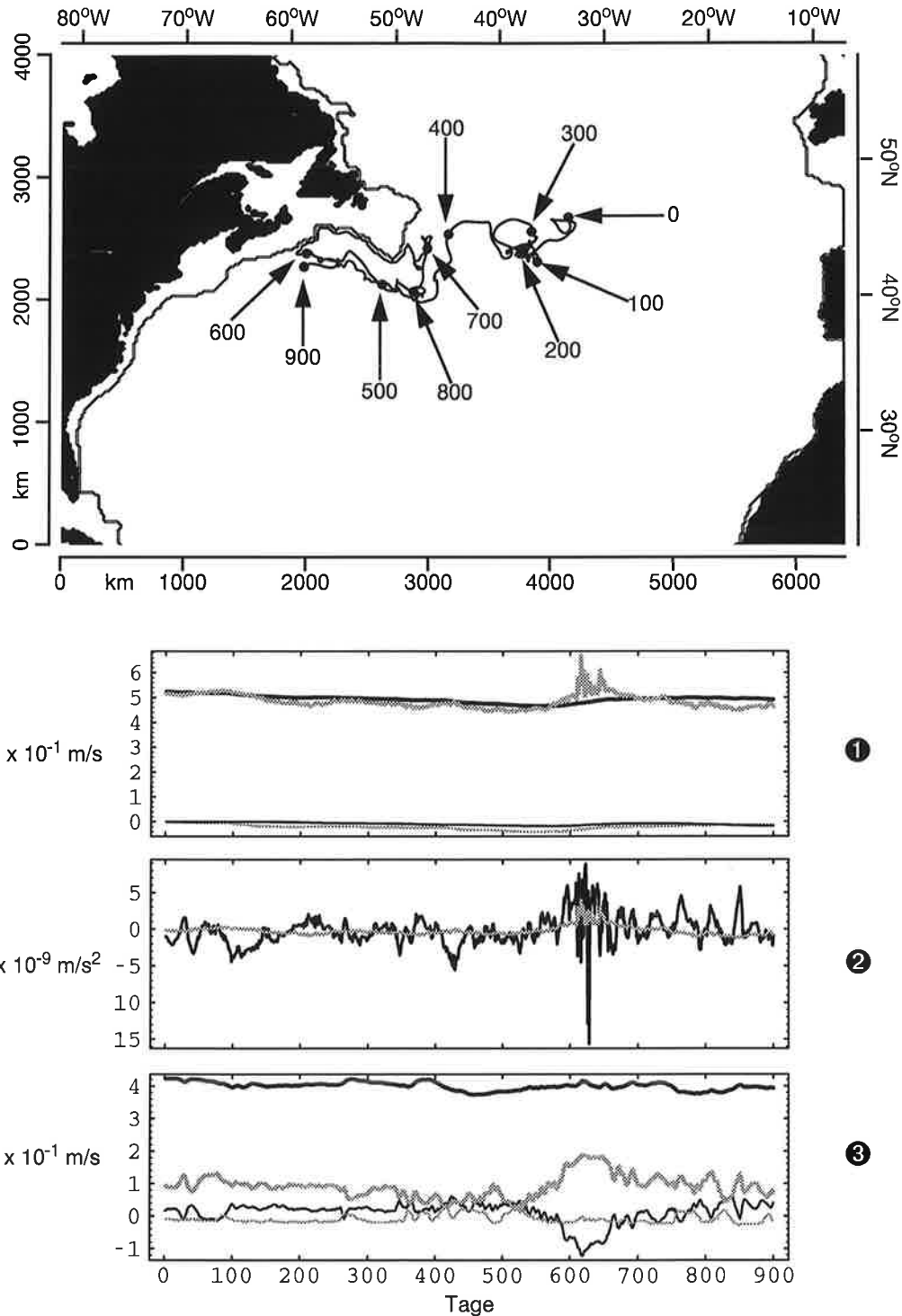
Hervorzuheben ist der Vergleich zwischen der individuellen potentiellen Vorticity eines Wasserelementes im Modell und der potentiellen Vorticity, die dieses Wasserelement in einem Euler'schen Modell besitzen würde, d. h. der von den Gitterpunkten interpolierten potentiellen Vorticity. Der Unterschied zwischen beiden Kurven veranschaulicht die Nichterhaltung von potentieller Vorticity in solchen Modellen, die schon in der Arbeit von Haidvogel (1982) diskutiert wurde. Große Unterschiede weisen darauf hin, daß das Wasserelement sich in diesem Zeitpunkt in einer Umgebung mit entsprechend anderer potentieller Vorticity befindet und sich nur relativ langsam an diese Umgebung anpaßt. Das ist der Grund, warum die laterale Reibung proportional zu der Differenz beider Kurven ist. Die "verspätete" Reaktion der Wasserelemente auf die Umgebung läßt sich in den Bildern erkennen. Die Änderungen der relativen Vorticity werden von den anderen Komponenten bis auf die Änderung der potentiellen Vorticity kompensiert.



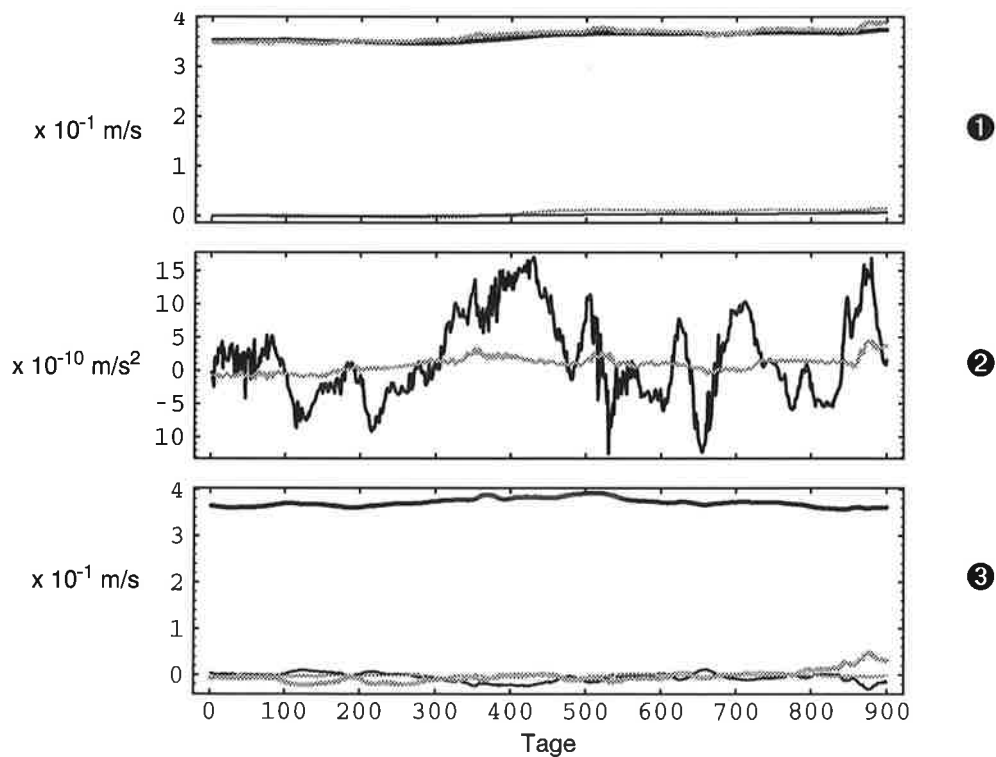
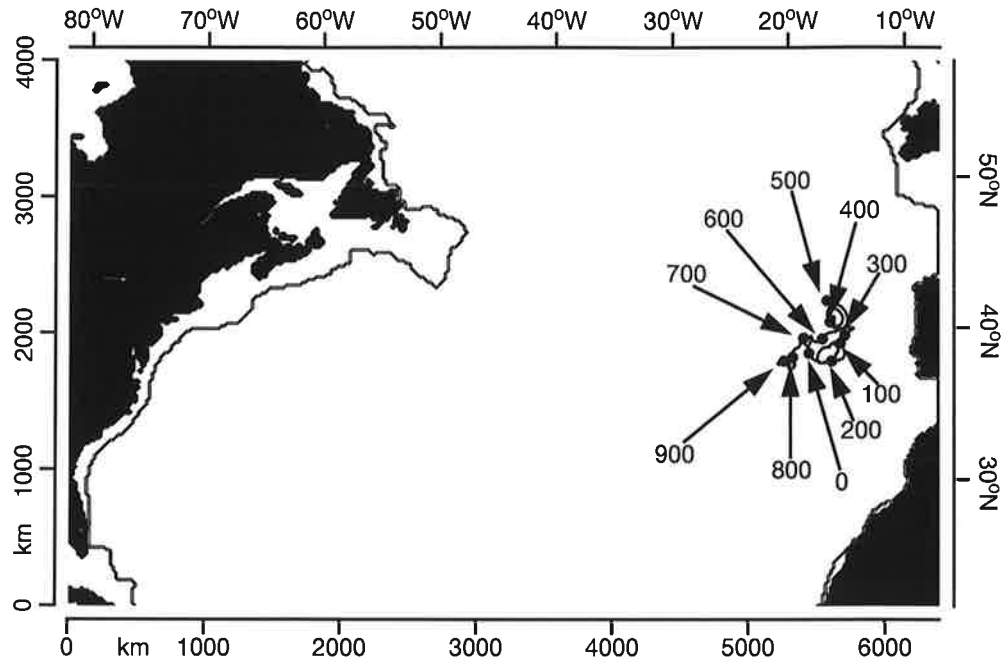
**Abbildung 23a:** Bahn eines Wasserelementes in der Oberschicht in der Periode 1830-19200:  
 ❶ Potentielle Vorticity des Partikels (dick, schwarz), interpolierte potentielle Vorticity (dick, grau), zeitintegrierte Rotation des Windschubes (dünn, grau) und zeitintegrierte laterale Reibung (dünn, schwarz).  
 ❷ Instantane Wirkung des Windschubes (schwarz) und der lateralen Reibung (grau).  
 ❸ Relative Vorticity des Partikels (dünn, schwarz), planetare Vorticity (dick, schwarz) und "Stretching"-Term (dünn, grau).



**Abbildung 23b:** Bahn eines Wasserelementes in der Oberschicht in der Periode 1830-19200:  
 ❶ Potentielle Vorticity des Partikels (dick, schwarz), interpolierte potentielle Vorticity (dick, grau), zeitintegrierte Rotation des Windschubes (dünn, grau) und zeitintegrierte laterale Reibung (dünn, schwarz).  
 ❷ Instantane Wirkung des Windschubes (schwarz) und der lateralen Reibung (grau).  
 ❸ Relative Vorticity des Partikels (dünn, schwarz), planetare Vorticity (dick, schwarz) und "Stretching"-Term (dünn, grau).



**Abbildung 23c:** Bahn eines Wasserelementes in der Bodenschicht in der Periode 18300-19200:  
 ① Potentielle Vorticity des Partikels (dick, schwarz), interpolierte potentielle Vorticity (dick, grau),  
 zeitintegrierte Bodenreibung (dünn, grau) und zeitintegrierte laterale Reibung (dünn, schwarz).  
 ② Instantane Wirkung der Bodenreibung (schwarz) und der lateralen Reibung (grau).  
 ③ Relative Vorticity des Partikels (dünn, schwarz), planetare Vorticity (dick, schwarz), "Stretching"-  
 Term (dünn, grau) und Term der Bodentopographie (dick, grau).



**Abbildung 23d:** Bahn eines Wasserelementes in der Bodenschicht in der Periode 18300-19200:  
 ① Potentielle Vorticity des Partikels (dick, schwarz), interpolierte potentielle Vorticity (dick, grau), zeitintegrierte Bodenreibung (dünn, grau) und zeitintegrierte laterale Reibung (dünn, schwarz).  
 ② Instantane Wirkung der Bodenreibung (schwarz) und der lateralen Reibung (grau).  
 ③ Relative Vorticity des Partikels (dünn, schwarz), planetare Vorticity (dick, schwarz), "Stretching"-Term (dünn, grau) und Term der Bodentopographie (dick, grau).



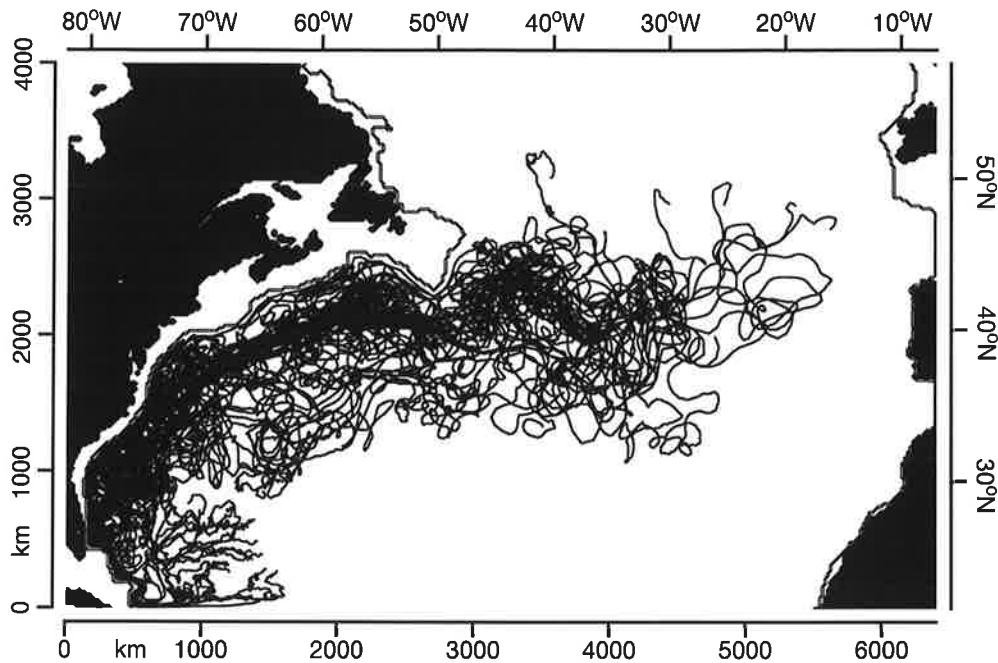
---

# Statistische Turbulenzeigenschaften und Parameterisierung quasigeostrophischer Wirbel

---

In diesem Kapitel wird versucht, der Frage nachzugehen, welchen Einfluß die quasigeostrophische Turbulenz auf die mittlere Verteilung von passiven und aktiven Tracern hat und folglich, ob und wie sie sich parametrisieren läßt. Dies ist insbesondere von Interesse, wenn die Wirkung der mesoskaligen Turbulenz in nicht-wirbelauflösenden Modellen als parametrisierte Diffusion (sogenannte "Wirbeldiffusion") berücksichtigt werden soll (Neelin und Marotzke, 1994; Danabasoglu et al., 1994).

Der turbulente Charakter der Zirkulation läßt sich sehr deutlich aus Bahnen von Partikelensembles ablesen. Als Beispiel dafür sind in Abb. 24 die im zentralen Experiment vom Modell simulierten Trajektorien von 40 Wasserkörpern in der Oberschicht über einen Zeitraum von 900 Tagen dargestellt. Diese Wasserkörper befinden sich anfänglich in der Nähe der nordamerikanischen Küste. Dabei läßt sich die Bedeutung der Wirbeldiffusion in der ozeanischen Zirkulation dadurch zeigen, daß man die Wasserelemente nicht nur als Träger potentieller Vorticity betrachtet, sondern auch als Träger jeder möglichen Quasi-Erhaltungsgröße wie Salzgehalt, Temperatur, chemische Tracer oder andere dynamische Größen wie z. B. Impuls. Trotz des sehr chaotischen Bildes ist aber auch der mittlere Verlauf des Golfstroms leicht erkennbar. Sehr ähnliche Bilder sind auch im Studium der ozeanischen Zirkulation mittels freischwimmender Bojen anzutreffen (s. Richardson 1981, 1991, 1993), wie bereits in Abb. 2 gezeigt wurde. Das Ziel in diesem Kapitel ist den mit den Partikelensembles verbundenen Transport als Summe von zwei gleichzeitig auftretenden Effekten zu betrachten, nämlich Advektion durch die mittlere Zirkulation und Wirbeldiffusion. Letzteres wird mittels der Lagrange'schen Statistik von Wasserensembles untersucht (s. Davis, 1983 und 1987).



**Abbildung 24:** "Spaghetti-Diagramm" mit den in 900 Tagen zurückgelegten Bahnen von 40 Wasserelementen in der Oberschicht.

#### 4.1 Grundlagen und Beschreibung des Experimentes

Eine geläufige Methode zur Beschreibung des Transports von Tracern sowohl in der Meteorologie als auch in der Ozeanographie stellt die Untersuchung der Bahnen einzelner Partikel dar. Dies beruht auf der Tatsache, daß die physikalische Erhaltung von irgendwelchen Eigenschaften ein Lagrange'scher Begriff ist. Die Benutzung von Methoden, die die Position eines Wasserelementes im Ozean im Laufe der Zeit erkennbar machen, ist daher ein guter Weg, um die Wirbel und deren Rolle in der Zirkulation zu beobachten und zu untersuchen. Die Partikelausbreitung veranschaulicht die Art und Weise, wie die Erhaltungsgrößen in der Strömung vermischt werden. Dies ist im Ozean mittels verschiedener Typen von Wasserbojen (Oberflächenbojen, SOFAR-Bojen, RAFOS-Bojen) gemacht worden (s. Bower, 1989; Bower und Rossby, 1989; Colin de Verdiere, 1983; Freeland et al., 1975; Krauss und Böning, 1987; Krauss und Meincke, 1982; Owens, 1984; Richardson, 1981 und 1991; Riser und Rossby, 1983; Rossby et al., 1983 und 1985; Shaw und Rossby, 1984). Viel einfacher sind solche Studien mit Hilfe von Computermodellen zu realisieren, bei denen zusätzlich die Bahnen von passiven Tracern simuliert werden (s. Babiano et al., 1987; Böning und Cox, 1988; Figueroa und Olson, 1994; Figueroa, 1994; Hua, 1994; Lozier und Riser, 1989 und 1990; Lozier und Vercovici, 1992; Peskin, 1974). Das hier verwendete Modell hat gegenüber diesen herkömmlichen Euler'schen Modellen den Vorteil, daß die Lagrange'sche Information von Anfang an vorhanden ist. Darüber hinaus ist die Lagrange'sche Analyse von einem auf Euler'schen



Koordinaten basierendes Modell mit dem "Aliasing-Effekt" bei der Behandlung der nichtlinearen Termen behaftet, der zu Fehlern bei der Abschätzung der Partikelbahnen und der Partikelvorticity führt (s. Haidvogel, 1982).

Das folgende Experiment ist in enger Anlehnung an die Arbeiten von Böning und Cox (1988), Figueroa und Olson (1994) (Auswertung von Daten aus Modellexperimenten) und Krauss und Böning (1987) (Auswertung von Beobachtungsdaten) entworfen und durchgeführt worden. Insbesondere wird eine spätere Gegenüberstellung der hier gewonnenen Ergebnisse mit Ergebnissen aus Beobachtungsdaten angestrebt.

Die Basis in all den vorherstehenden Arbeiten bildet die klassische Diffusionstheorie von Taylor (1921), die eine Verbindung zwischen der Diffusion in einer turbulenten Strömung und der Autokorrelationsfunktion  $R$  der Lagrange'schen Geschwindigkeitsabweichungen von der mittleren Advektion eines Partikelensembles herstellt. Im folgenden bedeuten die eckigen Klammern Ensemblemittelwerte:

$$R_{ij}(\tau) = \frac{1}{\left[ \overline{u_i'^2 u_j'^2} \right]^{1/2}} \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i'(t, p) u_j'(t + \tau, p) dt \right\rangle \quad (\text{GL 34})$$

Die Abweichung der Geschwindigkeitskomponente  $u_i'$  der Partikel  $p$  ist:

$$u_i' = u_i - \bar{u}_i \quad (\text{GL 35})$$

wobei die Komponente  $i$  der mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}_i$  durch

$$\bar{u}_i = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i(t, p) dt \right\rangle \quad (\text{GL 36})$$

gegeben ist. Die Komponente  $i$  der Geschwindigkeitsvarianz  $\overline{u_i'^2}$  ist:

$$\overline{u_i'^2} = \left\langle \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_i'(t, p) u_i'(t, p) dt \right\rangle \quad (\text{GL 37})$$

Zwei wichtige Größen, die hilfreich sind, um die Vermischungsprozesse zu charakterisieren, sind die Lagrange'sche integrale Zeitskala  $T_i$ , und die Lagrange'sche Raumskala  $L_i$ :

$$\begin{aligned} T_i &= \int_0^\infty R_{ii}(\tau) d\tau \\ L_i &= \left[ \overline{u_i'^2} \right]^{1/2} T_i \end{aligned} \quad (\text{GL 38})$$

Sie sind Maße der Dekorrelationszeit bzw. der Dekorrelationslänge.

Die Partikelausbreitung läßt sich mittels der Kovarianzmatrix  $D$  beschreiben:

$$D_{ij}(\tau) = \langle r'_i(\tau, p) r'_j(\tau, p) \rangle \quad (\text{GL 39})$$

wobei  $r'_i = r_i - \langle r_i \rangle$  die Versetzung eines Partikels relativ zur Versetzung des Schwerpunktes des Ensembles darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, daß die Statistik stationär ist, so daß, wenn die Bahn eines Wasserelementes vom Vektor  $\mathbf{x}(t, p)$  bestimmt wird, der Versetzungsvektor in der Periode  $\tau$  nach  $t$  folgender ist:

$$\mathbf{r}(\tau, p) = \mathbf{x}(t + \tau, p) - \mathbf{x}(t, p) \quad (\text{GL 40})$$

wobei das Ensemble aus Partikeln mit verschiedenen Anfangszeiten  $t$  bestehen kann.

Die Lagrange'sche Diffusivität  $K$  ist definiert durch die zeitliche Änderung der Partikel- ausbreitung:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \frac{dD_{ij}}{d\tau} \quad (\text{GL 41})$$

Unter der Voraussetzung von stationärer und homogener Turbulenz besagt die Taylor'sche Theorie, daß

$$D_{ij}(\tau) = \left[ \overline{u_i'^2 u_j'^2} \right]^{1/2} \int_0^\tau (\tau - s) [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)] ds \quad (\text{GL 42})$$

Da  $R_{ii}(\tau = 0) = 1$  und  $R_{ii}(\tau \gg T_i) \rightarrow 0$ , kann man zwei extreme Phasen bei der Partikel- ausbreitung unterscheiden:

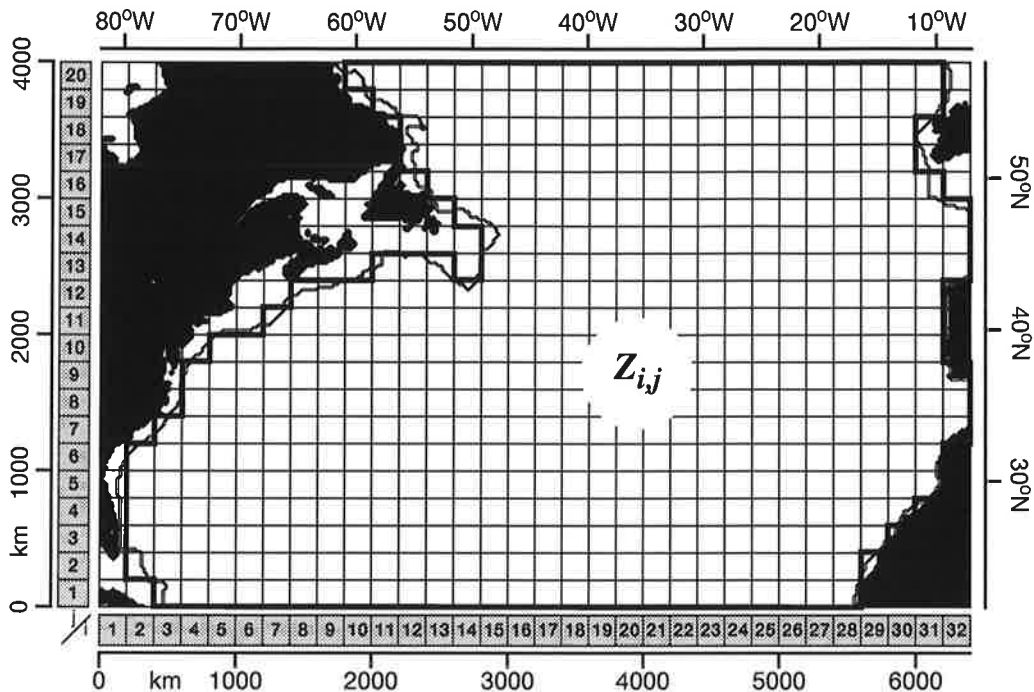
- die anfängliche Ausbreitungsperiode:  $D_{ii}(\tau \ll T_i) = \overline{u_i'^2} \tau^2$ ,
- und den sogenannten "Random-Walk"-Zustand, gekennzeichnet durch lineare zeitliche Ausbreitung:  $D_{ii}(\tau \gg T_i) = 2\overline{u_i'^2} T_i \tau$ , d. h., die Diffusivität  $K$  erreicht einen konstanten Wert.

Die besondere Bedeutung der Theorie besteht darin, daß der durch das Wirbelfeld verursachte Fluß einer Erhaltungsgröße, die sogenannte "Wirbeldiffusion", in erster Näherung direkt proportional zum Lagrange'schen Diffusivitätskoeffizienten  $K$  und dem mittleren Gradienten der berücksichtigten Größe ist (Daher kommt der verwendete Name "Gradienttransportmodell"):

$$\overline{u_i' \theta'} = -K_{ij} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + O(\gamma) \quad (\text{GL 43})$$

wobei  $\gamma = \frac{\text{Lagrange'sche Raumskala}}{\text{Raumskala der mittleren Zirkulation}} \ll 1$

In den Arbeiten von Rhines und Holland (1979) und Rhines und Young (1982) ist eine Diskussion zu finden, die sich auf den Wirbeltransport von potentieller Vorticity (d. h., eines

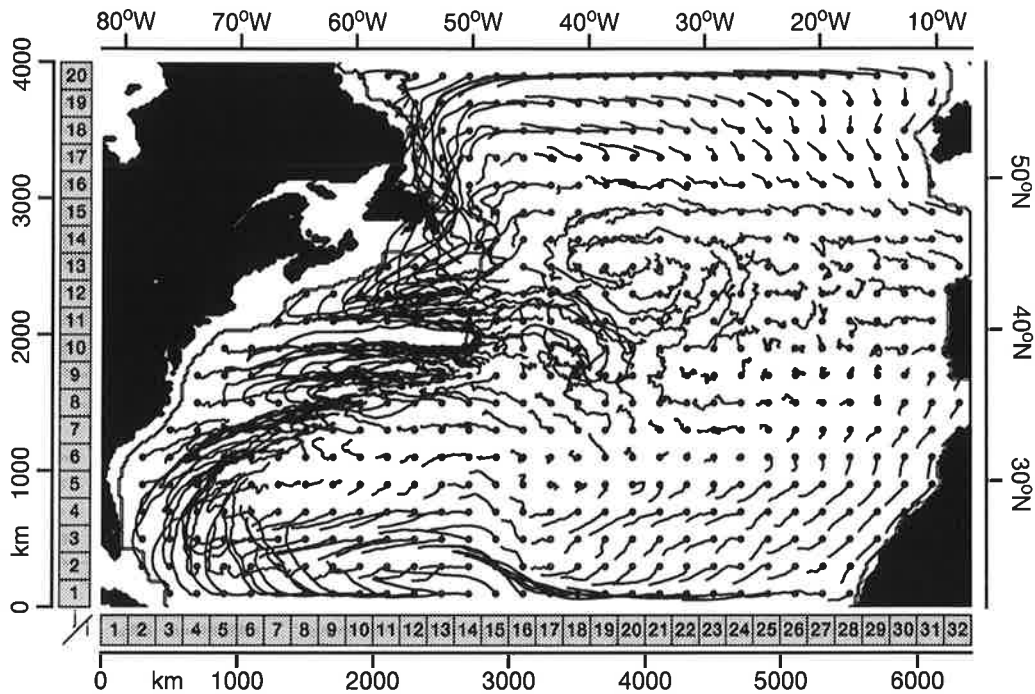


**Abbildung 25:** Aufteilung der Oberschicht in Regionen.

dynamisch aktiven Tracern) konzentriert. Die physikalische Rolle des Flusses von potentieller Vorticity wird im Kapitel 5 ausführlicher diskutiert. Davis (1983, 1987) behandelt in seinen Arbeiten andererseits den Transport von passiven Tracern. Eine sehr detaillierte Diskussion über die Einschränkungen und Grenzen der sogenannten Gradienttransportmodelle liefert die Arbeit von Corrsin (1974). Solche Grenzen liegen im wesentlichen bei der Annahme, daß es sich um eine homogene und stationäre Turbulenz handelt. Die Anwendung dieser Modelle bei starken Strömungen wie dem Golfstrom in der Nähe des ostwärtigen Jets und der westlichen Küstenströmung, wo solche Voraussetzungen offenbar nicht erfüllt werden, ist daher zweifelhaft. Trotzdem liefert die Partikelstatistik auch in diesen Regionen wichtige Informationen, die zu einer besseren Parameterisierung der Diffusion in nicht wirbelaufösenden Modellen verhelfen können, bei denen gemeinhin ein raumunabhängiger Diffusionskoeffizient angenommen wird.

Das mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Modell durchgeführte Experiment hat folgende Charakteristika:

- Das Integrationsgebiet wird in 492, 200 km x 200 km großen Regionen  $Z_{i,j}$  (siehe Abb. 25) aufgeteilt, bei denen mehr als 30 % der enthaltenen Gitterpunkte Wasserpunkte sind.



**Abbildung 26:** Schwerpunktversetzung in 300 Tagen. Die Punkte markieren die Anfangspositionen der Ensemble.

- In einem Zeitraum von 2400 Tagen ab dem Integrationstag 19200 werden alle 300 Tage 25 Wasserelemente in der Oberschicht in jeder Region per Zufall herausgesucht und ihre täglichen Positions- und Geschwindigkeitsdaten für die folgenden 300 Tage gespeichert. Das heißt, daß die Daten von 12300 Wasserelementen (bei einer Gesamtzahl von 241555) gleichzeitig gespeichert werden müssen. Das ergibt ein Partikelensemble von insgesamt 200 Wasserelementen für jede Region mit einer Ausbreitungsperiode von 300 Tagen. Die Informationsmenge übertrifft somit bei weitem die von Beobachtungsdaten und auch die von vergleichbaren Modellstudien.

Es werden die Annahmen gemacht, daß jedes Ensemble repräsentativ für die Turbulenz der entsprechenden Quellenregion sei, und daß die Turbulenz, die die Ausbreitung der Wasserelemente bewirkt, homogen und stationär in jedem Ensemble sei. Solche Bedingungen dürften besonders für jetnahe Regionen nicht gegeben sein, wo die Partikel durch die mittlere Zirkulation weit hinaus advehiert werden. Das läßt sich in Abb. 26 erkennen, wo die in den 300 Tagen zurückgelegten Bahnen der Schwerpunkte jedes Ensembles  $\langle r(\tau, p) \rangle$  dargestellt sind. Dabei ist die Mittelungsprozedur zu beachten, die es ermöglicht, daß sich der Schwerpunkt von bestimmten Ensembles, z. B. in der Nähe der "Grand Banks" von Neufundland, zeitweise

über Land befindet. Generell gibt es eine gute Übereinstimmung mit der mittleren Zirkulation (s. zum Vergleich die mittlere Stromfunktion in Abb. 13a). Man kann z. B. auch in der Nähe des Jets im subtropischen Bereich, wo die vom Jet getrennten Wirbel in Richtung Westen wandern, gut die westwärtige Rezirkulation erkennen.

Die charakteristische Partikelausbreitung einiger ausgewählter Ensemble wird mittels der Matrix  $D^{1/2}$  nach 50, 100, 150 und 200 Tagen in Abb. 27a und 27b gezeigt. Die Achsen der abgebildeten Ellipsen entsprechen den Hauptachsen und Eigenwerten der Matrix. Im allgemeinen ist eine ausgeprägte Anisotropie entlang der Ränder und in Ost-West-Richtung in der Nähe des Jets zu beobachten, wo die Gradienten der mittleren potentiellen Vorticity (siehe Abb. 37 im nächsten Kapitel) und die Scherung des mittleren Geschwindigkeitsfeldes (siehe Abb. 13a) am größten sind. Zum Vergleich wird in Abb. 28 ein ähnliches Bild aus der Arbeit von Krauss und Böning (1987) gezeigt, in welcher die beobachtete Ausbreitung von Oberflächenbojen im zentralen und östlichen Nordatlantik in einer Periode von 5 Monaten untersucht wurde.

Zuletzt ist kurz der Grund zu erwähnen, warum dieses Experiment nur für die Oberschicht des Modells realisiert worden ist: Die Tiefzirkulation ist in diesem Zweischichtenmodell nicht gut aufgelöst. Die Strömung in der Bodenschicht ist in diesem Modell sehr von der Topographie beeinflusst und kann nicht in der Lage sein, ein reales NADW ("North-Atlantic-Deep-Water") zu reproduzieren. Die Anisotropie von Partikelensembeln in dieser Schicht ist erheblich größer als in der Oberflächenschicht. Außerdem wird das NADW von der thermohalinen Zirkulation beeinflusst, die in diesem Modell nicht simuliert wird. Darüber hinaus sind ähnliche auf Beobachtungsdaten beruhende Arbeiten vorzugsweise mit der oberen Zirkulation befaßt, wo die meisten Lagrange'schen Daten verfügbar sind.

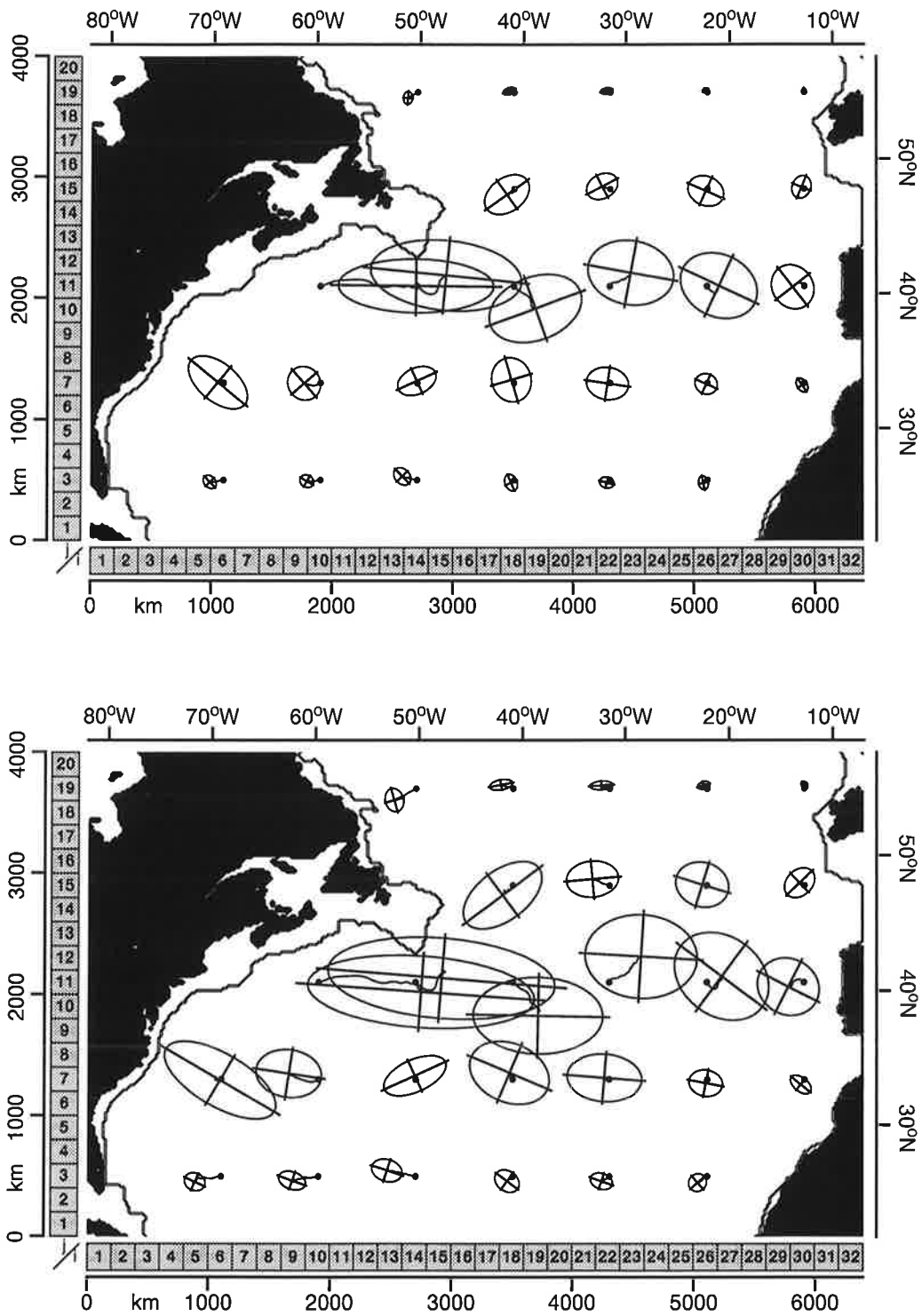


Abbildung 27a: Darstellung der Kovarianzmatrix  $D^{1/2}$  nach 50 Tagen (oberes Bild) und 100 Tagen (unteres Bild).

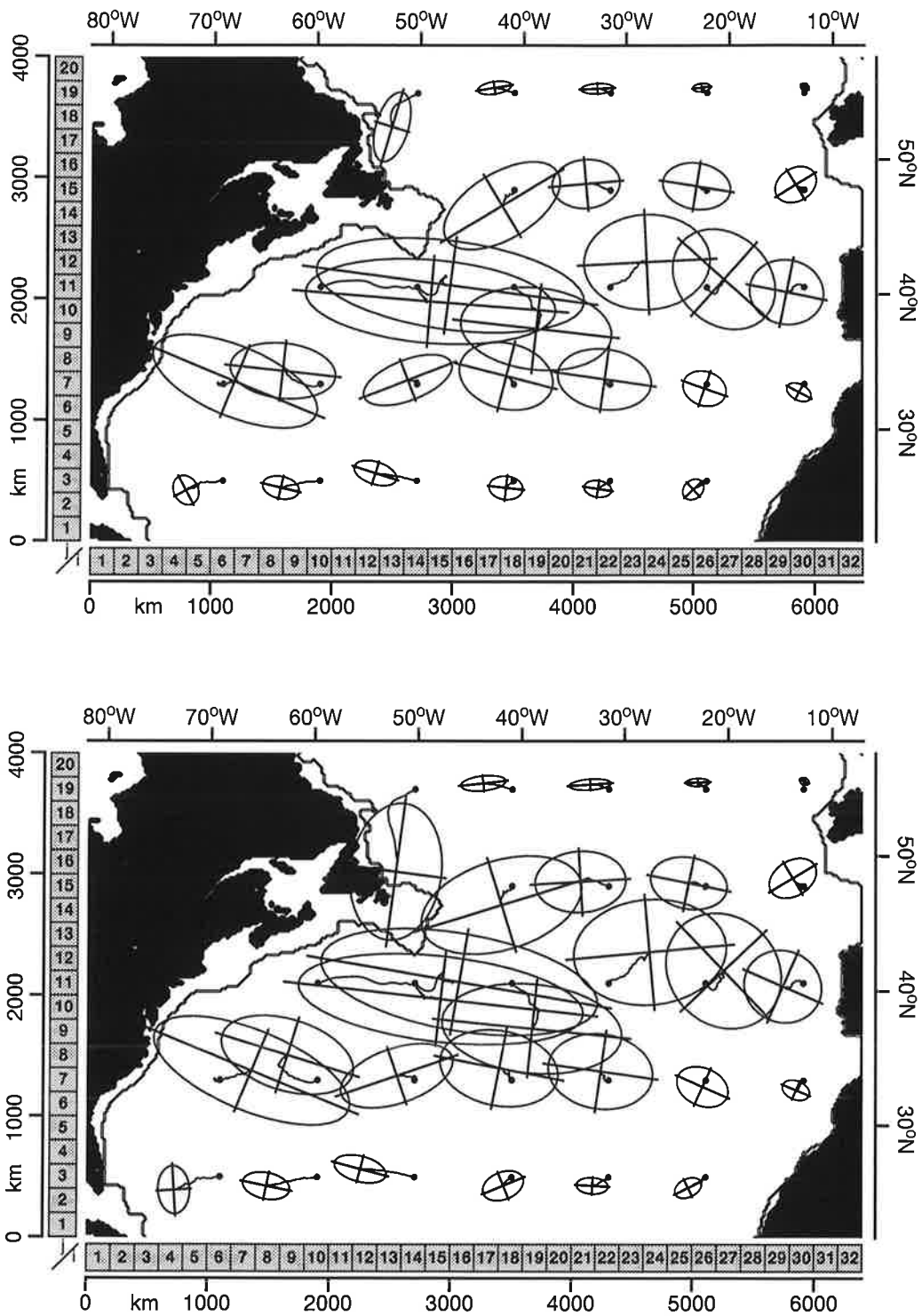


Abbildung 27b: Darstellung der Kovarianzmatrix  $D^{1/2}$  nach 150 Tagen (oberes Bild) und 200 Tagen (unteres Bild).

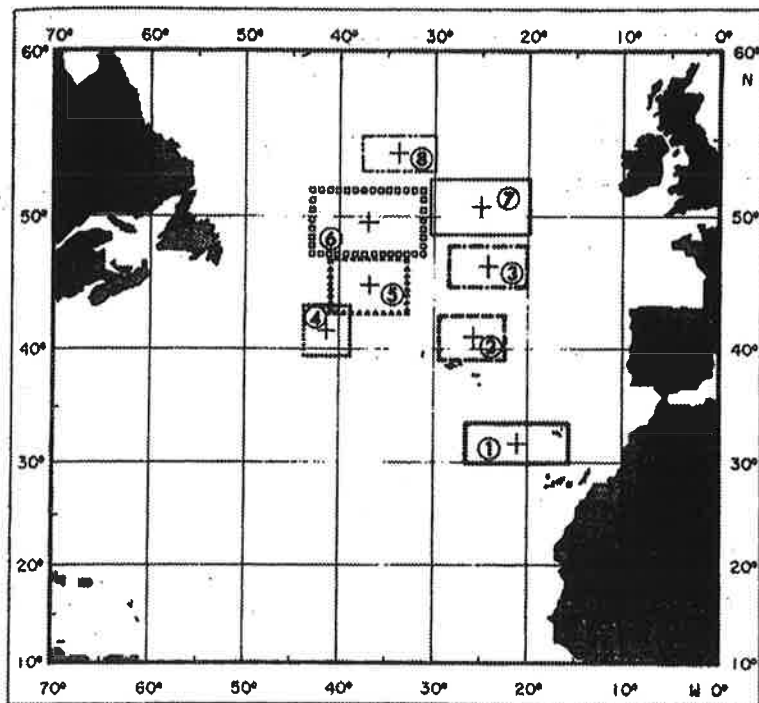


Abbildung 28: Beobachtete Standardabweichung der Partikelausbreitung in einer Periode von 5 Monaten von acht Ensembles im zentralen Nordatlantik (aus Krauss und Böning, 1987).

## 4.2 Lagrange'sche Korrelationen

Da die Geschwindigkeitsfunktionen in jedem Ensemble nur als endliche und diskrete Zeitreihen in diesem Experiment verfügbar sind ( $u_i(\tau, p)$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, 300$  und  $p = 1, 2, \dots, 200$ ), muß man Gebrauch von einem Schätzer der Autokorrelationsfunktion (GL 34) machen. Der hier angewandte Schätzer der Autokovarianz ist im Buch von Jenkins und Watts (1968) zu finden (s. auch Press et al., 1986) und sieht folgendermaßen aus (im folgenden  $N = 300$ ):

$$C_{ij}(\tau) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-\tau} u_i'(t, p) u_j'(t + \tau, p) \right\rangle \quad (\text{GL 44})$$

wobei die Schätzer der mittleren Geschwindigkeit,  $\bar{u}_i$ , und der Geschwindigkeitsvarianz,  $\overline{u_i'^2}$ , jedes Ensembles sind:

$$\bar{u}_i = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_i(t, p) \right\rangle \quad (\text{GL 45})$$

$$\overline{u_i'^2} = C_{ii}(0)$$



Schließlich ist der Schätzer der Autokorrelationsmatrix:

$$R_{ij}(\tau) = \frac{C_{ij}(\tau)}{(C_{ii}(0) C_{jj}(0))^{1/2}} \quad (\text{GL 46})$$

In Abb. 29a und 29b sind die diagonalen Komponenten der Autokorrelationsmatrix  $R$  der 28 ausgewählten Ensemble dargestellt, deren Partikelausbreitungen in Abb. 27a und 27b bereits gezeigt wurden. Die nicht-diagonalen Elemente der Autokorrelationsmatrix, die Aufschluß über die Abweichung der Hauptachsen von den X-Y-Modellachsen geben, wie in Abb 27a und 27b bei manchen Ensembles zu beobachten war, werden hier nicht gezeigt. Solche Elemente sollten bei der Parameterisierung der Wirbeldiffusion in nicht wirbelauflösenden Modellen (s. GL 43) nicht vernachlässigt werden (Armi und Haidvogel, 1982; Figueroa und Olson, 1994; Figueroa, 1994).

In Tab. 4 sind dementsprechend die Werte der Geschwindigkeitsvarianz, die ein Maß für die kinetische Energie der Turbulenz in einem Ensemble ist, und die Werte der Lagrange'schen integralen Zeitskala bzw. Raumskala aufgelistet.

Hervorzuheben sind die Lagrange'schen Korrelationen der Ensemble, die entlang der nördlichen und südlichen Ränder auftreten. Die Lagrange'schen Korrelationen in diesen Regionen sind durch eine sehr lange Abklingzeit (integrale Zeitskala) in der zonalen Richtung und durch Oszillationen (s.  $Z_{22,3}$ ,  $Z_{30,7}$ ,  $Z_{26,19}$  und  $Z_{30,19}$ ) gekennzeichnet, die durch das sehr niedrige Energieniveau dieser Ensemble erklärt werden können.

Im Vergleich mit den in der Arbeit von Krauss und Böning (1987) gezeigten Ensembles 2 bis 8 (siehe Tab. 4 und beachte auch die Ensemble im zentralen Nordatlantik  $Z_{18,7}$ ,  $Z_{22,7}$ ,  $Z_{26,7}$ ,  $Z_{18,11}$ ,  $Z_{22,11}$ ,  $Z_{26,11}$ ,  $Z_{18,15}$ ,  $Z_{22,15}$  und  $Z_{26,15}$ ) sind die Lagrange'schen Zeit- und Raumskalen sehr ähnlich. Es gibt jedoch eine größere Anisotropie zwischen den zonalen und den meridionalen Werten in den hier abgeleiteten Ergebnissen. Die Lagrange'sche kinetische Energie des Wirbelfeldes ist hier generell leicht unterschätzt, besonders in den hier aufgeführten nördlicheren Ensembles im Vergleich zu den Ensembles 6 und 7 von Krauss und Böning (1987).

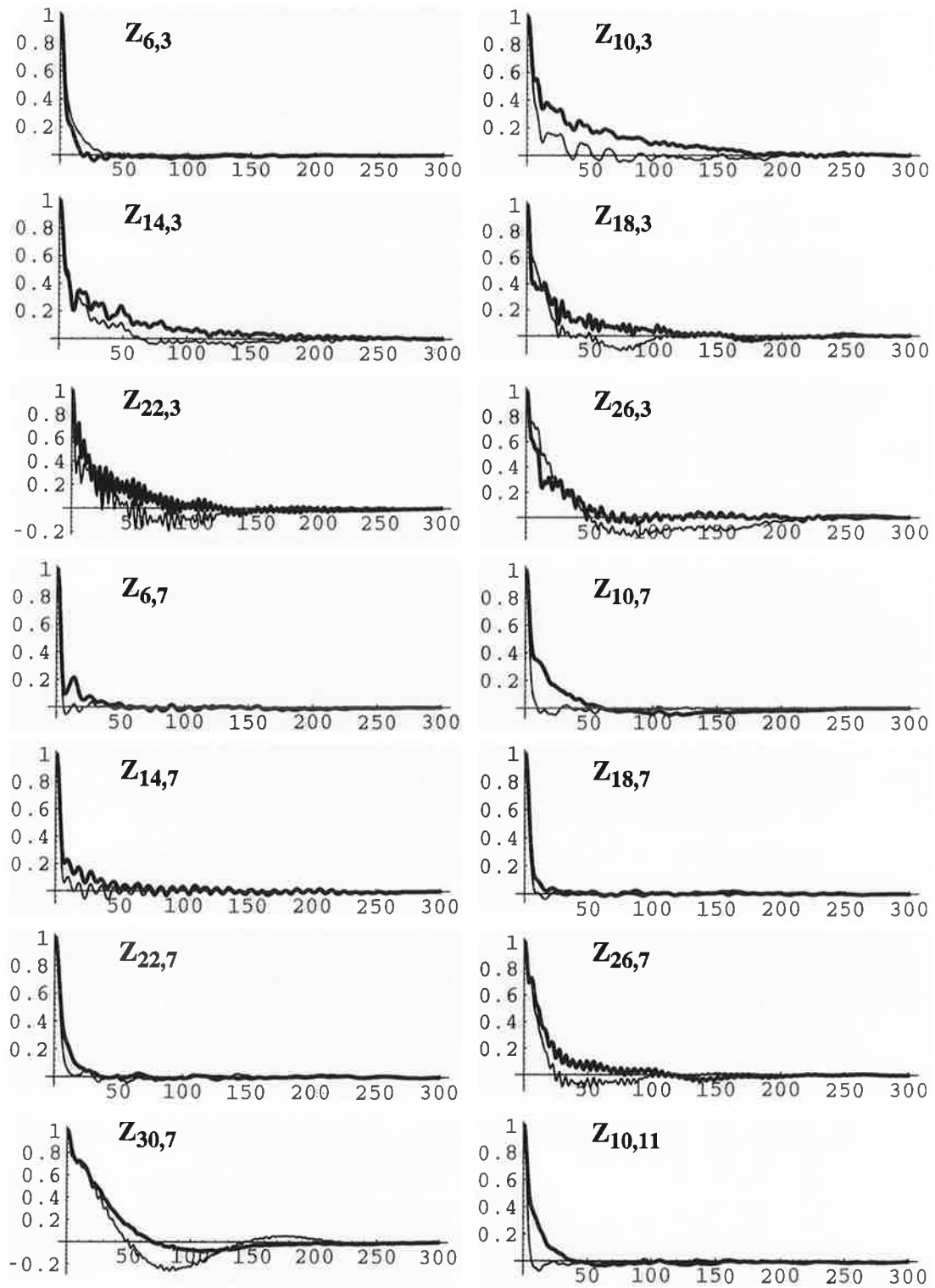


Abbildung 29a: Autokorrelationsfunktion einiger ausgewählter Ensemble:  $R_{xx}$  (dicke Linie),  $R_{yy}$  (dünne Linie).

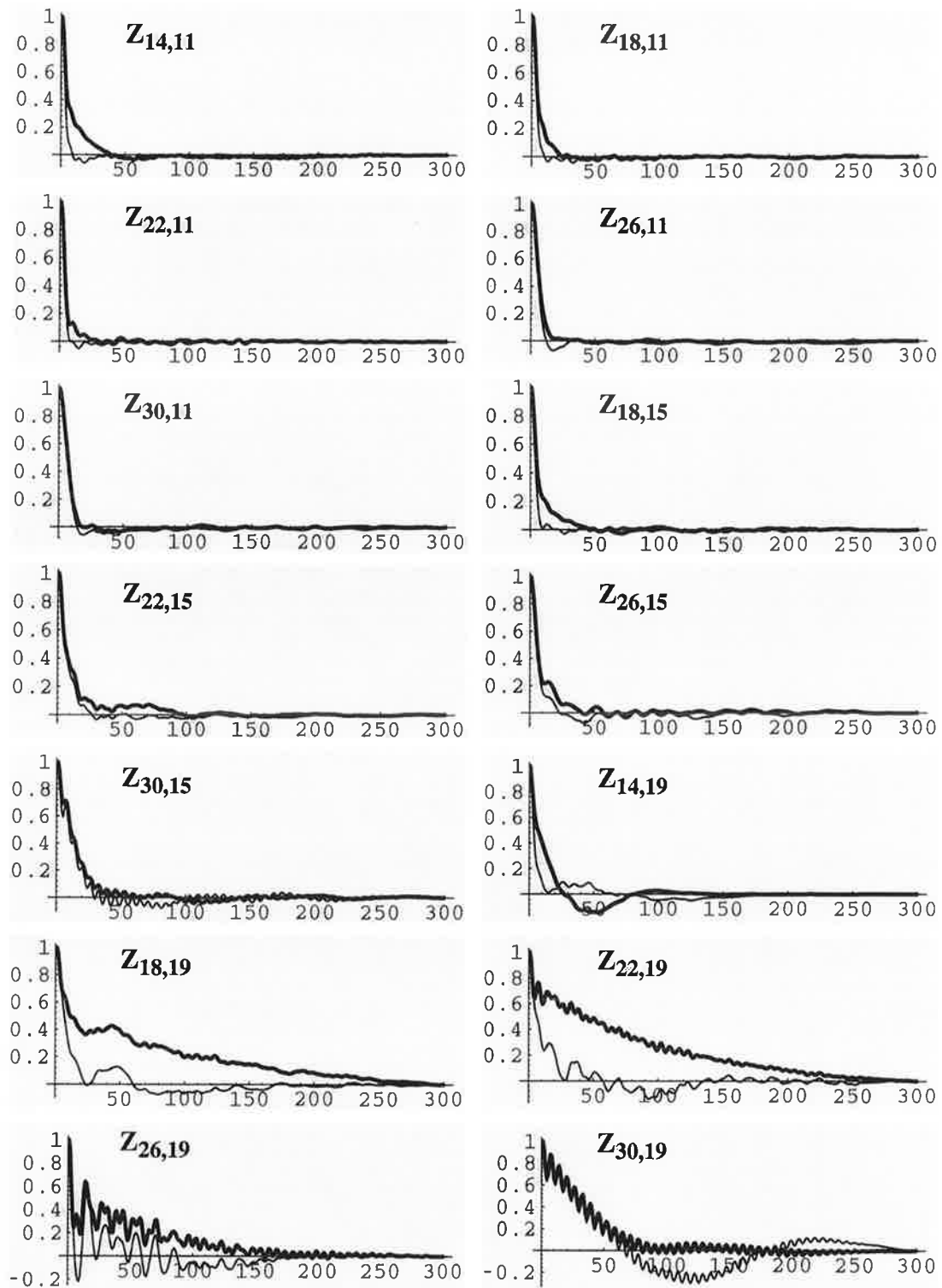


Abbildung 29b: Autokorrelationsfunktion einiger ausgewählter Ensemble:  $R_{xx}$  (dicke Linie),  $R_{yy}$  (dünne Linie).

**Tabelle 3:** Geschwindigkeitsvarianz, integrale Zeitskala und integrale Raumskala einiger Ensemble.

Ensemble	$\overline{u'^2}$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\overline{v'^2}$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	T <sub>x</sub> (Tage)	T <sub>y</sub> (Tage)	L <sub>x</sub> (km)	L <sub>y</sub> (km)
Z <sub>6,3</sub>	66.1	91.4	2.99	5.04	21.0	41.6
Z <sub>10,3</sub>	4.7	4.8	29.3	6.89	54.8	13.0
Z <sub>14,3</sub>	6.5	5.7	24.2	9.34	53.3	19.26
Z <sub>18,3</sub>	6.3	9.0	16.2	5.46	35.1	14.1
Z <sub>22,3</sub>	4.0	4.3	16.0	2.94	27.6	5.2
Z <sub>26,3</sub>	3.0	3.1	15.3	4.94	22.8	7.5
Z <sub>6,7</sub>	556.7	450.0	4.91	1.80	100.1	32.9
Z <sub>10,7</sub>	335.7	227.4	6.59	1.86	104.3	24.2
Z <sub>14,7</sub>	108.9	87.5	8.84	3.45	73.4	27.9
Z <sub>18,7</sub>	171.8	171.3	5.60	2.76	63.4	31.2
Z <sub>22,7</sub>	104.1	99.4	7.58	4.01	66.8	34.5
Z <sub>26,7</sub>	13.4	14.7	14.6	6.07	46.1	20.1
Z <sub>30,7</sub>	1.8	2.5	18.8	8.81	15.9	12.0
Z <sub>10,11</sub>	805.3	549.3	4.91	1.44	120.3	29.1
Z <sub>14,11</sub>	717.9	544.3	4.89	1.40	101.6	28.2
Z <sub>18,11</sub>	377.2	348.8	4.61	1.62	77.3	26.1
Z <sub>22,11</sub>	300.6	340.4	4.52	2.22	67.7	35.4
Z <sub>26,11</sub>	173.1	169.4	4.59	4.08	52.2	45.9
Z <sub>30,11</sub>	74.1	75.9	5.14	3.97	38.2	29.8
Z <sub>18,15</sub>	257.2	209.4	7.78	3.06	107.8	38.2
Z <sub>22,15</sub>	42.3	44.5	11.5	5.63	64.6	32.4
Z <sub>26,15</sub>	40.5	41.3	9.67	3.87	53.2	21.5
Z <sub>30,15</sub>	9.3	9.9	13.4	8.81	35.3	22.6
Z <sub>14,19</sub>	424.0	297.1	5.01	3.50	89.1	52.1
Z <sub>18,19</sub>	3.3	2.1	55.4	5.83	86.9	7.3
Z <sub>22,19</sub>	1.9	1.1	67.8	6.47	80.7	5.9
Z <sub>26,19</sub>	1.2	0.95	33.8	4.14	31.9	3.48
Z <sub>30,19</sub>	0.19	0.28	30.7	15.0	11.5	6.8

**Tabelle 4:** Geschwindigkeitsvarianz, integrale Zeitskala und integrale Raumskala der Ensemble aus Krauss und Böning (1987) (Beobachtungsdaten).

Ensemble	$\overline{u'^2}$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	$\overline{v'^2}$ (cm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> )	T <sub>x</sub> (Tage)	T <sub>y</sub> (Tage)	L <sub>x</sub> (km)	L <sub>y</sub> (km)
2	116.6	114.4	8.6	5.9	80	53
3	196.0	198.8	6.0	3.4	72	41
4	428.4	453.6	3.0	2.3	53	42
5	538.2	566.4	2.8	3.2	56	66
6	605.1	665.6	2.1	2.1	45	47
7	462.2	380.2	3.2	2.2	59	37
8	299.2	278.8	4.0	2.9	60	42

### 4.3 Energiespektren

Eine andere Form, die in den Partikelensembeln enthaltene Lagrange'sche Information zu repräsentieren, stellen die Spektren der Geschwindigkeit der Wasserelemente dar. Sie beinhalten zwar keine weitere Information im Vergleich mit den Lagrange'schen Korrelationen, da es möglich ist, von einer Repräsentation zur anderen aufgrund des Konvolutionstheorems hinüberzuwechseln (s. Press et al., 1986), dennoch zeigen die Spektren auf eine direktere Weise, in welchen Perioden die kinetische Energie der Turbulenz konzentriert ist. Im folgenden wird ein Vergleich mit den in der Arbeit von Krauss und Böning (1987) errechneten Spektren vorgenommen.

Das Vorgehen bei der Berechnung der Spektren ist wie folgt:

- Es werden die Geschwindigkeitsspektren der einzelnen Partikel eines Ensembles unter der Anwendung eines "Hanningschen Fensters" (so wie bei Krauss und Böning, 1987) durchgeführt. Die Benutzung einer Fensterfunktion ist bei diskreten Zeitreihen notwendig, um die eintretende Mischung zwischen verschiedenen Frequenzen so gering wie möglich zu halten (s. Press et al., 1986). Die Hanningsche Fensterfunktion sieht so aus (im folgenden  $N = 300$  und  $\Delta = 1$  Tag):

$$w(k) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) \right] \quad (\text{GL 47})$$

Der Schätzer des Spektrums der Geschwindigkeitskomponente  $i$  eines Partikels lautet demnach:

$$P'_i(0) = \frac{1}{W_{Sum}} |F_i(0)|^2$$

$$P'_i(f_k) = \frac{1}{W_{Sum}} [ |F_i(k)|^2 + |F_i(N-k)|^2 ] \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (\text{GL 48})$$

$$P'_i(f_{N/2}) = \frac{1}{W_{Sum}} |F_i(N/2)|^2$$

wobei 
$$W_{Sum} = \sum_{k=0}^N w(k)^2 \quad \text{und} \quad F_i(k) = \sum_{t=0}^{N-1} w(t) u_i(t) e^{2\pi i t k / N}$$

und die Frequenz,  $f_k$ , als  $f_k = \frac{k}{N\Delta}$  definiert ist.

- Schließlich wird das Lagrange'sche Spektrum eines Ensembles durch die Mittelung der 200 einzelnen Partikelspektren erhalten. Dadurch wird erreicht, daß die Varianz des Spektrums gegenüber der eines einzelnen Partikels um einen Faktor 200 kleiner wird. Die Varianz des Spektrums eines einzelnen Partikels ist für jede Frequenz  $f_k$  durch den Wert  $P_i(f_k)^2$  gegeben (s. Press et al., 1986).

Die Spektren der in den vorangegangenen Abbildungen als Beispiel verwendeten Ensemble werden hier in einer energieerhaltenden Darstellung (Abb. 30a und 30b) gezeigt. Diese besteht einfach darin, daß das Spektrum mit der jeweiligen Frequenz multipliziert und in einer linearen Skala gegen eine logarithmische Skala der Frequenz dargestellt wird. Die entsprechenden Spektren aus der Arbeit von Krauss und Böning (1987) werden hier in Abb. 31 gezeigt.

Ein Vergleich der von Krauss und Böning (1987) gewonnenen Spektren mit den Spektren der Ensemble im zentralen und östlichen Nordatlantik ergibt generell eine gute Übereinstimmung in bezug auf die Position der Maxima. Deren Wert wird bei den energiereichsten Ensembles jedoch um bis zu einem Faktor zwei unterschätzt. Eine Aussage hinsichtlich einer Verschiebung der Energiemaxima zu größeren Frequenzen (d. h., zu kleineren Perioden) bei einer Zunahme der Gesamtenergie läßt sich hier im Gegensatz zu Krauss und Böning nicht eindeutig machen.

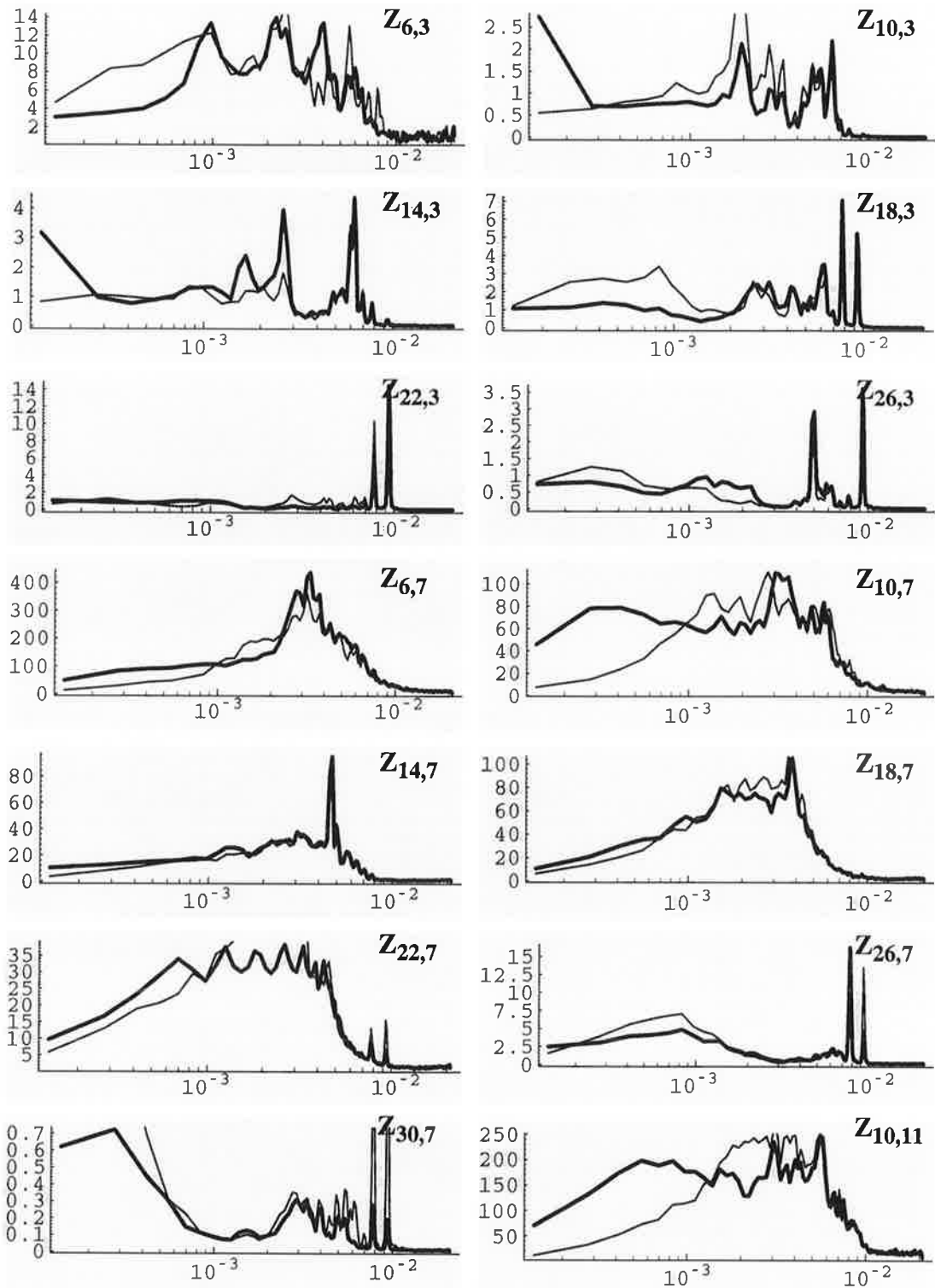
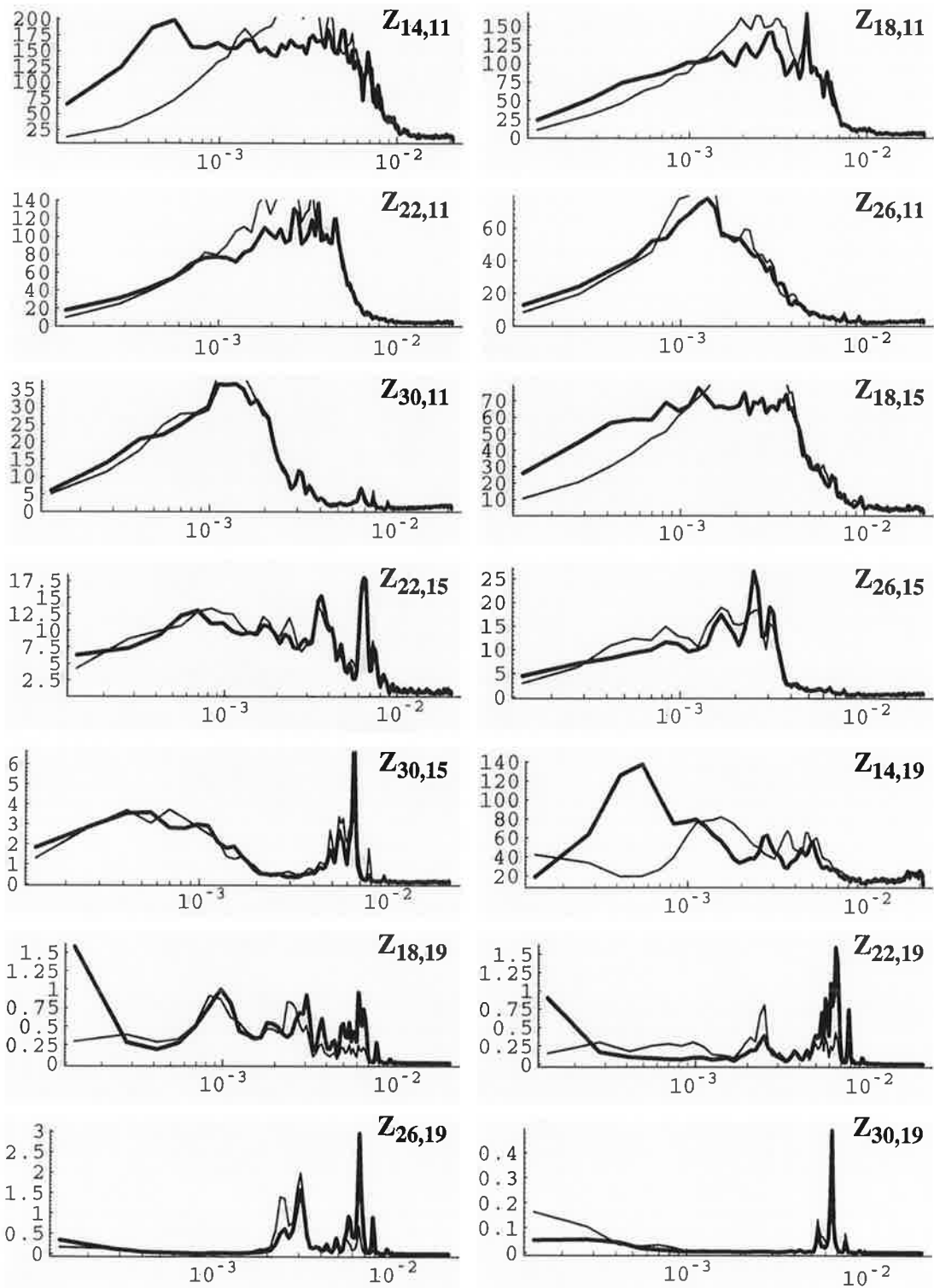


Abbildung 30a: Energiespektren einiger ausgewählter Ensemble ("Energy-conserving-Plot"):  $P_x$  (dicke Linie),  $P_y$  (dünne Linie). Einheiten:  $cm^2 s^{-2}$  (Ordinate),  $St^{-1}$  (Abszisse).



**Abbildung 30b:** Energiespektren einiger ausgewählter Ensemble ("Energy-conserving-Plot"):  $P_x$  (dicke Linie),  $P_y$  (dünne Linie). Einheiten:  $\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$  (Ordinate),  $\text{St}^{-1}$  (Abszisse).



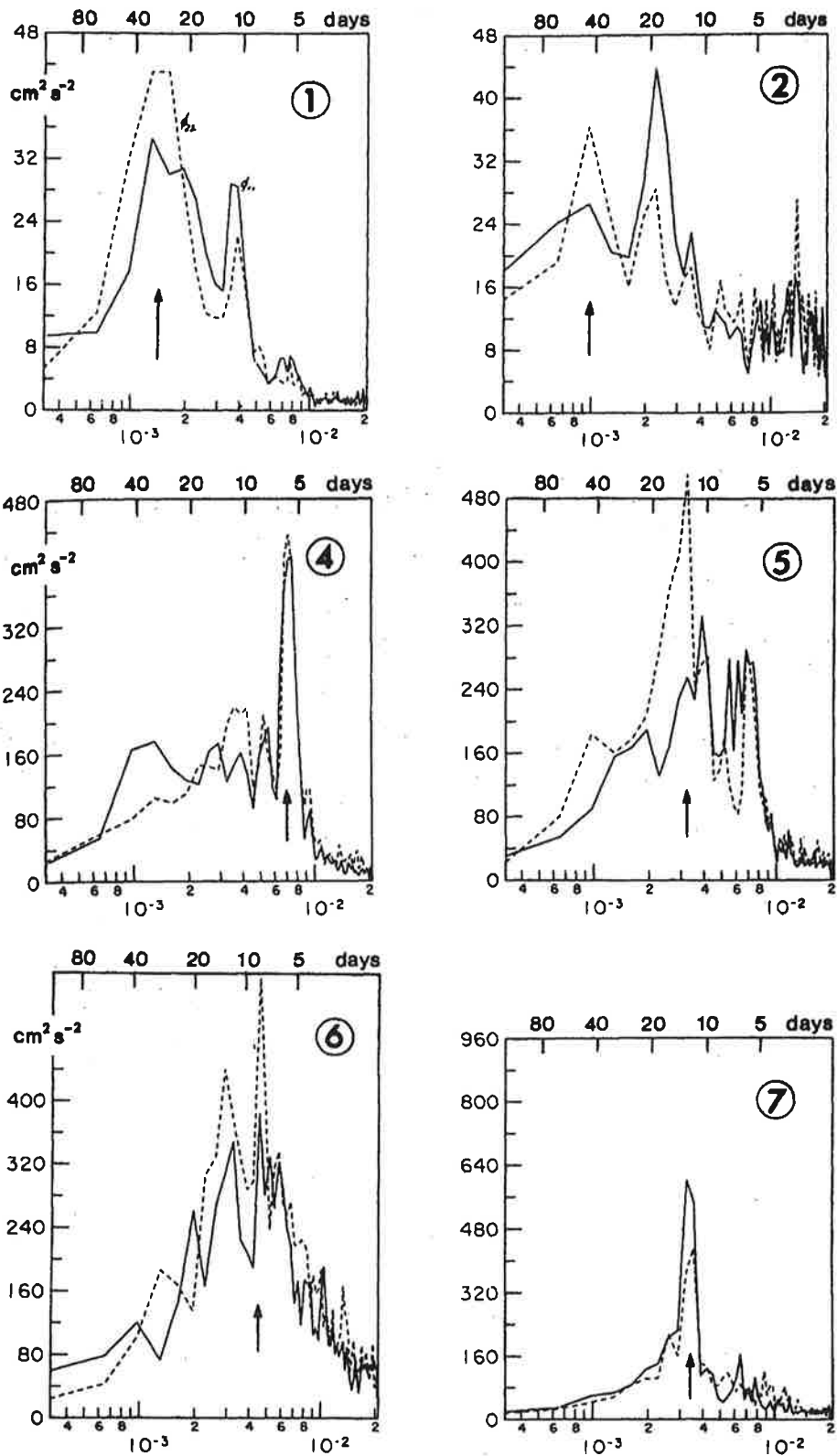


Abbildung 31: Berechnete Energiespektren aus Beobachtungsdaten (Krauss und Böning, 1987):  $P_x$  und  $P_y$  (gestrichelte Linie).

#### 4.4 Diffusionskoeffizienten

In diesem Abschnitt wird gezeigt, inwieweit die Taylor'sche Theorie in diesem Modell Anwendung finden kann und welche Aussagen in bezug auf die Parameterisierung der Wirbel-diffusion gemacht werden können.

Theoretisch sollte die in logarithmischen Skalen dargestellte Partikelausbreitung  $D$  von einer anfänglichen quadratischen Abhängigkeit von der Zeit für Zeiten viel größer als die Dekorrelationszeit (in der Regel kleiner als 10 Tage) in eine lineare Abhängigkeit übergehen. Hier weisen die zonalen und meridionalen Komponenten der Ausbreitung (Bilder hier nicht gezeigt) in den entsprechenden Regionen eine große Ähnlichkeit mit denen von Krauss und Böning (1987) auf. Erwartungsgemäß gibt es auch hier generell die Tendenz zu einer geringeren Partikelausbreitung in der meridionalen im Vergleich zur zonalen Richtung. Es besteht ebenfalls eine Übereinstimmung in den Zahlen nach 100 Tagen Partikelausbreitung in den vergleichbaren Regionen (Größenordnung  $10^5 \text{ km}^2$ ). Bei bestimmten Ensembles vermißt man jedoch das Erreichen eines klaren "Random-Walk-Zustandes", wie z.B. in den Regionen  $Z_{6,3}$ ,  $Z_{10,7}$ ,  $Z_{14,7}$  und  $Z_{14,19}$ . Dies könnte auf das Fehlen eines homogenen Umfelds zurückzuführen sein oder darauf, daß die Partikel in dieser Periode noch nicht völlig dekorreliert sind, wie an den sehr energiearmen Rändern schon in den Autokorrelationsfunktionen erkennbar war.

In Abb. 32a bis 32d werden die auf zwei verschiedenen Wegen abgeleiteten Werte der diagonalen Komponenten der Lagrange'schen Diffusivität  $K_{ij}$  (s. GL 41), ähnlich wie in Böning und Cox (1988), gegenübergestellt. Sie wurden einerseits direkt von der tatsächlichen Partikelausbreitung errechnet (s. GL 39), andererseits aus der Taylor'schen Diffusionstheorie geschätzt (s. GL 42):

$$K_{ii}^* (\tau) = \overline{u_i'^2} \int_0^\tau R_{ii}(s) ds \quad (\text{GL 49})$$

Im allgemeinen kann man behaupten, daß die geschätzte Diffusivität  $K^*$  annähernd den mittleren Verlauf der reellen Diffusivität  $K$  wiedergibt. Es gibt Ausnahmen, wie z. B.  $Z_{6,3}$  und  $Z_{14,19}$ , bei denen ein großer Unterschied zwischen beiden Kurven festzustellen ist. In diesen Fällen kann man nicht von homogener Turbulenz sprechen, da die Wasserelemente von einer dynamischen Region zur anderen wandern, so daß die ermittelte Geschwindigkeitsvarianz  $\overline{u_i'^2}$  nicht repräsentativ ist. Kleine Abweichungen von einer linearen Partikelausbreitung  $D$  (im "Random-Walk"-Zustand) lassen nach der Differentiation Schwankungen um den mittleren Verlauf von  $K$  auftreten. Zum Vergleich ist in Abb. 33 die direkt berechnete Diffusivität  $K$  des Partikelensembles 1 aus Krauss und Böning (1987) dargestellt. Ähnliche Schwankungen prägen dieses Bild gleichermaßen.

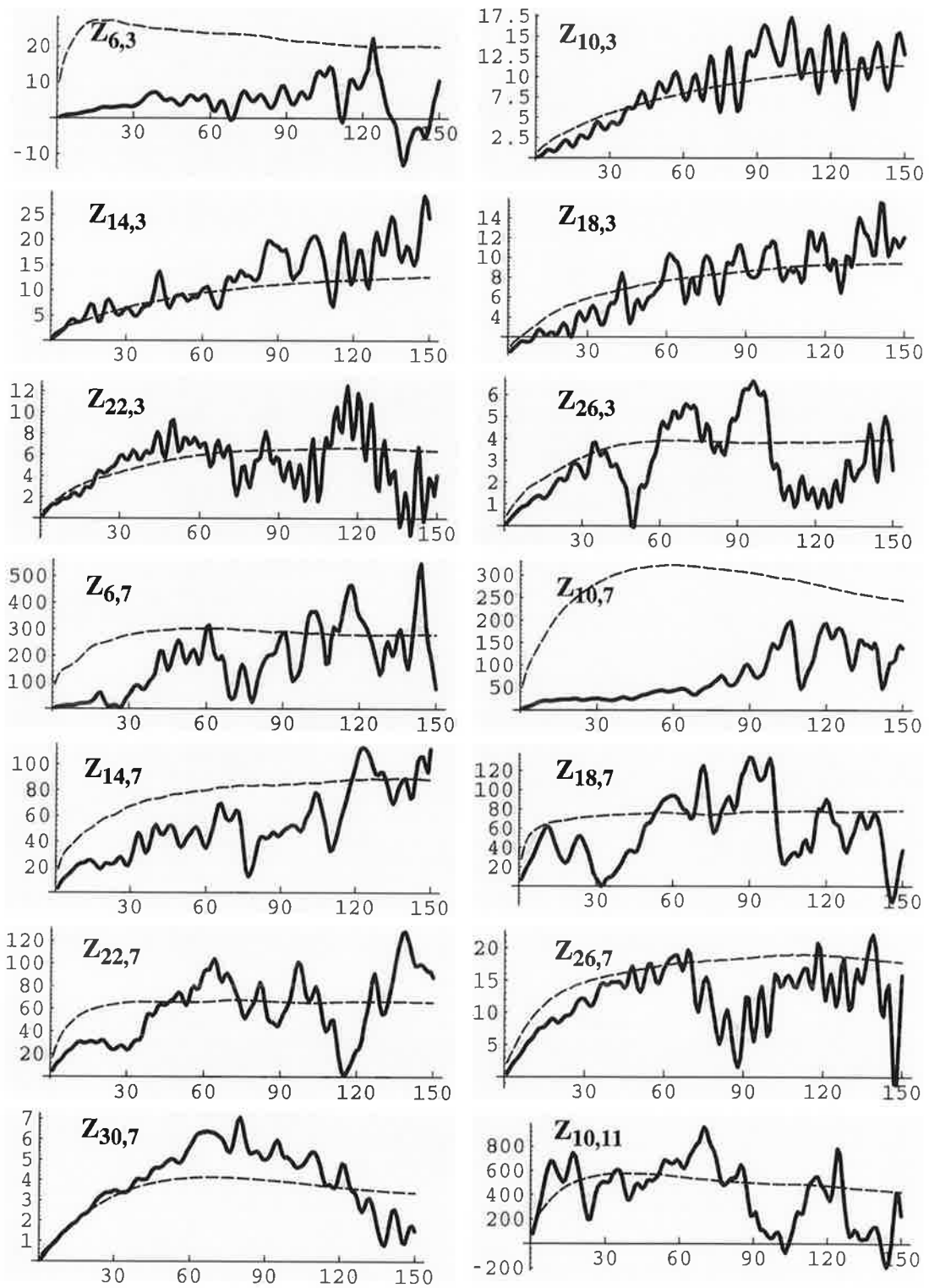
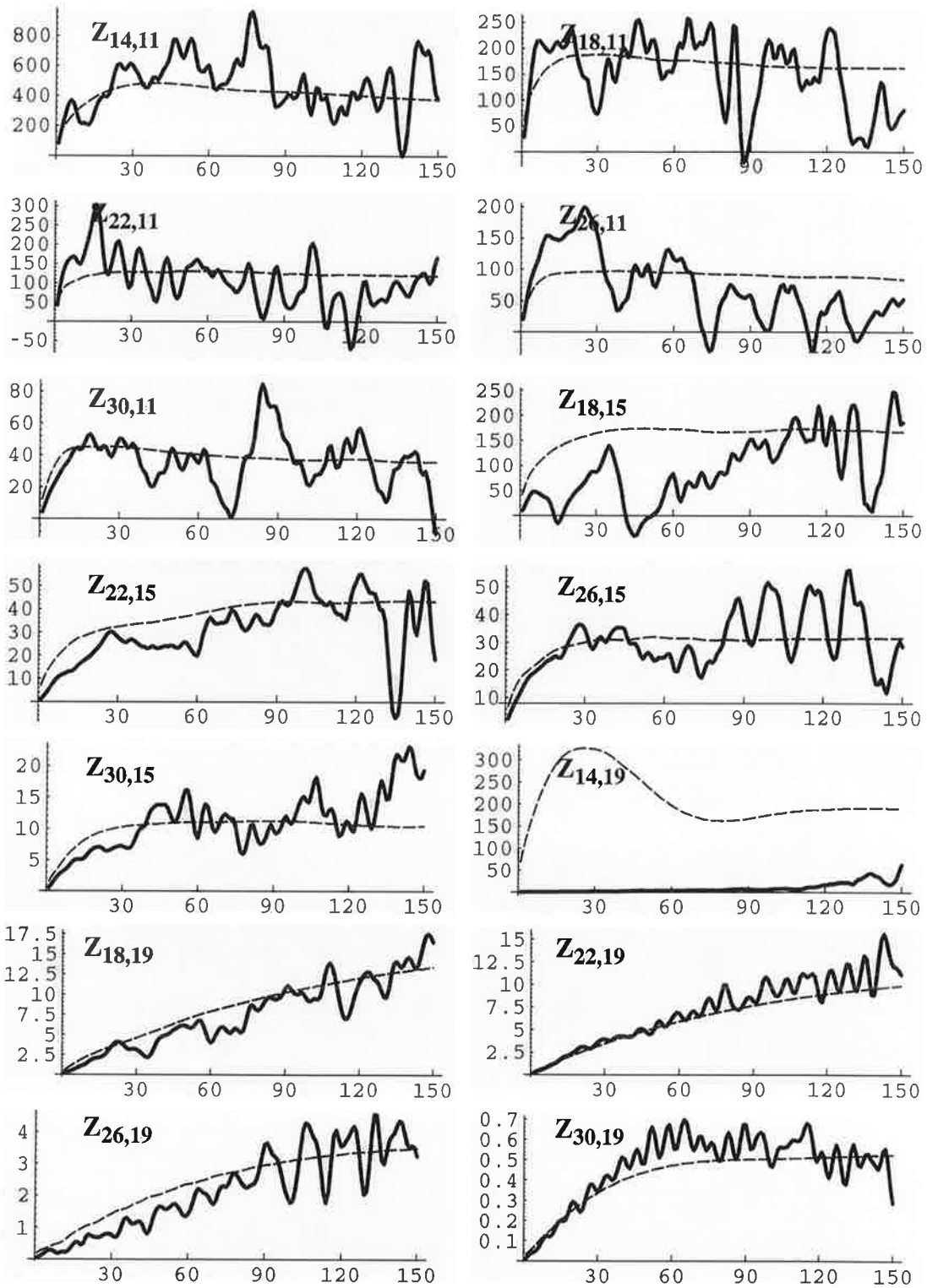


Abbildung 32a: Diffusivität einiger ausgewählter Ensembles:  $K_{xx}$  (volle Linie) und  $K_{xx}^*$  (gestrichelte Linie). Einheiten:  $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$  (Ordinate), Tage (Abszisse).



**Abbildung 32b:** Diffusivität einiger ausgewählter Ensemble:  $K_{xx}$  (volle Linie) und  $K_{xx}^*$  (gestrichelte Linie). Einheiten:  $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$  (Ordinate), Tage (Abszisse).

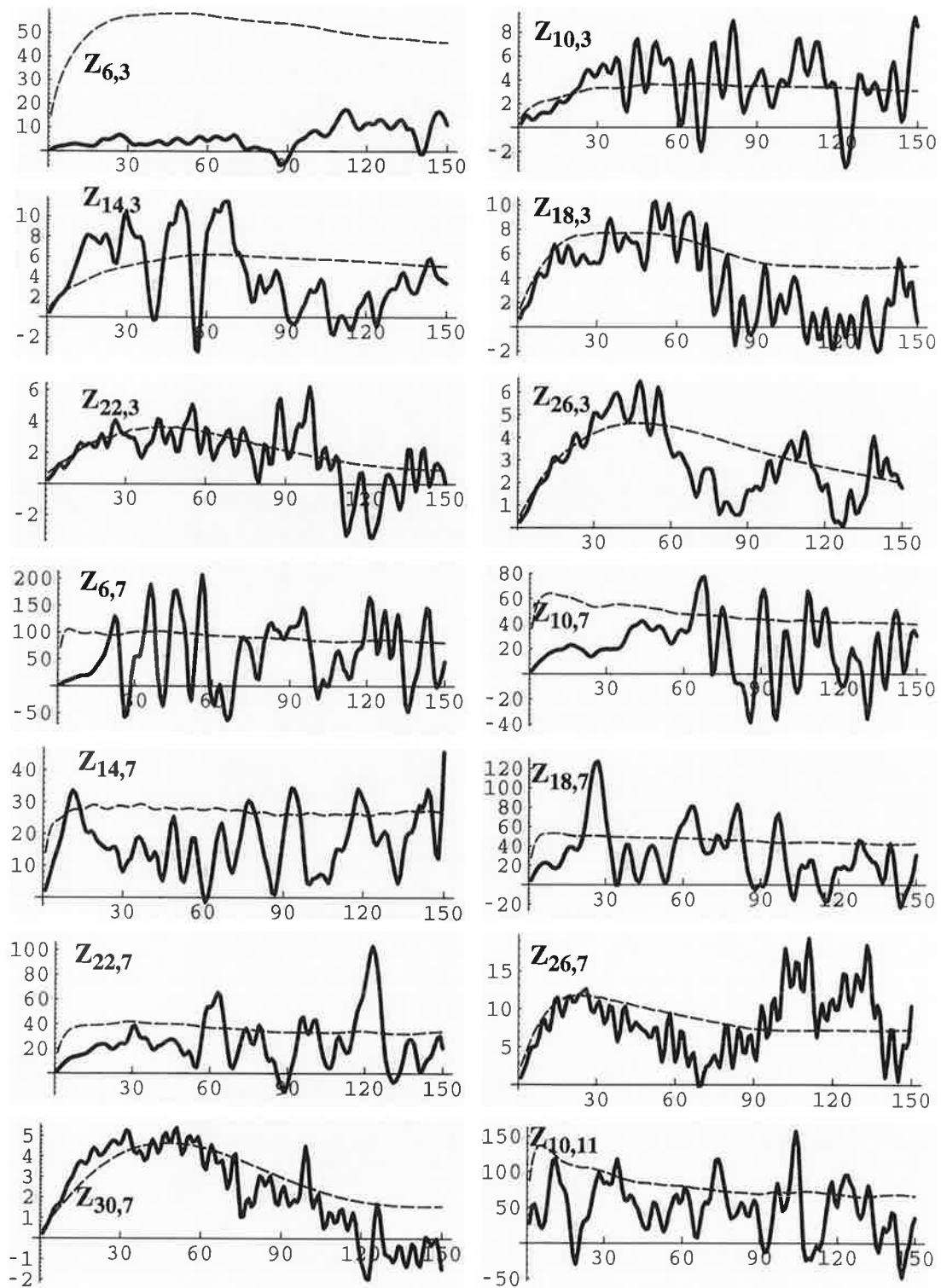
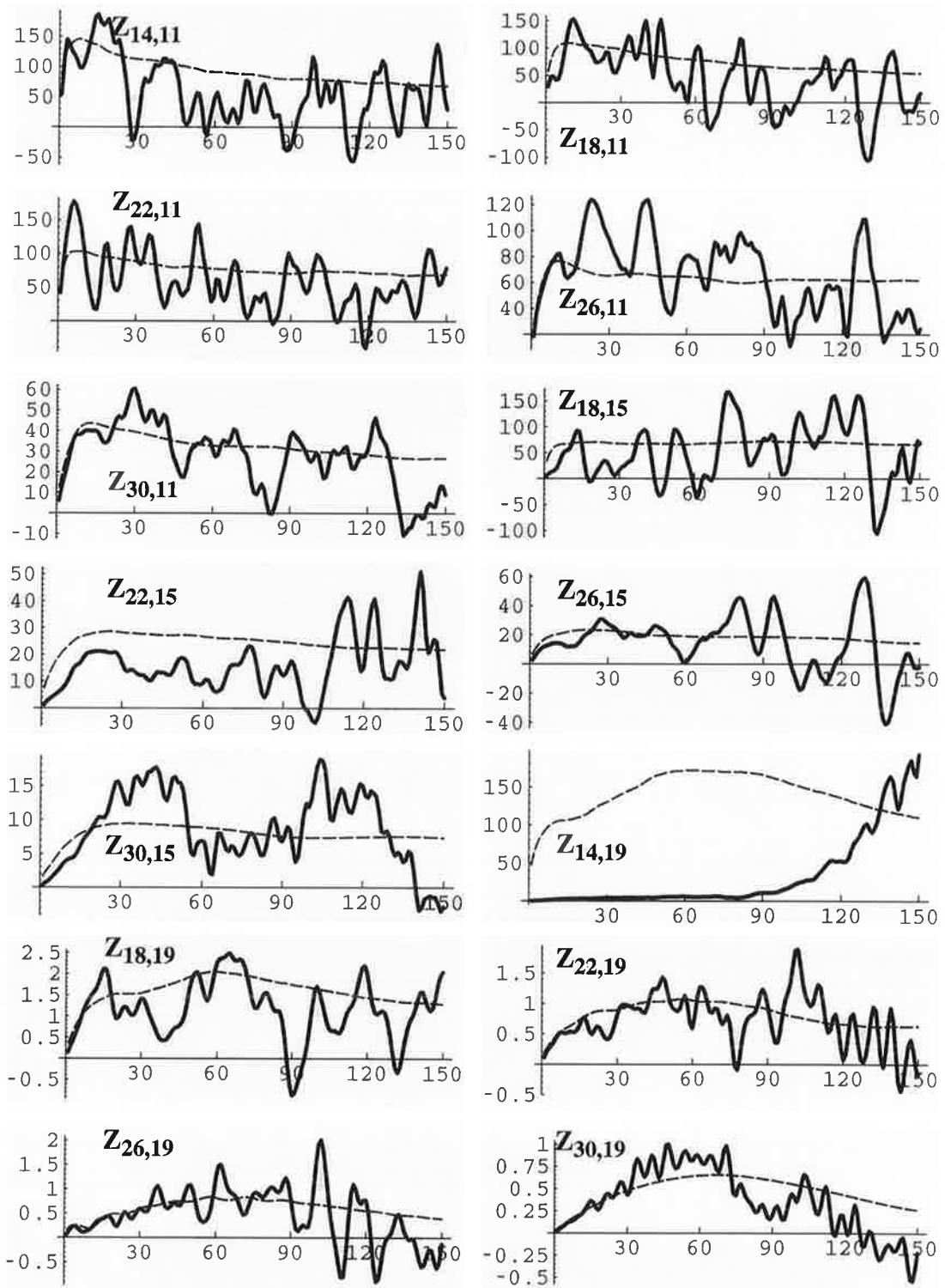
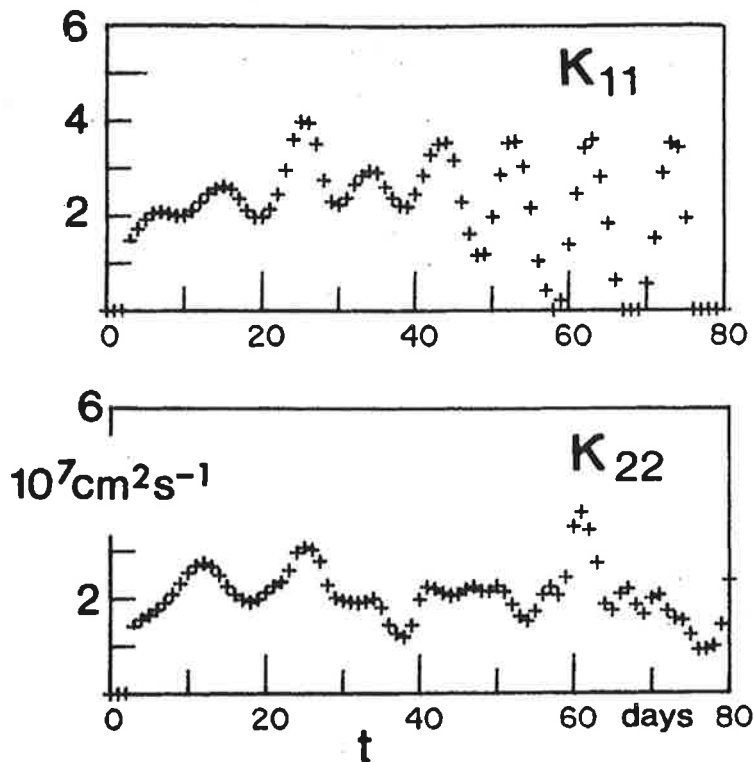


Abbildung 32c: Diffusivität einiger ausgewählter Ensenble:  $K_{yy}$  (volle Linie) und  $K_{yy}^*$  (gestrichelte Linie). Einheiten:  $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$  (Ordinate), Tage (Abszisse).



**Abbildung 32d:** Diffusivität einiger ausgewählter Ensemble:  $K_{yy}$  (volle Linie) und  $K_{yy}^*$  (gestrichelte Linie). Einheiten:  $10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$  (Ordinate), Tage (Abszisse).



**Abbildung 33:** Zonale ( $K_{11}$ ) und meridionale ( $K_{22}$ ) Wirbeldiffusivität des Ensembles 1 von Krauss und Böning (1987).

Die räumliche Struktur eines möglichen Lagrange'schen Diffusivitätskoeffizienten, der für die Parameterisierung der Wirbeldiffusion in nicht wirbelauflösenden Modellen von großer Bedeutung ist, ist in Abb. 34 zu finden. Dabei ist Folgendes zu beachten:

- Die dargestellten Werte sind zeitlich gemittelte Werte der zonalen und meridionalen Diffusivität  $K$  in der Periode vom Tag 30 bis 150. Der Grund dafür liegt in der Annahme, daß das Partikelensemble den "Random-Walk"-Zustand nach 30 Tagen erreicht haben sollte.
- Der Wert des Diffusionskoeffizienten in einer bestimmten Position entspricht dem des Ensembles mit Ursprung in dieser Region. Die mittlere Advektion des Ensembles wird hier nicht berücksichtigt. Das könnte eine Anpassung für die Verwendung in Euler'schen Modellen erforderlich machen.

Hervorzuheben ist die Zunahme der Diffusionskoeffizienten vom Südosten vor der afrikanischen Küste nach Nordwesten bis zu den "Grand Banks" von Neufundland, wie in der Arbeit von Krauss und Böning (1987) ebenfalls beobachtet worden ist. Im mittleren Nordatlantik gibt es quantitativ eine gute Übereinstimmung zwischen den hiesigen Modellergebnissen und den aus Beobachtungen geschätzten Diffusionskoeffizienten (Krauss und Böning, 1987). Die

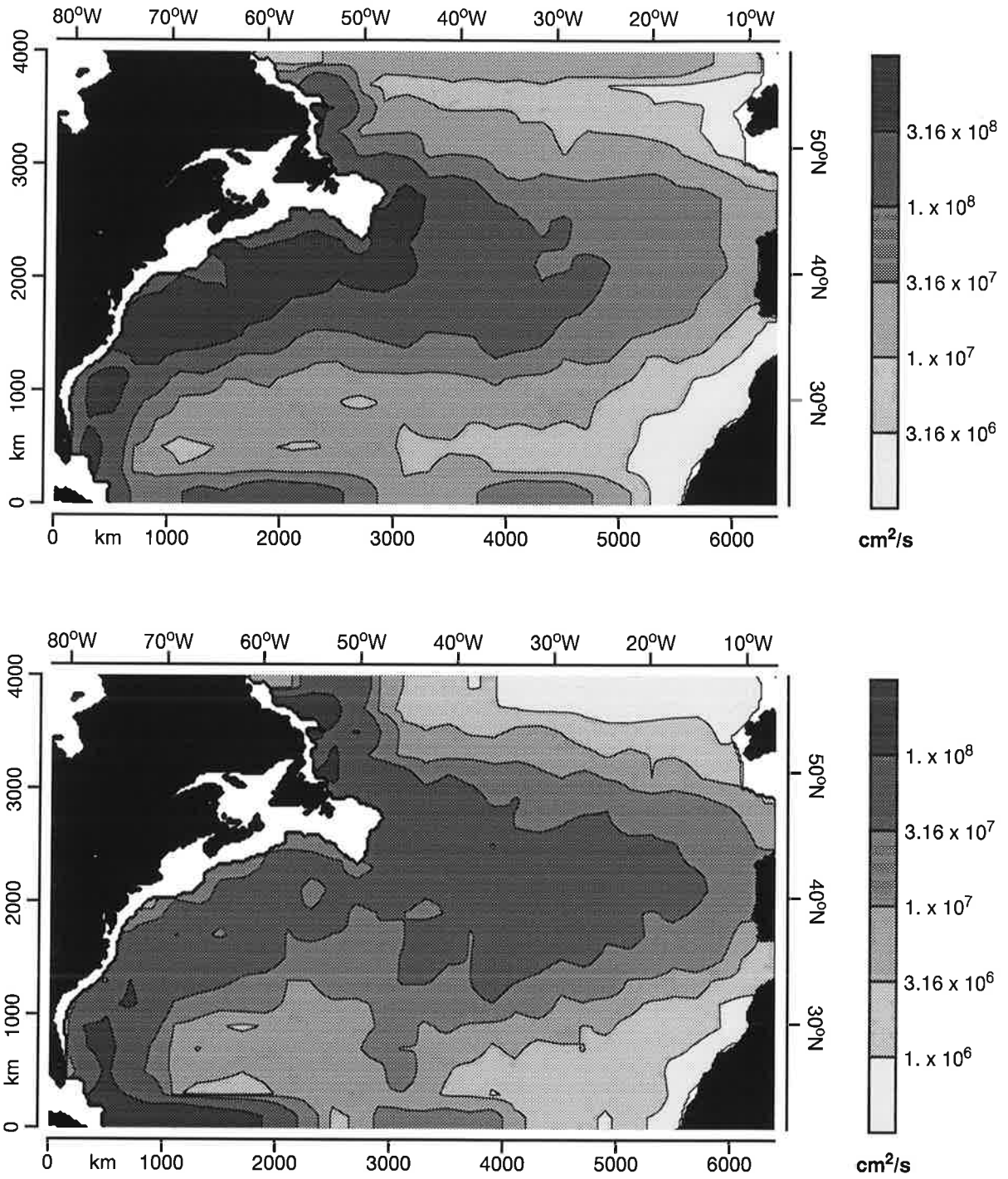


Abbildung 34: Diffusivitätskoeffizient  $K_{xx}$  (oberes Bild) und  $K_{yy}$  (unteres Bild).



zonale Diffusion erreicht in dieser Region ungefähr  $1 \times 10^8 \text{ cm}^2/\text{s}$ , die meridionale  $5 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ . In diesem Modell sind die Diffusionskoeffizienten im kanarischen Becken im Vergleich mit den Beobachtungen jedoch ca. viermal mal kleiner ( $5 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s}$  statt  $2 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$ ). Ein Grund dafür könnten die hier nicht berücksichtigten "Meddies" sein. "Meddies" ist die Abkürzung für diejenigen Wirbel, die mit aus dem Mittelmeer in den Nordatlantik fließendem Wasser gebildet werden. Diese Turbulenz wird in diesem Modell nicht simuliert. Es gibt darüber hinaus weitere Arbeiten, die sich anhand von Beobachtungsdaten mit den Diffusionskoeffizienten in anderen Regionen befaßt haben:

- Colin de Verdiere (1983) hat anhand von Oberflächenbojendaten für die Region um  $46^\circ \text{ N}$  und  $12^\circ \text{ W}$  (Golf von Biscaya) folgende Werte ermittelt:

$$K_{xx} = 2.3 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} \quad K_{yy} = 1.7 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} .$$

- Freeland et al. (1975) kommen mittels SOFAR-Bojen in 1500 m Tiefe bei  $28^\circ \text{ N}$  und  $70^\circ \text{ W}$  (Sargassosee) zu den Werten:

$$K_{xx} = 7.8 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s} \quad K_{yy} = 7.1 \times 10^6 \text{ cm}^2/\text{s} .$$

- McWilliams et al. (1983) haben folgende Werte im westlichen Nordatlantik bei  $31^\circ \text{ N}$  und  $70^\circ \text{ W}$  während des sogenannten "Local Dynamics Experiment", das ein Teil des internationalen Projektes POLYMODE im Nordatlantik ist, in einer Tiefe von 700 m anhand von SOFAR-Bojen berechnet:

$$K_{xx} = 8 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} \quad K_{yy} = 5 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$$

- Riser und Rossby (1983) geben für die Region zwischen  $10^\circ$  und  $26^\circ \text{ N}$  und zwischen  $70^\circ$  und  $50^\circ \text{ W}$  und für eine Tiefe von 700 m folgende Werte an:

$$K_{xx} = 4.5 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} \quad K_{yy} = 1.8 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} .$$

In den hier vorgelegten Bildern ist die Existenz einer relativ turbulenzarmen Region mit großen Gradienten bei den Diffusionskoeffizienten im südwestlichen Nordatlantik, wie die vorherigen Daten belegt haben, deutlich erkennbar. Auch quantitativ sind die hier gelieferten Ergebnisse durchaus vergleichbar. Dies gilt ebenfalls für den Golf von Biscaya.

Es gibt jedoch Bereiche entlang der im Modell eingeführten künstlichen Nord- und Südränder, in denen die Diffusionskoeffizienten erwartungsgemäß nicht realistisch sind. Bei der meridionalen Komponente der errechneten Diffusionskoeffizienten (unteres Bild in Abb. 34) kommen nur am Südrand zwei solcher Bereiche mit erhöhter Diffusivität zum Vorschein, während bei der zonalen Komponente (oberes Bild) ebenfalls zwei Streifen am Südrand (aber im Vergleich mit den vorherigen nach Osten verschoben) auftreten. Zusätzlich ist jedoch noch eine Region mit erhöhter Diffusion am Nordrand zu sehen. Die Existenz dieser Effekte läßt sich mit Hilfe von Abb. 26 erklären, in der die zeitliche Verschiebung der Ensemblenschwer-

punkte dargestellt ist. Am Nordrand ist eine Scherung der zonalen Geschwindigkeitskomponente zu beobachten, während am Südrand sowohl eine Scherung der zonalen als auch der meridionalen Komponente erkennbar ist. Der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Bodentopographie an beiden Rändern (siehe Abb. 8), die die Strömung in der Oberschicht beeinflusst.

Abb. 34 läßt auf den ersten Blick die Existenz eines Zusammenhangs zwischen den Diffusionskoeffizienten und der kinetischen Energie der Turbulenz in der Oberschicht vermuten (s. zum Vergleich Abb. 14a). Dies läßt sich anhand eines Streudiagramms bestätigen (siehe Abb. 35), wobei jeder Punkt den Diffusionskoeffizienten und die Wurzel der Geschwindigkeitsvarianz eines Ensembles darstellt. Es sind in diesem Diagramm alle 492 Ensemble dargestellt. Ein lineares Verhältnis ist sowohl in der zonalen Richtung, als auch in der meridionalen Richtung bis zu einer mittleren Turbulenzgeschwindigkeit von ca. 20 cm/s zu erkennen. Von den insgesamt 492 Ensembles sind 387 bzw. 402 in diesem Bereich enthalten. Eine lineare Anpassung mittels einer  $\chi^2$ -Methode (s. Press et al., 1986)

$$K_{ii} = a_i + b_i \cdot [\overline{u_i'^2}]^{1/2}$$

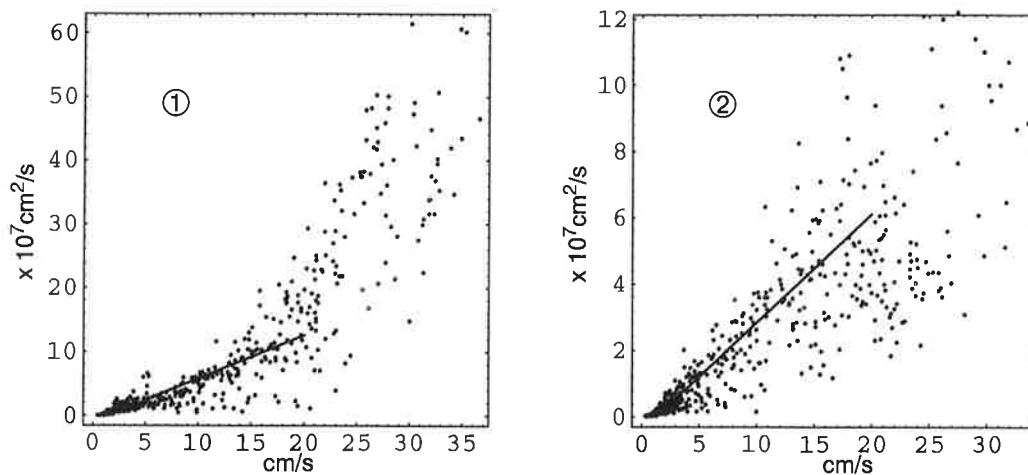
ergibt folgende Parameter für  $K_{xx}$  und  $K_{yy}$ :

$$\begin{array}{ll} a_x = -0.96 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} & \sigma_{a_x} = 0.19 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} \\ b_x = 0.67 \times 10^7 \text{ cm} & \sigma_{b_x} = 0.021 \times 10^7 \text{ cm} \\ a_y = -0.43 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} & \sigma_{a_y} = 0.11 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s} \\ b_y = 0.32 \times 10^7 \text{ cm} & \sigma_{b_y} = 0.012 \times 10^7 \text{ cm} \end{array}$$

wobei die  $\sigma_{a_i}$  und  $\sigma_{b_i}$  die Standardabweichungen der Parameter  $a_i$  und  $b_i$  darstellen.

Eine ähnliche lineare Anpassung bei Krauss und Böning (1987) ergibt dagegen einen kleineren Gradienten (hier Parameter  $b_i$ ) in beide Richtungen, und zwar in der zonalen Richtung von  $0.39 \times 10^7 \text{ cm}$  bzw. in der meridionalen Richtung von  $0.23 \times 10^7 \text{ cm}$ . In der Arbeit von Haidvogel und Keffer (1984) wird ebenfalls anhand dimensionaler Gründe nachgewiesen, daß die ensemblemittelte Diffusion proportional zur charakteristischen Geschwindigkeitskala und zur Längenskala der zweidimensionalen quasigeostrophischen Turbulenz ist.

Die im Vergleich zur meridionalen allgemein höhere zonale Diffusion läßt sich mit zwei Gründen erklären, die nicht voneinander unabhängig sind. Erstens stellt der  $\beta$ -Effekt wegen der vorgegebenen Erhaltung der potentiellen Vorticity für die Wasserelemente ein Hindernis dar, sich von einer bestimmten Breite weg zu bewegen (Erzeugung von Rossby-Wellen).



**Abbildung 35:** Streudiagramm: Turbulenzgeschwindigkeit versus Diffusionskoeffizient.

①  $[\overline{u_x'^2}]^{1/2}$  versus  $K_{xx}$ . ②  $[\overline{u_y'^2}]^{1/2}$  versus  $K_{yy}$

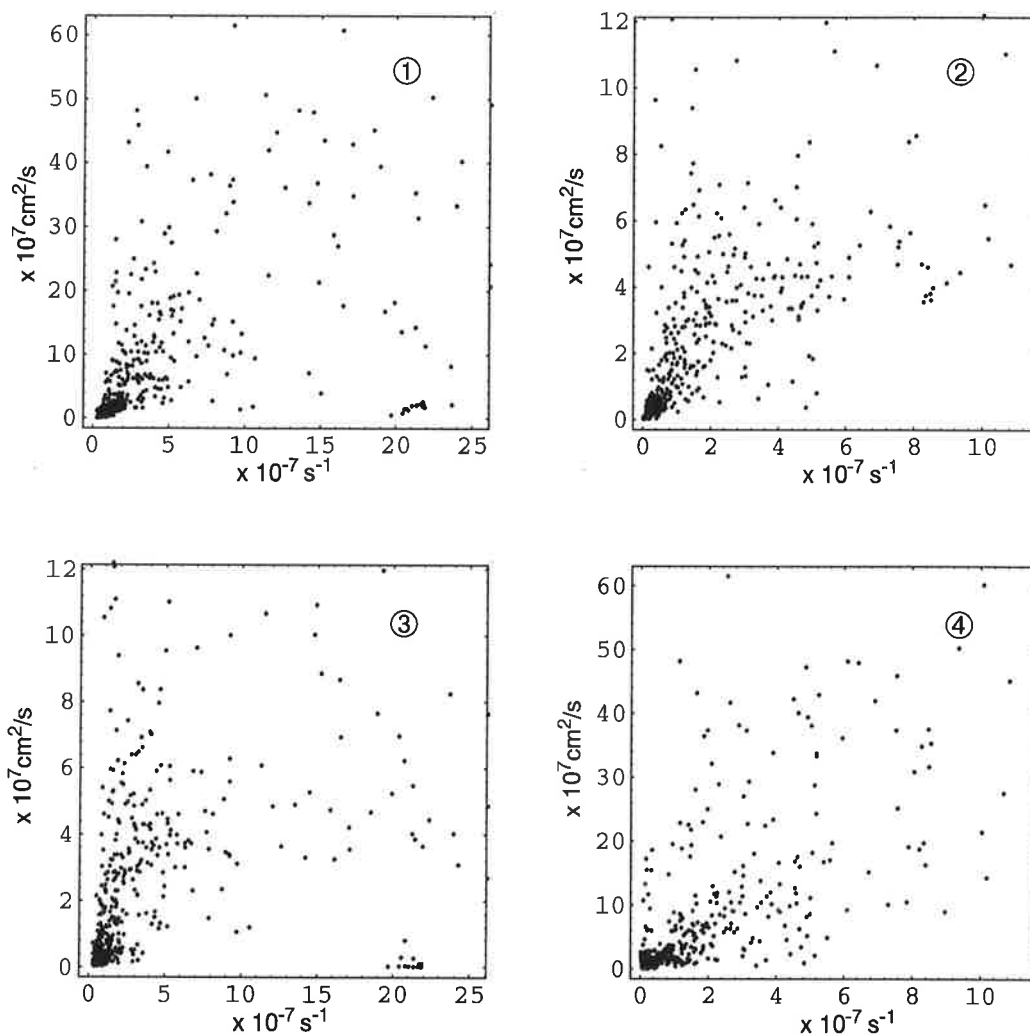
Zweitens läßt die Scherung der mittleren Strömung (die zonal gerichtet ist) eine erhöhte Partikelausbreitung entlang der Strömung erwarten (s. Riley und Corrsin, 1974). Die Partikelausbreitung weist in diesem Falle theoretisch eine  $t^3$ -Abhängigkeit in diese Richtung auf, statt der üblichen quadratischen bzw. linearen Zeitabhängigkeit in der "Random-Walk-Phase". Andererseits kann die Scherung der mittleren Strömung aber auch die Diffusion von Partikeln quer durch die Strömung verhindern.

Um diesen letzten Effekt zu verdeutlichen, werden in Abb. 36 ähnlich wie in Abb. 35 vier Streudiagramme gezeigt, die die vier möglichen Relationen zwischen den zonalen und meridionalen Diffusionskoeffizienten und den Scherungen, ebenfalls in der zonalen und meridionalen Richtung, darstellen. Damit sollte eine mögliche hohe Korrelation in irgendeiner dieser Diagramme erkennbar sein. Nach den vorangegangenen Ausführungen sollte sie durch eine zunehmend höhere Diffusion bei höherer Scherung in diese Richtung oder umgekehrt durch eine kleinere Diffusion bei höherer Scherung in der senkrechten Richtung gekennzeichnet sein. In Abb. 36 wird die Scherung als absoluter Wert des Gradienten des mittleren Geschwindigkeitsfeldes (im Euler'schen Koordinatensystem) dargestellt, d. h.,

$$S_y \equiv \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} \right|$$

$$S_x = \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right| = \left| \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} \right|$$

und über die Ursprungsregion des jeweiligen Ensembles gemittelt. Aus diesen Bildern läßt sich jedoch keine klare Schlußfolgerung in dieser Richtung ziehen. Es läßt sich lediglich die Aussage machen, daß der Scherungseffekt bei der Partikeldiffusion in der Oberschicht in dieser Modellsimulation nicht deutlich überwiegt.



**Abbildung 36:** Streudiagramm Scherung versus Diffusionskoeffizient: ①  $S_x$  versus  $K_{xx}$ , ②  $S_y$  versus  $K_{yy}$ , ③  $S_x$  versus  $K_{yy}$ , ④  $S_y$  versus  $K_{xx}$

---

# Transport von potentieller Vorticity durch das Wirbelfeld

---

Welche Relevanz das Wirbelfeld für eine korrekte Simulation der mittleren Zirkulation besitzt, wurde bereits im Abschnitt 3.2 bei den verschiedenen durchgeführten Stabilitätsexperimenten demonstriert. In diesem Kapitel wird die Frage weiter behandelt, welche physikalische Rolle das nicht stationäre Wirbelfeld in der zeitlich gemittelten Zirkulation spielt. Die Antwort darauf wird auf der Untersuchung der Vorticitytransporte im zentralen Experiment basieren. Wegen der Bedeutung des mittleren Vorticityfeldes als fundamentales Referenzfeld für die großräumige quasigeostrophische Zirkulation wird eine Analyse der Vorticity anstatt der Energie durchgeführt (Holland et al., 1984).

### 5.1 Vorticitytransport und die mittlere Zirkulation

Um die komplexen Wechselwirkungen zwischen mittleren und transienten Felder verstehen zu können, sind Analysen der verschiedenen dynamischen Größen, wie Impuls, Energie oder Vorticity nötig. Zonale Impulsbilanzen in einem quasigeostrophischen Modell des Antarktischen Zirkumpolarstroms, die wegen der Geometrie des Problems aussagekräftiger sind als bei geschlossenen Becken, wurden von Wolff et al. (1991) untersucht. Energiebilanzanalysen mit einem quasigeostrophischen Modell eines golfstromähnlichen geschlossenen Beckens wurden z. B. von Holland (1978) durchgeführt. Die direkte Anwendung von spektralen Methoden bei diesen letzten Modellen ist deswegen nutzlos, weil die Turbulenz weder homogen noch zonal symmetrisch ist.

Die Verwendung der potentiellen Vorticity in solchen Untersuchungen ist wegen ihrer zentralen Rolle in diesem Modell (strikte numerische Erhaltung) und im allgemeinen wegen ihrer physikalischen Bedeutung vorteilhaft. Theoretische Überlegungen über die Effekte des mesoskaligen Wirbelfeldes auf die mittlere Zirkulation sind auf dieser Basis von verschiedenen Autoren aufgestellt worden (Holland et al., 1984; Rhines und Holland, 1979; Rhines und Young, 1979, 1982; Young, 1987). Man versucht, die Zirkulation mit Hilfe der Trennung zwischen der zeitlich gemittelten potentiellen Vorticity und den Flüssen von potentieller Vorticity

durch das transiente Wirbelfeld zu verstehen. Die Gleichungen GL 1 und GL 32 sehen dann folgendermaßen aus:

$$\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial t} = \bar{F}_i - \nabla \cdot (\bar{V}_i \bar{q}_i) - \nabla \cdot (\overline{V'_i q'_i}) \approx 0 \quad (\text{GL 50})$$

Man beachte, daß die geostrophischen Geschwindigkeiten  $V_i \equiv (u_i, v_i)$  divergenzfrei sind  $\nabla \cdot V_i = 0$ .

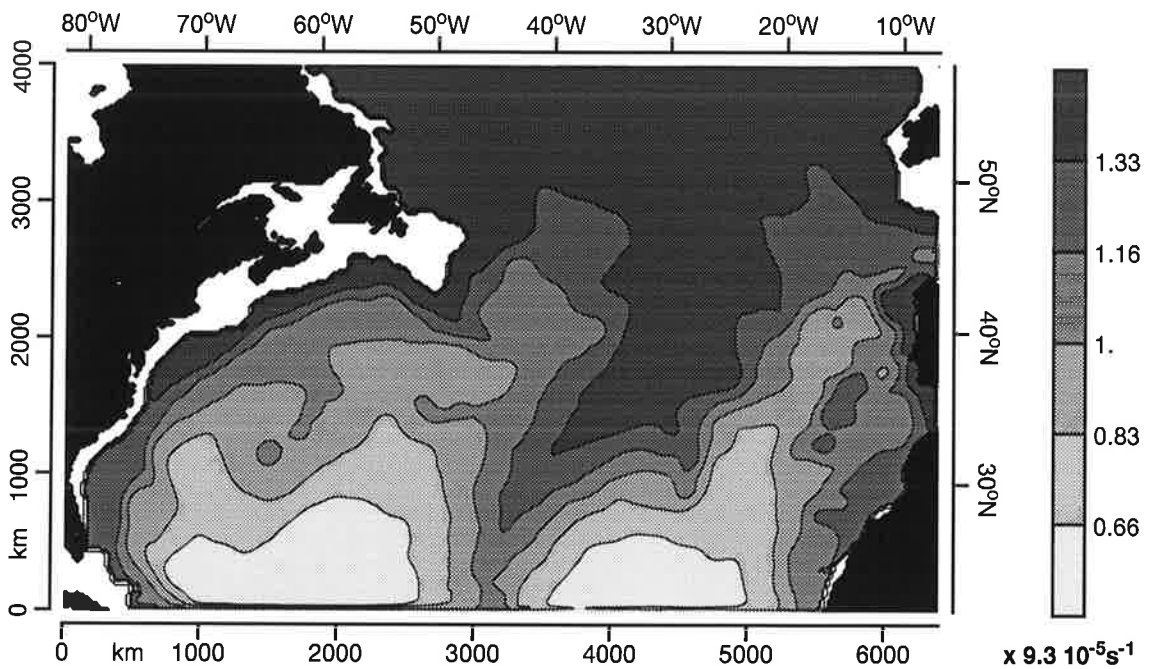
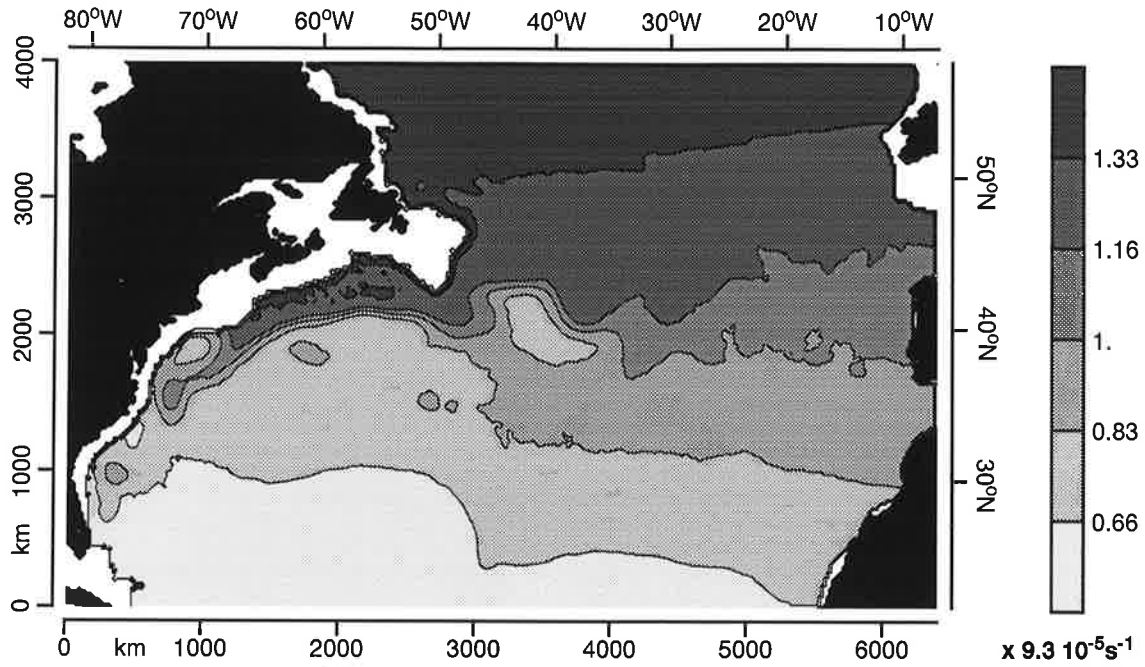
Mit dieser Gleichung wird gezielt die Rolle der transienten Wirbel als Antrieb oder Bremse der mittleren Zirkulation in beiden Schichten hervorgehoben. So wird insbesondere aus dieser Gleichung deutlich, daß die Tiefenzirkulation ohne Wirbel ( $\nabla \cdot (\overline{V'_2 q'_2}) = 0$  und kein Einfluß des Windschubs in dieser Schicht) nicht möglich wäre, d. h., daß die mittlere Zirkulation in der Bodenschicht ausschließlich von der in der Oberschicht durch den Windschub direkt oder indirekt herbeigeführten Turbulenz angetrieben wird. Einfache Modelle mit ausschließlich linearen Termen in den Gleichungen (Sverdrup-, Stommel- und Munkmodelle; siehe z. B. Apel, 1988) sind daher nicht in der Lage, die wirkliche mittlere Zirkulation zu erklären.

Die zeitlich gemittelte potentielle Vorticity in der Periode vom 19200. bis zum 22200. Tag des zentralen Experiments ist in Abb. 37 zu sehen. Daß die geostrophischen Wirbel die großräumige Zirkulation beeinflussen, wird vor Augen geführt, wenn man z. B. eine Momentaufnahme der potentiellen Vorticity in der Oberschicht (siehe Abb. 38) mit der mittleren potentiellen Vorticity (Abb. 37) vergleicht. Darin ist klar zu sehen, wie die Wirbel potentielle Vorticity transportieren und somit die Struktur der mittleren Zirkulation beeinflussen.

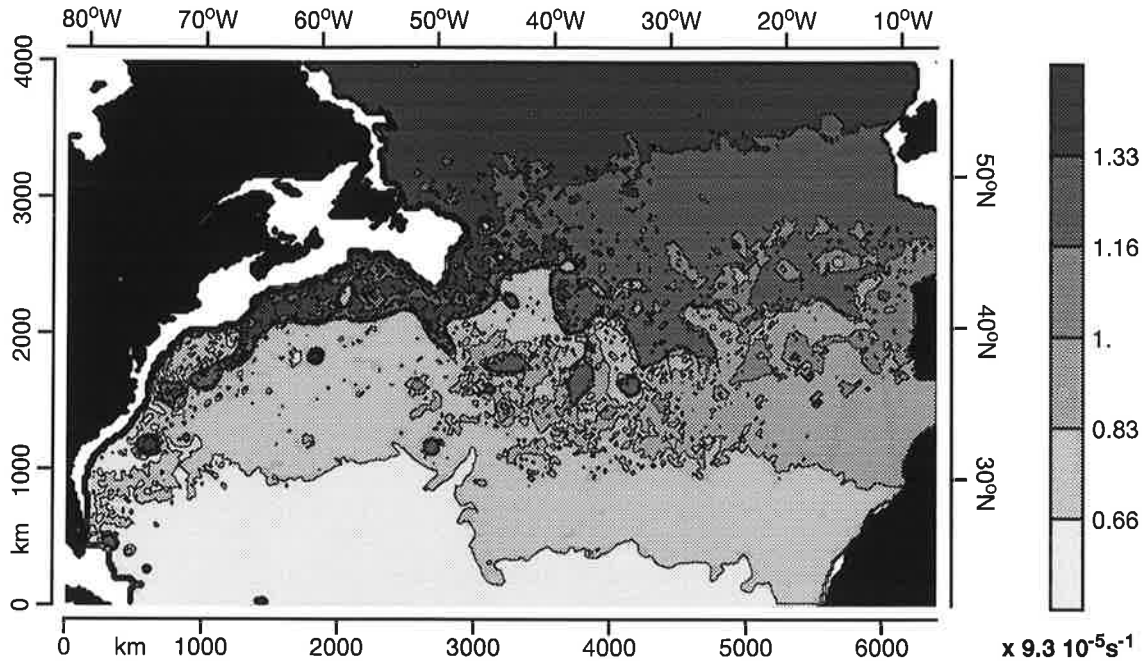
In einem wirbelfreien Ozean ohne externe Einflüsse wäre zu erwarten, daß die Strömungen entlang der Linien konstanter potentieller Vorticity erfolgen würden, d. h.,  $\bar{q} = f(\bar{\psi})$  oder umgekehrt  $\bar{\psi} = g(\bar{q})$ . Nur der Wirbeltransport, Windschub und – in Regionen, in denen diese Terme groß genug sind – Boden- und laterale Reibung ermöglichen, daß die mittleren Strömungen (siehe Abb. 13a) die Konturlinien der potentiellen Vorticity kreuzen.

Die mittlere potentielle Vorticity der Oberschicht ist im weniger aktiven östlichen Bereich von der planetaren Vorticity dominiert. Die starken Vorticitygradienten in der Jet-Region stellen, wie gesagt, ein Hindernis für die Wasserelemente wegen deren Quasi-Vorticityerhaltung dar, wenn sie diese ausgeprägte Vorticitygrenze überqueren sollen. Wie viele von den Wasserkörpern diese Linie tatsächlich überqueren, hängt davon ab, wie stark die Wirbelaktivität ist. Diese Beschränkung ist im gebildeten "Vorticity-Plateau" im südwestlichen Rezirkulationsbereich daher bei weitem nicht so extrem. Solche großen Regionen mit homogener potentieller Vorticity wurden schon von den Zirkulationstheorien von Rhines und Holland (1979) und Rhines und Young (1982) vorausgesagt.

Transport von potentieller Vorticity  
durch das Wirbelfeld



**Abbildung 37:** Mittlere potentielle Vorticity (geteilt durch die jeweilige Schichtdicke) der Oberschicht (oberes Bild) und der Bodenschicht (unteres Bild).  $9.3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  entspricht der planetaren Vorticity bei 40°N im Modell.



**Abbildung 38:** Momentaufnahme der potentiellen Vorticity der Oberschicht (geteilt durch die Schichtdicke) im Tage 19200.

Von McDowell et al. (1982) erstellte "Vorticitykarten" des Nordatlantiks, die auf Beobachtungsdaten der potentiellen Dichte  $\sigma_\theta$  beruhen, zeigen eine in groben Zügen ähnliche Struktur der mittleren potentiellen Vorticity in der Oberschicht: Starke Gradienten bei 40°N und eine Region im westlichen Teil mit fast konstanter Vorticity zwischen 25° und 35°N (siehe Abb. 39). Dabei wurde vorausgesetzt, daß der Stretching-Term (siehe GL 2) in Raumskalen überwiegt, die viel größer sind als der barokline Rossby-Radius. Außerdem wurde eine Finite-Differenzen-Form verwendet:

$$\bar{q} \approx \frac{f}{\rho_0} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \approx \frac{f \Delta \sigma_\theta}{\Delta p} \quad (\text{GL 51})$$

in der die Dicke einer Schicht als Druckunterschied  $\Delta p$  ausgedrückt wird. Man muß außerdem berücksichtigen, daß in diesen Bildern auch die Einflüsse der thermohalinen Zirkulation enthalten sind.

In der Oberschicht ist ebenfalls eine am Ende des Jets gelegene Region hervorzuheben, in der von der planetarischen Vorticity bestimmte Vorticitygradient sogar leicht umgekehrt wird. Die Ursache dafür ist, daß die Wasserelemente, die an der westlichen Randströmung wegen der lateralen Reibung stark an potentieller Vorticity gewonnen haben, am Ende des Jets die Region erreichen, in der die entstandenen Wirbel noch mit einem Teil der vorher gewonnenen Vorticity südwestwärts wandern. Dies ist deutlich in Abb. 38 zu beobachten. Die hier simu-



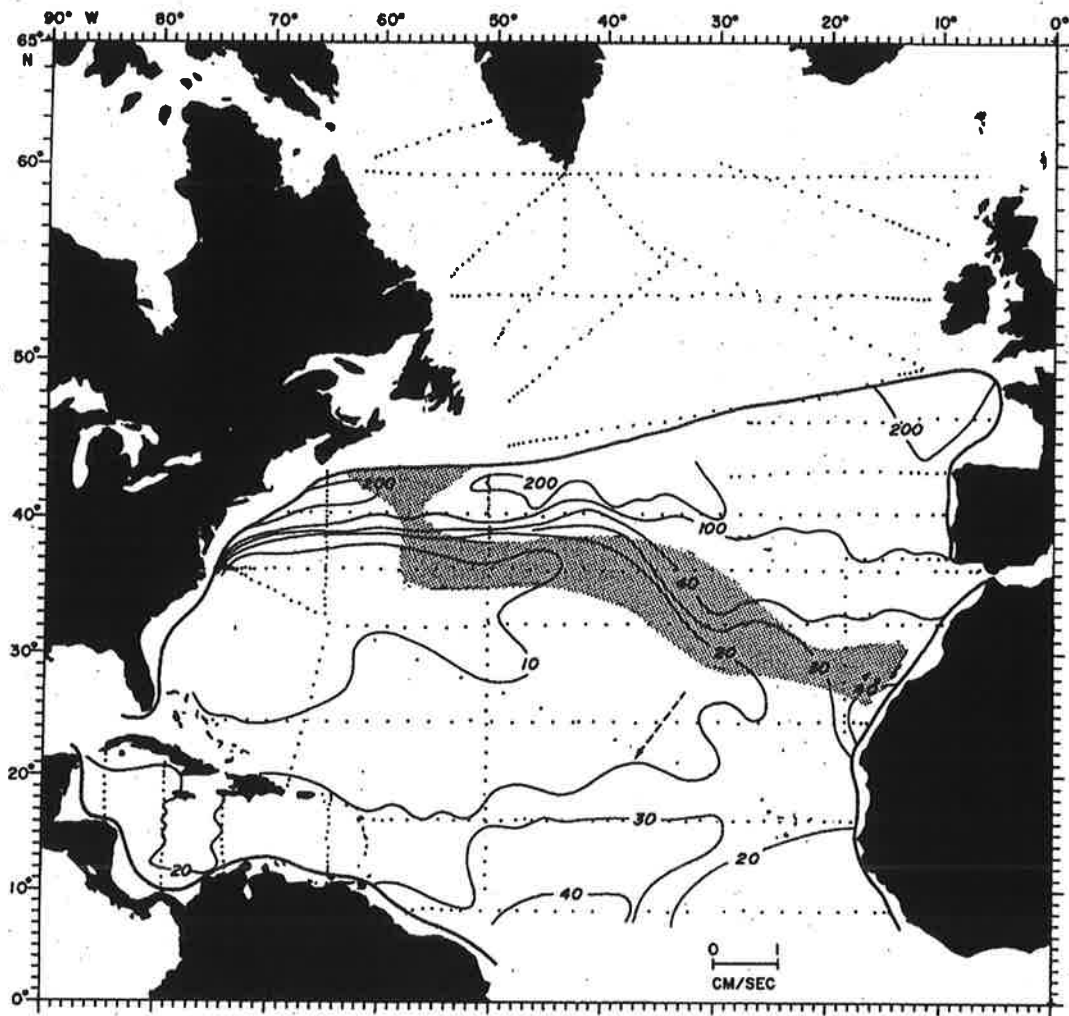
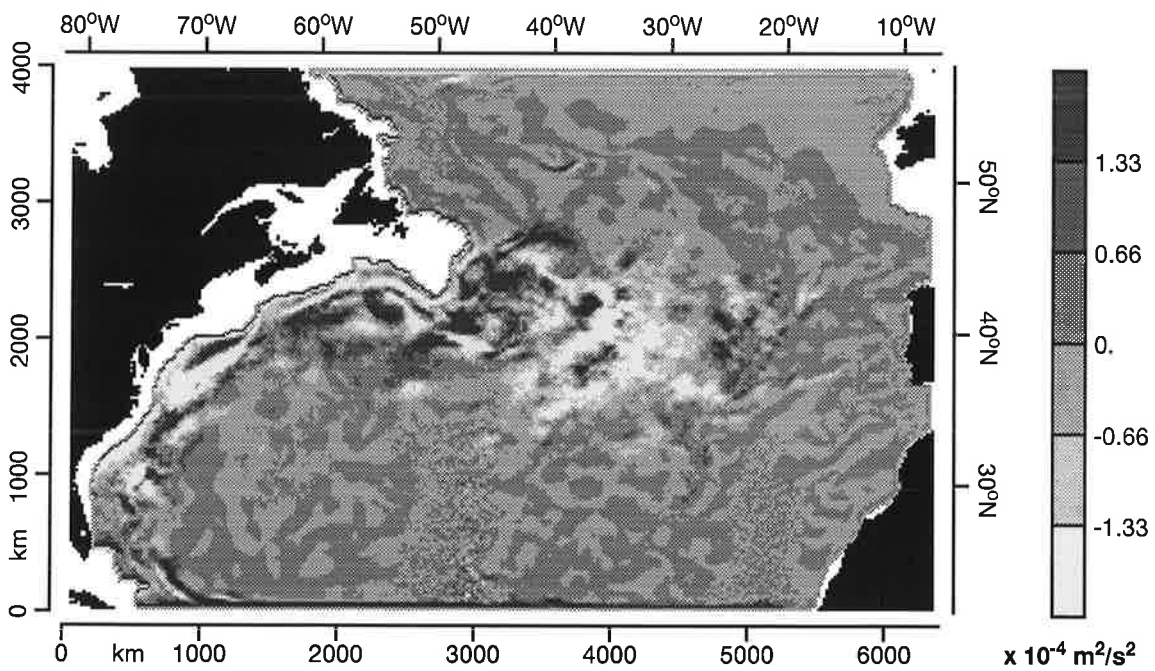
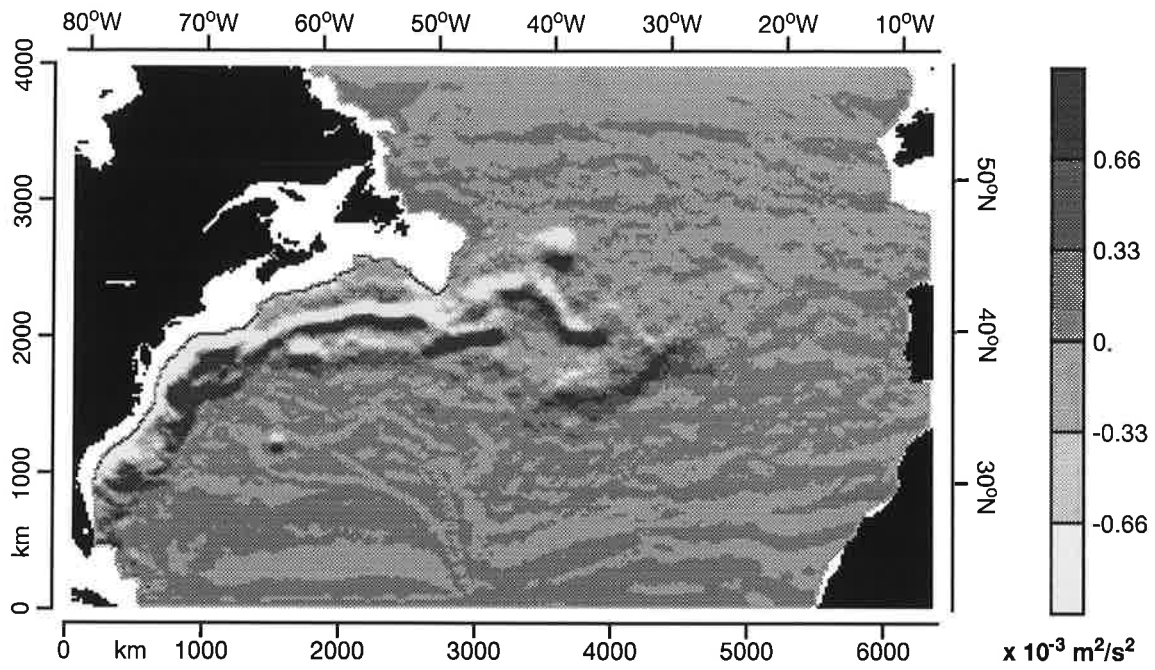


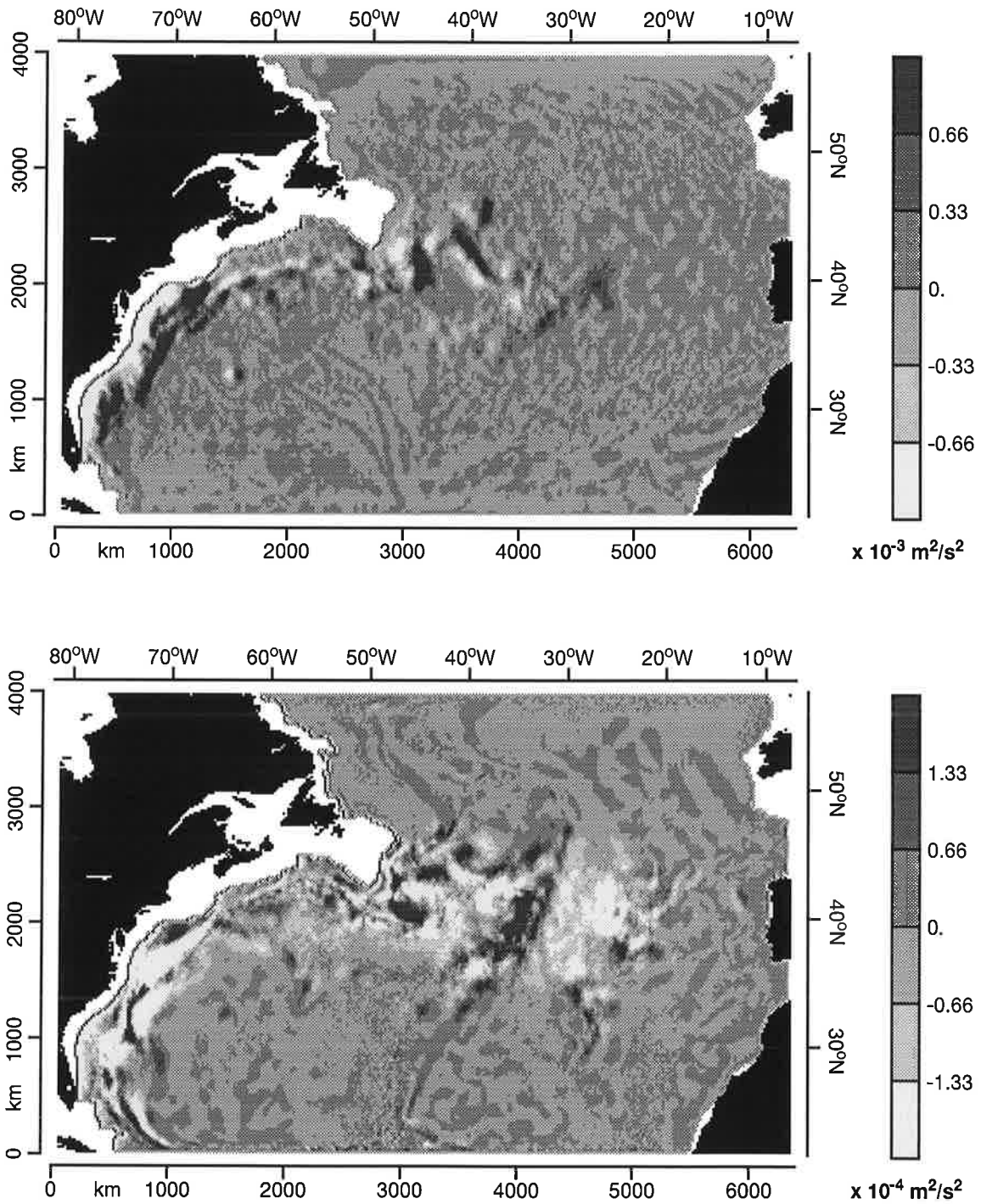
Abbildung 39: Aus Beobachtungsdaten ermittelte potentielle Vorticity der Schicht zwischen  $\sigma_\theta = 26.3$  und  $26.5$  im Nordatlantik nach McDowell et al. (1982).

lierte “Umkehrung” des normalen nordwärtigen Vorticitygradienten stimmt auch mit Ergebnissen anderer quasigeostrophischer Modelle (Holland und Rhines, 1980) überein. Sie ist ebenfalls in Abb. 39 (Beobachtungsdaten) erkennbar. Solche Regionen mit großer Wirbelaktivität, in denen die Wasserelemente dazu neigen, die Linien gleicher Vorticity zu kreuzen, sind charakteristisch für die geostrophische Turbulenz, bei der die Vorticity, im Gegensatz zur Energie, von den großen Skalen zu den kleineren transportiert wird (Rhines, 1979; Salmon, 1982).

In Abb. 40a und 40b sind jeweils die zonalen Komponenten  $\overline{u'_i q'_i}$  und meridionalen Komponenten  $\overline{v'_i q'_i}$  des Transports von potentieller Vorticity dargestellt. Die Mittelungsperiode beträgt 6000 Tage, wobei nur Felder aller 10 Tage für die Mittelung herangezogen wurden. Angesichts dieser Bilder erscheint die Rolle der Wirbel besonders bemerkenswert. Die Vor-



**Abbildung 40a:** Zonaler Fluß der potentiellen Vorticity. Oberes Bild: Oberschicht; unteres Bild: Bodenschicht.



**Abbildung 40b:** Meridionaler Fluß der potentiellen Vorticity. Oberes Bild: Oberschicht; unteres Bild: Bodenschicht.

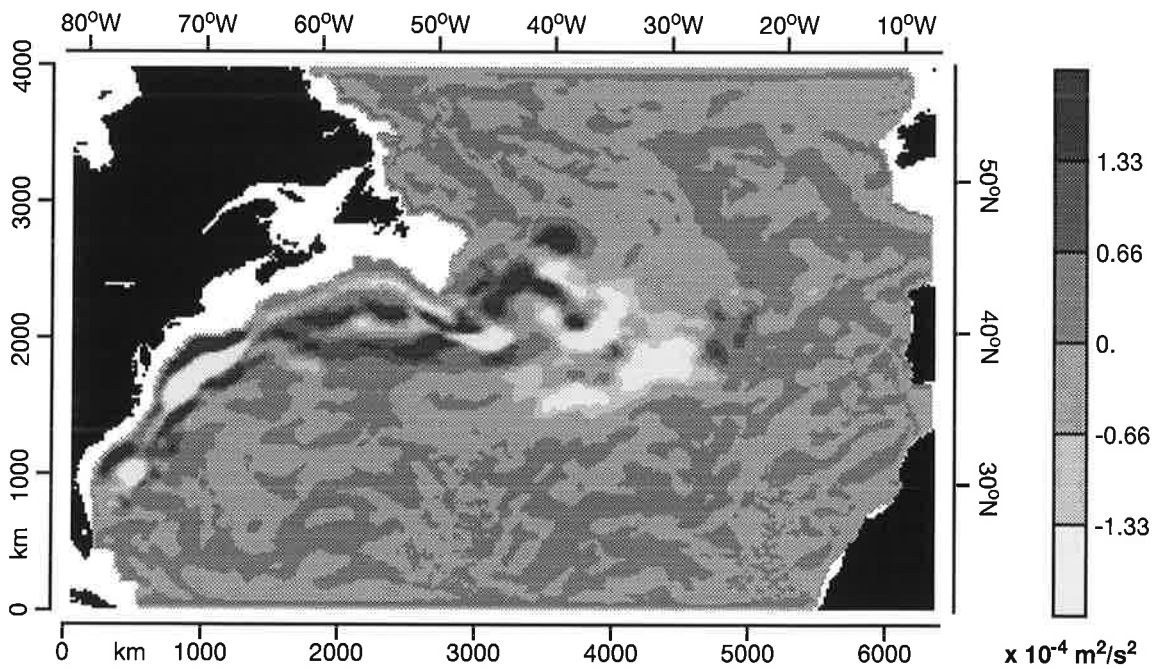
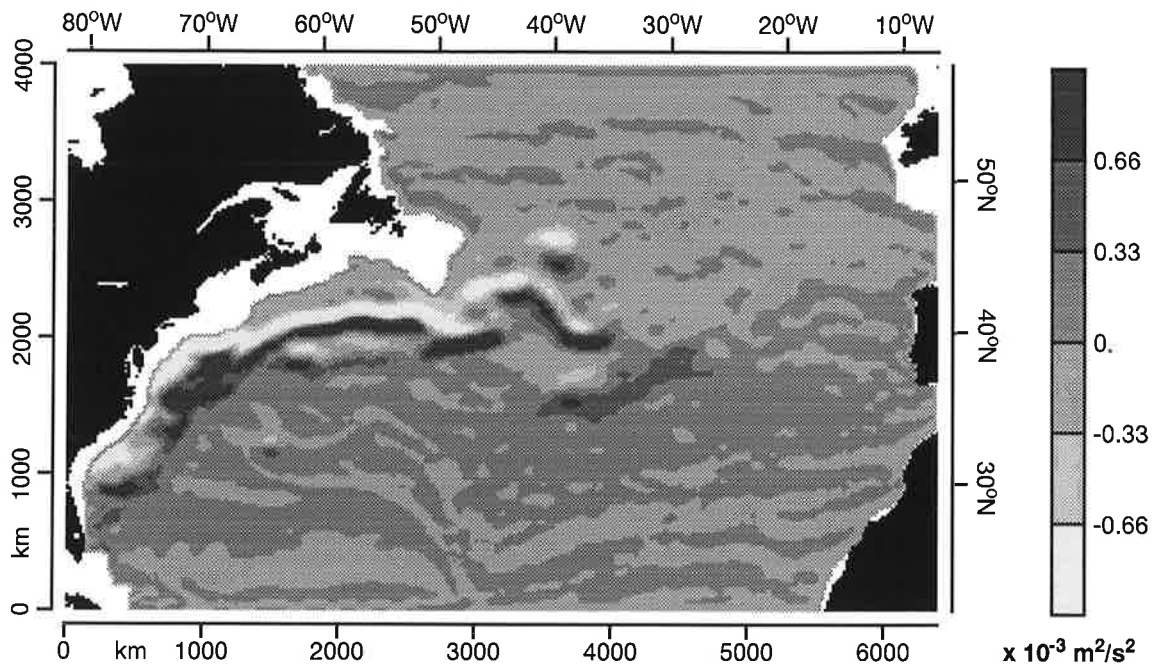
ticityflüsse sind im dynamischen Gleichgewichtszustand sehr gering mit Ausnahme der Regionen in der Nähe des Jets. Trotzdem reichen sie aus, um die Tiefenzirkulation aufrechtzuerhalten. Das heißt nicht, daß sie auch während der wichtigen Phase des "Spin-up" des Ozeans so klein waren.

Das Bild der mittleren potentiellen Vorticity in der Bodenschicht ist offensichtlich in erster Linie von der Bodentopographie bestimmt. Die planetarische Vorticity spielt eine zweitrangige Rolle. Die Tiefenzirkulation folgt in der Tat (siehe Abb. 13a) sehr eng den Linien gleicher Tiefe. Die energiereichere Strömung bleibt größtenteils auf das westliche Becken beschränkt. Diese Bilder sind aus diesem Grund nicht so einleuchtend wie im Falle der Oberschicht. Trotzdem spielen die Wirbel hier eine ähnliche Rolle beim Transport von potentieller Vorticity wie in der Oberschicht (siehe Abb. 40a und 40b). Die turbulenten Regionen der Zirkulation sind ebenfalls in Abb. 14a (kinetische Energie der Wirbel) zu sehen. Da die Bodentopographie eine große Einschränkung darstellt, ist ein Vergleich mit quasigeostrophischen Modellen mit ebenem Boden, in denen mehrere Zirkulationszellen auftreten (Holland und Rhines, 1980), nicht direkt gegeben.

Im Transport von potentieller Vorticity sind sowohl der Transport von relativer Vorticity als auch der Fluß des Stretching-Terms enthalten (siehe GL 2). Beide Elemente können so interpretiert werden, daß der Fluß von relativer Vorticity mit dem horizontalen Transport von Impuls assoziiert werden kann, während der "Stretching-Fluß" mit dem vertikalen Transport von Impuls in Verbindung gebracht werden kann, der unter den quasigeostrophischen Voraussetzungen auch einem horizontalen Wärmefluß gleichbedeutend ist. Aus diesem Grund enthält bereits eine mögliche Parameterisierung des Transports von potentieller Vorticity die Parameterisierung beider Faktoren in sich (Wolff et al., 1991; Holland und Rhines, 1980).

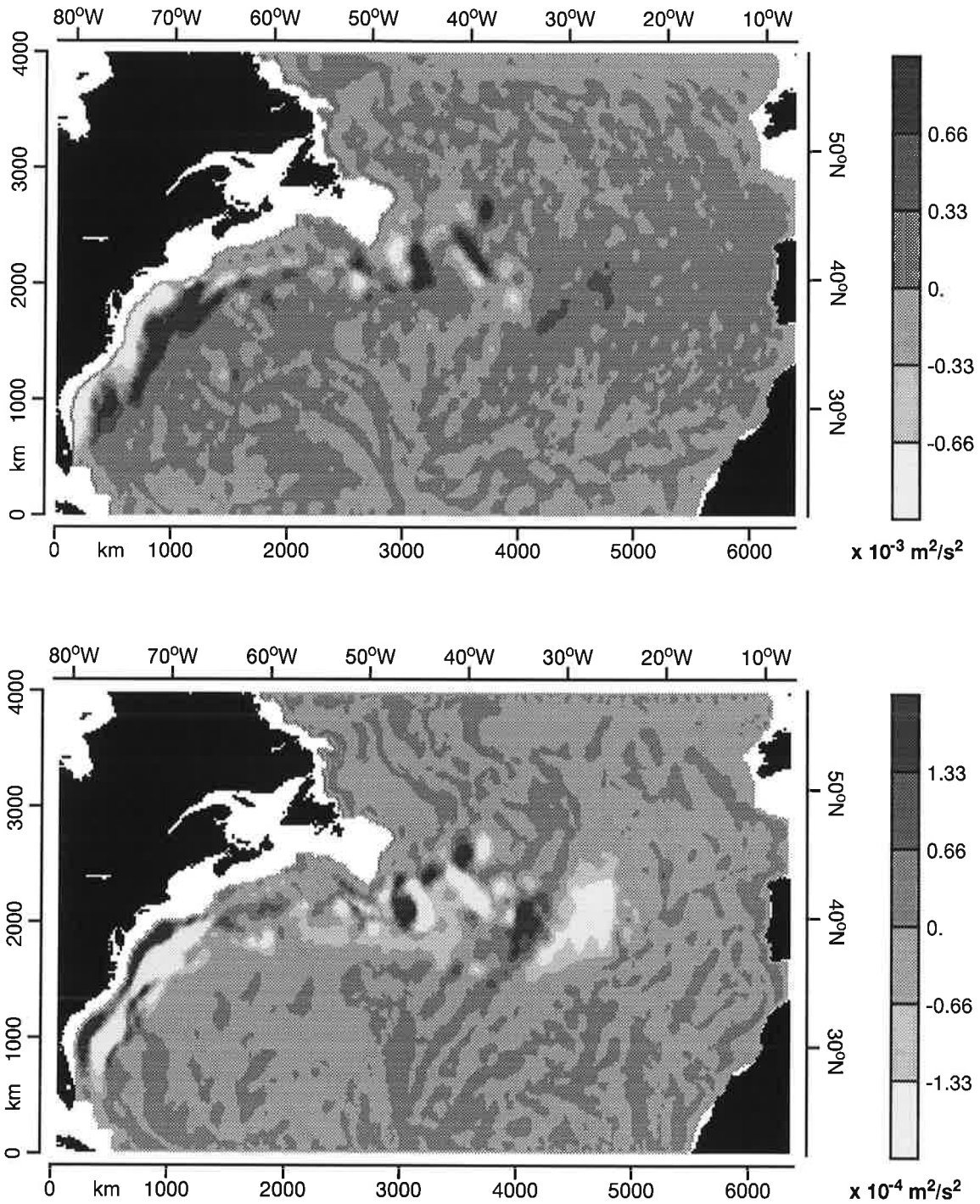
Um feststellen zu können, welcher der beiden Terme im Gesamttransport der dominierende ist, sind in Abb. 41a und 41b die zonalen und meridionalen Komponenten des Flusses des Stretching-Terms dargestellt. Es stellt sich heraus, daß der Beitrag der relativen Vorticity kleinskaliger und schwächer ist, als der des Stretching-Terms. Die großskalige Struktur des Stretching-Flusses prägt weitgehend das Gesamtbild des Transportes von potentieller Vorticity. Die Approximationen, die in dieser Hinsicht bei der Erstellung der Vorticitykarten von McDowell et al. (1982) gemacht worden waren, werden damit bestätigt. Ebenso bestätigt werden in diesem Zusammenhang die theoretischen Überlegungen von Rhines und Holland (1979), der vertikale Fluß von Impuls würde unter normalen Bedingungen meistens die dominierende Komponente sein.

Die Zirkulation in der Bodenschicht ist, wie oben erläutert, ausschließlich von der Wirbelaktivität angetrieben, da es in diesem Modell keine vertikale Reibung mit der Oberschicht gibt. Es



**Abbildung 41a:** Zonaler Fluß des Stretching-Terms der potentiellen Vorticity. Oberes Bild: Oberschicht; unteres Bild: Bodenschicht.





**Abbildung 41b:** Meridionaler Fluß des Stretching-Terms der potentiellen Vorticity. Oberes Bild: Oberschicht; unteres Bild: Bodenschicht.

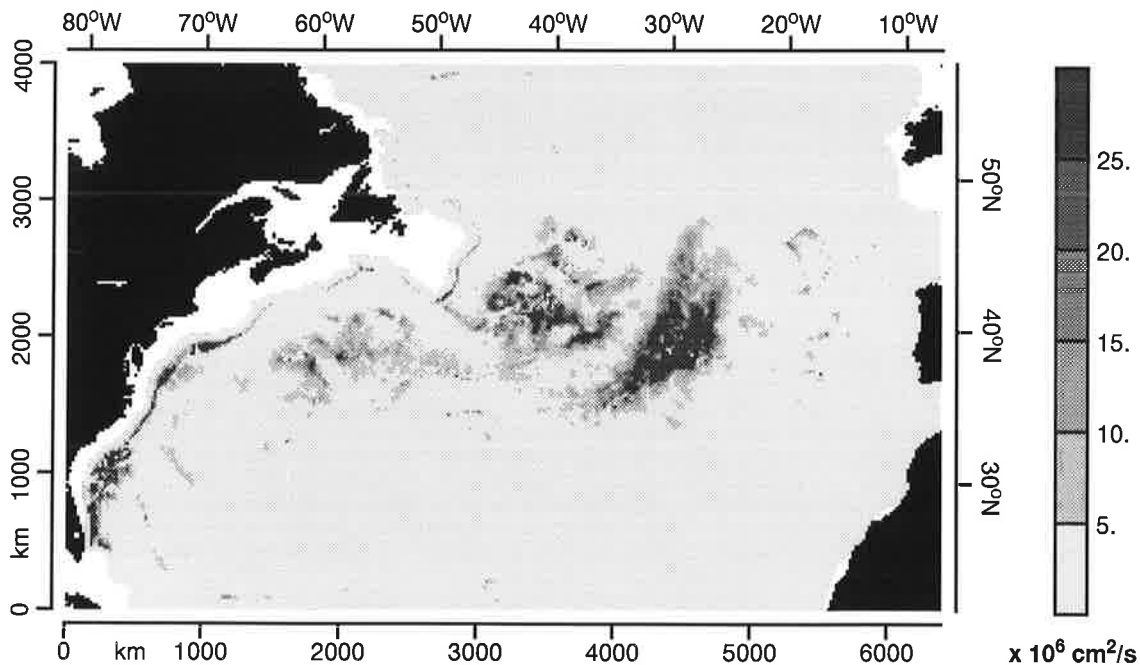
besteht kein anderer Prozeß, der einen vertikalen Impulstransport bewirken kann. Man kann in diesem Zusammenhang einen Lagrange'schen Diffusionskoeffizienten (wie in GL 43 erörtert) einführen. Wenn man die Reibung vernachlässigt, sieht GL 50 wie folgt aus:

$$\bar{V}_2 \cdot \nabla \bar{q}_2 = -\nabla \cdot (\bar{V}_2' q_2') = \nabla \cdot (\kappa \nabla \bar{q}_2) \quad (\text{GL 52})$$

Unter diesen Voraussetzungen sollte der Diffusionskoeffizient  $\kappa$  dem folgenden Austausch-  
koeffizient gleichen (siehe Holland und Rhines, 1980), der in Abb. 42 dargestellt wird:

$$A = \frac{-\bar{V}_2' q_2' \cdot \nabla \bar{q}_2}{|\nabla \bar{q}_2|^2} \quad (\text{GL 53})$$

Dieser Austauschkoeffizient ist fast überall positiv und erreicht die maximalen Werte bei 40°N zwischen 50° und 30°W und an der Ostküste Nordamerikas, an der die Wirbelaktivität am größten ist. Es besteht dabei eine sehr gute Übereinstimmung mit der kinetischen Energie der Wirbel in der Bodenschicht, die in Abb. 14a gezeigt wurde. Die maximalen Werte um  $2.5 \times 10^7 \text{ cm}^2/\text{s}$  decken sich gut mit den Ergebnissen aus anderen quasigeostrophischen Modellen (Holland und Rhines, 1980) und mit den in dieser Tiefe leider selteneren Beobachtungsdaten (Freeland et al., 1975; Riser und Rossby, 1983; Richardson, 1991, 1993).



**Abbildung 42:** Austauschkoeffizient der Bodenschicht.

## 5.2 Globaler Vorticity- und Wärmetransport

Um einen besseren Überblick über die Größenordnung der Vorticitytransporte in der Modellsimulation zu ermöglichen und die Nettoeffekte der erwähnten lateralen und vertikalen Impulsflüsse zu erfassen, werden deren einzelne Komponenten großflächig integriert.

Es stellt sich in den Untersuchungen dieser Art (Harrison, 1978; Harrison und Holland, 1981; Holland und Rhines, 1980) dennoch immer das Problem, nach welchem Kriterium die einzelnen Integrationsbereiche zu bestimmen sind. Es ist dabei sehr schwer, schon bei Modellen mit ebenem Boden und einfacheren Rändern objektive Grenzen zwischen Regionen mit unterschiedlichen Eigenschaften zu ziehen und daraus klare Rückschlüsse auf die Dynamik zu gewinnen. Aus diesem Grund ist bei dieser Modellsimulation in jeder Schicht der Integrationsbereich nur in zwei Regionen geteilt, eine nördlich und eine südlich des 40. Breitengrades. Sie entsprechen annähernd den vom Windstress in der Oberschicht erzeugten zyklonalen und antizyklonalen Zellen (siehe Abb. 13a).

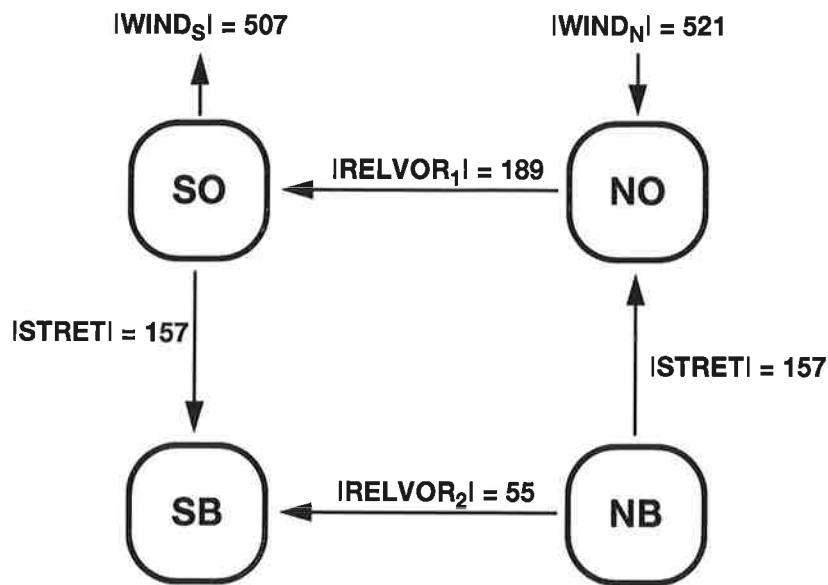
Unter Berücksichtigung des Zirkulationstheorems entsprechen die einzelnen Komponenten der flächenintegrierten Divergenz des Vorticitytransports den linienintegrierten meridionalen Vorticityflüssen durch den 40. Breitengrad:

$$\begin{aligned} \text{RELVOR}_i &= H_1 \int_{40^{\circ}\text{N}} \overline{v'_i \cdot \nabla^2 \psi'_i} dx \\ \text{STRET} &= \frac{f_0^2}{g'} \int_{40^{\circ}\text{N}} \overline{v'_1 \cdot (\psi'_1 - \psi'_2)} dx = \frac{f_0^2}{g'} \int_{40^{\circ}\text{N}} \overline{v'_2 \cdot (\psi'_1 - \psi'_2)} dx \end{aligned} \quad (\text{GL 54})$$

Die einzelnen Komponenten sind in Abb. 43 zusammengefaßt. Darin wird zum Vergleich die Wirkung des Windstress in jeder Region ("WIND"), d. h., die flächenintegrierte Rotation des Windstress, gezeigt. SO entspricht der südlichen Region in der Oberschicht, NO der nördlichen Region in der Oberschicht, SB der südlichen Region in der Bodenschicht und NB der nördlichen Region in der Bodenschicht. Diese Vorticityflüsse spiegeln den Transport von antizyklonalen Wirbeln nordwärts bzw. von zyklonalen Wirbeln südwärts durch den Jet in der Oberschicht wider. Dabei können die antizyklonalen Wirbel als Warmwasseranomalien und die zyklonalen als Kaltwasseranomalien betrachtet werden.

Sowohl der meridionale Fluß der relativen Vorticity, der der meridionalen Advektion von Impuls entspricht, wie auch der meridionale Fluß des Stretching-Terms, der dem vertikalen Transport von Impuls (dem sogenannten "Eddy-Form-Drag") in jeder Region entspricht und der schließlich die Tiefenzirkulation ermöglicht, sind vergleichbar mit dem Einfluß des Windstress. Der Bodenschicht wird antizyklonale Vorticity in der nördlichen Region und zyklono-



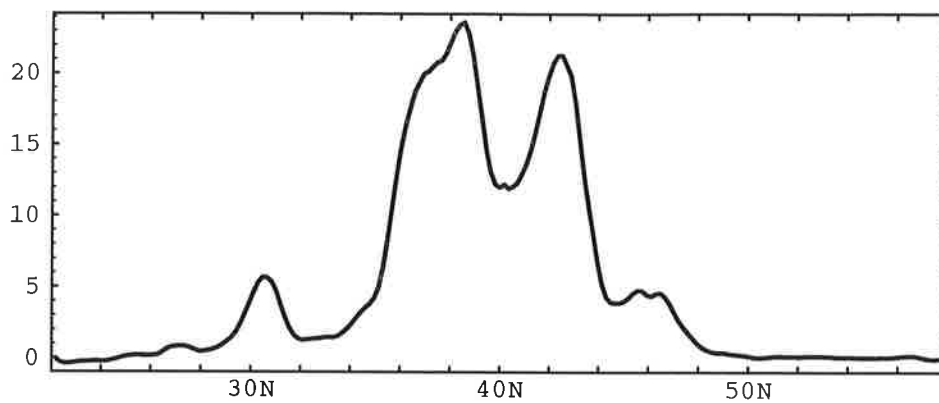


**Abbildung 43:** Globale Vorticitybilanz der Wirbel (siehe Text). Einheiten:  $\text{m}^3/\text{s}^2$ .

nale Vorticity in der südlichen Region aus der Oberschicht zugeführt. In beiden Schichten kommt ein südwärtiger Vorticitytransport zustande. Nur der Transport der relativen Vorticity durch die Wirbel in der Bodenschicht ergibt, wie erwartet, einen geringeren Betrag. Es gibt im allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit den von Holland und Rhines (1980) errechneten Werten, wenn man bedenkt, daß ihr Modell nur 1000 km x 2000 km umfaßt. Der vertikale Fluß und der meridionale Fluß von Impuls in der Bodenschicht spielen in diesem Modell jedoch eine verhältnismäßig größere Rolle.

Eine interessante Frage ist die meridionale Abhängigkeit des mittleren Wärmetransports durch das Wirbelfeld. Der Wärmetransport in einem quasigeostrophischen Modell, das keine thermohaline Zirkulation beinhaltet, wird als Transport der Anomalien der Tiefe der Thermokline in den Wirbeln, die dem Stretching-Term entspricht, simuliert. Dieser Term kann auf ähnliche Art und Weise ermittelt werden, wie bereits in der Gleichung GL 54 für den 40. Breitengrad geschehen.

Unter der Annahme, daß der Temperaturunterschied zwischen den beiden Schichten 10 K, und da die Wärmekapazität ungefähr  $4 \times 10^6 \text{ W s/m}^3 \text{ K}$  und  $1/f_0$  ca.  $10^4 \text{ s}$  betragen, würde der meridionale Wärmetransport durch das Wirbelfeld pro Längeneinheit den in Abb. 44 gezeigten Verlauf aufweisen. Die Wirbelaktivität, die für die zwei großen Maxima um  $40^\circ\text{N}$  verantwortlich ist, trägt mit ungefähr 0.14 PW ( $1 \text{ PW} = 10^{15} \text{ W}$ ) zum mittleren Wärmetransport im Nordatlantik in dieser Modellsimulation bei. Drijfhout (1994) kommt mit einem auf den primitiven Gleichungen beruhenden mehrschichtigen isopyknischen Modell des westlichen



**Abbildung 44:** Meridionaler Wärmefluß (pro Längeneinheit) durch das Wirbelfeld. Einheiten:  $\times 10^6$  W/m.

Nordatlantiks zu einem maximalen Wärmetransport durch das Wirbelfeld von knapp 0.2 PW bei  $35^\circ\text{N}$ . Zum Vergleich erreicht der mit globalen Modellen, die ebenfalls die thermohaline Zirkulation berücksichtigen, errechnete Wärmetransport der mittleren Zirkulation eine Größenordnung von 0.7 PW im Nordatlantik (Maier-Reimer et al., 1993). Der aus Beobachtungen geschätzte Wärmetransport der mittleren Zirkulation im Nordatlantik beträgt ca. 1 PW (Hall und Bryden, 1982).

Das in dieser Arbeit beschriebene Modell gibt auch die Möglichkeit, sich die mit dem Wärmetransport verbundene Verteilung der Oberflächentemperatur vorzustellen: Die Wasserelemente in der Modelloberschicht würden dabei nicht nur potentielle Vorticity, sondern auch Wärme als Quasierhaltungsgröße transportieren. Es würde nur Wärme mit den benachbarten Wasserkörpern und in gewissem Maße mit der Atmosphäre ausgetauscht, die vereinfacht, als nordwärtiges Temperaturgefälle, eine ähnliche Form wie hier die Rotation des Windstresses hätte. Das Endresultat dieses durchgeführten Experiments ist eine Verteilung der mittleren Oberflächentemperatur, welche jener der mittleren potentiellen Vorticity der Oberschicht (siehe Abb. 37) sehr gleicht, wobei hohe potentielle Vorticity niedriger Temperatur entspricht. Die potentielle Vorticity zeigt weiterhin die gleichen Merkmale wie bei der wirklich gemessenen Oberflächentemperatur, nämlich sehr große Gradienten im westlichen Teil und eine im Vergleich mit der Ostküste Nordamerikas wärmere Wassertemperatur an der Küste Nordeuropas (siehe z. B. Emery, 1983; Peixoto und Oort, 1984).

---

### Zusammenfassung und Ausblick

---

Die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

- Es wurde ein wirbelauflösendes, auf den quasigeostrophischen Gleichungen basierendes Zirkulationsmodell des Ozeans vorgestellt (Maier-Reimer, 1988), das sich von der Konzeption her deutlich von den bisher bekannten quasigeostrophischen Modellen unterscheidet. Während die herkömmlichen Modelle ausschließlich mit Euler'schen Koordinaten bei der Lösung der Gleichungen arbeiten, werden hier sowohl Euler'sche als auch Lagrange'sche Koordinaten verwendet. Die Grundlage für dieses Modell stellt die Betrachtung des Ozeans als eine finite Zahl Wasserkörper dar, die potentielle Vorticity transportieren ("Vorticitytracer"). Die Lagrange'sche potentielle Vorticity im vorliegenden Modell wird dadurch strikt erhalten. Das Modell ist für die Untersuchung der windgetriebenen Zirkulation im Nordatlantik zwischen  $22^{\circ}\text{N}$  und  $58^{\circ}\text{N}$  verwendet worden.
- Es wurde nachgewiesen, daß mit diesem Modell eine numerisch stabile Lösung erreicht werden kann. Die numerische Viskosität, die bei den herkömmlichen Modellen die Stabilität gewährleistet, läßt sich auf ein Minimum reduzieren.
- Das einfache, auf nur zwei Schichten beschränkte Modell liefert gleichwohl eine wirklichkeitsnahe Simulation der zonalen und meridionalen Skalen der windgetriebenen Zirkulation im Nordatlantik, die bei herkömmlichen Modellen nur unter einer viel höheren vertikalen Auflösung zu erreichen ist. Die für diese letzten Modelle mit ähnlicher Auflösung charakteristische zonale Unterschätzung sowohl der mittleren Zirkulation als auch der mit der Wirbelaktivität verbundenen transienten Felder tritt beim hiesigen zentralen, mit der kleinsten numerischen Viskosität behafteten Experiment nicht auf.
- Es wurde gezeigt, daß ebenfalls ein dynamisches Gleichgewicht bei der zeitabhängigen Verteilung der Tracer im zentralen Experiment erzielt wurde. Die Gültigkeit der hier dargestellten Euler'schen Felder wird durch die erreichte flächendeckende Verteilung der Tracer bekräftigt. Sie wird offenbar von der Dynamik teilweise beeinflusst. Das Modell erfordert keine ständig oder schrittweise wiederholte Neuverteilung der

Wasserelemente, zumindest innerhalb von Zeitperioden, die kleiner als 80 Modelljahre sind.

- Die Analyse der Vorticitybilanzen der individuellen Wasserkörper stützen die Annahme, daß eine möglichst korrekte Behandlung der Advektionsterme und der damit verbundenen Lagrange'schen potentiellen Vorticity in quasigeostrophischen Modellen für eine richtige Simulation der mesoskaligen Wirbel von großer Bedeutung ist.
- Im Gegensatz zu Modellen mit Euler'schen Koordinaten sorgt dieses Modell zusätzlich für die gesamte Lagrange'sche Information, die einen direkten Vergleich mit einer großen Zahl Lagrange'scher Beobachtungsdaten erleichtert. Sie ermöglicht eine auf der Lagrange'schen Statistik basierende Parameterisierung der sogenannten Wirbel-diffusion, die für globale, nicht wirbelaufösende Modelle besonders wichtig ist. Es konnte eine sehr große Ähnlichkeit zwischen vom Modell simulierten Golfstromtrajektorien und beobachteten Trajektorien von an der Oberfläche schwimmenden Bojen (Richardson, 1981) festgestellt werden.
- Die Turbulenzeigenschaften des im Modell simulierten Golfstroms wurden mit Hilfe einer statistischen Untersuchung von Partikelensembles bestimmt und mit Ergebnissen verglichen, die auf Beobachtungsdaten im zentralen und östlichen Nordatlantik beruhen (Krauss und Böning, 1987). Es wurde eine insgesamt gute Übereinstimmung bei den Lagrange'schen Zeit- und Raumskalen und den Energiespektren gefunden. Das Modell ergibt jedoch eine im Vergleich zu den Beobachtungen größere Anisotropie zwischen den zonalen und meridionalen Skalen.
- Die aus der statistischen Untersuchung abgeleiteten Diffusionskoeffizienten wurden als potentielle Parameterisierung der Wirbeldiffusion vorgeschlagen. Sie wurden mit Ergebnissen verschiedener Autoren, die auf Beobachtungen beruhen, verglichen (Collin de Verdiere, 1983; Freeland et al., 1975; Krauss und Böning, 1987; McWilliams et al., 1983; Riser und Rossby, 1983). Die beobachtete Wirbeldiffusion wird vom Modell, mit Ausnahme des kanarischen Beckens, quantitativ richtig wiedergegeben. Beobachtete turbulenzarme Regionen wie z. B. die Sargassosee im südwestlichen Nordatlantik werden in den Modellergebnissen ebenso wiedergefunden.
- Es wurde ein Zusammenhang zwischen den Diffusionskoeffizienten und der charakteristischen Turbulenzgeschwindigkeit hergestellt. Eine lineare Anpassung ergab im Vergleich mit Beobachtungsdaten leicht größere Diffusionskoeffizienten bei gleicher Turbulenzgeschwindigkeit. Ein deutlicher Zusammenhang zwischen den Diffusionskoeffizienten und der Scherung des mittleren Geschwindigkeitsfeldes wurde dagegen nicht gefunden.

- Es wurde eine Untersuchung der Vorticitytransporte im Modell vorgenommen. Die daraus resultierenden Ergebnisse stehen in Einklang mit der von mehreren Autoren formulierten Zirkulationstheorie (Rhines und Holland, 1979; Holland und Rhines, 1980; Rhines und Young, 1982; Holland et al., 1984). Der Transport von potentieller Vorticity durch das Wirbelfeld modifiziert im Modell, wie in der Theorie behauptet und durch Beobachtungen (McDowell et al., 1982) verifiziert, den nordwärtigen Gradienten von planetarischer Vorticity. Zum einen läßt dieser Transport Regionen mit weitgehend homogener potentieller Vorticity entstehen. Andererseits bewirkt er aber auch, wie es bei den Stabilitätsexperimenten zum Vorschein kam, eine Verstärkung des mittleren Golfstroms.
- Die Rolle des Wirbelfeldes in den quasigeostrophischen Modellen als Antrieb der Tiefenzirkulation wurde ebenfalls hervorgehoben. Ein Diffusionskoeffizient in der Bodenschicht wurde auf der Basis des Transports von potentieller Vorticity berechnet. Die auf diese Weise gefundenen Diffusionskoeffizienten zeigen eine ähnliche räumliche Struktur wie bei der kinetischen Energie des Wirbelfeldes in der Bodenschicht und erreichen Werte, die mit Ergebnissen aus anderen Modellen und Beobachtungsdaten vergleichbar sind.
- Zuletzt wurde eine einfache globale Bilanz der Vorticityflüsse erstellt, die mit dem horizontalen und vertikalen Impulstransport, welcher in diesen Modellen gleichbedeutend mit dem horizontalen Wärmetransport ist, zusammenhängen. Der maximale meridionale Wärmetransport durch das Wirbelfeld im Nordatlantik beläuft sich demzufolge auf 0.1-0.2 PW.
- Die in dieser Arbeit gezeigten Ergebnisse bezüglich der kinetischen Energie des Wirbelfeldes, der Golfstromtrajektorien, der statistischen Turbulenzeigenschaften und des Transports von potentieller Vorticity lassen den Schluß zu, daß dieses auf Lagrange'schen Vorticitytracern basierende numerische Modell dafür geeignet ist, die geostrophische mesoskalige Turbulenz richtig zu reproduzieren. Sie unterstreichen außerdem, wie wichtig das Wirbelfeld für eine korrekte Simulation der mittleren Zirkulation ist.

Die vorliegende Arbeit eröffnet eine breite Palette an denkbaren Fortsetzungsmöglichkeiten. Einige davon könnten wie folgt aussehen:

- Eine Studie der Energieflüsse im Modell, die eine Gegenüberstellung mit ähnlichen Untersuchungen (siehe z. B. Holland, 1978; Holland und Schmitz, 1985) erlauben würde, wäre wünschenswert. In diesem Zusammenhang wäre auch interessant, Sensitivitätsexperimente mit geändertem Reibungsschema durchzuführen.
- Die zweckmäßige Erhöhung der vertikalen Modellauflösung auf mindestens drei Schichten wäre sinnvoll:
  - Erstens, um feststellen zu können, welche Änderungen in der Zirkulation auftreten.
  - Zweitens, um eine bessere Untersuchung der Vorticitydynamik in Schichten zu ermöglichen, auf welche keinerlei externe Faktoren (Wind und Bodenreibung) Einfluß nehmen können. Dabei wäre es von Interesse, eine Studie der Partikeltransporte durch den Jet in den verschiedenen Schichten, wie von Lozier und Vercovici (1992) und Bower und Rossby (1989) diskutiert, durchzuführen.
  - Drittens, um einen besseren Vergleich mit Bojendaten in verschiedenen Tiefen (Oberfläche, 700 m, 2000 m; siehe z. B. Richardson, 1985, 1991) zu erleichtern.
- Interessant wäre ebenfalls, beobachtete Winddaten im Modell zu verwenden, um den Jahreszyklus und die Veränderungen in der Wirbelproduktion zu erfassen (siehe z. B. Large et al., 1991; Müller und Frankignoul, 1981).
- Eine Datenassimilierung in das Modell einzubauen, wäre angebracht, um Vorhersagestudien zu betreiben. Dabei wäre eine Untersuchung der Einflüsse einer Neuverteilung der Wasserkörper auf die darauffolgende Zirkulation (eine Art "Kaltstartproblem") besonders wichtig.
- Einer Überlegung wert wäre der Versuch, einen zusätzlichen thermohalinen Antrieb in den quasigeostrophischen Gleichungen zu berücksichtigen (siehe z. B. Luyten und Stommel, 1986). Verdunstung oder Frischwasserzufuhr üben durch die Änderung der Schichtdicke auch eine Wirkung auf die potentielle Vorticity der Oberschicht aus.
- Reizvoll könnte fernerhin die Umstellung des Modells auf periodische zonale Randbedingungen sein, um auch den Antarktischen Zirkumpolarstrom simulieren zu können. Ein erster Ansatz zur Untersuchung dieser Frage wurde bereits realisiert. Die korrekte Simulation der mit dem Vorticitytransport verbundenen horizontalen und vertikalen Impulstransporte ist in dieser Geometrie ausgesprochen wichtig, um den dynamischen Gleichgewichtszustand und den meridionalen Wärmetransport, der nur von den Wirbeln bewerkstelligt wird, begreifen zu können (Wolff et al., 1991; Morrow et al., 1992).

- Apel, J.R. (1988).** Principles of Ocean Physics. Academic Press (London).
- Arakawa, A. and V.R. Lamb (1977).** Computational design of the basic dynamical processes of the UCLA general circulation model. *Meth. Comput. Phys.*, vol. 17, 173.
- Armi, L. and D.B. Haidvogel (1982).** Effects of variable and anisotropic diffusivities in a steady-state diffusion model. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 12, 785.
- Babiano, A., C. Basdevant, P. Le Roy and R. Sadourny (1987).** Single-particle dispersion, Lagrangian structure function and Lagrangian energy spectrum in two-dimensional incompressible turbulence. *J. Mar. Res.*, vol. 45, 107.
- Barnier, B., B.L. Hua and C. Le Provost (1991).** On the catalytic role of high baroclinic modes in eddy-driven large-scale circulations. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 21, 976.
- Beckmann, A., C.W. Böning, C. Köberle and J. Willebrand (1994).** Effects of increased horizontal resolution in a simulation of the North Atlantic Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, 326.
- Böning, C.W. and M.D. Cox (1988).** Particle dispersion and mixing of conservative properties in an eddy-resolving model. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 18, 320.
- Bower, A.S. (1989).** Potential vorticity balances and horizontal divergence along particle trajectories in Gulf Stream meanders east of Cape Hatteras. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 19, 1669.
- Bower, A.S. and T. Rossby (1989).** Evidence of cross-frontal exchange processes in the gulf stream based on isopycnal RAFOS float data. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 19, 1177.
- Brügge, B. (1995).** Near-surface mean circulation and kinetic energy in the central North Atlantic from drifter data. *J. Geophys. Res.*, vol. 100, 20543.
- Cheney, R.E., J.G. Marsh and B.D. Beckley (1983).** Global mesoscale variability from colinear tracks of SEASAT altimeter data. *J. Geophys. Res.*, vol. 88-C7, 4343.
- Colin de Verdiere, A. (1983).** Lagrangian eddy statistics from surface drifters in the eastern North Atlantic. *J. Mar. Res.*, vol. 41, 375.
- Corrsin, S. (1974).** Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence. In: *Advances in Geophysics*, vol. 18A (F.N. Frenkiel and R.E. Munn, eds.). Academic Press (London).

- Cummins, P.F. and L.A. Mysak (1988).** A quasi-geostrophic circulation model of the north-east pacific. Part I: A preliminary numerical experiment. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 18, 1261.
- Danabasoglu, G., J.C. McWilliams and P.R. Gent (1994).** The role of mesoscale tracer transports in the global ocean circulation. *Science*, vol. 264, 1123.
- Dantzler, H.L. (1977).** Potential energy maxima in the tropical and subtropical north atlantic. *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 512.
- Davis, R.E. (1983).** Oceanic property transport, Lagrangian particle statistics, and their prediction. *J. Mar. Res.*, vol. 41, 163.
- Davis, R.E. (1987).** Modelling eddy transport of passive tracers. *J. Mar. Res.*, vol. 45, 635.
- Dippner, J.W. (1990).** Eddy-resolving modelling with dynamically active tracers. *Continental Shelf Res.*, vol. 10, 87.
- Drijfhout, S.S. (1994).** Heat transport by mesoscale eddies in an ocean circulation model. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, 353.
- Emery, W.J. (1983).** On the geographical variability of the upper level mean and eddy fields in the North Atlantic and North Pacific. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 13, 269.
- Figuroa, H.A. (1994).** Eddy resolution versus eddy diffusion in a double gyre GCM. Part II: Mixing of pasive tracers. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, 387.
- Figuroa, H.A. and D.B. Olson (1994).** Eddy resolution versus eddy diffusion in a double gyre GCM. Part I: The Lagrangian and Eulerian description. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, 371.
- Freeland, H.J., P.B. Rhines and T. Rossby (1975).** Statistical observations of the trajectories of neutrally buoyant floats in the North Atlantic. *J. Mar. Res.*, vol. 33, 383.
- Gill, A.E. (1982).** Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press (London).
- Haidvogel, D.B. (1982).** On the feasibility of particle tracking in eulerian ocean models. *Ocean Modelling*, vol. 45, 4 (unpublished manuscript).
- Haidvogel, D.B. and T. Keffer (1984).** Tracer dispersal by mid-ocean mesoscale eddies. Part I. Ensemble statistics. *Dyn. Atmos. Oceans*, vol. 8, 1.
- Hall, M.M. and H.L. Bryden (1982).** Direct estimates and mechanisms of ocean heat transport. *Deep-Sea Res.*, vol. 29-3A, 339.
- Harrison, D.E. (1978).** On the diffusion parameterization of mesoscale eddy effects from a numerical ocean experiment. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 8, 913.



- Harrison, D.E. and W.R. Holland (1981).** Regional eddy vorticity transport and the equilibrium vorticity budgets of a numerical model ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 11, 190.
- Hellerman, S. and M. Rosenstein (1983).** Normal monthly wind stress over the world ocean with error estimates. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 13, 1093.
- Holland, W.R. (1978).** The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean - numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 8, 363.
- Holland, W.R. (1985).** Simulation of Mesoscale Ocean Variability in Mid-Latitude Gyres. In: *Advances in Geophysics*, vol. 28, Part A (Ed.: S. Manabe): Issues in Atmospheric and Oceanic Modeling. Academic Press.
- Holland, W.R. (1986).** Quasigeostrophic Modelling of Eddy-Resolved Ocean Circulation. In: *Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Advanced Physical Oceanographic Numerical Modelling* (Ed.: J.J. O'Brien). D. Reidel Pub., Hingham., Mass. .
- Holland, W.R., D.E. Harrison and A.J. Semtner (1983).** Eddy-Resolving Models of Large-Scale Ocean Circulation. In: *Eddies in Marine Science* (Ed.: A.R. Robinson). Springer Verlag (Berlin, Heidelberg).
- Holland, W.R., T. Keffer and P.B. Rhines (1984).** Dynamics of the oceanic general circulation: the potential vorticity field. *Nature*, vol. 308, 698.
- Holland, W.R. and P.B. Rhines (1980).** An example of eddy-induced ocean circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 10, 1010.
- Holland, W.R. and W.J. Schmitz (1985).** Zonal penetration scale of model midlatitude jets. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 15, 1859.
- Hua, B.L. (1994).** The conservation of potential vorticity along lagrangian trajectories in simulations of eddy-driven flows. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 24, 498.
- Jenkins, G.M. and D.G. Watts (1968).** Spectral Analysis and its Applications. Holden-Day (S. Francisco).
- Krauss, W. and C.W. Böning (1987).** Lagrangian properties of eddy fields in the northern North Atlantic as deduced from satellite-tracked buoys. *J. Mar. Res.*, vol. 45, 259.
- Krauss, W. and J. Meincke (1982).** Drifting buoy trajectories in the North Atlantic Current. *Nature*, vol. 296, 737.
- Large, W.G., W.R. Holland and J.C. Evans (1991).** Quasi-geostrophic ocean response to real wind forcing: The effects of temporal smoothing. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 21, 998.

- Lesieur, M. (1990).** Turbulence in Fluids. Kluwer Academic Publishers. vol. 1 in “*Fluid Mechanics and Its Applications*”.
- Lozier, M.S. and S.C. Riser (1989).** Potential vorticity dynamics of boundary currents in a quasi-geostrophic ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 19, 1373.
- Lozier, M.S. and S.C. Riser (1990).** Potential vorticity sources and sinks in a quasigeostrophic ocean: beyond western boundary currents. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 20, 1608.
- Lozier, M.S. and D. Vercovici (1992).** Particle exchange in an unstable jet. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 22, 1506.
- Luyten, J.R. and H. Stommel (1986).** Gyres driven by combined wind and bouyancy flux. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 16, 1551.
- Maier-Reimer, E. (1988).** Vorticity balance in gulfstream trajectories. *Ocean Modelling*, vol. 76, 9 (unpublished manuscript).
- Maier-Reimer, E. , U. Mikolajewicz and K. Hasselmann (1993).** Mean circulation of the Hamburg LSG OGCM and its sensitivity to the thermohaline circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 23, 731.
- Maier-Reimer, E. and J. Sündermann (1982).** On Tracer Methods in Computational Hydrodynamics. In: *Engineering applications of computational hydraulics* (Eds.: M.B. Abbott and J.A. Cunge), Pitman, London.
- McDowell, S., P.B. Rhines and T. Keffer (1982).** North Atlantic potential vorticity and its relation to the general circulation. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 12, 1417.
- McWilliams, J.C., E.D. Brown, H.L. Bryden, C.C. Ebbesmeyer, B.A. Elliot, R.H. Heintz, B.L. Hua, K.D. Leaman, E.J. Lindstrom, J.R. Luyten, S.E. McDowell, W.B. Owens, H. Perkins, J.F. Price, L. Regier, S.C. Riser, H.T. Rossby, T.B. Sanford C.Y. Shen, B.A. Taft and J.C. Van Leer (1983).** The Local Dynamics of Eddies in the Western North Atlantic. In: *Eddies in Marine Science* (Ed.: A.R. Robinson). Springer Verlag (Berlin, Heidelberg), pp. 92-113.
- McWilliams, J.C., W.R. Holland and J.H.S. Chow (1978).** A description of numerical antarctic circumpolar currents. *Dyn. Atmos. Oceans*, vol. 2, 213.
- Morrow, R., J. Church, R. Coleman, D. Chelton and N. White (1992).** Eddy momentum flux and its contribution to the Southern Ocean momentum balance. *Nature*, vol. 357, 482.
- Müller, P. and C. Frankignoul (1981).** Direct atmospheric forcing of geostrophic eddies. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 11, 287.

- Neelin, J.D. and J. Marotzke (1994).** Representing ocean eddies in climate models. *Science*, vol. 264, 1099.
- Owens, W.B. (1984).** A synoptic and statistical description of the Gulf Stream and subtropical gyre using S.O.F.A.R. floats. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 14, 104.
- Pavia, E.G. and B. Cushman-Roisin (1988).** Modelling of oceanic fronts using a particle method. *J. Geophys. Res.*, vol. 93, 3554.
- Pedlosky, J. (1979).** Geophysical Fluid Dynamics. Springer Verlag (Berlin).
- Peixoto, J.P. and A.H. Oort (1984).** Physics of climate. *Rev. Modern Physics*, vol. 56, 365.
- Peskin, R.L. (1974).** Numerical simulation of lagrangian turbulent quantities in two and three dimensions. In: *Advances in Geophysics*, vol. 18A, Academic Press (London).
- Press, W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling (1986).** Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press (New York).
- Ramsden, D. and G. Holloway (1991).** Timestepping lagrangian particles in two dimensional eulerian flow fields. *J. Comput. Phys.*, vol. 95, 101.
- Rhines, P.B. (1979).** Geostrophic turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 11, 401.
- Rhines, P.B. and W.R. Holland (1979).** A theoretical discussion of eddy-driven mean flows. *Dyn. Atmos. Oceans*, vol. 3, 289.
- Rhines, P.B. and W.R. Young (1979).** A theory of wind-driven ocean circulation, I. Mid-ocean gyres. *J. Mar. Res.*, vol. 40, 559.
- Rhines, P.B. and W.R. Young (1982).** Homogenization of potential vorticity in planetary gyres. *J. Fluid Mech.*, vol. 122, 347.
- Richardson, P.L. (1981).** Gulf Stream trajectories measured with free-drifting buoys. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 11, 999.
- Richardson, P.L. (1983).** Eddy kinetic energy in the North Atlantic from surface drifters. *J. Geophys. Res.*, vol. 88-C7, 4355.
- Richardson, P.L. (1985).** Average velocity and transport of the Gulf Stream near 55°W. *J. Mar. Res.*, vol. 43, 83.
- Richardson, P.L. (1991).** S.O.F.A.R. floats give a new view of ocean eddies. *Oceanus*, vol. 34, 23 (Spring).
- Richardson, P.L. (1993).** A census of eddies observed in North Atlantic SOFAR float data. *Prog. Oceanogr.*, vol. 31, 1.
- Riley, J.J. and S. Corrsin (1974).** The relation of turbulent diffusivities to lagrangian velocity statistics for the simplest shear flow. *J. Geophys. Res.*, vol. 79, 1768.

- Riser, S.C. and H.T. Rossby (1983).** Quasi-Lagrangian structure and variability of the subtropical western North Atlantic circulation. *J. Mar. Res.*, vol. 41, 127.
- Rossby, T. , A.S. Bower and P.T. Shaw (1985).** Particle Pathways in the Gulf Stream. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, vol. 66, 1106.
- Rossby, H.T. , S.C. Riser and A.J. Mariano (1983).** The Western North Atlantic - A Lagrangian Viewpoint. In: *Eddies in Marine Science*. Springer Verlag (Berlin-Heidelberg).
- Salmon, R. (1982).** Geostrophic Turbulence. In: *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course LXXX, Topics in Ocean Physics. North-Holland Publishing Co. (Amsterdam-New York-Oxford).
- Schmitz, W.J. (1984).** Abyssal eddy kinetic energy in the North Atlantic. *J. Mar. Res.*, vol. 42, 509.
- Schmitz, W.J. and W.R. Holland (1982).** A preliminary comparison of selected numerical eddy-resolving general circulation experiments with observations. *J. Mar. Res.*, vol. 40, 75.
- Schmitz, W.J. and W.R. Holland (1986).** Observed and modeled mesoscale variability near the Gulf Stream and Kuroshio extension. *J. Geophys. Res.*, vol. 91-C8, 9624.
- Shaw, P.-T. and H.T. Rossby (1984).** Towards a Lagrangian description of the Gulf Stream. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 14, 528.
- Stommel, H. (1965).** The Gulf Stream. University of California Press.
- Taylor, G.I. (1921).** Diffusion by continuous movements. *Proc. London Math. Soc.*, vol. 20, 196.
- Washington, W.M. and C.L. Parkinson (1986).** An Introduction to Three-Dimensional Climate Modelling. University Science Books (California).
- Willebrand, J. (1978).** Temporal and spatial scales of the wind field over the North Pacific and North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 8, 1080.
- Wolff, J.O., E. Maier-Reimer and D.J. Olbers (1991).** Wind-driven flow over topography in a zonal  $\beta$ -plane channel: A quasi-geostrophic model of the antarctic circumpolar current. *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 21, 236.
- Young, W.R. (1987).** Baroclinic Theories of the Wind Driven Circulation. In: *General Circulation of the Ocean*. Ed.: H.D.I. Abarbanel and W.R. Young. Springer Verlag.

## Lösung der elliptischen Differenzialgleichungen mit unregelmäßigen Rändern mittels FFT

Der erste Schritt in der numerischen Lösung der zweidimensionalen Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \phi(x, y) - \lambda^2 \phi(x, y) = R(x, y) \quad (\text{GLA1})$$

ist, den Integrationsraum zu diskretisieren und die Gleichung in eine Finite-Differenzen-Gleichung umzuwandeln. Bei einem rechteckigen Integrationsbereich mit einer regelmäßigen Verteilung der Gitterpunkte sieht die Finite-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung des Laplace-Operators (siehe Abb. A1) wie folgt aus:

$$\nabla^2 \phi(i, j) \approx \frac{\phi(i-1, j) + \phi(i+1, j) + \phi(i, j-1) + \phi(i, j+1) - 4\phi(i, j)}{d^2} \quad (\text{GLA2})$$

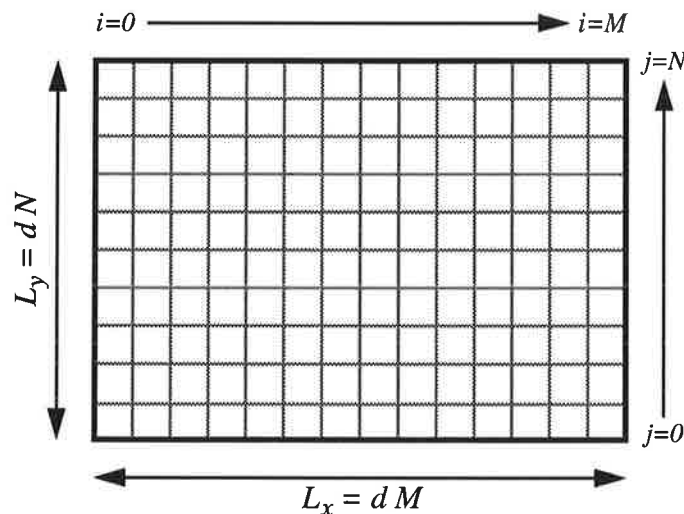


Abbildung A1: Rechteckiger Integrationsbereich.

Die Lösung der resultierenden Finite-Differenzen-Gleichung mit Dirichlet'schen Randbedingungen (d. h.,  $\phi(i, j) = 0$ , wenn  $i = 0, M$  oder  $j = 0, N$ ) erfolgt, indem man von diskretisierten zweidimensionalen Fourier-Transformationen Gebrauch macht. Die Fourier-Transformationen der Funktionen  $\phi$  und  $R$  lauten:

$$\phi(i, j) = \frac{2}{M} \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\phi}(m, n) \sin \frac{\pi i m}{M} \sin \frac{\pi j n}{N} \quad (\text{GL A3})$$

und

$$R(i, j) = \frac{2}{M} \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{R}(m, n) \sin \frac{\pi i m}{M} \sin \frac{\pi j n}{N} \quad (\text{GL A4})$$

Bringt man solche Fourier-Serien in die Finite-Differenzen-Gleichung ein, dann ist die im Fourier-Raum äquivalente Form von GL A1:

$$\tilde{\phi}(m, n) = \frac{\tilde{R}(m, n) d^2}{2 \cos \frac{\pi m}{M} + 2 \cos \frac{\pi n}{N} - 4 - \lambda^2 d^2} \quad (\text{GL A5})$$

Man braucht daher nur die Fourier-Transformation der Quellenfunktion  $R$  zu ermitteln,

$$\tilde{R}(m, n) = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} R(i, j) \sin \frac{\pi i m}{M} \sin \frac{\pi j n}{N} \quad (\text{GL A6})$$

um anhand der Gleichung A5 und einer umgekehrten Fourier-Transformation die gesuchte Funktion  $\phi$  finden zu können. Die Fourier-Transformationen werden mittels der numerischen FFT-Prozedur ("Fast-Fourier-Transform") durchgeführt, die sich besonders effizient auf Vektorrechnern implementieren läßt (siehe z. B. Press et al., 1986).

Da diese direkte Vorgehensweise in einem Integrationsbereich, dessen Randlinien nicht mit konstanten Koordinatenlinien übereinstimmen (wie z. B. in Abb. A2, wo es  $K$  Küstenpunkte  $(i_k, j_k)$  gibt, die nicht am rechteckigen Rahmen liegen), nicht direkt befolgt werden kann, muß wie anschließend geschildert verfahren werden.

Zuerst werden die folgenden  $K$  Gleichungen im rechteckigen Integrationsbereich wie oben beschrieben gelöst:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_k(i, j) - \lambda^2 \phi_k(i, j) &= \delta_k(i, j) \\ \delta_k(i, j) &= \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{wenn} \quad (i, j) = (i_k, j_k) \end{aligned} \quad (\text{GL A7})$$

Die Werte der  $K$  Funktionen an den  $K$  unregelmäßigen Küstengitterpunkten lassen sich in Form einer  $K \times K$  Matrix speichern:

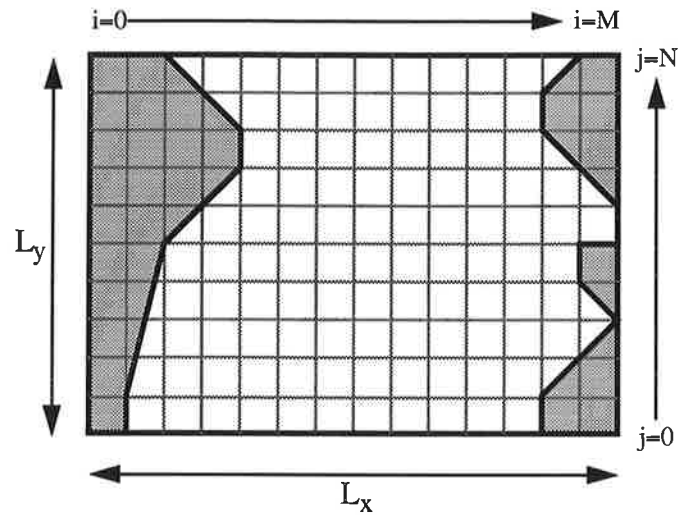


Abbildung A2: Unregelmäßiger Integrationsbereich.

$$M_{K \times K} = \begin{bmatrix} \phi_1(i_1, j_1) & \phi_2(i_1, j_1) & \dots & \phi_K(i_1, j_1) \\ \phi_1(i_2, j_2) & \phi_2(i_2, j_2) & \dots & \phi_K(i_2, j_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(i_K, j_K) & \phi_2(i_K, j_K) & \dots & \phi_K(i_K, j_K) \end{bmatrix} \quad (\text{GL A8})$$

Man kann jetzt im rechteckigen Integrationsbereich ebenfalls eine Lösung zur folgenden Gleichung finden:

$$\nabla^2 \phi_0(i, j) - \lambda^2 \phi_0(i, j) = R(i, j) \quad (\text{GL A9})$$

Die Lösung der Gleichung im unregelmäßigen Integrationsbereich läßt sich als eine lineare Kombination der vorhergehenden Funktionen ausdrücken:

$$\phi = \phi_0 + \hat{\phi} \quad (\text{GL A10})$$

wobei

$$\hat{\phi} = \sum_{k=1}^K c_k \phi_k \quad (\text{GL A11})$$

Die  $K$  verschiedenen  $c_k$ -Faktoren lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen ermitteln:

$$\phi(i, j)|_{\text{boundary}} \equiv \phi(i_k, j_k) = 0 \quad (\text{GL A12})$$

Es entsteht ein zu lösendes lineares Gleichungssystem:

$$\phi(i_k, j_k) = \phi_0(i_k, j_k) + \sum_{k'=1}^K c_{k'} \phi_{k'}(i_k, j_k) = 0 \quad (\text{GL A13})$$

$$k = 1, 2, \dots, K$$

oder in Matrixform geschrieben:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(i_1, j_1) & \phi_2(i_1, j_1) & \dots & \phi_K(i_1, j_1) \\ \phi_1(i_2, j_2) & \phi_2(i_2, j_2) & \dots & \phi_K(i_2, j_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_1(i_K, j_K) & \phi_2(i_K, j_K) & \dots & \phi_K(i_K, j_K) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_K \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \phi_0(i_1, j_1) \\ \phi_0(i_2, j_2) \\ \dots \\ \phi_0(i_K, j_K) \end{bmatrix} \quad (\text{GL A14})$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus K Gleichungen mit K unbekannt Variablen  $c_k$  und kann wie z. B. in Press et al. (1986) beschrieben gelöst werden.

Zum Schluß stößt man in der Praxis auf das Problem, die Funktion  $\hat{\phi}$  am effizientesten zu berechnen. Die K verschiedenen Funktionen  $\phi_k$  zu speichern und linear zu addieren ist nicht die beste Art und Weise, dies zu bewältigen, wenn man bedenkt, wie groß die Zahl K sein kann (ca. 1000). Angesichts dessen, daß die Funktion  $\hat{\phi}$  folgende Gleichung erfüllt:

$$\nabla^2 \hat{\phi}(i, j) - \lambda^2 \hat{\phi}(i, j) = \hat{R}(i, j) \quad (\text{GL A15})$$

$$\hat{\phi}(i, j) = 0 \quad \text{falls} \quad i = 0, M \quad \text{oder} \quad j = 0, N$$

wobei das Quellenfeld

$$\hat{R}(i, j) = \sum_{k=1}^K c_k \delta_k(i, j) \quad (\text{GL A16})$$

bereits bekannt ist, liegt es nahe, sie durch wiederholte Verwendung der dargelegten Fourier-Transformations-Prozedur zu bestimmen.

Im Gegensatz zum Problem mit dem rechteckigen Integrationsbereich macht die Einführung von "krummen" Küstenlinien die doppelte Anwendung von der auf F.F.T. basierenden Prozedur und zusätzlich die Lösung eines linearen Gleichungssystems erforderlich. Die für die Lösung des Gleichungssystems benötigte Matrix  $M_{K \times K}$  muß ausschließlich einmal vor dem Beginn der zeitlichen Modellintegration bestimmt und gespeichert werden. Es gibt selbstverständlich eine Matrix für den barotropen Modus ( $\lambda=0$ ) und zusätzlich eine andere für jeden baroklinen Modus.



---

## Danksagung

---

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klaus Hasselmann für die Möglichkeit, in einem so renommierten Forschungsinstitut wie dem Max-Planck-Institut für Meteorologie meine Arbeit durchführen zu dürfen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Ernst Maier-Reimer für die aufmerksame Betreuung meiner Arbeit und für das bewiesene große Vertrauen, das ich von ihm in dieser Zeit genossen habe. Für seine freundlichen, ermutigenden Worte in den schwierigen Momenten möchte ich mich hier ausdrücklich bedanken.

Herrn Prof. Dr. J. Sündermann danke ich für die freundliche Bereitschaft zur Begutachtung dieser Arbeit. Für die Hilfe bei der Durchsicht der Arbeit möchte ich Herrn Dr. R. Weisse und Herrn Dr. J. W. Dippner sehr herzlich danken. Herrn Dr. J.-O. Wolff bin ich für die guten Ratschläge dankbar. Für die Hilfe in Fragen graphischer Gestaltung danke ich Herrn J. Wegner.

Ich möchte weiter Herrn Dr. med. S. Pacho und Herrn Dr. med. A. Zorita meinen aufrichtigen Dank aussprechen. Ohne ihr gewissenhaftes Tun wäre ein glückliches Ende dieser Arbeit sicherlich nicht möglich gewesen.

Für ihre persönliche Zuwendung und Freundschaft während dieser Zeit in einem fremden Land möchte ich der Familie von Herrn Prof. Dr. H.-J. Oslage meine tiefe Dankbarkeit ausdrücken.