

Department of Physics and Astronomy  
University of Heidelberg

Bachelor Thesis in Physics  
submitted by

**Jacob Maria Berner**

born in Cologne (Germany)

**2020**

**Design einer Abschirmspule zur Minimierung äußerer  
Magnetfeldeinflüsse bei Präzisions-Penningfallen-Experimenten  
an Helium-3**

This Bachelor Thesis has been carried out by Jacob Maria Berner at the  
*Max Planck Institute for Nuclear Physics* in Heidelberg  
under the supervision of  
Prof. Dr. Klaus Blaum

---

## Design einer Abschirmspule zur Minimierung äußerer Magnetfeldeinflüsse bei Präzisions-Penningfallen-Experimenten an Helium-3

---

Derzeit wird am *Max-Planck-Institut für Kernphysik* ein Experiment zur Messung des magnetischen Kernmoments und des  $g$ -Faktors von Helium-3 vorbereitet und aufgebaut. Dabei sollen sowohl  ${}^3\text{He}^+$  als auch  ${}^3\text{He}^{2+}$  in einer eigens dafür entwickelten Penningfalle untersucht werden. Angestrebt wird eine relative Ungenauigkeit von 1 ppb oder besser. Um dieses Maß an Präzision für das Experiment zu gewährleisten, werden hohe Ansprüche an die Stabilität der experimentellen Parameter gestellt.

Äußere Störungen auf das starke Magnetfeld der Penningfalle sollen dabei durch eine dafür konzipierten Spule bestmöglich abgeschirmt werden. Um die magnetische Flussverhaltung in supraleitenden Kreisen zu nutzen, wurde im Rahmen dieser Arbeit die Geometrie dieser optimiert und die ideale Spulenlänge gefunden.

Die entsprechend gewickelte Spule wurde anschließend zunächst an einem Kaltkopf getestet und ein Abschirmfaktor von mindestens  $S = 52 \pm 4$  konnte ebenso nachgewiesen werden, wie auch eine hohe räumliche Stabilität dessen. Da allerdings die Verwendung eines inhomogenen äußeren Feldes zur Anregung diese Ergebnisse verzerrte, wurde die Spule wiederum nach dem Einbau in den supraleitenden Magneten mit Hilfe eines in der Penningfalle gespeicherten Ions getestet. Dabei sorgte der hohe Abschirmfaktor des Magneten selbst für weiterhin erschwerte Bedingungen. Das Ergebnis  $S = 78_{-74}^{+\infty}$  war zwar ungenau, sprach aber ebenfalls für ein gutes Abschirmverhalten und somit einen zuverlässigen Bestandteil der Magnetfeldstabilisierung im  ${}^3\text{He}$ -Experiment.

---

## Design of a shielding coil for minimization of external magnetic field fluctuations in precision Penning trap experiments with helium-3

---

A new experiment for the measurement of the magnetic moment and the  $g$ -factor of the Helium-3 nucleus is currently under construction at the *Max Planck Institute for Nuclear Physics*.  ${}^3\text{He}^+$  as well as  ${}^3\text{He}^{2+}$  will be investigated in a specifically designed Penning trap. The relative uncertainty of these measured values shall be 1 ppb or better. To achieve this level of precision, very stable experimental parameters are required.

Therefore external disturbance of the Penning trap's high magnetic field should be shielded by a specific coil. To use the magnetic flux conservation in superconducting circuits, the geometry of the coil was in the context of this thesis optimized and its ideal length was estimated.

The accordingly constructed self shielding coil was then tested using a cold head and a shielding factor of  $S = 52 \pm 4$  as well as a good spatial stability of it was verified. Because these results were effected by the use of an inhomogeneous external field, the coil was subsequently tested after installing it into the superconducting magnet with an ion stored in a Penning trap. Here the high shielding factor of the magnet itself caused difficulties. The final result  $S = 78_{-74}^{+\infty}$  is inaccurate, but still good shielding characteristics and therefore an integral part of the magnetic field stability of the  ${}^3\text{He}$ -experiment was ensured.



---

# INHALT

---

TEIL 1 – EINLEITUNG	7
TEIL 2 – DAS PRINZIP DER PENNINGFALLE	9
2.1 Die ideale Penningfalle . . . . .	9
2.2 Der Doppelfallenaufbau . . . . .	12
2.3 Detektion der Teilchen . . . . .	13
TEIL 3 – DIE ENTWICKLUNG DER ABSCHIRMSPULE	15
3.1 Theorie der Abschirmspule . . . . .	15
3.2 Optimierung der Geometrie . . . . .	16
3.3 Resultate der Optimierungssimulationen . . . . .	22
3.4 Fertigung der Spule . . . . .	25
TEIL 4 – TEST AN EINEM PULSROHRKÜHLER	27
4.1 Der Testaufbau . . . . .	27
4.2 Auswertung . . . . .	31
4.3 Axiale Verschiebung des Sensors . . . . .	33
4.4 Beurteilung der Ergebnisse . . . . .	33
TEIL 5 – TEST DER SPULE IM $^3\text{He}$ -EXPERIMENT	35
5.1 Magnetfeldmessungen mit einer Penningfalle . . . . .	35
5.2 Aufbau und Durchführung . . . . .	36
5.3 Ergebnisse der Magnetfeldmessungen . . . . .	38
TEIL 6 – FAZIT	41
LITERATURVERZEICHNIS	43



## Einleitung

Präzisionsexperimente in Penningfallen bieten eine Vielzahl von Möglichkeiten. Die immer genauere Messung von Naturkonstanten bietet etwa eine Grundlage zur Anwendung in allen Teilbereichen der Physik und darüber hinaus. Außerdem ermöglichen solche Experimente das Maß der Genauigkeit für Tests fundamentaler Konzepte des Standardmodells stetig zu erhöhen und stellen als solche einen wesentlichen Beitrag zur Entwicklung der grundlegenden Theorien der Teilchen- und Kernphysik dar. Ein häufig einer solchen Untersuchung unterzogenes Theorem ist das der CPT-Invarianz. Die Symmetrie bei Ladungs-, Paritäts-, und Zeitumkehr impliziert die Gleichheit fundamentaler Eigenschaften von Materie und Antimaterie und kann daher durch Messung einer Größe, wie beispielsweise der Masse eines Teilchens und dessen Antiteilchens, überprüft werden. So wurde etwa der Quotient der Ladung-zu-Massen-Verhältnisse von Proton und Antiproton auf eine relative Genauigkeit von 69 ppt [1] gemessen. Viele weitere derartige Experimente wurden und werden mit steigend genaueren Ergebnissen durchgeführt.

Präzise Messungen an Teilchen bieten auch die Möglichkeit Naturkonstanten immer genauer zu bestimmen. Eine Messung der Masse des Elektrons und des Protons etwa waren bis auf 10 ppt genau [2][3][4]. Diese und ähnliche Ergebnisse bilden auf vielfältige Weise die Grundlage für quantitative Arbeiten in der Physik.

Die Motivation das magnetische Kernmoment des Helium-3-Ions genau zu vermessen ist eine ähnliche [5]. Die Magnetometrie mittels Kernresonanz bietet eine sehr präzise Methode zur Messung magnetischer Felder. Das Verfahren beruht auf der Proportionalität zwischen einem äußeren Magnetfeld und der Präzessionsfrequenz eines Teilchens mit von Null verschiedenem Spin und ist damit in Genauigkeit direkt abhängig von der Kenntnis des magnetischen Moments des verwendeten Teilchens. Zumeist werden die Protonen des in Wasser vorkommenden Wasserstoffs für ebendies verwendet, was durch die gute Kenntnis des  $g$ -Faktors des Protons ermöglicht wird. Eine ähnlich genaue Messung dieser Größe des Helium-3-Kerns soll das Etablieren einer auf diesem Teilchen basierten NMR-Sonde ermöglichen.

Das Verwenden von  $^3\text{He}$  anstelle von Wasser hätte den Vorteil, dass der Einfluss von äußeren Parametern wie der Temperatur geringer ist und auch die geringe Abhängigkeit von chemischer Reinheit sorgt für präzisere Messungen.

Der experimentelle Aufbau soll auch verwendet werden, um  $^3\text{He}^+$  zu untersuchen [6]. Dabei kann der  $g$ -Faktor des verbleibenden, gebundenen Elektrons, sowie der des entsprechend gebundenen Kerns ebenfalls gemessen werden. Auch die Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands kann so mit einer Genauigkeit von 100 ppt untersucht werden. Ziele dieser Messungen sind weitergehende Theorieüberprüfungen zur QED gebundener Teilchen.

Um Teilcheneigenschaften, mit hoher Genauigkeit messen zu können, werden stets auch hohe Ansprüche an die zeitlich Stabilität der experimentellen Parameter gestellt. Äußere Störungen des starken Magnetfeldes, das einen essenziellen Bestandteil des vorgestellten  $^3\text{He}$ -Experiments darstellt, sollen daher mit einer supraleitenden Abschirmspule unterdrückt werden. Die ideale Geometrie für eine solche Spule soll hier zunächst berechnet, jene dann entsprechend gewickelt und schließlich getestet werden.





# Das Prinzip der Penningfalle

## 2.1 Die ideale Penningfalle

Ein zu untersuchendes Teilchen zu isolieren und für eine große Zeit frei im Raum zu speichern bietet eine nützliche Methode, um daran genaue Messungen durchführen zu können. Besonders für geladene Teilchen wurde eine Vielzahl von dafür vorgesehenen Fallen konzipiert. Eine der wichtigsten und die in diesem Experiment verwendete stellt die 1987 von Hans Dehmelt erstmals erfolgreich eingesetzte Penningfalle dar [7].

Das Earnshaw-Theorem [8] hat zur Konsequenz, dass ein bloßes elektrostatisches Feld zur stabilen Speicherung eines Teilchens nicht ausreicht. Für diesen Zweck wird daher ein elektrisches und ein magnetisches Feld zu einer Penningfalle überlagert. Letzteres soll im Fallenzentrum möglichst homogen sein und zwingt geladene Teilchen wegen der auftretenden Lorentz-Kraft auf eine Kreisbahn senkrecht zu den Feldlinien. Wichtige Größe ist dabei die freie Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{q}{m} B, \quad (2.1)$$

mit der ein Teilchen der Ladung  $q$  und Masse  $m$  in einem Magnetfeld der Stärke  $B$  rotiert.

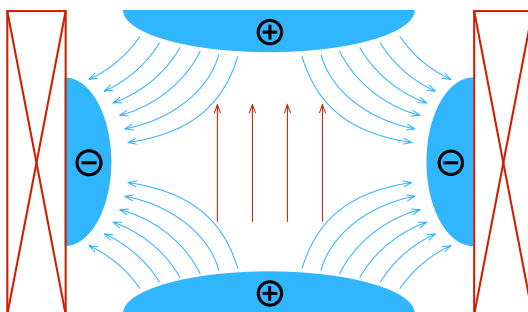


Abb. 2.1: In einer Penningfalle wird ein homogenes Magnetfeld (rot) mit einem elektrostatischen Quadrupolfeld (blau) überlagert.

Zur stabilen Speicherung des Teilchens ist in einer Penningfalle neben dem starken, homogenen, magnetischen Feld ein schwächeres elektrostatisches Quadrupolfeld nötig. Abbildung 2.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer solchen Falle. Liegt zwischen den positiv und negativ geladenen Elektroden die Spannung  $U_0$  an, so oszilliert das Teilchen entlang der  $z$ -Achse mit der axialen Frequenz

$$\omega_z = \sqrt{\frac{q}{m} \frac{U_0}{d^2}}, \quad (2.2)$$

wobei außerdem ein von der Elektrodengeometrie abhängiger Parameter  $d$  auftritt.

Die genaue Form der Elektroden kann allgemein unterschiedlich sein. In einer klassischen Penningfalle wird die Anordnung von hyperbolischen Elektroden verwendet, die idealisiert ein Potential der Form

$$\Phi(\rho, z) = \frac{U_0}{2d^2} \left( z^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \quad (2.3)$$

erzeugen. In zylindrischen Koordinaten beschreibt  $\rho$  hier den Radius und  $z$  die axiale Koordinate. In diesem Fall gilt außerdem

$$d^2 = \frac{1}{2} \left( z_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} \right) \quad (2.4)$$

mit der Endkappenhöhe  $z_0$  und dem Kammerradius  $\rho_0$ , wie in Abbildung 2.2 dargestellt.

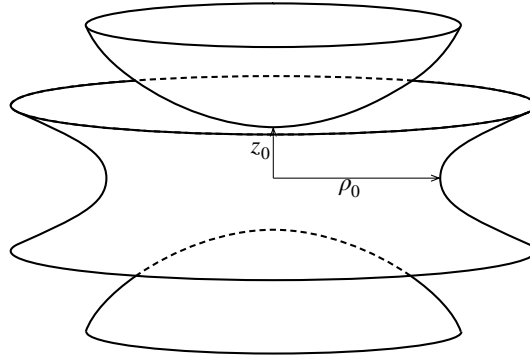


Abb. 2.2: Die Geometrie einer Penningfalle mit hyperbolischen Elektroden wird unter anderem durch die Größen  $\rho_0$  und  $z_0$  wie in Gleichung (2.4) charakterisiert.

Die schlussendliche Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer solchen idealen Penningfalle kann in ihrer  $z$ -Koordinate und der radialen Bewegung getrennt gelöst werden. Da ein homogenes, entlang der  $z$ -Achse ausgerichtetes Magnetfeld in dieser Richtung keine Kraft auf ein geladenes Teilchen auswirkt, wird die Bewegung in axialer Richtung vollständig durch einen harmonischen Oszillator beschrieben. Die Frequenz dessen entspricht der in Gleichung (2.2) angegebenen. Zur Beschreibung der Dynamik in radialer Richtung muss die Bewegungsgleichung

$$m \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = q \left( \mathbf{E}_\rho + \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.5)$$

gelöst werden.  $\mathbf{E}_\rho$  beschreibt dabei die Radialkomponente des elektrischen Feldes. Da das elektrostatische Potential (2.3) auch in  $\rho$  harmonisch ist, resultiert die Bewegung als zwei entkoppelte harmonische Oszillatoren mit den Eigenfrequenzen

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_c}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_c^2}{4} - \frac{\omega_z^2}{2}}. \quad (2.6)$$

Dabei wird  $\omega_+$  als modifizierte Zyklotronfrequenz und  $\omega_-$  als Magnetonfrequenz bezeichnet.

Aus einer Reihenentwicklung ergibt sich in erster Näherung für diese Frequenzen

$$\omega_+ \approx \omega_c - \frac{U_0}{2d^2 B} \quad (2.7)$$

$$\omega_- \approx \frac{U_0}{2d^2 B}. \quad (2.8)$$

Erwähnenswert ist, dass in dieser Näherung die Magnetonfrequenz (2.8) von der Masse und Ladung des gespeicherten Teilchens unabhängig ist. Allgemein gültig und wichtig ist außerdem der Zusammenhang

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_-^2 + \omega_z^2. \quad (2.9)$$

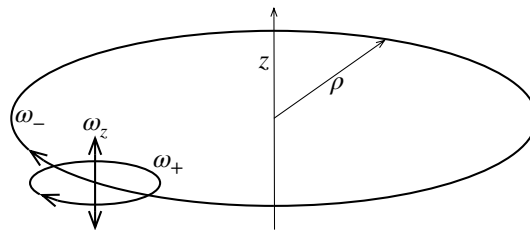


Abb. 2.3: Die Bewegung eines Teilchens in einer Penningfalle wird durch drei harmonische Oszillatoren mit den Kreisfrequenzen  $\omega_+$ ,  $\omega_-$  und  $\omega_z$  beschrieben.

Zusammenfassend vollzieht ein geladenes Teilchen in einer idealen Penningfalle eine Bewegung, die sich aus drei entkoppelten, harmonischen Oszillatoren zusammensetzt. Diese Komponenten der Trajektorie sind in Abbildung 2.3 veranschaulicht.

Eine reale Penningfalle unterliegt in ihrem Verhalten meist den Einflüssen von Störungen in den hier dargestellten idealen Potentialen. Grund dafür sind neben Toleranzen bei der Fertigung und Ausrichtung der Elektroden auch deren endliche Größe, da für ein Potential wie in (2.3) deren hyperbolische Form unendlich fortgesetzt werden müsste. Als Ersatz dafür können weitere Elektroden zur Kompensation verbaut werden. Allgemein sind verschiedene Elektrodenformen

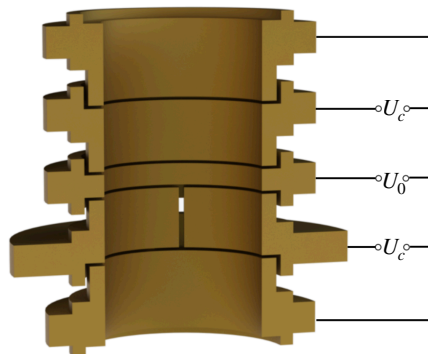


Abb. 2.4: Anordnung der fünf Elektroden in einer zylindrischen Penningfalle mit Ringelektrodenspannung  $U_0$  und Korrekturspannung  $U_c$

möglich und der Aufbau mit hyperbolischen Elektroden wird in modernen Experimenten selten genutzt. Auch im Fall der  $g$ -Faktor-Messung an  ${}^3\text{He}^{2+}$  ist es eine wichtige Anforderung, dass die Endkappen der Falle offen sind. Daher wird häufig ein zylindrischer Aufbau verwendet, bei dem fünf oder sieben Elektroden symmetrisch übereinander angeordnet sind (Abb. 2.4). Die mittlere Ringelektrode befindet sich dabei auf einem Potential  $U_0$ , während die offenen Endkappen geerdet sind. Dazwischen befinden sich die Korrektorelektroden auf einem Potential  $U_c$ . Das Verhältnis  $U_0/U_c$  wird als Tuning-Ratio bezeichnet und kann so gewählt werden, dass das benötigte Quadrupolpotential erzeugt werden kann. Diese Fallengeometrie weist ebenfalls den Vorteil auf, dass die Elektroden mit höherer Präzision hergestellt werden können.

## 2.2 Der Doppelfallenaufbau

Die Messung des magnetischen Moments eines Teilchens erfordert einen weiterhin angepassten Aufbau gegenüber einer einfachen Penningfalle. Neben der Zyklotronfrequenz muss zur Bestimmung des magnetischen Moments des Helium-Nuklids auch dessen Larmorfrequenz gemessen werden. Daraus bestimmt sich das magnetische Moment zu

$$\mu_{\text{He}} = \frac{\omega_c}{\omega_L} \left( \frac{2m_{\text{He}}}{q\hbar} \right). \quad (2.10)$$

Wie schon die Zyklotronfrequenz ist auch die Larmorfrequenz proportional zum äußeren Magnetfeld und diese Abhängigkeit entfällt aus Gleichung (2.10).

Zunächst muss zur Messung jener Frequenz der Spinzustand des gefangenen Kerns allgemein bestimmt werden können, wofür der kontinuierliche Stern-Gerlach-Effekt genutzt wird [9]. Dabei wird eine starke radialsymmetrische Inhomogenität des Magnetfeldes in der Falle erzeugt, die auch magnetische Flasche genannt wird. Die Feldstärke in  $z$ -Richtung sei also neben dem homogenen Anteil  $B_0$  erweitert um einen zu  $z^2$  proportionalen Anteil:

$$B_z(z) = B_0 + B_2 z^2. \quad (2.11)$$

Dabei quantifiziert  $B_2$  die Stärke der Inhomogenität. Der einfachste Weg eine solche Verformung des Magnetfeldes zu bewirken, ist das Einbauen eines Rings aus ferromagnetischem Material, dessen Magnetisierung das Magnetfeld verformt. Der erzeugte Gradient im Magnetfeld sorgt dafür, dass ein Teilchen mit magnetischem Moment eine Kraft erfährt, die im Vorzeichen von seiner Spinausrichtung abhängt. Ändert es also seinen Spinzustand, so bewirkt dies einen Sprung in der axialen Frequenz:

$$\Delta\nu_z = \frac{\mu_{\text{He}}}{2\pi^2 m_{\text{He}}} \frac{B_2}{\nu_z}. \quad (2.12)$$

Trotz optimierter Fallengeometrie liegt der erwartete Frequenzsprung für den  ${}^3\text{He}$ -Kern bei etwa  $\Delta\nu_z = 89$  mHz und relativ bei 100 ppb [5]. Diese sehr geringe Frequenzänderung stellt hohe Anforderungen an die Stabilität aller experimentellen Parameter.

Um die Larmorfrequenz des gespeicherten Helium-Ions zu bestimmen, wird ein Wechselfeld im Mikrowellen-Bereich eingestrahlt, um eine Änderung des Spinzustandes anzuregen. Die Wahrscheinlichkeit für eine solche Änderung kann mit dem beschriebenen Aufbau abhängig von der eingestrahelten Frequenz gemessen und mit dem Ergebnis einer sogenannten Larmor-Resonanz aufgetragen werden.

Die zum Nachweis des Spinzustands erzeugte Inhomogenität des Magnetfeldes ist problematisch für die Anforderung an die Präzision bei der Messung der Zyklotronfrequenz, die

notwendigerweise am selben Teilchen durchgeführt werden muss. Um dieses Problem zu umgehen, werden zwei verschiedene Fallen übereinander platziert. In der Analysefalle (AT) wird nach beschriebenem Prinzip der Spinzustand nachgewiesen und in der Präzisionsfalle (PT) die Messung der Zyklotronfrequenz mit entsprechender Genauigkeit durchgeführt und eine Spinänderung induziert. Außerdem wird eine Erzeugungsfalle verbaut, in der Helium-3 Atome unter Elektronenbeschuss ionisiert werden. Da alle drei Fallen in einem Turm übereinander angeordnet sind und ein Transport der Teilchen mittels dafür vorgesehener Elektroden entlang der Magnetfeldlinien geschieht, ist der zylindrische, offene Aufbau der einzelnen Fallen notwendig.

### 2.3 Detektion der Teilchen

Ein in einer Penningfalle gespeichertes Teilchen kann nicht-destruktiv detektiert werden. Dafür wird die Tatsache genutzt, dass ein geladenes, sich bewegendes Teilchen in den Elektroden der Falle Spiegelströme erzeugt [10]. Diese sind von der Ladung  $q$ , der räumlichen Auslenkung  $x$  und einer geometrieabhängigen Größe, dem effektiven Elektrodenabstand  $D$  gemäß

$$I_{\text{ind}} = \frac{q}{D} \frac{dx}{dt} = \frac{q}{D} \omega x \quad (2.13)$$

abhängig [11].  $\omega$  beschreibt dabei die Kreisfrequenz der Bewegung. Die Ströme liegen für Heliumionen im fA-Bereich und können nicht direkt gemessen werden. Das Nachweisprinzip beruht daher auf einem zwischen die Elektroden geschlossenen Parallelschwingkreis bestehend aus einer Induktivität  $L$  und einer Kapazität  $C$ . Letztere setzt sich aus der Kapazität der Elektroden und einer Resonatorkapazität zusammen. Ein solcher Schwingkreis hat mit dem nicht verschwindenden Ohm'schen Widerstand  $R$  eine frequenzabhängige Impedanz

$$Z(\omega) = \frac{1}{i(\omega C - \frac{1}{\omega L}) + \frac{1}{R}}. \quad (2.14)$$

Die Eigenschwingung dieses Schwingkreises folgt jener Frequenz, für die  $|Z(\omega)|$  maximal wird:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (2.15)$$

Ein Schwingkreis besitzt außerdem eine Güte  $Q$ , die als Maß der Dämpfung in dem System die Breite der Resonanzkurve angibt:

$$Q = \frac{R}{\omega_r L} = \frac{\omega_r}{\Delta\omega_r}. \quad (2.16)$$

Die Breite der Resonanzkurve  $\Delta\omega_r$  beschreibt hier die Breite 3 dB unter dem Maximum. Oszilliert das geladene Teilchen mit der Resonanzfrequenz des Nachweissystems, so fällt über den Resonator die Spannung

$$U_{\text{ind}} = Z(\omega = \omega_r) I_{\text{ind}} = R I_{\text{ind}} \quad (2.17)$$

ab. In diesem Fall wird der Nachweisschwingkreis durch die Teilchenbewegung kurzgeschlossen [12]. Das Signal am Nachweis kann anschließend verstärkt werden und durch eine Fourier-Transformation in ein Frequenzspektrum übersetzt werden. Ein Teilchen in der Falle erzeugt im Resonanzfall einen Einschnitt (Dip) im Spektrum. Die Frequenz dieses scharfen Tiefpunktes entspricht der beobachteten Mode des Teilchens.

Da ein Ion in einer Penningfalle drei entkoppelte Bewegungsmoden besitzt, wird zur Bestimmung der Zyklotronfrequenz eine sogenannte Seitenbandanregung verwendet [13]. Dabei wird eine eingestrahlte Radiofrequenz  $\omega_{rf} = \omega_+ - \omega_z$  genutzt, um die Zyklotronbewegung an die axiale Oszillation zu koppeln. Durch dieses Wechselfeld kann nun zwischen den beiden Moden ständig Energie übertragen werden. Dieser Energieübertrag findet mit der Rabi-Frequenz  $\Omega$  statt, die linear von der Amplitude des Signals  $E_0$  abhängt. Durch diese wird die axiale Bewegung modifiziert zu

$$z(t) = z_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega_z t) \quad (2.18)$$

$$= \frac{z_0}{2} [\sin((\omega_z + \Omega)t) + \sin((\omega_z - \Omega)t)] \quad (2.19)$$

$$\equiv \frac{z_0}{2} [\sin(\omega_r t) + \sin(\omega_l t)]. \quad (2.20)$$

Es werden somit nun zwei Einschnitte  $\omega_{r,l} = \omega_z \pm \Omega$  im Resonatorspektrum sichtbar. Bestimmt man zusätzlich aus einem Spektrum ohne Seitenbandanregung die Axialfrequenz des Ions, so lässt sich die modifizierte Zyklotronfrequenz messen:

$$\omega_+ = \omega_l + \omega_r + \omega_{rf} - \omega_z. \quad (2.21)$$

Da hier die Summe aus  $\omega_l$  und  $\omega_r$  gebildet wird, fällt die Rabifrequenz  $\Omega$  in jedem Fall aus der Rechnung und das Ergebnis ist damit auch im Fall von leichten Abweichungen von der idealen Kopplungsfrequenz gegeben. In Abbildung 2.5 sind exemplarische Spektren mit und ohne Seitenbandanregung für ein  $^{12}\text{C}^{4+}$ -Ion dargestellt.

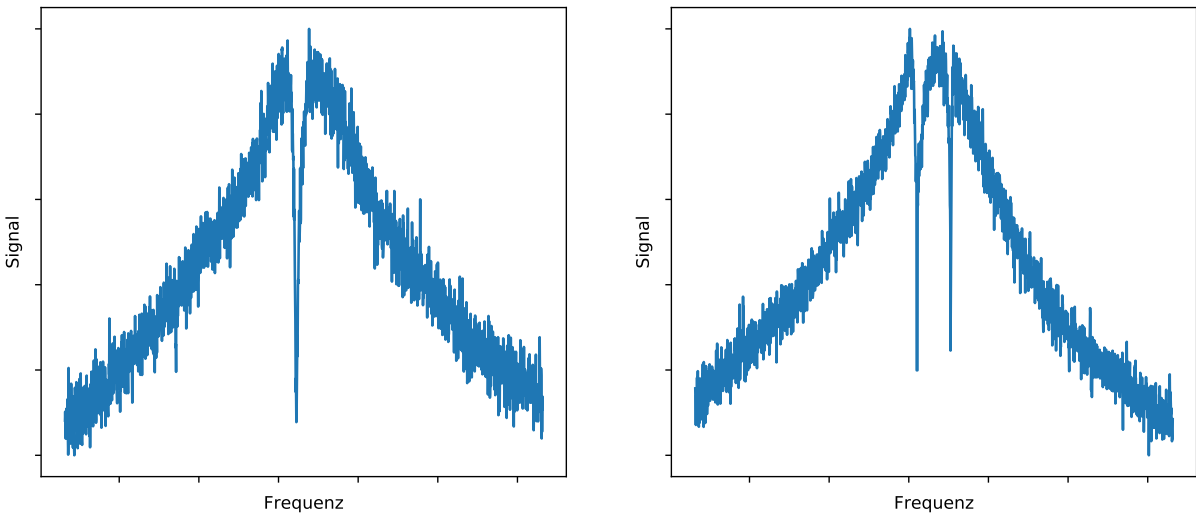


Abb. 2.5: Exemplarische Signalspektren der Nachweisschaltung, links ohne und rechts mit Seitenbandanregung für ein  $^{12}\text{C}^{4+}$ -Ion: Die Einschnitte im Resonatorspektrum entsprechen den Frequenzen  $\omega_z$ , bzw.  $\omega_l$  und  $\omega_r$ .

## Die Entwicklung der Abschirmspule

Unterläge eine Frequenz keinen störenden Einflüssen und wäre absolut konstant, so könnte sie beliebig genau vermessen werden, da sich der Einfluss von Fehlern der Zeitmessung mit steigender Messdauer auf immer mehr Oszillationen verteilt. Nach diesem Prinzip bietet eine Penningfalle ein sehr gutes Werkzeug für Präzisionsexperimente an Teilchen, da sich dabei viele Messgrößen in Frequenzen ausdrücken lassen. Die Sicherheit der Resultate werden damit von der Unbeständigkeit etwa der Zyklotronfrequenz bestimmt, die wiederum auf Schwankungen der äußeren Parametern beruhen kann. Ein Problem ist dabei die Konstanz des Magnetfeldes über die Dauer einer Messung zu gewährleisten, da diese durch viele äußere Einflüsse gestört werden kann.

### 3.1 Theorie der Abschirmspule

Das Magnetfeld in dem hier betrachteten Experiment wird durch einen supraleitenden Magneten erzeugt und ist im Fallenzentrum etwa 5,6 T stark. Der  $g$ -Faktor wird durch das Verhältnis von freier Zyklotronfrequenz und Larmorfrequenz bestimmt, die beide vom äußeren Magnetfeld abhängen. Füllstandsänderungen in den Kryostaten des Magneten oder auch Bewegungen von massiven Objekten in der Umgebung des Experiments können auf kurzen Zeitskalen Schwankungen der magnetischen Feldstärke in der Größenordnung von 100 nT [14] verursachen. Die relative Abweichung von  $1,8 \cdot 10^{-8}$  limitiert die Genauigkeit der Ergebnisse erheblich und macht es notwendig, derartige Fluktuationen bestmöglich abzuschirmen.

Der Ansatz, um dies zu erreichen, ist der einer selbstabschirmenden, supraleitenden Abschirmspule, wie sie von Gabrielse und Tan 1988 konzeptioniert wurde [15] und hier näher erläutert werden soll.

Nach dem Faraday'schen Gesetz wird in einem geschlossenen Leiterkreis ein Strom  $I_i$  induziert, wenn sich das äußere Magnetfeld um  $\mathbf{B}_e$  ändert, der derartig ist, dass der magnetische Fluss in der Schleife erhalten bleibt. Dieser Strom erzeugt ein Feld  $\mathbf{B}_i$  sodass allgemein gilt

$$\int_i (\mathbf{B}_e + \mathbf{B}_i) \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (3.1)$$

Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit der erhaltene Fluss zu 0 angenommen werden, da lediglich Änderungen von einem stabilen Zustand ausgehend betrachtet werden sollen. Die Integration in Gleichung (3.1) erfolgt über die gesamte von der Schleife beziehungsweise Spule eingeschlossenen Fläche. Der Fluss bleibt im Fall einer supraleitenden Spule dauerhaft erhalten.

Die entscheidende Größe einer Abschirmspule ist deren Abschirmfaktor  $S$ . Er gibt an, um welchen Faktor eine externe Magnetfeldänderung innerhalb der Spule abgeschwächt wird. Dieser soll später für einen bestimmten Punkt, das Fallenzentrum, maximiert werden. Verwendet man ein zylindrisches Koordinatensystem  $(\rho, z)$ , in dem sich das Fallenzentrum bei  $(0, 0)$  befindet, so ist der Abschirmfaktor definiert als

$$S^{-1} \equiv \frac{B_i(0, 0) + B_e(0, 0)}{B_e(0, 0)} = 1 + \frac{B_i(0, 0)}{B_e(0, 0)}. \quad (3.2)$$

Da die relevante Komponente der Betrachtung in der Anwendung der Penningfalle die in  $z$ -Richtung ist, kann sich hier auf diese beschränkt und die Feldstärken als skalare Größe behandelt werden. Es ist wichtig zu bemerken, dass das Gesamtfeld im Spulenzentrum  $B_i(0, 0) + B_e(0, 0)$  auch negativ werden kann und demnach auch der Abschirmfaktor kleiner als Null sein kann. Im Folgenden beschreibt  $S$  daher stets der Absolutbetrag des Abschirmfaktors. Im idealen Fall, dass das von der Abschirmspule erzeugte Feld im Zentrum  $B_i(0, 0)$  gerade negativ gleich der äußeren Änderung  $B_e(0, 0)$  ist, gilt  $S^{-1} = 0$ .

Multipliziert man den Bruch in (3.2) mit  $1 = - \int B_e \, dA / \int B_i \, dA$  und zieht so die Flusserrhaltung (3.1) hinzu, so folgt

$$S^{-1} = 1 - \frac{\int_i B_e \, dA / B_e(0, 0)}{\int_i B_i \, dA / B_i(0, 0)}. \quad (3.3)$$

Wenn nun noch die von der Spule eingeschlossene Fläche zum Nenner und Zähler dieses Bruches multipliziert wird, lässt sich der inverse Abschirmfaktor schreiben als

$$S^{-1} = 1 - \frac{b_e(0, 0)}{b_i(0, 0)}. \quad (3.4)$$

Wobei die Größen  $b_e(\rho, z)$  und  $b_i(\rho, z)$  als Maße der durchschnittlichen Feldstärke in der Spule verglichen mit der an dem Punkt  $(\rho, z)$  definiert sein sollen:

$$b_e(\rho, z) = \frac{\int_i B_e \, dA}{B_e(\rho, z) \int_i dA} \quad (3.5)$$

$$b_i(\rho, z) = \frac{\int_i B_i \, dA}{B_i(\rho, z) \int_i dA}. \quad (3.6)$$

Es ist offensichtlich, dass bei perfekter Abschirmung durch die Spule  $b_e(0, 0) = b_i(0, 0)$  gelten muss, und nach (3.3) wird  $S$  in diesem Fall tatsächlich unendlich groß. Betrachtet man den Fall von homogenen äußeren Feldänderungen, so gilt  $b_e(0, 0) = 1$  und der Abschirmfaktor folgt direkt aus der Größe  $b_i(0, 0)$  zu

$$S^{-1} = 1 - \frac{1}{b_i(0, 0)}. \quad (3.7)$$

Die Größe  $b_i(0, 0)$  trägt keine Einheit und ist ausschließlich durch die Geometrie der Abschirmspule bestimmt. Ziel ist die Maximierung von  $S$  und damit die Geometrie jener Spule zu finden, für die  $b_i(0, 0) = 1$  gilt.

## 3.2 Optimierung der Geometrie

Die Abschirmspule soll als dicht gewickelte Zylinderspule direkt auf die Fallenkammer gewickelt werden. Damit steht neben der Drahtdicke von  $d = 100 \mu\text{m}$  auch der Radius der Spule  $R_0 = 32,3 \text{ mm}$  fest. Es muss daher noch die ideale Länge für die Spule gefunden werden, auch wenn zunächst mit dem Verhältnis  $v = L/R$  der halben Spulenlänge  $L$  und einem beliebigen Radius  $R$  gearbeitet werden soll, um einen Teil der Allgemeinheit in den folgenden Rechnungen beizubehalten.

Für sehr kurze, stromdurchflossene Spulen ist das Feld in der Nähe des Drahtes stärker als in der Mitte, sodass  $b_i(0, 0)$  größer als 1 ist. Bei langen Spulen hingegen ist das Feld im Zentrum



zwar homogen, jedoch wird es im Bereich der Spulendenen schwächer. Auch wenn der Einfluss davon im Grenzfall sehr langer Spulen unbedeutend wird, sorgen diese Randeffekte dennoch dafür, dass  $b_i(0,0)$  kleiner als 1 ist. Dementsprechend muss es dazwischen eine Spulenlänge geben, für die  $b_i(0,0) = 1$  gilt.

Es existieren keine allgemeinen analytischen Beschreibungen des Magnetfeldes einer Spule beliebiger Länge an variablen Orten  $(\rho, z)$ , sodass es nur mit numerischen Berechnungen möglich ist, das ideale Verhältnis  $v$  für die Abschirmspule zu finden.

Zunächst soll das Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife berechnet werden, wofür diese durch ein regelmäßiges Vieleck mit halber Eckpunktzahl  $N$  genähert wird. Für das Magnetfeld, das ein gerades stromdurchflossenes Leiterstück erzeugt, lassen sich nun jedoch analytische Lösungen generieren und addieren.

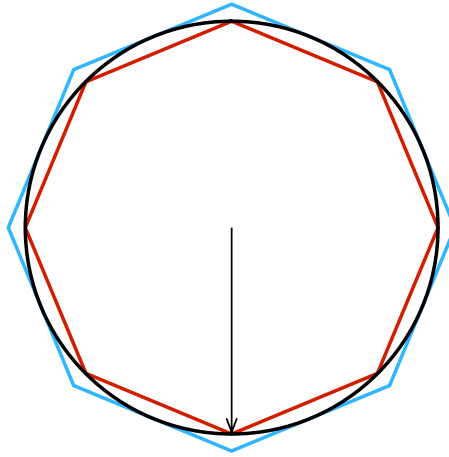


Abb. 3.1: Der eigentlich kreisförmige Leiter (schwarz) wird durch ein regelmäßiges Vieleck von innen (rot) und von außen (blau) genähert. Die halbe Eckpunktzahl ist hier  $N = 4$ .

Es soll das Biot-Savart-Gesetz [16] als Ausgangspunkt für die Magnetfeldberechnung am Ort  $\mathbf{r}$  des geraden Leiterstücks herangezogen und entsprechend gelöst werden.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (3.8)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int ds \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{j}$  die Stromdichte,  $I$  die Stromstärke und  $\mathbf{r}'$  die Position des Volumenbeziehungsweise Linienelements der Integration. Das Kreuzprodukt im Integral lässt sich im Betrag und mit dem Einheitsvektor in  $z$ -Richtung multipliziert lösen, wenn man diesen als senkrecht zu der vom Leiter und dem Punkt  $P$  aufgespannten Ebene definiert. Dabei wird der für zwei Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  mit Schnittwinkel  $\beta = \pi/2 - \alpha$  geltende Zusammenhang  $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha$  verwendet. Die Zuordnung der weiteren geometrischen Größen ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Für das Magnetfeld eines Linienleitersegments folgt somit

$$\mathbf{B}_{\text{lin}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_L ds |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2} \cos \alpha \mathbf{e}_z \quad (3.10)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2} \cos \alpha \mathbf{e}_z \quad (3.11)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha} \frac{\cos^2 \alpha}{\rho^2} \cos \alpha \mathbf{e}_z \quad (3.12)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \mathbf{e}_z \quad (3.13)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi \rho} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \mathbf{e}_z. \quad (3.14)$$

Außerdem wurden folgende geometrischen Zusammenhänge verwendet:

$$ds = \rho \frac{d(\tan \alpha)}{d\alpha} d\alpha = \frac{\rho d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad \text{und} \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \frac{\cos \alpha}{\rho}. \quad (3.15)$$

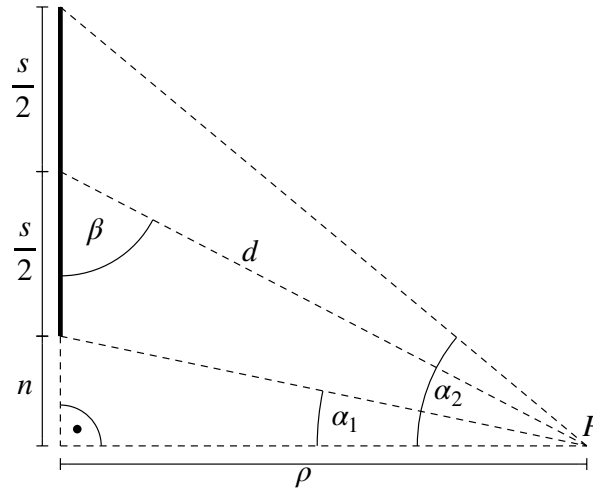


Abb. 3.2: Die Länge, Ausrichtung und Position eines geraden Leiterstücks wird relativ zum Punkt  $P$  parametrisiert. Das Biot-Savart-Gesetz wird mit  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\rho$  gelöst, zur weiteren Kalkulation wird die Beschreibung durch die Leiterlänge  $s$ , den Mittelpunktsabstand  $d$  und den Winkel  $\beta$  verwendet

Die Parameter  $\rho$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind nicht ideal zur Magnetfeldberechnung der Leiterelemente in regelmäßigen Vielecken. Daher werden sie in (3.14) durch die Größen  $d$ ,  $\beta$  und  $s$  ersetzt:

$$\alpha_{1,2} = \tan \left( \mp \frac{L}{2 \sin \beta d} + \frac{1}{\tan \beta} \right) \quad (3.16)$$

$$\rho = d \sin \beta. \quad (3.17)$$

Setzt man diese Ausdrücke in (3.14) ein, so folgt die Größe  $\mathbf{B}_{\text{lin}}(\beta_i, d_i)$ . Nun müssen  $\beta_i$  und  $d_i$  für ein beliebiges Leiterstück  $i$  gefunden werden. Die Symmetrie der Anordnung erlaubt es, das Magnetfeld entlang der einen Hälfte eines solchen Vielecks zu berechnen und zu verdoppeln. Entscheidend ist an dieser Stelle zu bemerken, dass es ausreicht die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes an jeder Stelle in der Spule berechnen zu können, da bei der späteren Kalkulation des Flusses stets das Skalarprodukt mit dem Normalenvektor der Spulenebene gebildet wird. Die Anordnung sei also so gewählt, dass dieser Normalenvektor parallel zur  $z$ -Achse ausgerichtet ist.

Die Länge  $s$  ist für jedes Linienelement identisch und hängt lediglich von den festen Größen  $N$  sowie dem Radius  $R_0$  der Spule und der Wahl, ob der Kreis von außen oder von innen approximiert werden soll, ab. Es sollen hier nur die entsprechenden Größen der Berechnung eines von innen genäherten Vielecks dargestellt werden. In Abbildung 3.3, finden sich die geometrischen Größen für diesen Fall verdeutlicht.

Für die Länge der Linienleiter gilt in diesem Fall

$$s = 2 R_0 \sin\left(\frac{\pi}{2N}\right). \quad (3.18)$$

Ausgehend von dem Mittelpunktswinkel  $\alpha_i = \pi/N (i + 1/2)$  und dem Radius  $r$  des betrachteten Punktes berechnen sich die Größen  $\beta_i$  und  $d_i$  in der Ebene des Punktes  $P$  aus einfacher geometrischer Betrachtung zu

$$\beta_i(r) = -\cot^{-1}\left(-\frac{r \sin \alpha_i}{R - r \cos \alpha_i}\right) \quad (3.19)$$

$$d_i(r) = \sqrt{R^2 - 2 R r \cos \alpha_i + r^2}. \quad (3.20)$$

Die konstante Größe  $R$  beschreibt dabei den Abstand des Mittelpunktes des Leiterelements zum Mittelpunkt der Ebene. Bei der Approximation von außen gilt  $R = R_0$  und bei der von innen, wie in Abbildung 3.3  $R = R_0 \cos(\pi/(2N))$ . In der Simulation soll auch das Magnetfeld

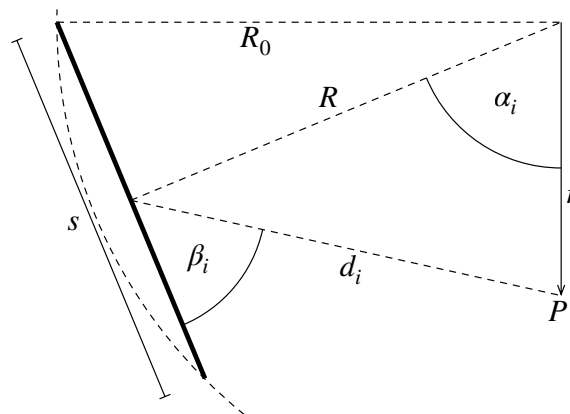


Abb. 3.3: Die Größen  $\beta_i$  und  $d$  müssen für alle Leitersegmente  $i < N$  berechnet werden.

berechnet werden, das von Leiterelementen erzeugt wird, die nicht in der Ebene vom Betrachtungspunkt liegen. Die Differenz der  $z$ -Koordinaten sei  $h$ , sodass (3.19) und (3.20) nur im Fall

$h = 0$  gelten. Für jeden anderen Fall ergeben sich aus langwierigen aber einfachen Überlegungen

$$\beta_i(r, h) = \cos^{-1} \left[ \left( \frac{h^2}{d_i(r, h = 0)} \right)^{-1/2} \cos(\beta_i(r, h = 0)) \right] \quad (3.21)$$

$$d_i(r, h) = \sqrt{R^2 - 2 R r \cos \alpha_i + r^2 + h^2}. \quad (3.22)$$

Wie bereits beschrieben muss von jedem Beitrag zum Magnetfeld an einem Punkt  $P$  nur dessen Anteil in  $z$ -Richtung berechnet werden. Im Fall  $h \neq 0$  ist die Richtung des von einem Leiterstück erzeugten Feldes nicht parallel zur  $z$ -Achse. Dieses Problem kann gelöst werden, indem jedes berechnete Feld mit einem Reduzierfaktor  $0 < j_i \leq 1$  multipliziert wird, sodass  $B_{\text{lin},z}(\beta_i, d_i) = j_i B_{\text{lin}}(\beta_i, d_i)$  gilt. Dieser berechnet sich nach

$$j_i(r, h) = \left( 1 + \frac{h^2}{\sin^2(\beta_i(r, h = 0)) d_i^2(r, h = 0)} \right)^{-1/2}. \quad (3.23)$$

Aus den hier dargestellten Komponenten wird nun zunächst das Magnetfeld, das von einer einzelnen Leiterschleife in einem Punkt mit Radius  $r$  und dem Abstand  $h$  in  $z$ -Richtung erzeugt wird, als Summe über die Liniensegmente berechnet. Diese Summe muss verdoppelt werden, da  $N$  nur die halbe Eckpunktzahl beschreibt:

$$B_{\text{Ring}}(r, h) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} j_i(r, h) B_{\text{lin}}(\beta_i(r, h), d_i(r, h)). \quad (3.24)$$

Soll das Feld einer Spule mit halber Länge  $L$  in einem Punkt mit Radius  $r$  und axialer Koordinate  $z$  berechnet werden, so muss erneut summiert werden. Es ist dabei hilfreich, wenn die Spule so liegt, dass  $z = 0$  ihren Mittelpunkt beschreibt.

$$B_{\text{Spule}}(r, z) = \sum_{k=z/g+1}^{L/g} B_{\text{Ring}}(r, h = k g) + \sum_{k=-L/g}^{z/g} B_{\text{Ring}}(r, h = k g) \quad (3.25)$$

Die inverse Wicklungsdichte  $g$ , die gleich der Drahtdicke sein soll, muss klein gegenüber dem Radius und der Länge der Spule sein, damit die Näherung planparallel angeordneter Leiterschleifen gerechtfertigt ist.

All diese Schritte wurden in Python als Funktion zusammengeschrieben, mit der das Magnetfeld einer vorgegebenen Spulenkonfiguration an jedem Punkt im Raum numerisch genähert werden konnte. Jeder Teil dieser Funktion wurde sowohl für die Annäherung von außen als auch von innen vorgenommen, um später die Konvergenz der Resultate bei steigender Feinheit  $N$  als Kontrolle und Abschätzung des Fehlers verwenden zu können. In Abbildung 3.4 sind die Ergebnisse dieser Kalkulation dargestellt. Wie erwartet wird bei der Näherung durch ein von innen eingepasstes Vieleck das Magnetfeld stets überschätzt, während die Werte bei der Methode von außen immer zu klein sind. Dennoch wird deutlich, dass für steigende Eckpunktzahl die Resultate konvergieren. Bereits bei  $N = 50$  liegt der relative Unterschied der Ergebnisse beider Approximationsarten unter 0,05%.

Da zur Berechnung des Abschirmfaktors der Fluss einer beliebig dimensionierten Spule berechnet werden soll, wird die von den Leiterschleifen eingeschlossene Fläche in Segmente unterteilt. Diese werden in Form von Ringen gewählt, da das Magnetfeld in jeder Spulenebene

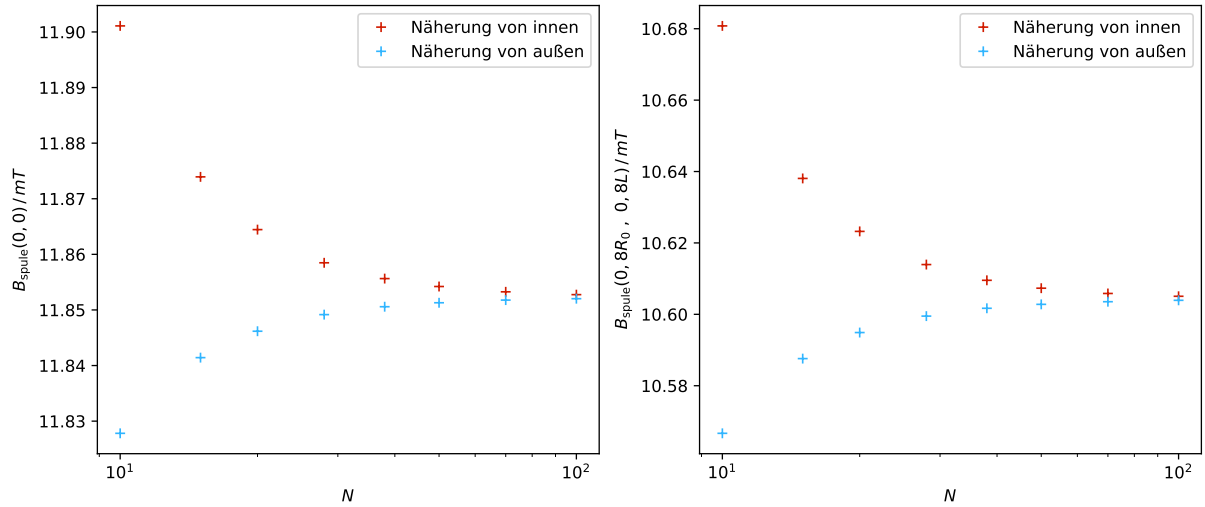


Abb. 3.4: Ergebnisse der Magnetfeldberechnung einer Spule mit  $R_0 = L = 430 \text{ g} = 32,3 \text{ mm}$  im Zentrum (links) und am Rand (rechts) der Anordnung bei einem Spulenstrom von  $I = 1 \text{ A}$ . Beide Approximationsmethoden, von innen und von außen, konvergieren deutlich gegen einen gemeinsamen Wert.

radialsymmetrisch ist. Die Breite jedes der  $n$  Ringe soll dabei mit  $R_0/n$  identisch sein. Für einen Ring  $0 \leq k < n$  beträgt die Fläche somit

$$A_k = \pi \left( (k+1) \frac{R_0}{n} \right)^2 - \pi \left( k \frac{R_0}{n} \right)^2 \quad (3.26)$$

$$= \pi (2k+1) \left( \frac{R_0}{n} \right)^2 \quad (3.27)$$

Da das Magnetfeld, das durch (3.25) berechnet werden kann, nur die  $z$ -Komponente des tatsächlichen Feldes beschreibt und die hier dargestellten Flächenelemente senkrecht zur  $z$ -Achse liegen, kann auch hier einfach mit Skalaren gerechnet werden. Das zugehörige Magnetfeld zu einer Ringfläche wird im Radius  $r_k = (k+1/2)(R_0/n)$  berechnet, wie in Abbildung 3.5 dargestellt ist. Der Fluss durch eine einzige Schleife mit Axialkoordinate  $z$  folgt damit zu

$$\Phi_{\text{Schleife}}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{\text{Spule}}(r_k, z) \quad (3.28)$$

und durch Summation über alle Leiterschleifen an deren jeweiligen Positionen folgt der Gesamtfluss

$$\Phi_{\text{Ges}} = \int B_i \, dA = \sum_{k=-L/g}^{L/g} \Phi_{\text{Schleife}}(z = kg). \quad (3.29)$$

Neben der halben Eckpunktzahl  $N$  nimmt nun also auch die Zahl der Ringsegmente pro Spulenebene  $n$  Einfluss auf die Genauigkeit der Simulation. Damit die Unsicherheit der Resultate, die aus der Endlichkeit jeder der beiden Größen folgt, etwa gleich groß ist, erwies sich eine Wahl  $n = N/10$  als sinnvoll.

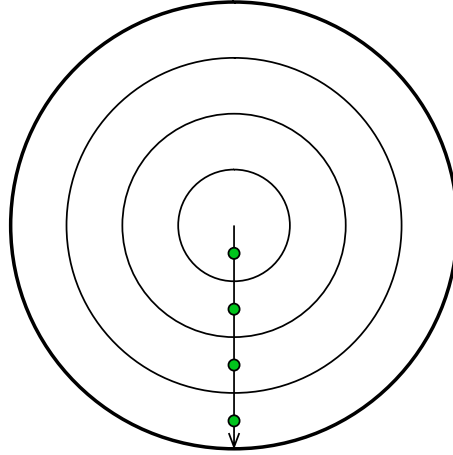


Abb. 3.5: Die Fläche einer Leiterschleife wird in Ringsegmente unterteilt und je deren mittlerer Radius als Berechnungspunkt für das Magnetfeld gewählt (grün).

Zur Berechnung des Abschirmfaktors mit (3.6) und (3.7) ist noch die Gesamtfläche der Spule  $\int_i dA$  relevant. Diese kann im Fall der Zylinderspule einfach durch

$$\int_i dA = \pi R_0^2 \frac{L}{g} \quad (3.30)$$

berechnet werden. Das weiterhin relevante Feld im Spulenzentrum folgt direkt nach (3.25).

### 3.3 Resultate der Optimierungssimulationen

Um die ideale Spulengeometrie zu finden, musste, wie bereits beschrieben, jene Länge gefunden werden, bei der  $S^{-1} = 0$  gilt. Da  $S$  nur von der in (3.6) berechneten Größe abhängt und  $S^{-1} = 0$  nur im Fall  $b_i(0,0) = 1$  gilt, wurden die Berechnungen so durchgeführt, dass  $b_i(0,0)$  abhängig vom Verhältnis  $v = L/R$  ermittelt wird.

In Abbildung 3.6 wurde jener Verlauf für verschiedene Spulenlängen dargestellt. Wie erwartet sinkt  $b_i(0,0)$  mit längeren Spulen unter 1 und nähert sich für sehr lange Spulen wieder dem Wert 1. Für endliche Spulenlängen gilt demnach nur bei

$$v = 0,8611 \pm 0,0002 \quad (3.31)$$

die gesuchte Eigenschaft  $b_i(0,0) = 1$  und damit  $S^{-1} = 0$ . Der Fehler wurde dabei aus der Unsicherheit der numerischen Kalkulation selbst auf Basis der Differenz der Ergebnisse aus den beiden Approximationsmethoden abgeschätzt. Hieraus resultiert eine im Fall der Abschirmspule des Experiments ideale Gesamtlänge

$$2L = (55,628 \pm 0,014) \text{ mm}, \quad (3.32)$$

bei dem durch die Fallenkammer vorgegebenen Radius  $R_0 = 32,3 \text{ mm}$ . Der Verlauf des Abschirmfaktors  $S$  in Abhängig von der Spulenlänge  $2L$  ist in Abbildung 3.7 dargestellt. Während bei der idealen Länge der Spule der Abschirmfaktor in der Theorie unendlich groß wird, wird deutlich, dass eine Spule, deren Länge um  $\pm 1 \text{ mm}$  von der Ideallänge abweicht, noch einen Abschirmfaktor von etwa 250 besitzt.

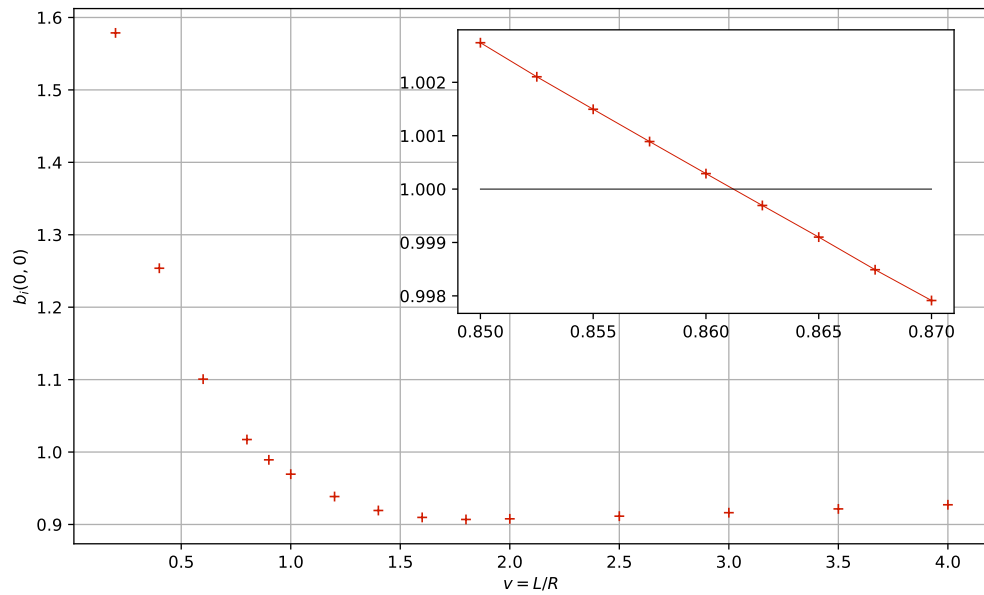


Abb. 3.6: Die Größe  $b_i(0,0)$  in Abhängigkeit der Spulenproportion  $v$ : Wie erwartet ist  $b_i(0,0)$  für kurze Spulen groß, und nimmt für größere  $v$  ab, bis es für lange Spulen gegen 1 steigt. Es gilt  $b_i(0,0) = 1$  für ein Verhältnis  $v = 0,8611$ .

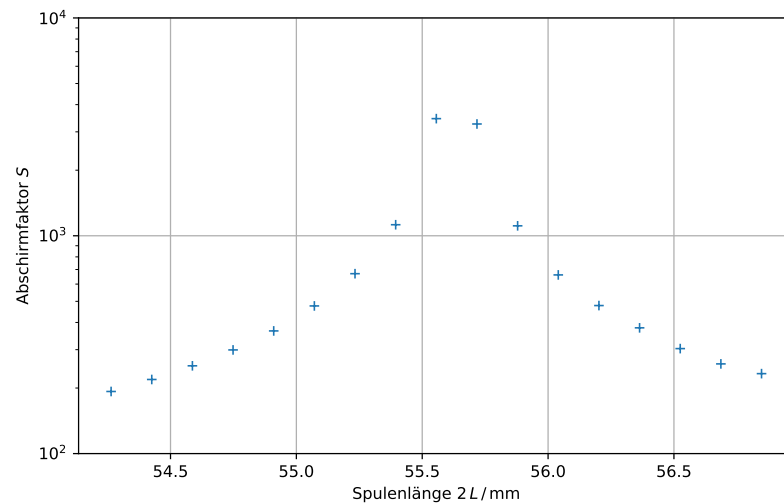


Abb. 3.7: Der Abschirmfaktor  $S$  für verschiedene Spulenlängen  $2L$ :  $S$  steigt bis zu einer senkrechten Asymptote bei einer Spulenlänge von  $2L = 55,628$ mm. Der Radius der Spule beträgt dabei  $R_0 = 32,3$ mm.

Neben der Länge der Abschirmspule unterliegt der Abschirmfaktor auch dem Bezugspunkt seiner Berechnung. In (3.6) wurde diese Abhängigkeit bereits berücksichtigt und als Erweiterung von (3.7) wurde auch ein ortsabhängiger Abschirmfaktor

$$S^{-1}(\rho, z) = 1 - \frac{1}{b_i(\rho, z)} \quad (3.33)$$

bestimmt. Um einen Verlauf abhängig der beiden Ortskoordinaten  $\rho$  und  $z$  zu ermitteln, wurde für eine nach (3.32) optimierte Spule bei der Berechnung von  $S^{-1}(\rho, z)$  je eine der Koordinaten bei 0 belassen und die andere um bis zu 8 mm variiert. Die Ergebnisse dieser angepassten Berechnungen sind in Abbildung 3.8 aufgetragen. Die Abnahme des Abschirmfaktors ist naheliegenderweise symmetrisch bei Verschiebungen des Bezugspunktes in je gegenüberliegende Richtungen. Es folgt aus den Daten, dass bei einer axialen Verschiebung um 2,5 mm der Abschirmfaktor bei noch etwa 330 liegt und bei einer radialen Verschiebung um die selbe Distanz beträgt er sogar noch mehr als 690. Diese Tatsache ist besonders wegen möglicher Ungenauigkeiten bei der Positionierung und Ausrichtung der Spule gegenüber der mittleren Teilchenposition wichtig.

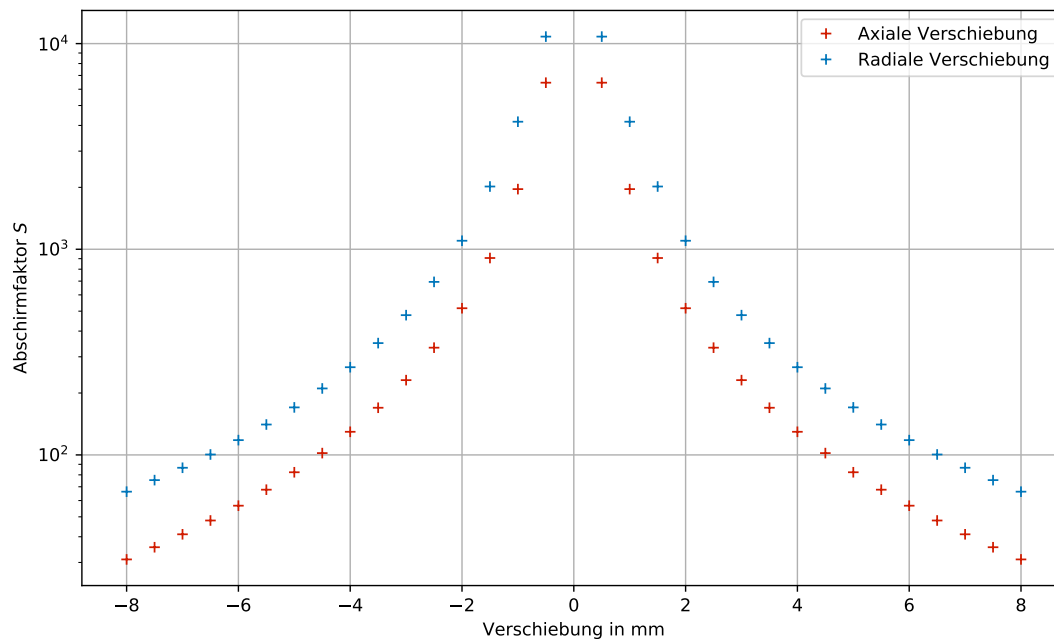


Abb. 3.8: Der Abschirmfaktor  $S$  einer idealen Abschirmspule bei radial und axial verschobenen Bezugspunkten: Nur für das Zentrum einer Spule mit idealer Länge ist deren Abschirmfaktor  $S$  maximal. Bei Abweichungen von dieser Position in radialer oder axialer Richtung nimmt er deutlich ab.

Wichtig anzumerken ist noch, dass bei den in Abbildung 3.8 eingetragenen Simulationsergebnissen, wie oben erwähnt, je eine Raumkoordinate bei 0 behalten wurde. In der Praxis sind natürlich auch Abweichungen sowohl in radialer als auch axialer Richtung relevant. Für spätere Tests der Spule wurde daher der Abschirmfaktor einer Spule, die gegenüber der idealen Länge (3.32) 2 mm zu lang ist, bei einer axial und radial um 2 mm geänderten Position des



Betrachtungspunktes berechnet:

$$S(2\text{mm}, 2\text{mm}) = 141. \quad (3.34)$$

### 3.4 Fertigung der Spule

Die supraleitende Abschirmspule wurde direkt auf die Fallenkammer des Experiments gewickelt. Dabei wurde ein Draht aus Niob-Titan (Nb-Ti) mit einer Isolierung aus Formvar und einer Gesamtdicke von  $100\mu\text{m}$  verwendet, wovon  $75\mu\text{m}$  auf den leitenden Kern und  $25\mu\text{m}$  auf die Isolierung entfielen. Die Länge wurde entsprechend obigen Ergebnissen wie (3.32) gewählt und das Zentrum entsprechend der späteren Teilchenposition in der Präzisionsfalle eingepasst. Kritischer Punkt der Fertigung war der Verbindungspunkt der beiden Enden des Drahtes. Da diese Verbindung bei tiefen Temperaturen ebenfalls supraleitend sein soll, ist es nötig das Niob-Titan zu verschweißen. Zunächst wurde dafür die Isolierung der beiden Drahtenden mit sehr feinem Sandpapier auf etwa 2 cm Länge entfernt. Dabei war besonders darauf zu achten, dass die gesamte Oberfläche leitend wurde und nicht nur zwei gegenüberliegende Seiten des Drahtes. Die Enden wurden leicht verdreht und die Erdung beim schweißen war dadurch gegeben, dass diese zwischen zwei leitenden Gewichten auf dem Schweißstisch fixiert wurden. Durch kurzes punktschweißen wurde so das Niob-Titan verschmolzen.

Abbildung 3.9 zeigt die gewickelte Zylinderspule sowie eine Detailaufnahme dieser Verbindung. Zum Testen der Spule soll die Möglichkeit eines gezielten Quenches bestehen, um das Abschirmverhalten der Spule zu unterbinden. Daher wurden zwei Stellen des Drahtes über einen Heizwiderstand von  $100\Omega$  gelegt, der den Draht an diesen Stellen bei einer entsprechenden Heizleistung über seine kritische Temperatur hebt, und somit für eine Unterbrechung des supraleitenden Kreises sorgt.

Niob-Titan besitzt eine kritische Temperatur von 9,2 K [17]. Diese Temperatur wird durch die kryogene Umgebung des supraleitenden Magneten erreicht und die Fallenkammer bestehend aus Kupfer sorgt für eine gute thermische Kopplung des Drahtes.

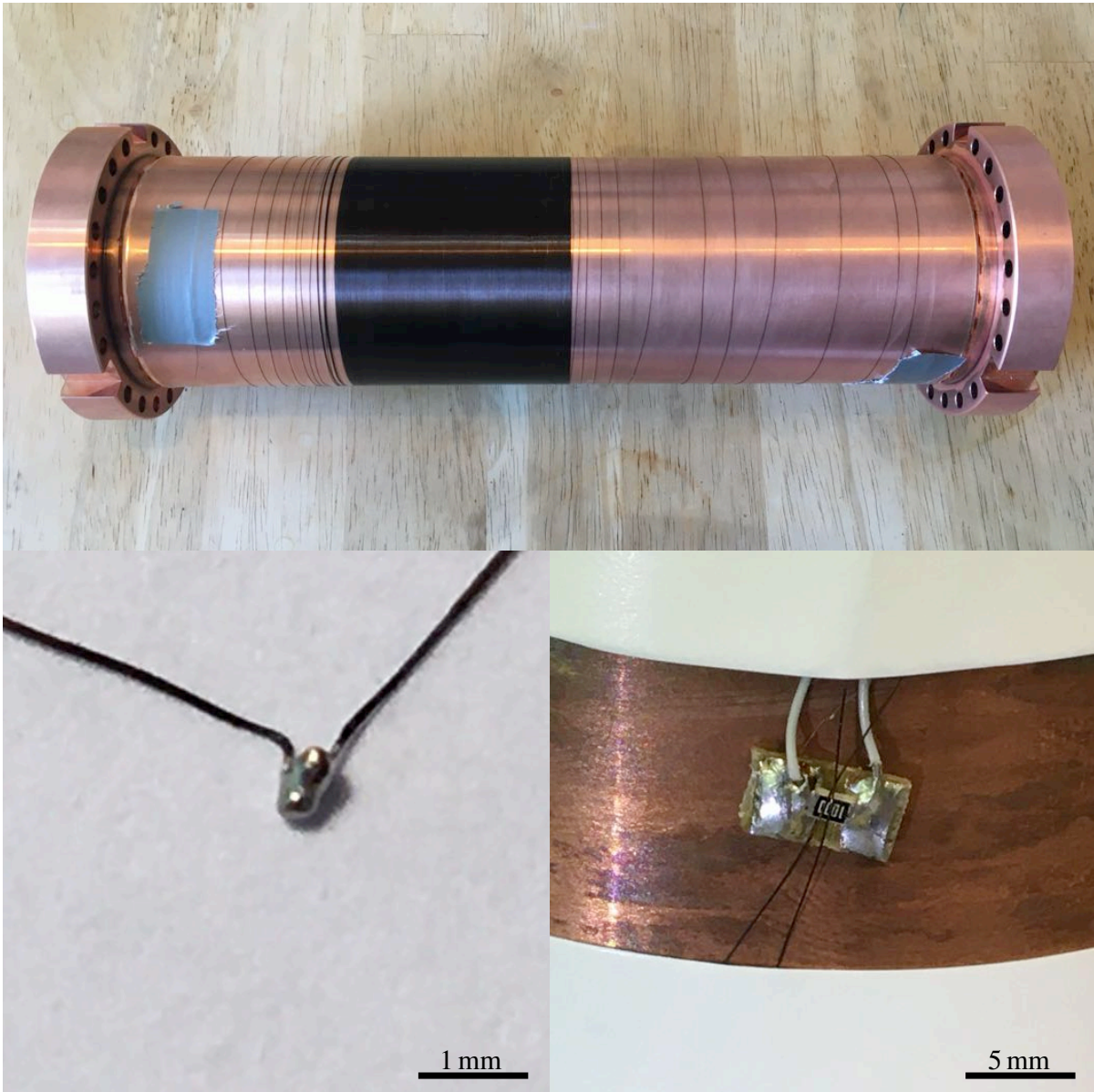


Abb. 3.9: Die Abschirmspule wurde direkt auf die Außenwand der Fallenkammer gewickelt. Die grobe Wicklung am Rand wurde später entfernt (oben). Die Drahtenden wurden verschweißt (unten links). Ein Heizwiderstand wurde dicht an den Draht gelegt, und dient später als Schalter (unten rechts).

## Test an einem Pulsrohrkühler

Um die Funktionsweise der gewickelten Abschirmspule überprüfen zu können, wurde diese an einem Pulsrohrkühler getestet. Der Kaltkopf dieses Aufbaus erreicht eine Temperatur von 2,8 K und ist somit ausreichend, um den supraleitenden Draht der Spule unter seine kritische Temperatur von 9,2 K [17] zu kühlen.

### 4.1 Der Testaufbau

Die Fallenkammer mit der aufgewickelten Spule wurde an einen Adapterring aus Kupfer geschraubt, der eine gute thermische Kopplung der Spule gewährleistete und wiederum am Kaltkopf selbst befestigt wurde, wie auf Abbildung 4.1 zu sehen ist. Montagefett an diesen beiden Kontaktflächen sorgte ebenfalls für eine verbesserte Kältebrücke. Ein Temperatursensor wurde am unteren Ende der Fallenkammer installiert, um feststellen zu können, ob die gesamte Spule eine ausreichend niedrige Temperatur hat.

Für gute Isolierung werden eine Vorpumpe und eine Hochvakuumpumpe verwendet, um einen Druck von etwa  $10^{-7}$  mbar zu erzeugen. Zusätzlich frieren wegen der kryogenen Umgebung weitere Gasatome aus. Ein Hitzeschild sorgt für eine reduzierte Strahlungswärme. Zum Anregen einer äußeren Magnetfeldänderung wurde außen um den Prüfstand eine Ringspule montiert, die ein axiales Wechselfeld erzeugt. Dieser Aufbau ist in 4.2 abgebildet.

Um das Magnetfeld im Zentrum der Spule messen zu können, war ein Sensor nötig, der bei niedrigen Temperaturen und im Vakuum mit hoher Sensitivität funktionsfähig bleibt. Außerdem darf er keine zu hohe Leistung umsetzen, um die Umgebung nicht zu stark zu erwärmen. Eine geringes sensitives Volumen war ebenfalls wichtig. Diesen Anforderungen wird ein GMR-Sensor gerecht. Diese Art von Sensor nutzt den namensgebenden Effekt des Riesenmagnetowiderstands (engl. giant magneto resistance). Dieser beschreibt die Beobachtung, dass eine aus dünnen Schichten magnetischer und nichtmagnetischer abwechselnd angeordneter Materialien bestehende Struktur ein vom äußeren Magnetfeld abhängigen Widerstand besitzt. Für diese Entdeckung wurde Albert Fert und Peter Grünberg 2007 der Nobelpreis in Physik verliehen [18]. Wie in Abbildung 4.1 zu sehen ist, wurde der Sensor auf einer Platine mit den nötigen Anschlüssen installiert, die wiederum thermisch abgekoppelt an einer Gewindestange befestigt wurde, sodass die axiale Position des Sensors einstellbar ist. Die radial zentrale Position war durch einen Teller aus Aluminium sichergestellt.

Nachdem die Spule unter ihre kritische Temperatur gekühlt wurde, konnte das Signal des GMR-Sensors abhängig von der externen Anregung durch die Ringspule an einem Oszilloskop beobachtet werden. Die Spule ließ sich jederzeit durch den installierten Quenchwiderstand unterbrechen und es war deutlich der Effekt davon sichtbar. Zunächst wurde die Anregung bei einer Spulenspannung von  $20 V_{pp}$  und einer Frequenz von 1 Hz betrieben. Während im supraleitenden Zustand kein Signal des Magnetfeldsensors zu beobachten war, konnte jedoch ein deutliches, sinusförmiges Signal gemessen werden, sobald der Quenchwiderstand mit 4,7 mW beheizt wurde.

Ob die geschweißte Verbindung der Drahtenden tatsächlich supraleitend ist und der sehr dünne Draht trotz Biegungen ebenfalls durchgehend leitend ist, konnte bei Raumtemperatur

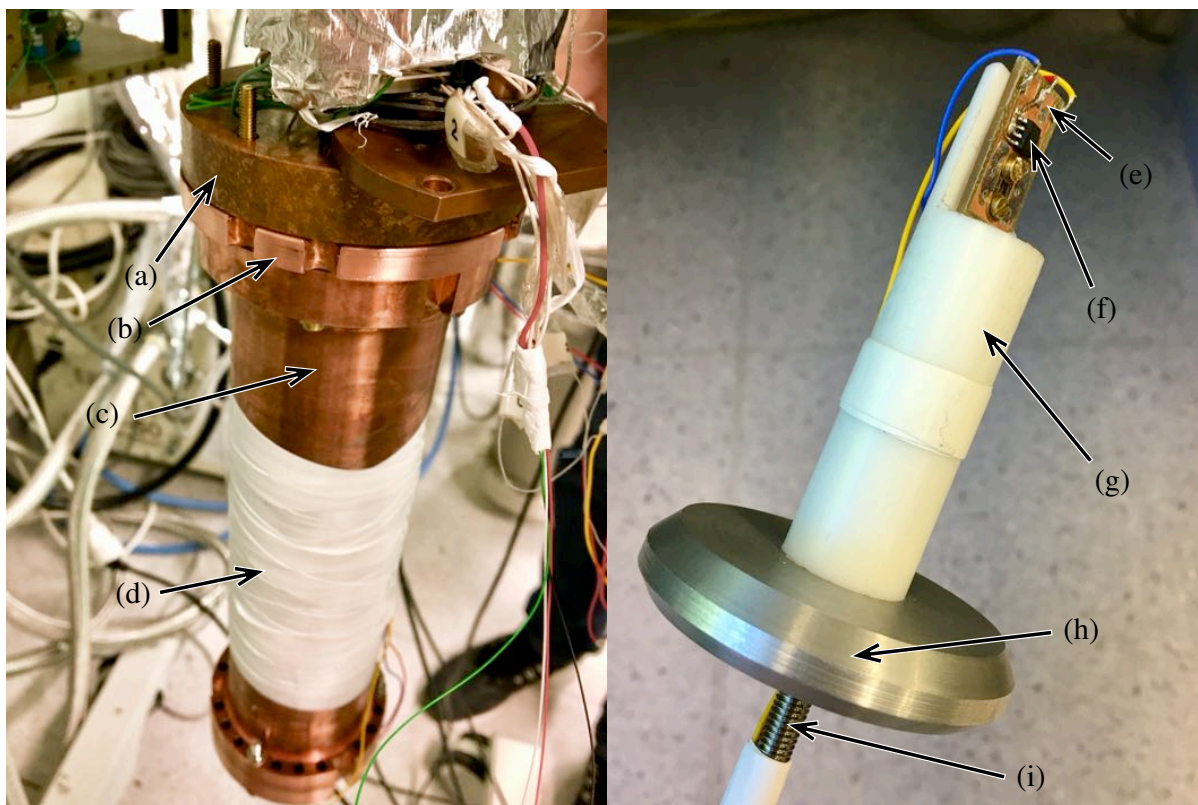


Abb. 4.1: An den Kaltkopf (a) wird ein Adapterring (b) angeschraubt. Daran ist die Fallenkammer (c) mit der aufgewickelten Abschirmspule montiert. Letztere befindet sich unter einem Schutz aus Teflon (d). Auf einem Stück Platine mit den nötigen Anschlüssen (e) wurde der GMR-Sensor (f) verlötet und ein Stück Teflon (g) sorgte für eine geringe thermische Kopplung. Ein Teller aus Aluminium stellte sicher, dass der Sensor im Zentrum der Spule bleibt (h), während die Höhe durch eine Gewindestange variiert werden konnte (i).

nicht überprüft werden. Die Tatsache, dass die Leistung am Heizwiderstand den beobachteten Einfluss auf das Sensorsignal trotz gleicher äußerer Anregung hat, war jedoch ein Beweis dafür, dass die Spule bei tiefen Temperaturen einen geschlossenen, supraleitenden Kreis bildet. Auch das gewünschte, abschirmende Verhalten ebendieser wurde gezeigt. Um jedoch einen Abschirmfaktor messen zu können, bestand die Schwierigkeit, dass das Magnetfeld ohne Heizstrom so stark abgeschirmt wurde, dass das verbleibende Signal des GMR-Sensors zu schwach war, um gemessen zu werden. Die Feldstärke lag unter dem sensitiven Bereich des Sensors und starkes Rauschen machte diese quantitative Untersuchung unmöglich.

Um das Problem zu umgehen, wurde der auf  $20 V_{pp}$  limitierte Funktionsgenerator als Spannungsquelle der Anregungsspule ersetzt und ein Drehtransformator verwendet, der die Netzspannung reduzieren konnte. Das Wechselfeld, das so erzeugt wurde, folgt naturgemäß der Frequenz der Netzspannung von 50 Hz. Um das tatsächlich an der Anregungsspule anliegende Signal messen und beobachten zu können, wurde ein Spannungsteiler verwendet, welcher dieses so weit reduziert, dass es am Oszilloskop aufgenommen werden kann.

Die erste Feststellung war nun die eines großen Dunkelstroms. Das erzeugte starke Wechselfeld verursachte selbst dann ein Signal am Ausgang des Sensors, wenn dessen Versorgungs-



Abb. 4.2: Um die Fallenkammer und den Kaltkopf von Strahlungswärme zu isolieren, wurde ein Hitzeschild (a) verwendet. Ein externes Magnetfeld wurde durch eine Ringspule (b) erzeugt. In der Vakuumkammer (c) befinden sich alle weiteren Bestandteile des Aufbaus.

spannung abgestellt war. Da kein Ende der Spule geerdet war, wurde dieser periodische Dunkelstrom auf induktive Einflüsse des Magnetfeldes zurückgeführt. Eine weitere Beobachtung war die Tatsache, dass jenes äußere Wechselfeld, das stark genug war, um ein messbares Signal mit ungequenchter Spule zu erzeugen, wiederum zu stark war, um auch ohne aktive Abschirmung gemessen zu werden. Hier stieß der Sensor an ein oberes Limit seiner Sensitivität und es erfolgten Sättigungserscheinungen. Daher wurde das Magnetfeld mit und ohne Heizstrom bei unterschiedlich starken äußeren Wechselfeldern gemessen. Üblicherweise wurde die Spulenspannung auf etwa 20 % reduziert, bevor die Abschirmspule gequencht wurde.

Am Oszilloskop wurde neben dem Sensorsignal auch ein starkes Rauschen aufgenommen, das die Messgenauigkeit bestimmte. Die aufgenommenen Datensätze stammten aus Mittlungen über 50 Messungen und mussten anschließend dennoch aufwändig geglättet werden. In Abbildung 4.3 wird deutlich, dass das Rauschen des Signals meist nicht symmetrisch zu höheren und niedrigeren Spannungen ist. In der Glättungsroutine wurde daher jeder Datenpunkt nach seiner Abweichung vom Mittelwert der 50 umliegenden Punkte bewertet. War die Abweichung zu groß, so wurde er durch einen gewichteten Mittelwert jener umliegenden Punkte ersetzt, wobei stets die Spannungswerte mit geringerem Absolutbetrag deutlich stärker gewichtet wur-

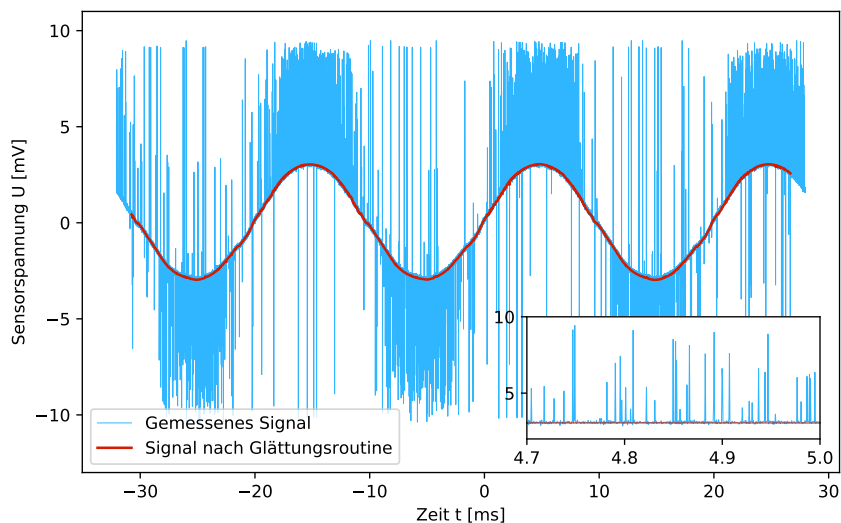


Abb. 4.3: Exemplarische Darstellung eines Signalverlaufs vor und nach der Glätterroutine. Aus der vergrößerten Darstellung wird deutlich, dass das Rauschen aus einseitigen Abweichungen vom Signal besteht. Dieses ließ sich in gutem Maß reduzieren.

den. Anschließend wurden zu Reduktion weiterer Schwankungen immer 50 Werte zu einem Mittelwert zusammengefasst.

Für eine Messung des Abschirmfaktors wurden nun zunächst der Untergrund bei starkem äußeren Magnetfeld der ungequenchten Spule ohne Versorgungsspannung des Sensors gemessen. Anschließend wurde der Sensor eingeschaltet und erneut das Sensorsignal aufgenommen. Bei einer reduzierten Anregung wurde ebenfalls der Untergrund und das Signal erfasst. In Abbildung 4.4 sind die stark geglätteten Verläufe dargestellt. Das Signal bei gequenchter Spule muss zum Vergleich mit jenem Faktor multipliziert werden, um den das äußere Magnetfeld dabei schwächer war. Mit abgezogenem Untergrund folgt so Abbildung 4.6.

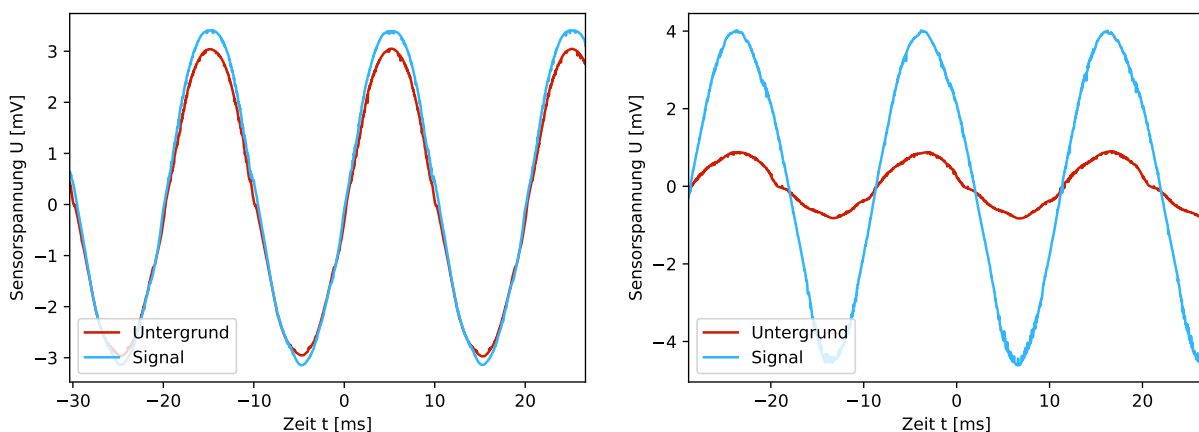


Abb. 4.4: Darstellung der geglätteten Signalverläufe vor dem Quench (links) und danach (rechts): Das äußere Magnetfeld war dabei bei aktiver Abschirmung (links) um einen Faktor  $k = 4,1$  stärker, was auch dafür sorgte, dass das Untergrundsignal hier ebenfalls sehr stark war.

Um das Signal-Rausch-Verhältnis zu verbessern und genauere Messergebnisse zu erhalten, wäre es sinnvoll gewesen, am Oszilloskop eine Mittlung über deutlich mehr Einzelmessungen vornehmen zu lassen. Diese Optimierung war jedoch unmöglich vorzunehmen, da der Sensor mit 24 V Versorgungsspannung betrieben werden musste und eine Leistung von circa 250 mW umgesetzt hat. Dies sorgte für ein rasches, ungewolltes Quenchen der Abschirmspule, was die Messdauer auf einige Sekunden limitierte.

## 4.2 Auswertung

Die Phase der einzelnen Datensätze ist, wie in Abbildung 4.6 zu sehen, nicht identisch, was letztendlich an der Triggereinstellung des verwendeten Oszilloskops liegt. Während dies für den Vergleich der  $U_{pp}$ -Werte nicht weiter relevant ist, musste dennoch darauf geachtet werden, die Phase vor der Subtraktion des Untergrundes anzugleichen.

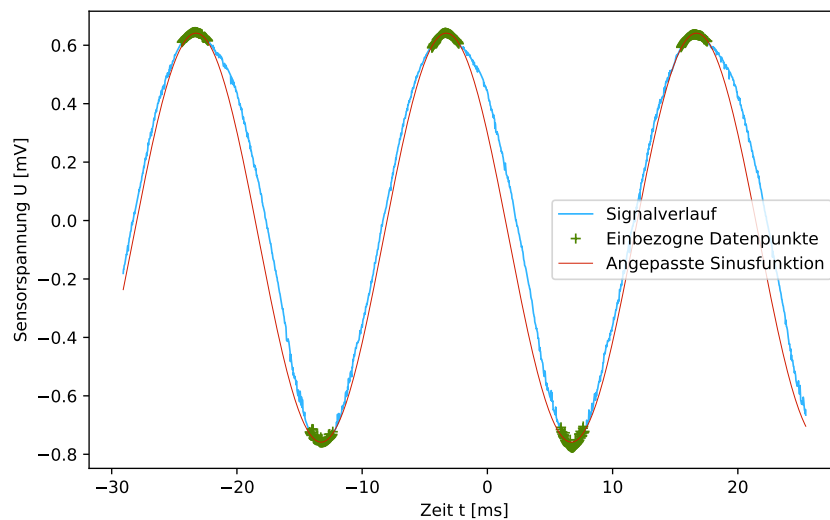


Abb. 4.5: Exemplarische Illustration eines geglätteten Signals, einer eingepassten Sinusfunktion und der dafür verwendeten Auswahl an Datenpunkten: Das Signal lässt sich nicht gänzlich durch eine Sinusfunktion beschreiben. Um einen  $U_{pp}$ -Wert zu erhalten, ist eine solche Funktion im Bereich der Maxima und Minima dennoch geeignet.

Der Verlauf der Sensorspannung beschreibt aufgrund von Hysterese beim Ändern des Magnetfeldes und der Ungenauigkeit der Signalform der verwendeten Netzspannung nicht mehr den einer Sinuskurve. Da die relevante Information ausschließlich die der Amplitude ist, wäre es nicht sinnvoll, eine solche Funktion an das gesamte Signal einzupassen. Damit gerade im Bereich der Maxima die Differenz aus Signal und angepasster Kurve nicht vom Spannungsverlauf nahe der Null beeinflusst wird, wurde zur Kurvenanpassung nur ein Bereich um die Maxima miteinbezogen. In Abbildung 4.5 ist dies verdeutlicht.

Da simultan zum Sensorsignal stets auch das Anregungssignal gemessen wurde, konnte der Faktor  $k$ , um den das angelegte, externe Magnetfeld bei aktiver Abschirmung gegenüber der Messung bei gequenchter Spule größer war, nachträglich genau bestimmt werden. Zusammen mit den auf beschriebene Weise bestimmten, maximalen Sensorspannungen im ungequenchten

und gequenchten Fall,  $U_{pp,0}$  und  $U_{pp,q}$ , lässt sich der Abschirmfaktor bestimmen:

$$S = k \frac{U_{pp,q}}{U_{pp,0}} \quad (4.1)$$

mit dem Fehler:

$$\delta S = S \sqrt{\left(\frac{\delta U_{pp,q}}{U_{pp,q}}\right)^2 + \left(\frac{\delta U_{pp,0}}{U_{pp,0}}\right)^2}. \quad (4.2)$$

Die Kovarianz bei den Funktionsanpassungen diente zur Fehlerabschätzung mit Gleichung (4.2). Außerdem wurde die Messung nach oben beschriebenem Vorgehen mehrmals wiederholt und die Standardabweichung der gefundenen Abschirmfaktoren wurde quadratisch zu der durch Gleichung (4.2) berechneten Unsicherheit addiert. Somit folgte das Resultat

$$S = 52 \pm 4. \quad (4.3)$$

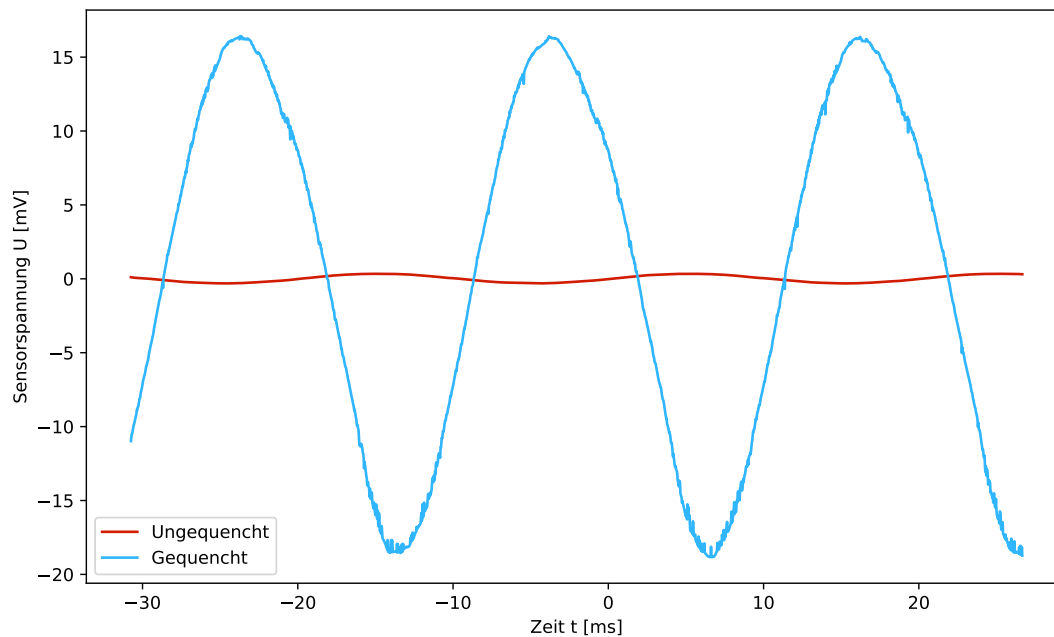


Abb. 4.6: Das Signal des GMR-Sensors wurde nacheinander bei aktiver und gequenchter Abschirmspule gemessen. Die äußere Anregung folgte einem 50 Hz Wechselfeld. Das nicht abgeschirmte Signal wurde um den Faktor der geringeren Anregung gestreckt.

Zur Überprüfung dieses Ergebnisses wurde außerdem ein Lock-in-Verstärker an den Sensor angeschlossen und als dessen Referenzsignal das der Anregungsspule verwendet. Als Quotient der Amplituden bei gequenchter und ungequenchter Spule wurde der berechnete Abschirmfaktor bestätigt:

$$S_{\text{Lock in}} = 50 \pm 5. \quad (4.4)$$



### 4.3 Axiale Verschiebung des Sensors

Wie eingangs erläutert, ist neben dem maximalen Abschirmfaktor der Spule auch das Abschirmverhalten in einer Umgebung um das Zentrum interessant. Der Sensor wurde an einer Gewindestange montiert, um verschiedene axiale Sensorpositionen einstellen zu können und so wurde diese zunächst um  $\pm 3$  mm geändert. Der grundlegende Aufbau blieb unverändert. Da die gefundenen Werte

$$S(z = -3\text{mm}) = 39 \pm 3 \quad \text{und} \quad S(z = +3\text{mm}) = 28 \pm 2 \quad (4.5)$$

nicht identisch waren, bestand die Vermutung, dass das Zentrum der Spule in (4.5) falsch gewählt wurde und der Abschirmfaktor im tatsächlichen Zentrum höher liegt. Daher wurde der Sensor zu der Position  $z = -0,6$  mm bewegt und dort erneut nach beschriebenem Verfahren das Abschirmverhalten untersucht. Das Ergebnis davon war jedoch

$$S(z = -0,6\text{mm}) = 48 \pm 3. \quad (4.6)$$

Die Unsicherheit der axialen Sensorposition wurde als Messungenauigkeit an der Gewindestange pauschal zu 0,5 mm abgeschätzt. Die Ergebnisse des Tests ließen sich in Abbildung 4.7 zusammenfassen.

### 4.4 Beurteilung der Ergebnisse

Wie im Teil der Theorie dargestellt, ist eine Spule mit sehr hohem Abschirmfaktor technisch möglich und es wurden in der Vergangenheit tatsächlich ähnliche Spulen gebaut, deren Abschirmfaktor deutlich über 100 lag [19]. Aus verschiedenen Gründen ist das Ergebnis (4.3) nur als untere Abschätzung der tatsächlichen Abschirmung der Spule zu verstehen.

Ein radial falsch platzierter Sensor kann das Ergebnis leicht beeinflussen. Dies kann unter Berücksichtigung weiterer Fehlerquellen nicht ausgeschlossen, aber auch nicht überprüft werden. Durch die Art der Sensoraufhängung konnte jedoch sichergestellt werden, dass eine solche Abweichung geringer als 2 mm ausfällt.

Entscheidend ist jedoch die Tatsache, dass die gesamten Berechnungen zur Geometrieoptimierung auf dem Ziel basierten, homogene äußere Magnetfelder abzuschirmen. Nur für diesen Fall ließ sich in (3.4)  $b_e(0,0) = 1$  setzen und zu Ausdruck (3.9) vereinfachen. Auch wenn die so resultierende ideale Geometrie weiterhin ideal für die Anwendung der Abschirmung homogener Magnetfeldstörungen geeignet ist, so ist die Messung des Abschirmfaktors für solche mit dem hier verwendeten Aufbau nur bedingt möglich.

Wie auf dem Foto des Teststandes 4.2 zu sehen ist, wurde eine einzelne Ringspule für die Anregung des externen Magnetfeldes verwendet. Besonders dann, wenn eine leichte Fehljustage dieser angenommen wird, können nur eingeschränkt belastbare und vergleichbare Ergebnisse erzielt werden. Da das Magnetfeld einer Ringspule in der Symmetrieebene den geringsten Gradienten aufweist, würde bei ansonsten idealen Bedingungen bereits nur noch ein Abschirmfaktor  $S = 52$  wie in (4.3) gemessen werden können, wenn die Ringspule um 2,5 cm zu hoch oder zu tief angebracht wäre. Wenn man allerdings neben der radialen Verschiebung des Sensors auch eine leicht fehlerhafte Abschirmspulenlänge annimmt, würde eine axiale Verschiebung der Ringspule um nur 1 cm ausreichen, um den messbaren Abschirmfaktor auf  $S = 53$  zu reduzieren. Es ist daher vorstellbar, dass das Messergebnis (4.3) stark vom experimentellen Aufbau limitiert war

und der tatsächliche Abschirmfaktor höher liegt. Wenn diese einschränkenden Faktoren auch bei der Berechnung des theoretischen axialen Verlaufs des Abschirmfaktors berücksichtigt werden, so ergibt sich eine Modellkurve wie in 4.7. Es ist wichtig zu bemerken, dass die Ringspule für jedes Verschieben des Sensors notwendigerweise entfernt und wieder angebracht werden musste. Da hierbei die ursprüngliche Position nicht sicher wieder hergestellt wurde, sind die eingetragenen Datenpunkte nur bedingt vergleichbar, was aber durch die hohen Unsicherheiten generell nur grob möglich gewesen wäre. Dennoch stimmt der Verlauf, besonders jener Punkte, die nach dem Wechsel zur Teflonaufhängung des Sensors gemessen wurden, gut mit der erwarteten Kurve überein, wie Abbildung 4.7 zeigt.

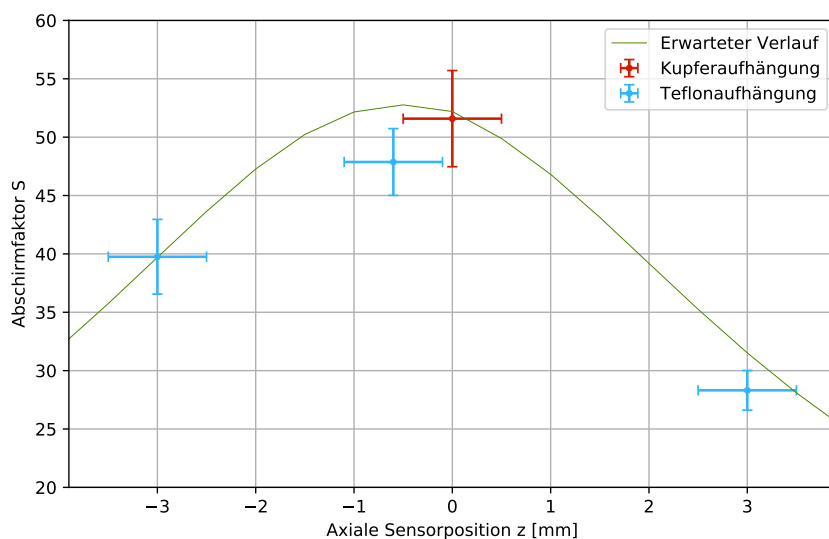


Abb. 4.7: Der Abschirmfaktor  $S$  wurde an verschiedenen axialen Sensorpositionen  $z$  gemessen. Der Verlauf erscheint asymmetrisch, die einzelnen Datenpunkte besitzen jedoch große Unsicherheiten. Die Vergleichbarkeit wird auch dadurch eingeschränkt, dass nach der Messung bei  $z = 0$  die Sensoraufhängung getauscht wurde. Unter Einbeziehung einiger systematischer Fehler wurde außerdem der theoretische Verlauf eingezeichnet, wie er mit der Simulation berechnet wurde.

## Test der Spule im $^3\text{He}$ -Experiment

Nachdem die Funktion der Abschirmspule am Kaltkopf bestätigt werden konnte, wurde die Fallenkammer im eigentlichen Penningfallen-Experiment verbaut. Die Zyklotronbewegung eines Ions zu beobachten stellt eine sehr genaue Methode zur Magnetfeldmessung dar und sollte daher besser geeignet sein, den Abschirmfaktor der Spule zu bestimmen.

### 5.1 Magnetfeldmessungen mit einer Penningfalle

Um die Feldstärke durch die Beobachtung der Bewegungsmode eines in einer Penningfalle gespeicherten Teilchens zu vermessen, ist die Bestimmung von dessen freier Zyklotronfrequenz  $\omega_c$  entscheidend. Wie in Gleichung (2.1) gezeigt, hängt diese neben dem Magnetfeld nur von der Ladung und der Masse des Teilchens ab. Um  $\omega_c$  zu bestimmen, muss jedoch die Axialfrequenz  $\omega_z$ , sowie die Magnetonfrequenz  $\omega_-$  und die modifizierte Zyklotronfrequenz  $\omega_+$  bestimmt werden. Wie bereits erläutert, lässt sich letztere mit Hilfe des Resonatorspektrums bei aktiver Seitenbandanregung aus der Lage der Frequenzen  $\omega_l$  und  $\omega_r$  bestimmen und die Axialfrequenz aus einem solchen ohne Seitenbandanregung. In Abbildung 5.1 sind aufgenommene Beispielspektren, sowie Vergrößerungen des Bereichs um die Einschnitte, zu sehen. Um diese wurde jeweils eine adäquate Lorentzkurve eingepasst, aus der die entsprechenden Frequenzen bestimmt werden können [12].

Neben den so gemessenen Frequenzen  $\nu_l$ ,  $\nu_r$  und  $\nu_z$  sind noch  $\nu_{rf}$  und  $\nu_-$  relevant, wie aus den Gleichungen (2.9) und (2.21) hervorgeht. Die zur Seitenbandanregung eingestrahlte Radiofrequenz  $\nu_{rf} = 28.773.665$  Hz war ebenso über alle Messungen konstant und bekannt, wie auch  $\nu_- = 4429$  Hz. Aus all diesen Größen konnte für jede Messung die freie Zyklotronfrequenz bestimmt werden:

$$\omega_c = 2\pi\sqrt{\nu_+^2 + \nu_-^2 + \nu_z^2} \quad (5.1)$$

$$= 2\pi\sqrt{(\nu_l + \nu_r + \nu_{rf} - \nu_z)^2 + \nu_-^2 + \nu_z^2}. \quad (5.2)$$

Da die Messung von  $\nu_l$ ,  $\nu_r$  und  $\nu_z$  wie in Abbildung 5.1 allgemein fehlerbehaftet ist, muss deren Fehlerfortpflanzung berücksichtigt werden:

$$\delta\omega_c = \sqrt{\left(\frac{d\omega_c}{d\nu_l} \delta\nu_l\right)^2 + \left(\frac{d\omega_c}{d\nu_r} \delta\nu_r\right)^2 + \left(\frac{d\omega_c}{d\nu_z} \delta\nu_z\right)^2} \quad (5.3)$$

$$= \frac{4\pi^2}{\omega_c} \sqrt{((\nu_l + \nu_r + \nu_{rf} - \nu_z)(\delta\nu_l + \delta\nu_r))^2 + ((2\nu_z - \nu_r - \nu_l - \nu_{rf})\delta\nu_z)^2}. \quad (5.4)$$

Es folgt mit der Ladung  $q$  und der Masse  $m$  des beobachteten Teilchens die magnetische Feldstärke zu

$$B = \frac{m}{q}\omega_c \quad , \quad \delta B = \frac{m}{q}\delta\omega_c. \quad (5.5)$$

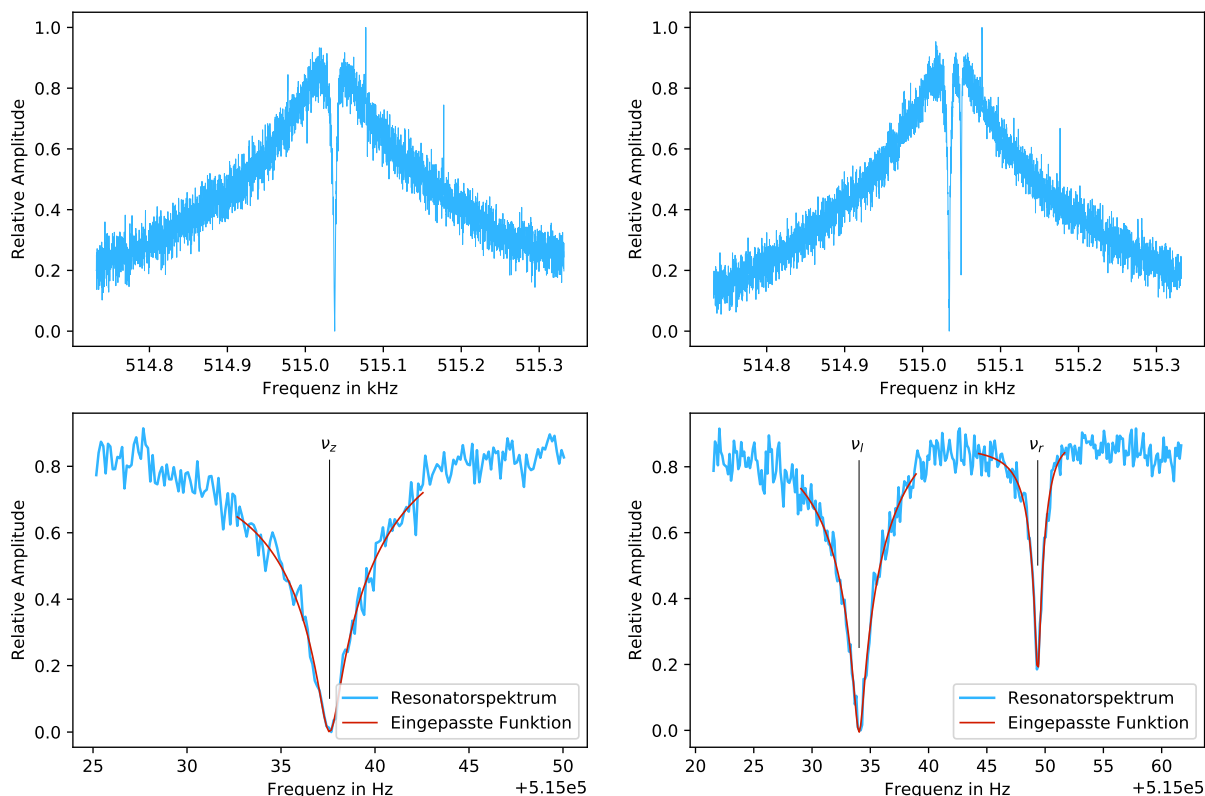


Abb. 5.1: Exemplarische Darstellung des Resonatorspektrums ohne (links) und mit Seitenbandanregung (rechts). Es wurde jeweils in einen Bereich um jeden Einschnitt eine Funktion eingepasst, um die jeweils dazugehörige Frequenz und deren Unsicherheit zu ermitteln.

## 5.2 Aufbau und Durchführung

Der Aufbau für den Versuch entsprach dem allgemeinen Aufbau des  $^3\text{He}$ -Experiments [5][20]. Die Abschirmspule wurde, wie beschrieben, direkt auf die Fallenkammer aufgewickelt und konnte so direkt in das Experiment auf Höhe der Präzisionsfalle (PT) integriert werden. Auch der Heizwiderstand wurde angeschlossen, um auch hier den Einfluss der Abschirmspule genau beobachten zu können. Der Fallenturm selbst befand sich für die Messungen in einem supraleitenden Magneten der in diesem etwa 5,7 T Feldstärke erzeugt.

Zur Anregung eines äußeren Magnetfeldes war um den Magneten eine Helmholtz-Spule montiert, die auf Foto 5.2 zu sehen ist. Diese erzeugte bei einer angelegten Spannung von 30 V eine zusätzliche Feldstärke von  $53,7 \mu\text{T}$  in der Präzisionsfalle und durch Änderung der Polarität dieser Spannung ließ sich sogar eine axiale Magnetfeldänderung von  $107,4 \mu\text{T}$  erzeugen. Da die Messung der Zyklotronfrequenz für Felder im nT-Bereich sensitiv ist, war dieses Vorgehen auch für hohe Abschirmfaktoren vielversprechend. Es musste allerdings auch bedacht werden, dass der Magnet selbst bereits einen nicht zu unterschätzenden Abschirmfaktor von  $S_{\text{Magnet}} = 173 \pm 8$  [21] besitzt.

Es wurde also zunächst bei supraleitender Abschirmspule eine Gleichspannung  $U = -30 \text{ V}$  an die Helmholtzspule angeschlossen, und dann die beiden Resonatorspektren aufgenommen. Das gleiche Vorgehen wurde bei einer auf 0 V und dann auf 30 V erhöhten Spulenspannung

wiederholt. Um die Abschirmspule zu quenchen, wurde der Heizwiderstand mit einer Leistung von 4,5 mW betrieben. Erneut wurden bei den drei verschiedenen Anregungsspannungen die Spektren gesichert.



Abb. 5.2: Neben dem supraleitenden Magnet (a), in dessen Inneren sich die Abschirmspule sowie der Fallenturm des Experiments befindet, wurde zusätzlich eine Helmholtz-Spule (b) verwendet, um eine homogene äußere Magnetfeldstörung zu erzeugen

### 5.3 Ergebnisse der Magnetfeldmessungen

Nach oben beschriebenem Vorgehen wurden die sechs separaten Magnetfeldmessungen ausgewertet und in Tabelle 5.1 zusammengefasst, sowie in Abbildung 5.3 graphisch veranschaulicht.

Quench	$B_{\text{ext}} [\mu\text{T}]$	$\nu_l - \nu_0 [\text{Hz}]$	$\nu_r - \nu_0 [\text{Hz}]$	$\nu_z - \nu_0 [\text{Hz}]$	$B - B_0 [\mu\text{T}]$
1	-53.7	$34.03 \pm 0.03$	$48.15 \pm 0.03$	$38.45 \pm 0.06$	$737.22 \pm 0.09$
	0	$34.04 \pm 0.02$	$49.36 \pm 0.02$	$37.58 \pm 0.05$	$737.63 \pm 0.06$
	+53.7	$34.18 \pm 0.04$	$50.65 \pm 0.02$	$37.44 \pm 0.04$	$737.93 \pm 0.08$
0	-53.7	$33.12 \pm 0.03$	$46.16 \pm 0.03$	$42.75 \pm 0.05$	$735.83 \pm 0.09$
	0	$27.93 \pm 0.03$	$41.44 \pm 0.03$	$32.18 \pm 0.04$	$735.92 \pm 0.08$
	+53.7	$27.78 \pm 0.03$	$40.78 \pm 0.02$	$31.74 \pm 0.03$	$735.85 \pm 0.08$

Table 5.1: Gemessene Frequenzen in der Penningfalle bei verschiedenen externen magnetischen Feldstärken  $B_{\text{ext}}$  und gequenchter, sowie ungequenchter Abschirmspule. Die Frequenzen wurden um  $\nu_0 = 515 \text{ kHz}$  sowie die gemessene Feldstärke um  $B_0 = 5,721 \text{ T}$  reduziert.

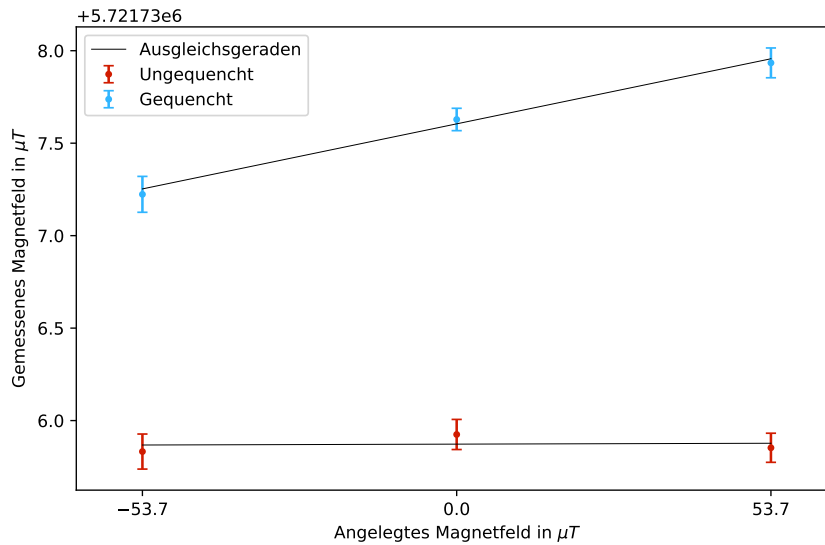


Abb. 5.3: Gemessene Feldstärken in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes: Bei aktiver Abschirmung ist die Änderung des gemessenen Magnetfeldes gering, während der Anstieg bei gequenchter Spule einem Abschirmfaktor des Magneten von  $S_{\text{Magnet}} = 152 \pm 16$  entspricht. Dieser entspricht den Ergebnissen bisheriger Messungen [21].

Auffällig ist zunächst die Beobachtung, dass das gemessene Magnetfeld ohne Äußere Anregung nach dem Anlegen der Heizspannung um etwa  $1,7 \mu\text{T}$  größer war. Dies spricht dafür, dass die Abschirmspule vor dem Quench bereits ein Magnetfeld erzeugt hatte, das im Moment des Unterbrechens des supraleitenden Kreises abgebaut wurde. Seit dem Moment, da die Spule

abgekühlt wurde, muss sich das äußere Magnetfeld also um circa  $1,7 \mu\text{T}$  geändert haben.

Die Unsicherheit des Magnetfeldes, wie sie aus der Kovarianz der gefundenen Parameter beim einpassen der Funktion ins Resonatorspektrum resultierte, lag bei maximal  $\delta B = 10 \text{ nT}$ . Nach dem Quenchen der Abschirmspule war, wie erwartet, ein linearer Zusammenhang zwischen dem angelegten und dem gemessenen Magnetfeld zu sehen. Die in Abbildung 5.3 eingepasste Ausgleichsgerade gibt Auskunft über den intrinsischen Abschirmfaktor des Magneten selbst:

$$S_{\text{Magnet}} = 152 \pm 16. \quad (5.6)$$

Dieses Ergebnis liegt in guter Übereinstimmung mit einem früher gefundenen Wert für den selben Magneten:  $S_{\text{Magnet,ref}} = 173 \pm 8$  [21].

Eine Bestimmung des gemeinsamen Abschirmfaktors von Magnet und Abschirmspule ist schwieriger. Wie aus Abbildung 5.3 deutlich wird, ist die Beschreibung des Verlaufs der vor dem Quench gemessenen Datenpunkte durch eine lineare Funktion besonders wegen der Unsicherheiten jener nur uneindeutig möglich. Die eingezeichnete Ausgleichsgerade hat die Steigung

$$S_{\text{Gesamt}}^{-1} = 0,00008 \pm 0,00154, \quad (5.7)$$

die gleich dem inversen Gesamtabschirmfaktor ist. Dem entspricht ein Abschirmfaktor

$$S_{\text{Gesamt}} = 11859_{-11243}^{+\infty}. \quad (5.8)$$

Der gemeinsame Abschirmfaktor kann also mit etwa  $S_{\text{Gesamt}} > 600$  nur sehr ungenau abgeschätzt werden. Der gefundene Wert (5.8) kann dennoch verwendet werden, um den Abschirmfaktor der Abschirmspule selbst zu bestimmen:

$$S = \frac{S_{\text{Gesamt}}}{S_{\text{Magnet}}} = 78_{-74}^{+\infty}. \quad (5.9)$$

Die Abschirmspule hat demnach einen Abschirmfaktor von  $S > 4$ .

Tatsächlich ist die Bestimmung des Abschirmfaktors aus der Messung der freien Zyklotronfrequenz demnach auch nur schwer möglich. Anders als bei dem Test am Kaltkopf, ist hier zwar die erzeugte Magnetfeldänderung räumlich homogen und auch das Auflösungsvermögen von  $\delta B/B \leq 1,8 \text{ ppb}$  war deutlich besser, allerdings stellt der Abschirmfaktor (5.6) auch höhere Anforderungen an diese. Betrachtet man das Ergebnis von  $S = 78$  (5.9) als maßgeblich, so wird deutlich, dass der Abschirmfaktor der Spule tatsächlich höher ist, als dass die Ergebnisse des ersten Tests am Kaltkopf implizieren.





## Fazit

Ziel und Inhalt dieser Bachelorarbeit war die Entwicklung und der Test einer Abschirmspule für magnetische Feldstörungen. Diese sollte auf dem Prinzip der Flussverhaltung in supraleitenden Leiterkreisen basieren und das Magnetfeld eines Präzisions-Penningfallen-Experiments an  $^3\text{He}$  stabilisieren.

Wesentlicher Bestandteil dieser Entwicklung war das Finden der idealen Proportionierung jener Spule. Da die dazu notwendige Möglichkeit der Berechnung des Magnetfeldes einer Zylinderspule beliebiger Geometrie an beliebigen Punkten im Raum durch analytische Funktionen nicht möglich war, wurde eine Simulation durchgeführt, die dieses zumindest numerisch bestimmen kann. Der Abschirmfaktor  $S$  konnte mit Hilfe dessen für verschiedene Spulenlängen berechnet werden. Auf diese Weise wurde das ideale Verhältnis aus Durchmesser und Länge für eine dicht gewickelte Abschirmspule zu  $v = 0,8611$  bestimmt, was einer Länge von 55,63 mm entspricht. Eine Spule dieser Dimensionen wurde aus dünnem Draht, bestehend aus Niob-Titan, direkt auf die Fallenkammer aufgewickelt. Außerdem wurde eine der Windungen dicht an einen Heizwiderstand gelegt, mit dem bei anliegender Spannung die supraleitende Spule unterbrochen werden konnte.

Die Funktion der Abschirmspule wurde nacheinander auf zwei unabhängige Weisen getestet. Zunächst wurde sie an einem Kaltkopf montiert, der sie in einer Vakuumkammer unter ihre kritische Temperatur abkühlte. Eine axial ausgerichtete Ringspule erzeugte eine periodische Magnetfeldstörung. Zunächst wurde jene mit einer Spannung von  $20 V_{pp}$  betrieben, womit zwar die Funktion der Abschirmung qualitativ bestätigt werden konnte, jedoch das Maß der Abschirmung wegen einer zu geringen Anregung nicht gemessen werden konnte. Nach dem Wechsel zu einem Drehtransformator als Spannungsquelle war zwar ein großer Dunkelstrom und starkes Rauschen in den am Oszilloskop aufgenommenen Signalverläufen zu beobachten, jedoch konnte nach entsprechender Datenaufbereitung der Abschirmfaktor zu  $S = 52 \pm 4$  gemessen werden. Eine separate Messung mit einem Lock-in-Verstärker bestätigte dieses Ergebnis.

Der verwendete GMR-Sensor wurde zur Untersuchung des räumlichen Verlaufs des Abschirmfaktors axial um  $\pm 3$  mm verschoben, und so wurde bestätigt, dass eine gute Abschirmung auch in einem Bereich um das Fallenzentrum herum gewährleistet werden konnte.

Die Ergebnisse dieses Tests sind jedoch geringer als der tatsächliche Abschirmfaktor, da die Art der Anregung mit einer Ringspule kein homogenes äußeres Magnetfeld erzeugt. Besonders, wenn diese Spule gegenüber der Abschirmspule zusätzlich leicht verschoben montiert wurde, wird der maximal messbare Abschirmfaktor stark limitiert. Es war daher interessant die Spule einem weiteren Test zu unterziehen.

Eingebaut im  $^3\text{He}$ -Experiment, für das die Spule vorgesehen war, konnte durch die Messung der freien Zyklotronfrequenz eines gefangenen Heliumions die magnetische Feldstärke gemessen werden. Eine Helmholtz-Spule sorgte für eine homogene Magnetfeldänderung von  $\pm 53,7 \mu\text{T}$ , die jeweils bei aktiver und gequenchter Abschirmspule gemessen wurde. Das erste Resultat hiervon war die Ermittlung des Abschirmfaktors des Magneten selbst von  $152 \pm 16$ , was in guter Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen war. Die Messung des Abschirmfaktors der Abschirmspule wurde durch diesen erschwert, da der gemeinsame Abschirmfaktor sehr hoch und die Unsicherheit der Magnetfeldmessungen von 10 nT dementsprechend ebenfalls zu groß

war. Dennoch konnte mit  $S \approx 78$  ein guter Wert für die von mir entwickelte Abschirmspule gefunden werden. Das Magnetfeld im  $^3\text{He}$ -Experiment konnte somit erfolgreich stabilisiert, und ein Beitrag zur angestrebten Präzision der  $g$ -Faktor Messung von  $^3\text{He}$  geleistet werden.

Die Stabilität der Magnetischen Feldstärke soll bald in einer kontinuierlichen Langzeitmessung über mehrere Stunden erfasst werden. Auch wurde zuletzt der Transportvorgang zwischen den einzelnen Fallen erfolgreich getestet und in der Analysefalle die Änderung des Spinzustandes eines Ions nachgewiesen. Daher wird erwartet, dass in naher Zukunft die ersten Präzisionsmessungen an  $^3\text{He}$  durchgeführt werden können.

---

# LITERATURVERZEICHNIS

---

- [1] S. Ulmer et al. *High-precision comparison of the antiproton-to-proton charge-to-mass ratio*. Nature, 2015.
- [2] S. Sturm et al. *High-precision measurement of the atomic mass of the electron*. Nature, 2014.
- [3] F. Heiße et al. *High-precision measurement of the proton's atomic mass*. Physical Review Letter 119, 033001, 2017.
- [4] F. Heiße et al. *High-precision mass spectrometer for light ions*. Physical Review A 100, 022518, 2019.
- [5] A. Schneider et al. *A Novel Penning-Trap Design for the High-Precision Measurement of the  ${}^3\text{He}^{2+}$  Nuclear Magnetic Moment*. Ann. Phys. (Berlin) 2019, 531, 1800485, 2019.
- [6] A. Mooser et al. *A New Experiment for the Measurement of the  $g$ -Factors of  ${}^3\text{He}^+$  and  ${}^3\text{He}^{2+}$* . Journal of Physics: Conference Series 1138, 012004, 2018.
- [7] G. Gabrielse S. Brown. *Geonium theory: Physics of a single electron or ion in a Penning trap*. American Physical Society, 1986.
- [8] S. Earnshaw. *On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol.7, 1842.
- [9] H. Dehmelt et al. *Continuous Stern-Gerlach effect: Principle and idealized apparatus*. Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol. 83, pp. 2291-2294, 1986.
- [10] A. Mooser et al. *Direct high-precision measurement of the magnetic moment of the proton*. Nature 509, 596–599, 2014.
- [11] S. Ulmer et al. *First Observation of Spin Flips with a single Proton stored in a cryogenic Penning trap*. Doktorarbeit an der Ruperto-Carola Universität in Heidelberg, 2011.
- [12] D.J. Wineland et al. *Principles of the stored ion calorimeter*. Journal of Applied Physics 46, 919–930, 1975.
- [13] A. Eric et al. *Mode coupling in a Penning trap:  $\pi$  pulses and a classical avoided crossing*. Physical Review A, Atomic, molecular, and optical physics., 1990.
- [14] A. Wagner et al. *The  $g$ -factor of the valence electron bound in lithiumlike silicon  ${}^{28}\text{Si}^{11+}$* . Doktorarbeit an der Ruperto-Carola Universität in Heidelberg, 2013.
- [15] J. Tan G. Gabrielse. *Self-shielding superconducting solenoid systems*. Journal of Applied Physics 63, 5143, 1988.
- [16] W. Demtröder. *Electrodynamics and Optics*. Springer Verlag, 2019.
- [17] R. Flükiger. *Nb-Ti*. SpringerMaterials - The Landolt-Börnstein Databas, 2020.

- 
- [18] E. Gerstner et al. *Nobel Prize 2007: Fert and Grünberg*. Nature Physics volume 3, 2007.
- [19] Jack A. Devlin et al. *Superconducting Solenoid System with Adjustable Shielding Factor for Precision Measurements of the Properties of the Antiproton*. PHYSICAL REVIEW APPLIED 12, 044012, 2019.
- [20] A. Schneider. *Design of the Analysis Trap and He Ion Source for the  $^3\text{He}^{2+}$  magnetic moment measurement*. Masterarbeit an der Ruperto-Carola Universität in Heidelberg, 2019.
- [21] S. Streubel. *Kontrolle der Umwelteinflüsse auf THE-Trap am Beispiel der Bestimmung des Massenverhältnisses von Kohlenstoff-12 zu Sauerstoff-16*. Doktorarbeit an der Ruperto-Carola Universität in Heidelberg, 2014.
- [22] D. Hanneke et al. *New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant*. Phys. Rev. Lett. 100, 120801, 2008.
- [23] A. Nikiel et al. *Ultrasensitive  $^3\text{He}$  magnetometer for measurements of high magnetic fields*. Eur. Phys. J. D 68, 330, 2014.
- [24] G. Gabrielse et al. *Open-endcap Penning traps for high precision experiments*. International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes 88, 319–332, 1989.
- [25] F. Bloch. *Nuclear Induction*. Phys. Rev. 70, 460–474, 1946.
- [26] S. Zafonte. *Ultra-precise single-ion atomic mass measurements on deuterium and helium-3*. Metrologia 52, 2015.

---

## Erklärung

---

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 19.08.2020,

A handwritten signature in black ink that reads "J. Berner". The signature is written in a cursive style with a large, sweeping initial "J" and a long, horizontal stroke at the end.

Jacob M. Berner