

Über zufallserregte Schwingungssysteme

Von K. HASSELMANN

Es wird das Verhalten beliebiger linearer Schwingungssysteme unter der Einwirkung statistisch stationärer Zufallserregungen untersucht. Insbesondere wird das instationäre Verhalten instabiler und ungedämpfter stabiler Systeme ermittelt. Als Anwendungsbeispiele werden die Seegangsanfachung durch turbulente Luftdruckschwankungen sowie die Kursstabilität von Schiffen im unregelmäßigen Seegang betrachtet.

The response of arbitrary linear systems to stationary random excitation is investigated with particular emphasis on the instationary response of unstable and undamped stable systems. As example, the results are applied to the problems of wave generation by turbulent atmospheric pressure fluctuations and the directional stability of ships in irregular seas.

In der vorliegenden Arbeit wird das Verhalten linearer Schwingungssysteme unter der Einwirkung stationärer Zufallserregungen untersucht. Es wird das instationäre Verhalten instabiler und ungedämpfter stabiler Systeme ermittelt. Als Anwendungsbeispiele werden die Seegangsanfachung durch turbulente Luftdruckschwankungen sowie die Kursstabilität von Schiffen im unregelmäßigen Seegang betrachtet.

Einleitung

Ein häufig auftretendes Problem der Physik ist die Bestimmung der statistischen Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems, in dem die inhomogenen Erregungsterme stationäre Zufallsfunktionen darstellen. Gewöhnlich werden diese Probleme an Hand der statistischen Spektren der Lösungen untersucht, die sich bekanntlich mit Hilfe der Übertragungsfunktionen in einfacher Weise auf die Spektren der Erregungen zurückführen lassen. Der übliche Spektralansatz setzt jedoch statistisch stationäre Lösungen voraus und ist daher auf stabile, gedämpfte Systeme beschränkt, da bei Systemen mit instabilen oder auch nur neutralen Eigenschwingungen die Schwingung im allgemeinen instationär und somit nicht mehr unmittelbar durch Spektren darstellbar sind. Neben Fragen der Schwingungsentstehung in instabilen Systemen bei kleiner Störregung können somit auch verschiedene Schwingungsprobleme für stabile, aber ungedämpfte Systeme mit der üblichen Methode nicht mehr erfaßt werden.

In der vorliegenden Arbeit werden nun statistisch erregte Schwingungssysteme mit beliebigen Eigenwerten untersucht. Im 1. Teil werden Systeme von gewöhnlichen und im 2. Teil dann partielle Differentialgleichungen behandelt. Bei instabilen Systemen ergeben sich erwartungsgemäß exponentiell anwachsende Lösungen. Die Zufallserregungen haben dabei asymptotisch die gleiche Wirkung wie Zufallsvariationen der Anfangswerte. Bei neutralen Eigenschwingungen nehmen die mittleren Quadrate der Lösungen dagegen linear mit der Zeit zu, wobei die Zunahme zur Spektraldichte der Erregung an der Eigenfrequenzstelle proportional ist.

Als Anwendungsbeispiele werden im 3. und 4. Teil die Anfachung eines Seeganges durch turbulente Luftdruckschwankungen und die Kursstabilität eines im Seegang fahrenden Schiffs untersucht. Die bereits von O. M. PHILLIPS [1] gefundene Lösung für das erste Problem wird durch Einführung des frequenz- und wellenzahlabhängigen Spektrums der Druckschwankungen in wesentlich einfachere Form gebracht. Für das zweite Problem ergibt sich stets Kursinstabilität. Die Zunahme der Kursabweichungen wird dabei durch die Spektraldichte der Seegangscomponenten mit der Begegnungsfrequenz Null bestimmt.

1. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichung

Wir betrachten das System gewöhnlicher, linearer Differentialgleichungen

$$\dot{y}_j - \sum_{k=1}^n a_{jk} y_k = r_j(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (1.1)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_j = y_j^0 \quad \text{für } t = 0 \quad \dots \dots \dots (1.2)$$

Die Matrix (a_{jk}) sei konstant und normalisierbar¹⁾, d. h. es existieren zu den n Eigenwerten

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i \beta_\nu$$

n linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{h}_\nu = \{h_{1\nu}, h_{2\nu}, \dots, h_{n\nu}\}$ (mehrfache Eigenwerte werden mehrfach indiziert).

Die Anfangswerte y_j^0 und Erregungen $r_j(t)$ seien Zufallsvariable mit den folgenden Eigenschaften:

¹⁾ Die Bedingung der Normalisierbarkeit wird hier zur Vereinfachung angenommen. Sie kann bei entsprechender Verallgemeinerung der Ansätze ohne Schwierigkeiten fallengelassen werden.

1. Die Funktionen $r_j(t)$ sind stationär.

2.
$$\overline{y_j^0} = \overline{r_j(t)} = 0 \dots \dots \dots (1.3).$$

3. Die Kovarianzen $R_{jk}^{y^0} = \overline{y_j^{0*} y_k^0}$ (*: konj. Kompl.)

und
$$R_{jk}^r(\tau) = \overline{r_j^*(t) r_k(t + \tau)}$$

existieren.

4. Die Anfangswerte und Erregungen sind unkorreliert:

$$\overline{r_j^*(t) y_k^0} = 0 .$$

5.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{jk}^r(\tau)| d\tau < \infty \dots \dots \dots (1.4).$$

Die Mittelungsstriche bezeichnen hier wie im folgenden stets den statistischen Erwartungswert und nicht zeitliche Mittelwerte. Falls (1.3) nicht von vornherein erfüllt ist, läßt sich dies stets durch Transformation der y_j auf das neue System $\tilde{y}_j = y_j - Y_j$ erreichen, wobei Y_j das durch y_j^0 und $\overline{r_j(t)}$ bestimmte spezielle Lösungssystem von (1.1), (1.2) darstellt. Wegen der Stationarität der Erregungen ist R_{jk}^r unabhängig von t . Wir bezeichnen im folgenden nach Doob [2] ein System von Zufallsfunktionen stets im erweiterten Sinne als „stationär“, wenn bereits sämtliche ersten und zweiten Momente der Zufallsfunktionen gegen Zeittranslationen invariant sind. Bei strenger Stationarität der Erregungsfunktionen wird der Begriff zwar durchweg ebenfalls im strengen Sinne gültig sein, wir beschränken unsere Untersuchung im folgenden jedoch auf Momente bis zur zweiten Ordnung. Wir bezeichnen ferner ein System von Zufallsfunktionen als asymptotisch stationär, wenn bei festem τ die Grenzwerte aller ersten und zweiten Momente für $t \rightarrow \infty$ existieren.

Durch Darstellung der Anfangswerte und Erregungen als Linearkombinationen der Eigenvektoren:

$$y_j^0 = \sum_{\nu=1}^n h_{j\nu} \eta_\nu^0 \dots \dots \dots (1.5),$$

$$r_j(t) = \sum_{\nu=1}^n h_{j\nu} \varrho_\nu(t) \dots \dots \dots (1.6)$$

erhält man die Lösung von (1.1), (1.3) in der Form

$$y_j = \sum_{\nu=1}^n h_{j\nu} \eta_\nu(t) \dots \dots \dots (1.7)$$

mit

$$\eta_\nu(t) = \eta_\nu^0 e^{\lambda_\nu t} + \int_0^t \varrho_\nu(t') e^{\lambda_\nu(t-t')} dt' \dots \dots \dots (1.8).$$

Aus (1.3) und (1.8) folgt zunächst

$$\overline{y_j(t)} = 0 \dots \dots \dots (1.9).$$

Die wesentlichen statistischen Eigenschaften des Lösungssystems $y_j(t)$ werden dann durch die Kovarianzfunktionen $R_{jk}^y(t, \tau) = \overline{y_j^*(t) y_k(t + \tau)}$ beschrieben. An Stelle der R_{jk}^y ist es zweckmäßiger, die Kovarianzfunktionen $R_{\nu\mu}^\eta(t, \tau) = \overline{\eta_\nu^*(t) \eta_\mu(t + \tau)}$ zu untersuchen, aus denen sich die R_{jk}^y nach (1.7) durch die Transformation

$$R_{jk}^y = \sum_{\nu, \mu} h_{j\nu}^* h_{k\mu} R_{\nu\mu}^\eta \dots \dots \dots (1.10)$$

ergeben. Bei den meisten physikalischen Problemen sind sämtliche mit lateinischen Symbolen versehenen Größen reell, während im allgemeinen die entsprechenden, mit griechischen Symbolen gekennzeichneten Größen im Eigenkoordinatensystem komplex sind.

Aus der Lösung (1.8) bekommt man nun zunächst:

$$R_{\nu\mu}^\eta(t, \tau) = R_{\nu\mu}^{\eta_0} e^{(\lambda_\nu^* + \lambda_\mu) t + \lambda_\mu \tau} + \int_0^t dt_1 \int_0^{t+\tau} dt_2 e^{\lambda_\nu^*(t-t_1) + \lambda_\mu(t+\tau-t_2)} R_{\nu\mu}^{\eta_0}(t_2 - t_1) \dots (1.11).$$

Man erkennt sofort, daß bei Eigenwerten mit nicht negativem Realteil α_ν oder α_μ der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^\eta(t, \tau)$ im allgemeinen nicht existiert, d. h., das Lösungssystem ist im allge-

meinen nicht asymptotisch stationär. Ein System asymptotisch stationärer Zufallsvariablen erhält man jedoch durch die Transformationen:

$$\tilde{\eta}_\nu = \left\{ \begin{array}{ll} \eta_\nu & \text{für } \alpha_\nu < 0 \ (\tilde{\eta}_\nu \in \mathfrak{M}_1), \\ \eta_\nu e^{-\lambda_\nu t} & \text{für } \alpha_\nu > 0 \ (\tilde{\eta}_\nu \in \mathfrak{M}_2), \\ \frac{\eta_\nu}{\sqrt{t}} & \text{für } \alpha_\nu = 0 \ (\tilde{\eta}_\nu \in \mathfrak{M}_3) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.12).$$

Für das Variablensystem $\tilde{\eta}_\nu$ lassen sich nun folgende Sätze aufstellen:

- {1}. Das System $\tilde{\eta}_\nu$ ist asymptotisch stationär.
- {2}. Die durch (1.12) definierten Variablenmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$ sind asymptotisch unkorreliert.
- {3}. Zwei Variable $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu$ der Menge \mathfrak{M}_3 sind überdies nur im Falle $\lambda_\nu = \lambda_\mu$ asymptotisch korreliert.
- {4}. Für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_1$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = -\frac{1}{\lambda_\nu^* + \lambda_\mu} \int_0^\infty [R_{\nu\mu}^e(\tau + \zeta) e^{\lambda_\nu^* \zeta} + R_{\nu\mu}^e(\tau - \zeta) e^{\lambda_\mu \zeta}] d\zeta \dots \dots (1.13).$$

- {5}. Für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_2$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = R_{\nu\mu}^e + \frac{1}{\lambda_\nu^* + \lambda_\mu} \int_0^\infty [R_{\nu\mu}^e(-\zeta) e^{-\lambda_\nu^* \zeta} + R_{\nu\mu}^e(\zeta) e^{-\lambda_\mu \zeta}] d\zeta = \text{const} \quad (1.14).$$

- {6}. Für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_3, \lambda_\nu = \lambda_\mu = i\beta_\nu$ gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = e^{i\beta_\nu \tau} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\nu\mu}^e(\zeta) e^{-i\beta_\nu \zeta} d\zeta \dots \dots \dots (1.15).$$

Beweis

- {4}: Aus (1.11), (1.12) folgt für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_1$ mit $t' = t - t_1, t'' = t + \tau - t_2$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\lambda_\nu^* t' + \lambda_\mu t''} R_{\nu\mu}^e(\tau + t' - t'') dt' dt'' \dots \dots \dots (1.16).$$

Gleichung (1.13) ergibt sich dann aus (1.16) durch die Transformation

$$\xi = t' + t'', \quad \zeta = t' - t'' \dots \dots \dots (1.17).$$

- {5}: Für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_2$ folgt aus (1.11), (1.12):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = R_{\nu\mu}^e + \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda_\nu^* t_1 - \lambda_\mu t_2} R_{\nu\mu}^e(t_2 - t_1) dt_1 dt_2 \dots \dots \dots (1.18),$$

woraus sich (1.14) wieder durch die Transformation (1.17) ergibt.

- {3}, {6}: Für $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu \in \mathfrak{M}_3$ erhält man aus (1.11), (1.12):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t(t+\tau)}} \int_0^t dt_1 \int_0^{t+\tau} dt_2 e^{-i\beta_\nu(t-t_1) + i\beta_\mu(t+\tau-t_2)} R_{\nu\mu}^e(t_2 - t_1) \quad (1.19) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t(t+\tau)}} \times \\ &\times \left\{ \int_0^\tau dt_2 \int_0^t dt_1 e^{-i\beta_\nu(t-t_1) + i\beta_\mu(t+\tau-t_2)} R_{\nu\mu}^e(t_2 - t_1) + \int_0^t \int_0^t e^{-i\beta_\nu t' + i\beta_\mu t''} R_{\nu\mu}^e(\tau + t' - t'') dt' dt'' \right\} \quad (1.20). \end{aligned}$$

Der Beitrag des ersten Integrals auf der rechten Seite von (1.20) verschwindet wegen (1.4). Auf das zweite Integral wenden wir wieder die Transformation (1.17) an und erhalten im Falle $\beta_\nu \neq \beta_\mu$ Satz {3}, im Falle $\beta_\nu = \beta_\mu$ Satz {6}.

- {2}: Das asymptotische Verschwinden der Korrelationen $R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}$ für Variable $\tilde{\eta}_\nu, \tilde{\eta}_\mu$ aus verschiedenen Mengen \mathfrak{M}_i läßt sich auf ähnlichem Wege wie die Beziehungen {3}—{6} nachweisen.
- {1} ist schließlich wegen unserer Auffassung der Bezeichnung „stationär“ im weiten Sinne lediglich eine Folgerung der Sätze {2}—{6}.

Von größerer Bedeutung als die Kovarianzfunktionen eines Systems stationärer Zufallsfunktionen sind im allgemeinen die Spektralverteilungen $F_{\nu\mu}(\omega)$, aus denen sich die Kovarianzen durch die Transformation

$$R_{\nu\mu}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\omega} dF_{\nu\mu}(\omega) \dots \dots \dots (1.21)$$

ergeben. Die Umkehrung zu (1.21) lautet [2]:

$$\frac{F_{\nu\mu}(\omega_2+) + F_{\nu\mu}(\omega_2-)}{2} - \frac{F_{\nu\mu}(\omega_1+) + F_{\nu\mu}(\omega_1-)}{2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \frac{e^{-i\omega_2\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{-2\pi i\tau} R_{\nu\mu}(\tau) d\tau \quad (1.22).$$

Für $\int_{-\infty}^{\infty} |R_{\nu\mu}(\tau)| d\tau < \infty$ existieren stetige Spektraldichten $f_{\nu\mu}(\omega) = \frac{dF_{\nu\mu}(\omega)}{d\omega}$, für welche die Beziehungen (1.21) und (1.22) dann in normale FOURIERTRANSFORMATIONEN übergehen. Nach (1.4) existieren also insbesondere die Spektraldichten $f_{\nu\mu}^e(\omega)$ der Erregungsfunktionen $q_{\nu}(t)$.

Für die asymptotischen Spektralverteilungen $F_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega)$ bzw. $f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega)$ ergeben sich nun aus (1.13), (1.14) und (1.15) folgende Beziehungen:

{7}. $\tilde{\eta}_{\nu}, \tilde{\eta}_{\mu} \in \mathfrak{M}_1$. Die Spektraldichte $f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega)$ existiert. Es gilt

$$f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = \frac{f_{\nu\mu}^e(\omega)}{(\lambda_{\nu} - i\omega)^* (\lambda_{\mu} - i\omega)} \dots \dots \dots (1.23)$$

{8}. $\tilde{\eta}_{\nu}, \tilde{\eta}_{\mu} \in \mathfrak{M}_2$. Die Spektraldichte ist eine DIRACSCHE δ -FUNKTION mit singularer Stelle bei $\omega = 0$. Es gilt

$$F_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{für } \omega < 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{\nu\mu}^e(\omega) d\omega}{(\lambda_{\nu} - i\omega)^* (\lambda_{\mu} - i\omega)} + R_{\nu\mu}^{\eta} \quad \text{für } \omega > 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.24).$$

{9}. $\tilde{\eta}_{\nu}, \tilde{\eta}_{\mu} \in \mathfrak{M}_3$, $\beta_{\nu} = \beta_{\mu}$. Die Spektraldichte ist eine δ -FUNKTION mit Singularität an der Resonanzstelle $\omega = \beta_{\nu}$. Es gilt

$$F_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{für } \omega < \beta_{\nu}, \\ 2\pi f_{\nu\mu}^e(\beta_{\nu}) \quad \text{für } \omega > \beta_{\nu}, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1.25).$$

Der Sprung in der Spektralverteilung an der Resonanzstelle ist also der Spektraldichte der Erregung an dieser Stelle proportional.

Beweis

{7}: Für $\tilde{\eta}_{\nu}, \tilde{\eta}_{\mu} \in \mathfrak{M}_1$ folgt zunächst aus (1.4), (1.13) $\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\tau)| d\tau < \infty$. Die Spektraldichte $f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega)$ existiert somit und kann als inverse FOURIERTRANSFORMATION der Kovarianzfunktion $R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\tau)$ dargestellt werden:

$$f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \left[\int_0^{\infty} \frac{R_{\nu\mu}^e(\tau + \zeta) e^{\lambda_{\nu}^* \zeta} + R_{\nu\mu}^e(\tau - \zeta) e^{\lambda_{\mu} \zeta}}{\lambda_{\nu}^* + \lambda_{\mu}} d\zeta \right] d\tau.$$

Wegen (1.4) läßt sich die Reihenfolge der Integration vertauschen, so daß

$$f_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\nu\mu}^e(\tau) e^{-i\omega\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{(\lambda_{\nu}^* + i\omega)\zeta} + e^{(\lambda_{\mu} - i\omega)\zeta}}{\lambda_{\nu}^* + \lambda_{\mu}} d\zeta = \frac{f_{\nu\mu}^e(\omega)}{(\lambda_{\nu} - i\omega)^* (\lambda_{\mu} - i\omega)} \quad (1.23).$$

Gleichung (1.23) ist die bekannte Beziehung zwischen den Spektren der Schwingungen und der Erregungen bei stabilen, gedämpften Schwingungssystemen im Eigenkoordinatensystem. Die Matrix der Übertragungsfunktionen besteht in diesem Falle nur aus den Diagonalelementen $(\lambda_{\nu} - i\omega)^{-1}$.

{8}: Für $\tilde{\eta}_{\nu}, \tilde{\eta}_{\mu} \in \mathfrak{M}_2$ gilt nach (1.14):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(t, \tau) = \text{const} = R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}, \infty}.$$

Nach (1.22) ist dann

$$F_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}}(\omega) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad \text{für } \omega < 0, \\ R_{\nu\mu}^{\tilde{\eta}, \infty} \quad \text{für } \omega > 0. \end{array} \right.$$

Für $\omega > 0$ bekommt man weiter nach (1.14)

$$R_{\nu\mu}^{\bar{\eta}\infty} = R_{\nu\mu}^{\eta^0} + \frac{1}{\lambda_\nu^* + \lambda_\mu} \int_0^\infty d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' f_{\nu\mu}^e(\omega') [e^{-(\lambda_\nu - i\omega')^* \zeta} + e^{-(\lambda_\mu - i\omega') \zeta}]$$

und nach Vertauschung der Integrationen dann

$$R_{\nu\mu}^{\bar{\eta}}(\omega) = R_{\nu\mu}^{\eta^0} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{\nu\mu}^e(\omega') d\omega'}{(\lambda_\nu - i\omega')^* (\lambda_\mu - i\omega')} \quad (\omega > 0).$$

{9}: Durch Einführung der Spektraldichte $f_{\nu\mu}^e(\omega)$ läßt sich (1.15) in der einfacheren Form schreiben:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R_{\nu\mu}^{\bar{\eta}}(t, \tau) = 2\pi f_{\nu\mu}^e(\beta_\nu) e^{i\beta_\nu \tau} \dots \dots \dots (1.26).$$

Gleichung (1.25) folgt dann unmittelbar aus (1.26) und (1.22).

Die Sätze {1}—{9} lassen sich zu folgendem Bild des asymptotischen Verhaltens von linearen Schwingungssystemen unter der Einwirkung stationärer Zufallserregungen zusammenfassen. Gedämpfte Eigenschwingungen sind asymptotisch stationär und lassen sich im Falle kontinuierlicher Erregungsspektren ebenfalls durch kontinuierliche Spektren darstellen. Bei instabilen Schwingungen ergibt die Normierung $\bar{\eta}_\nu = \eta_\nu e^{-\lambda_\nu t}$ asymptotisch stationäre Variable mit konstanten Kovarianzfunktionen. Asymptotisch haben die Zufallserregungen den gleichen Einfluß wie Zufallsvariationen der Anfangswerte. Neutrale Eigenschwingungen nehmen mit der Wurzel der Zeit zu. Sie sind also stabil gegen Variationen der Anfangswerte aber instabil gegen stationäre Zufallserregungen. Die Spektren der asymptotisch stationären, normierten Variablen

$\bar{\eta}_\nu = \frac{\eta_\nu}{\sqrt{t}}$ bestehen aus einer diskreten Linie an der Resonanzstelle β_ν . Die Energie der Linie ist der Spektraldichte der Erregung an dieser Stelle proportional. Für große t sind die gedämpften bzw. instabilen Eigenschwingungen vorwiegend durch die Erregungen in einem beschränktem Zeitintervall unmittelbar vor t bzw. unmittelbar nach der Anfangszeit $t_0 = 0$ bestimmt, während zur Anfachung der neutralen Eigenschwingungen die Erregungen im gesamten Zeitintervall von 0 bis t mit gleichem Gewicht beitragen. Dies ist die Ursache der asymptotischen statistischen Entkopplung der verschiedenen Eigenschwingungstypen. Da die neutralen Eigenschwingungen ferner durch die gleichmäßige Einwirkung der Erregungen während langer Zeiten angeregt werden, werden die normierten Variablen $\frac{\eta_\nu}{\sqrt{t}}$ nach dem zentralen Grenzwertsatz (bzw. seinen Erweiterungen auf abhängige Variable) unter gewissen weiteren, wenig einschränkenden Voraussetzungen unabhängig von den speziellen statistischen Eigenschaften der Erregungen für $t \rightarrow \infty$ in GAUSSSCHE Prozesse übergehen.

2. Partielle Differentialgleichungen

Für die Untersuchung partieller Differentialgleichungen mit statistisch stationären Erregungstermen wählen wir den gleichen Ausgangspunkt wie im ersten Teil, d. h., wir setzen voraus, daß ein bekanntes, vollständiges System von Eigenlösungen

$$y_\nu(\vec{x}, t) = h_\nu(\vec{x}) e^{\lambda_\nu t}, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (\vec{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \dots \dots (2.1)$$

der homogenen Differentialgleichung (mit entsprechenden Randbedingungen) vorliegt. Wir nehmen ferner an, daß sich dann die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$y(\vec{x}, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(\vec{x}) \eta_\nu(t) \dots \dots \dots (2.2)$$

mit

$$\eta_\nu(t) = \eta_\nu^0 e^{\lambda_\nu t} + \int_0^\infty \varrho_\nu(t') e^{\lambda_\nu(t-t')} dt' \dots \dots \dots (2.3)$$

schreiben läßt, wobei η_ν^0 bzw. $\varrho_\nu(t)$ die Entwicklungskoeffizienten der Anfangswerte bzw. Erregungen nach den Eigenfunktionen darstellen. Für die üblichen hyperbolischen und parabolischen Differentialgleichungen der Physik treffen die Gleichungen (2.1)—(2.3) zu. Sofern die Eigenfunktionen bekannt sind, ist die Form der Differentialgleichung im einzelnen für das Folgende unwesentlich.

Es seien nun η_v^0 und $\varrho_v(t)$ Zufallsvariable mit den im ersten Teil angegebenen Eigenschaften. Zunächst folgt wieder

$$y(\vec{x}, t) = 0 \dots \dots \dots (2.4).$$

Die wesentlichen statistischen Eigenschaften von y werden dann durch die Kovarianzfunktion

$$R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) = \overline{y(\vec{x}, t) y(\vec{x} + \vec{\xi}, t + \tau)} \dots \dots \dots (2.5)$$

beschrieben, die sich nach (2.2) auf die im ersten Teil untersuchte Kovarianzfunktion $R_{\nu\mu}^y(t, \tau)$ zurückführen läßt:

$$R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) = \sum_{\nu, \mu=1}^{\infty} h_{\nu}^*(\vec{x}) h_{\mu}(\vec{x} + \vec{\xi}) R_{\nu\mu}^y(t, \tau) \dots \dots \dots (2.6).$$

Bis auf die unendliche Zahl der Eigenfunktionen besteht also völlige Übereinstimmung in der Behandlung von partiellen und gewöhnlichen Differentialgleichungen, so daß sich sämtliche Ergebnisse des ersten Teils unmittelbar auf den zweiten Teil übertragen lassen.

Die strenge Analogie versagt lediglich im Falle kontinuierlicher Eigenwerte, bei dem die Summendarstellung (2.2) in ein Integral übergeht. Da die allgemeine Behandlung des kontinuierlichen Falles ohne nähere Kenntnis der Eigenfunktionen und Zufallserregungen wenig aufschlußreich ist, beschränken wir uns im folgenden auf Differentialgleichungen der Form

$$\ddot{y} + D_1[\dot{y}] + D_2[y] = r(\vec{x}, t) \dots \dots \dots (2.7),$$

wobei D_1 und D_2 konstante, lineare, räumliche Differentialoperatoren darstellen. Die Anfangsbedingungen seien

$$y(\vec{x}, 0) = y^0(\vec{x}) \dots \dots \dots (2.8),$$

$$\dot{y}(\vec{x}, 0) = \dot{y}^0(\vec{x}) \dots \dots \dots (2.9).$$

Die Differentialgleichung sei im gesamten \vec{x} -Raum gültig, so daß Randbedingungen für das Anfangswertproblem entfallen. Die Funktionen $y^0(\vec{x})$, $\dot{y}^0(\vec{x})$ und die Erregung $r(\vec{x}, t)$ seien nun Zufallsfunktionen mit folgenden Eigenschaften:

- 1) $r(\vec{x}, t)$ ist stationär und homogen, d. h. $R^r(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau)$ ist unabhängig von t und \vec{x} .
- 2) $y^0(\vec{x})$ und $\dot{y}^0(\vec{x})$ sind homogen.
- 3) $r = y^0 = \dot{y}^0 = 0$.
- 4) r, y^0 und \dot{y}^0 sind unkorreliert.
- 5) r, y^0 und \dot{y}^0 besitzen stetige Spektraldichten $f^r(\vec{k}, \omega)$, $f^{y^0}(\vec{k})$ bzw. $f^{\dot{y}^0}(\vec{k})$.

Für r, y^0 und \dot{y}^0 existieren dann die FOURIER-STIELTJES-Darstellungen [2]:

$$r(\vec{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{k}\vec{x}) + i\omega t} d\varrho(\vec{k}, \omega) \dots \dots \dots (2.10),$$

$$\left. \begin{aligned} y^0(\vec{x}) \\ \dot{y}^0(\vec{x}) \end{aligned} \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{k}\vec{x})} \left\{ \begin{aligned} d\eta^0(\vec{k}) \\ d\dot{\eta}^0(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.11),$$

mit

$$\left. \begin{aligned} (d\varrho(\vec{k}, \omega))^* d\varrho(\vec{k}', \omega') &= 0 \quad \text{für } (\vec{k}, \omega) \neq (\vec{k}', \omega') \\ (d\eta^0(\vec{k}))^* d\eta^0(\vec{k}') &= (d\dot{\eta}^0(\vec{k}))^* d\dot{\eta}^0(\vec{k}') = 0 \quad \text{für } \vec{k} \neq \vec{k}' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.12)$$

und

$$\left. \begin{aligned} (d\varrho(\vec{k}, \omega))^* d\varrho(\vec{k}, \omega) &= f^r(\vec{k}, \omega) dk_1, dk_2, \dots, dk_n d\omega, \\ (d\eta^0(\vec{k}))^* d\eta^0(\vec{k}) &= f^{y^0}(\vec{k}) dk_1, dk_2, \dots, dk_n, \\ (d\dot{\eta}^0(\vec{k}))^* d\dot{\eta}^0(\vec{k}) &= f^{\dot{y}^0}(\vec{k}) dk_1, dk_2, \dots, dk_n \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.13).$$

Zu jedem \vec{k} besitzt die homogene Differentialgleichung nun zwei Eigenlösungen $e^{i(\vec{k}\vec{x}) + \lambda_1 t}$, $e^{i(\vec{k}\vec{x}) + \lambda_2 t}$. Es sei $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Aus (2.10), (2.11) erhält man dann für die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.7) mit den Anfangsbedingungen (2.8), (2.9):

$$\begin{aligned} y(\vec{x}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_1 t + i(\vec{k}\vec{x})} d\eta_1(\vec{k}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 t + i(\vec{k}\vec{x})} d\eta_2(\vec{k}) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\vec{k}\vec{x})}}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \begin{aligned} e^{i\omega t} - e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 - i\omega \end{aligned} - \frac{e^{i\omega t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - i\omega} \right\} d\varrho(\vec{k}, \omega) \dots \dots \dots (2.14) \end{aligned}$$

mit

$$d\eta_1(\vec{k}) = \frac{\lambda_2 d\eta_0 - d\dot{\eta}_0}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad d\eta_2(\vec{k}) = \frac{\lambda_1 d\eta_0 - d\dot{\eta}_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \dots \dots \dots (2.15).$$

An Hand der Gleichungen (2.12) bis (2.15) läßt sich nun die allgemeine Formel für die Kovarianzfunktion $R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau)$ in Abhängigkeit der Spektren f, f^y und $f\dot{y}$ sofort hinschreiben. In erster Linie interessiert jedoch wieder das asymptotische Verhalten für große t , welches sich am zweckmäßigsten an Hand folgender Fallunterscheidung untersuchen läßt:

1. Stabiles, gedämpftes System: $\text{Re}(\lambda_1(\vec{k})) < 0, \text{Re}(\lambda_2(\vec{k})) < 0$ für alle \vec{k} .

Die Terme $e^{i\lambda_j t}$ in (2.14) sind in diesem Falle für große t vernachlässigbar und man erhält:

$$R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int \frac{f(\vec{k}, \omega) e^{i\omega\tau + i(\vec{k}\vec{x})}}{|\lambda_1 - i\omega|^2 |\lambda_2 - i\omega|^2} dk_1 dk_2 \dots dk_n d\omega + O(1) \dots \dots (2.16).$$

Nach (2.16) ist $y(\vec{x}, t)$ also homogen und asymptotisch stationär. Da die Kovarianzfunktionen die FOURIERtransformationen der Spektraldichten sind, ergibt sich dann aus (2.16) für die Spektraldichte von y :

$$f^y(\vec{k}, \omega) = \frac{f^e(\vec{k}, \omega)}{|\lambda_1 - i\omega|^2 |\lambda_2 - i\omega|^2} \dots \dots \dots (2.17).$$

2. Instabiles System: Der Realteil α_j mindestens eines Eigenwertes λ_j nimmt positive Werte an. In (2.14) dominieren also für große t die Exponentialterme $e^{\lambda_j t}$ mit positivem α_j . Wir unterscheiden nun weiterhin zwei Fälle:

a) $\max\{\alpha_1(\vec{k}), \alpha_2(\vec{k})\}$ liegt im Unendlichen. Der Hauptanteil der Schwingungsenergie verschiebt sich in diesem Falle mit zunehmendem t ständig weiter ins kurzwellige Gebiet. Ohne nähere Kenntnis von f^e läßt sich für diesen Fall keine allgemeingültige asymptotische Form für R^y angeben. Ein System dieser Art ist z. B. die instabile Schichtung einer schweren Flüssigkeit über einer leichteren bei vernachlässigbaren Kapillarkräften.

b) $\max\{\alpha_1(\vec{k}), \alpha_2(\vec{k})\}$ liegt im Endlichen. In diesem Falle läßt sich eine asymptotische Form für R^y angeben, die im Einzelnen jedoch noch von der Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit, auf der das Maximum angenommen wird, abhängt. Wir beschränken uns hier auf den häufigsten Fall einer isotropen Differentialgleichung, bei der $\lambda_1 = \lambda_1(|\vec{k}|), \lambda_2 = \lambda_2(|\vec{k}|)$. Das maximale α_j (sagen wir α_1) werde dann auf der Kugeloberfläche $|\vec{k}| = k_m$ angenommen (bei mehreren Flächen bzw. Eigenwerten mit gleichem Maximum muß (2.18) um entsprechende Terme erweitert werden). In der Integraldarstellung (2.14) überwiegen dann für große t die Anteile der Integranden in der unmittelbaren Umgebung der Fläche $|\vec{k}| = k_m$. Durch entsprechende Entwicklung in der Umgebung dieser Fläche erhält man:

$$R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{\gamma t}} e^{2\alpha_1(k_m)t + \lambda_1(k_m)\tau} \int_{|\vec{k}|=k_m} d\Omega e^{i(\vec{k}\vec{\xi})} \left\{ f_{n_1}(\vec{k}) + f_{n_2}(\vec{k}) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\vec{k}, \omega)}{|\lambda_2 - \lambda_1|^2 |\lambda_1 - i\omega|^2} \right\} + o\left(\frac{e^{2\alpha_1(k_m)t}}{\sqrt{t}}\right) \quad (2.18)$$

($d\Omega$ = Flächenelement der Kugel $|\vec{k}| = k_m$)

mit

$$\gamma = - \left(\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial |\vec{k}|^2} \right)_{|\vec{k}|=k_m} \dots \dots \dots (2.19).$$

Nach (2.18) ist also $y(\vec{x}, t) e^{-\lambda_1(k_m)t} \cdot t^{1/4}$ eine homogene, asymptotisch stationäre, und zwar zeitunabhängige Zufallsfunktion, deren räumliches Spektrum auf die Kugeloberfläche $|\vec{k}| = k_m$ konzentriert ist. Die Erregungen haben asymptotisch wieder die gleiche Wirkung wie Zufallsvariationen der Anfangswerte. Beispiele für Systeme dieser Art sind die instabile Schichtung zweier schwerer Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Kapillarkräfte und laminare Grenzschichten im überkritischen REYNOLDSzahlenbereich (in diesem Falle sind die Eigenfunktionen allerdings nicht mehr harmonisch).

3. Ungedämpftes stabiles System: $\lambda_1(\vec{k}) = i\beta_1(\vec{k}), \lambda_2(\vec{k}) = i\beta_2(\vec{k}); (\beta_1, \beta_2 \text{ reell})$.

Mit Ausnahme der Resonanzstellen $\omega = \beta_j$ im dritten Integral bleiben in diesem Falle sämtliche Integranden der rechten Seite von (2.14) beim Grenzübergang $t \rightarrow \infty$ beschränkt.

Für große t überwiegen dann die Beiträge des dritten Integrals in der Umgebung der Resonanzstellen und man erhält:

$$\begin{aligned}
 R^y(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) &\rightarrow \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\vec{k}\vec{\xi}) + i\beta_j\tau}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} f'(\vec{k}, \beta_j(\vec{k})) dk_1, dk_2, \dots, dk_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|e^{i\omega t} - e^{i\beta_j t}|^2}{(\omega - \beta_j)^2} d\omega + O(1) \\
 &= 2\pi t \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(\vec{k}\vec{\xi}) + i\beta_j(\vec{k})\tau}}{(\beta_1 - \beta_2)^2} f'(\vec{k}, \beta_j(\vec{k})) dk_1, dk_2, \dots, dk_n + O(1) \quad \dots \quad (2.20).
 \end{aligned}$$

Nach (2.20) ist y/\sqrt{t} also eine homogene, asymptotisch stationäre Zufallsfunktion, deren Spektrum $f^y(\vec{k}, \omega)$ auf die Resonanzflächen $\omega = \beta_j(\vec{k})$ im (\vec{k}, ω) -Raum konzentriert ist. Die Flächenspektraldichte der Lösung ist der räumlichen Spektraldichte $f'(\vec{k}, \beta_j(\vec{k}))$ der Erregung auf den Resonanzflächen proportional.

Beispiele solcher Systeme sind die dämpfungsfreien Schwingungen von Membranen oder Platten bei homogener, stationärer Zufallserregung sowie die im nächsten Abschnitt behandelten Oberflächenwellen einer schweren Flüssigkeit unter der Einwirkung eines homogenen, stationären Druckschwankungsfeldes.

Mit den Fällen 1 bis 3 sind sämtliche Möglichkeiten der Eigenwerte λ_j erfaßt, mit Ausnahme der für die Anwendungen weniger interessierenden Sonderfälle $\Re(\lambda_j) \leq 0$, bei denen sowohl das Ungleichheits- als auch das Gleichheitszeichen vorkommt.

Anwendungen

3. Seegangsanzfachung durch turbulente Druckschwankungen

Das Problem der Seegangsentsstehung unter der Einwirkung eines homogenen, stationären Druckschwankungsfeldes über der Wasseroberfläche ist bereits ausführlich von PHILLIPS [1] behandelt worden. Im folgenden wird lediglich die PHILLIPSSche Formel, bei der die Energiezunahme des Seegangs durch ein Integral über gewisse Kovarianzfunktionen der Druckschwankungen ausgedrückt war, durch Einführung des von Frequenz und Wellenzahl abhängigen Druckspektrums in eine einfache, anschauliche Form gebracht.

Die linearisierten Bewegungsgleichungen und Randbedingungen für die Bewegung einer unendlich tiefen, horizontal unbegrenzten, idealen Flüssigkeit mit freier Oberfläche lauten:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{für } x_3 < 0 \quad \dots \quad (3.1),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g\zeta - \frac{T}{\varrho} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{P}{\varrho} \quad \text{für } x_3 = 0 \quad \dots \quad (3.2),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0 \quad \text{für } x_3 = 0 \quad \dots \quad (3.3),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \rightarrow 0 \quad \text{für } x_3 \rightarrow -\infty \quad \dots \quad (3.4).$$

- wobei $\varphi(\vec{x}, t)$ = Geschwindigkeitspotential,
 $\zeta(\vec{x}, t)$ = Oberflächenerhebung,
 $p(\vec{x}, t)$ = Druckschwankung relativ zum mittleren Druck über der Wasseroberfläche
 \vec{x} = $\{x_1, x_2, x_3\}$, \vec{x} = $\{x_1, x_2\}$, x_3 nach oben gerichtet,
 g = Erdbeschleunigung,
 ϱ = Flüssigkeitsdichte,
 T = Oberflächenspannung.

Hinzu kommen noch Anfangsbedingungen, die in unserem Zusammenhang jedoch nicht näher interessieren.

Das homogene Differentialgleichungssystem besitzt die bekannten Eigenlösungen

$$\zeta_{\vec{k}}^{(1)} = e^{i(\vec{k}\vec{x}) + i\omega_k t}, \quad \Phi_{\vec{k}}^{(1)} = \frac{i\omega_k}{k} e^{i(\vec{k}\vec{x}) + kx_3 + i\omega_k t} \quad \dots \quad (3.5),$$

$$\zeta_{\vec{k}}^{(2)} = e^{i(\vec{k}\vec{x}) - i\omega_k t}, \quad \Phi_{\vec{k}}^{(2)} = -\frac{i\omega_k}{k} e^{i(\vec{k}\vec{x}) + kx_3 - i\omega_k t} \quad \dots \quad (3.6)$$

mit $\omega_k = \sqrt{gk + \frac{T k^3}{\rho}}$
 $(\vec{k} = \{k_1, k_2\}, |\vec{k}| = k) \dots \dots \dots (3.7).$

Die Eigenlösungen sind ungedämpfte, harmonische Wellen; es liegt also der Fall 3 des letzten Abschnitts vor. Es handelt sich zwar hier nicht um eine, sondern um zwei gekoppelte Differentialgleichungen, für ζ erhält man jedoch wieder eine FOURIER-STIELTJES-Entwicklung der Form (2.14):

$$\zeta(\vec{x}, t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k e^{i(\vec{k}\vec{x}) + i\omega t}}{2 i \omega_k \rho} \left\{ \frac{e^{i\omega t} - e^{i\omega_k t}}{\omega_k - \omega} + \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega_k t}}{\omega_k + \omega} \right\} d\pi(\vec{k}, \omega),$$

wo $d\pi(\vec{k}, \omega)$ stellt die FOURIER-STIELTJES-Komponente des Drucks $p(\vec{x}, t)$ darstellt und die Anfangswerte gleich Null angenommen sind. Für große t erhält man dann wieder nach (2.20):

$$R^{\zeta}(\vec{x}, t, \vec{\xi}, \tau) = \frac{\pi t}{2 \rho^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2}{\omega_k^2} \left\{ e^{i(\vec{k}\vec{\xi}) + i\omega_k \tau} f^p(\vec{k}, \omega_k) + e^{i(\vec{k}\vec{\xi}) - i\omega_k \tau} f^p(\vec{k}, -\omega_k) \right\} dk_1 dk_2 + O(1) \quad (3.8).$$

Das asymptotische Spektrum von ζ besteht also nach (3.8) ausschließlich aus freien Eigenwellen. Ein nur aus freien, unabhängigen Eigenwellen bestehender homogener Seegang läßt sich nun vollständig durch das zweidimensionale Energiespektrum $F(\vec{k})$ darstellen, bei dem $F(\vec{k}) dk_1 dk_2$ die Energie der sich in positive \vec{k} -Richtung fortpflanzenden Wellen bedeutet, deren Wellenzahlen im Rechteckbereich $(\vec{k}, \vec{k} + d\vec{k})$ liegen. Die Gesamtenergie des Seegangs pro Oberflächeneinheit ist dann $\rho g \zeta^2 = E = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\vec{k}) dk_1 dk_2$. Das Spektrum $F(\vec{k})$ ist von dem gelegentlich verwendeten Spektrum $f^{\zeta}(\vec{k})$, das sich aus der räumlichen FOURIER-Zerlegung der momentanen Wasseroberfläche ergibt, zu unterscheiden. Es gilt $f^{\zeta}(\vec{k}) = \frac{1}{2\rho g} \{F(\vec{k}) + F(-\vec{k})\}$. Im Gegensatz zu $F(\vec{k})$ stellt $f^{\zeta}(\vec{k})$ keine eindeutige Beschreibung des Seegangs dar. Aus der FOURIER-Darstellung der Kovarianzen durch die Spektraldichten folgt nun aus (3.8):

$$F(\vec{k}) = t \frac{\pi g k^2}{\rho \omega_k^2} f^p(\vec{k}, -\omega_k) \dots \dots \dots (3.9).$$

In der Form

$$\frac{\partial F(\vec{k})}{\partial t} = \frac{\pi g k^2}{\rho \omega_k^2} f^p(\vec{k}, -\omega_k) \dots \dots \dots (3.9')$$

gilt (3.9') auch für den in Wirklichkeit gewöhnlich vorliegenden Fall eines quasi-stationären Windfeldes. Die rechte Seite von (3.9') ist dann einer der Anfachungsterme in der vollständigen Gleichung für die spektrale Energiebilanz [3]. Bei vernachlässigbarer Oberflächenspannung erhält man die etwas einfachere Formel²⁾:

$$\frac{\partial F(\vec{k})}{\partial t} = \frac{\pi k}{\rho} f^p(\vec{k}, -\omega_k) \dots \dots \dots (3.10).$$

4. Die Kursinstabilität eines Schiffs im Seegang

Wir untersuchen die Kursschwankungen eines zur Anfangszeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit U in x -Richtung fahrenden Schiffs in einem homogenen, stationären Seegang. Für kleine Geschwindigkeits- und Richtungsschwankungen lauten die Differentialgleichungen für den Schiffskurs:

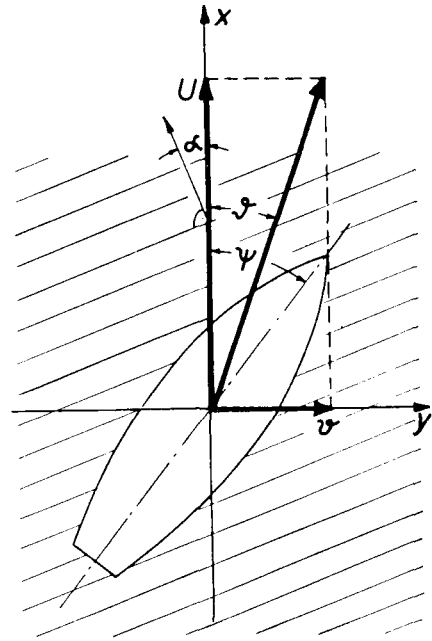
$$\dot{\vartheta} + a \dot{\psi} + b(\vartheta - \psi) = p_1(t) \dots \dots \dots (4.1),$$

$$\ddot{\psi} + c \dot{\psi} + d(\vartheta - \psi) = p_2(t) \dots \dots \dots (4.2),$$

wobei $\vartheta = v/U =$ Schiffskurs, $v = y$ -Komponente der Schwerpunktsgeschwindigkeit des Schiffs,
 $\psi =$ Winkel zwischen der Schiffslängsachse und der x -Achse (vgl. Bild).

²⁾ Der in [3], Gleichung (5) angegebene Faktor $\pi/4k$ müßte richtig $\pi k/\rho$ heißen.

Die Funktionen $p_1(t)$, $p_2(t)$ stellen vom Seegang abhängige Zufallserregungen dar. Bis auf Faktoren sind $p_1(t)$ die am Schiffsschwerpunkt angreifende transversale Kraft und $p_2(t)$ das um diesen Punkt wirkende horizontale Drehmoment. a , b und c sind Dämpfungskoeffizienten, während d der Koeffizient des Richtmomentes ist. In Wirklichkeit besteht noch eine schwache Kopplung der Gleichungen (4.1), (4.2) mit der Rollbewegung des Schiffes, da bei dieser infolge der Rolldämpfung gewöhnlich auch laterale Kräfte und horizontale Momente auftreten. Die Rollkopplung wird jedoch im folgenden vernachlässigt, da sie die Ergebnisse im wesentlichen nicht beeinflusst. Die Gleichungen (4.1) und (4.2) sind strenggenommen nur in einem jeweils beschränkten Frequenzbereich der Erregung gültig, da das Schiff mit einem kontinuierlichen Medium gekoppelt ist und seine Bewegung sich somit nicht exakt durch ein endliches System gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreiben läßt. In unserem Falle ist diese Einschränkung jedoch ohne Belang, da es sich erweist, daß das asymptotische Kursverhalten des Schiffes ausschließlich durch die Erregungskomponenten in der unmittelbaren Umgebung einer einzigen Frequenz bestimmt wird.



Durch die Transformation $y_1 = \vartheta$, $y_2 = \psi$, $y_3 = \dot{\psi}$ erhält man das Differentialgleichungssystem (4.1), (4.2) in der Form (1.1):

$$\dot{y}_j = \sum_k a_{jk} y_k + r_j(x) \dots \dots \dots (4.3)$$

mit

$$(a_{jk}) = \begin{pmatrix} -b & b & -a \\ 0 & 0 & 1 \\ -d & d & -c \end{pmatrix}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_2 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.4)$$

Die Matrix (a_{jk}) hat die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{matrix} \right\} = -\frac{b+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + d - bc + ad} \dots \dots \dots (4.5)$$

mit den Eigenvektoren

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} b - a\lambda_2 \\ b + \lambda_2 \\ 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} b - a\lambda_3 \\ b + \lambda_3 \\ 1 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \dots \dots \dots (4.6)$$

Für Kursstabilität muß die Bedingung $\Re(\lambda_2) \leq 0$, nach (4.5) also $d - bc + ad \leq 0$, erfüllt sein. Auch für $\Re(\lambda_2) < 0$ liegt jedoch stets nur der grenzstabile Fall vor, da das System stets die ungedämpfte Eigenlösung $\vec{y} = \text{const.} \vec{h}_1$ bzw. $\vartheta = \psi = \text{const.}$ besitzt. Physikalisch bedeutet dies einfach, daß neben dem Anfangskurs $\vartheta = \psi = 0$ jeder beliebige Kurs $\vartheta = \psi = \text{const.}$ eine Lösung des ungestörten Schiffskurses darstellt. Nach den Ergebnissen des ersten Teils bedeutet dies dann, daß ein in glattem Wasser stabiles Schiff sich im Seegang stets instabil verhält.

Zur Berechnung der entstehenden Kursabweichungen transformieren wir (4.3) wieder auf das Koordinatensystem der Eigenvektoren. Mit den gleichen Bezeichnungen wie im ersten Teil ergibt sich für die Erregung e_1 :

$$e_1(t) = p_1(t) \frac{(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3 (1 + a)} + p_2(t) \frac{b}{\lambda_2 \lambda_3} \dots \dots \dots (4.7)$$

Nach (1.26), (1.13) wird dann für große t

$$\overline{\eta_1^2} = 2\pi t f_{11}^e(0) + O(1), \quad \overline{\eta_2^2}(t) = O(1), \quad \overline{\eta_3^2} = O(1) \dots \dots \dots (4.8)$$

so daß nach (4.6)

$$\overline{\vartheta^2} = \overline{\psi^2} = \overline{\vartheta\psi} = 2\pi t f_{11}^e(0) + O(1) \dots \dots \dots (4.9)$$

wobei $f_{11}^e(0)$ die Spektraldichte der Erregung e_1 an der Stelle $\omega = 0$ bedeutet.

Bei bekannter Abhängigkeit der Funktionen $p_1(t)$, $p_2(t)$ vom Seegang läßt sich $f_{11}^e(\omega)$ nun auf das Seegangsspektrum zurückführen. Der Zusammenhang ergibt sich am einfachsten durch Einführung der Erregungsfaktoren P_1 und P_2 . Bei einem sinusförmigen Seegang $\zeta = \Re \{ H_{\vec{k}} e^{-i(\vec{k}\vec{x}) + i\omega_k t} \}$ sind diese durch die Beziehung

$$p_j(t) = \Re \{ P_j H_{\vec{k}} e^{i\omega' t} \} \quad (j = 1, 2) \quad \dots \dots \dots (4.10)$$

definiert, wobei $H_{\vec{k}}$ die Wellenamplitude und $\omega' = \omega_k - (\vec{k} \vec{U})$ die Begegnungsfrequenz darstellen, mit $\vec{U} =$ Schiffsgeschwindigkeit ($\omega_k = \sqrt{gk}$, $k = |\vec{k}|$). Die Erregungsfaktoren sind im allgemeinen ebenso wie die Begegnungsfrequenz Funktionen der Schiffsgeschwindigkeit, der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ und des Winkels α zwischen der Schiffsgeschwindigkeit und der Fortschrittrichtung der Wellen: $P_j = P_j(U, k, \alpha)$.

Für die Kovarianzfunktion von ϱ_1 ergibt sich nun aus (4.7), (4.10) und der Spektraldarstellung des Seegangs:

$$R_{11}^e(\tau) = \overline{\varrho_1^*(t) \varrho_1(t + \tau)} = \frac{1}{\varrho g} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega'\tau} \left| P_1 \frac{(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3 (1 + a)} + P_2 \frac{b}{\lambda_2 \lambda_3} \right|^2 F(\vec{k}) dk_1 dk_2 \quad (4.11),$$

wobei $F(\vec{k})$ das im vorigen Anwendungsbeispiel definierte Seegangsspektrum bedeutet. Da $R_{11}^e(\tau)$ die FOURIERtransformation von $f_{11}^e(\omega)$ ist, ergibt sich das Spektrum aus (4.11) durch Transformation der Integrationsvariablen k_1, k_2 auf ω' , und das Linienelement $d\sigma$ längs der Kurve $\omega' = \text{const.}$ ergibt:

$$f_{11}^e(\omega') = \frac{1}{\varrho g} \int \left| P_1 \frac{(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3 (1 + a)} + P_2 \frac{b}{\lambda_2 \lambda_3} \right|^2 \left(\left(\frac{\partial \omega'}{\partial k_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega'}{\partial k_2} \right)^2 \right)^{-1/2} F(\vec{k}) d\sigma \dots (4.12).$$

Für $\omega' = 0$ ergibt (4.12) dann insbesondere das mittlere Quadrat der Kursabweichung nach (4.9).

Die Zunahme der Kursabweichung ist auf die Einwirkung der Seegangskomponenten mit der Begegnungsfrequenz Null zurückzuführen, d. h. auf Wellen, deren Phasengeschwindigkeiten in Fahrtrichtung mit der Schiffsgeschwindigkeit übereinstimmen. Der Einfluß der Wellen verschiedener Fortpflanzungsrichtungen wird maßgeblich durch den Faktor $\left| P_1 \frac{(b + \lambda_2)(b + \lambda_3)}{\lambda_2 \lambda_3 (1 + a)} + P_2 \frac{b}{\lambda_2 \lambda_3} \right|^2$ bestimmt. Für genau achterliche Wellenkomponenten ($\alpha = 0$) verschwindet er, während sich für $|\alpha| \geq \frac{\pi}{2}$ wiederum die Bedingung $\omega' = 0$ nicht mehr erfüllen läßt. Die Kursinstabilität wird also durch die schräg von achtern kommenden Wellen im Bereich $0 < |\alpha| < \pi/2$ hervorgerufen.

Der starke Einfluß von Wellen mit der Begegnungsfrequenz $\omega' = 0$ ist bereits früher bei Untersuchungen der Kursstabilität von Schiffen im sinusförmigen Seegang festgestellt worden (z. B. [4]). Es ergab sich dort jedoch keine Kursinstabilität, da kleine Kursabweichungen im sinusförmigen Seegang sofort zu einer Verstimmung der Begegnungsfrequenz führen, so daß auch Wellen mit der anfänglichen Begegnungsfrequenz $\omega' = 0$ nur beschränkte Kursabweichungen hervorrufen. Es wurde daher vermutet, daß die beobachtete Kursinstabilität von Schiffen im achterlichen Seegang nur durch nichtlineare Effekte zu erklären sei. Bei statistischer Betrachtung ergibt jedoch bereits der lineare Ansatz Kursinstabilität, da für jede Lage des Schiffs stets einige Wellenkomponenten mit der Begegnungsfrequenz $\omega' = 0$ weitere zufällige Kursabweichungen bewirken.

Unsere Ergebnisse gelten bisher nur unter der Voraussetzung kleiner Kursabweichungen $|\vartheta| \ll 1$. Von dieser Einschränkung kann man sich jedoch leicht befreien.

Nach Abschnitt 1 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kursabweichung ϑ eine Normalverteilung:

$$w(\vartheta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\vartheta^2}}} e^{-\frac{\vartheta^2}{2\overline{\vartheta^2}}}$$

deren Varianz $\overline{\vartheta^2}$ nach (4.9) linear mit der Zeit zunimmt:

$$\overline{\vartheta^2} = 2\kappa t \quad \dots \dots \dots (4.13)$$

mit $\kappa = \pi f_{11}^e(0)$.

Eine Normalverteilung mit der Eigenschaft (4.13) ist nun eine spezielle Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial w(\vartheta, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 w(\vartheta, t)}{\partial \vartheta^2} \quad \dots \dots \dots (4.14)$$

mit der Anfangsbedingung $w(\vartheta, 0) = \delta(\vartheta)$. Wegen der Linearität des Problems ist dann im allgemeinen Fall einer beliebigen Anfangsverteilung $w(\vartheta, 0) = w_0(\vartheta)$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung für $t > 0$ ebenfalls durch die Differentialgleichung (4.14) bestimmt. Auf Grund der einschränkenden Bedingung $|\vartheta| \ll 1$ konnte dabei κ in (4.14) als konstant angenommen werden. Im allgemeinen Fall beliebiger Kursabweichungen ϑ läßt sich nun unschwer zeigen, daß $w(\vartheta, t)$ der allgemeinen Wärmeleitungsgleichung mit veränderlichem κ genügt:

$$\frac{\partial w(\vartheta, t)}{\partial t} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \kappa(\vartheta) \frac{\partial w(\vartheta, t)}{\partial \vartheta} \right\} \dots \dots \dots (4.15),$$

in der κ wie bisher durch die Spektraldichte der Wellen mit der Begegnungsfrequenz $\omega' = 0$ bestimmt ist [(4.12)], jedoch nunmehr allgemein in Bezug auf einen beliebigen Kurs ϑ . In (4.15) kann die Bedingung kleiner Kursabweichungen somit fallengelassen werden. Jedoch muß die Voraussetzung kleiner Erregungen, auf der die asymptotische Formel (4.13) und somit ebenfalls die Diffusionsgleichungen (4.14) und (4.15) beruhen, nach wie vor erfüllt sein.

Literatur

- [1] O. M. PHILLIPS, On the generation of waves by turbulent wind, *J. Fluid Mech.* **2** (1957), S. 417—445.
- [2] J. L. DOOB, *Stochastic Processes*, 1953, John Wiley & Sons.
- [3] K. HASSELMANN, Grundgleichungen der Seegangsvoraussage, *Schiffstechnik* **7** (1960), S. 191—195.
- [4] L. J. RYDILL, A linear theory for the steered motion of ships in waves. *Trans. Inst. Nav. Arch.* (1959), S. 81—107.
- [5] G. P. WEINBLUM, On the directional stability of ships in calm water and in a regular seaway. *Proc. Ist. Nat. Congr. Appl. Mech.* (1951), S. 43—47.

Manuskripteingang: 1. 11. 1961

Anschrift: Dr. K. HASSELMANN, Institut für Schiffbau der Univ. Hamburg; z. Zt. Institute of Geophysics and Planetary Physics, La Jolla, California, U.S.A.