

Die Stabilität der Strömung in einem gekrümmten Kanal

Von Günther Hämmerlin in Freiburg i. Br.

Die Stabilität der Strömung in einem gekrümmten, unendlich hohen Kanal wurde untersucht, dessen Wände aus den Teilstücken zweier achsengleicher Zylinder gebildet werden. Als Störungen der bekannten Grundströmung werden dreidimensionale Wirbel Taylorscher Art angesetzt. Die aus den vollen Navier-Stokeschen Differentialgleichungen des rotationssymmetrischen Problems entspringenden Störungsdifferentialgleichungen werden linearisiert, und die Annahme $R_1 - R_2 = d \ll R_1$ ($R_1 =$ Radius des inneren, $R_2 =$ Radius des äußeren Zylinders) erlaubt einige Vernachlässigungen geometrischer Art. Die Aufgabenstellung führt im Falle neutraler Wirbel — also solcher Wirbel, die den Grenzzustand zwischen den für die Laminarströmung „gefährlichen“ angefachten und den „ungefährlichen“ gedämpften darstellen — auf folgendes Eigenwertproblem: Die Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} L u &= (1 - 2\eta) v \\ L^2 v &= -S \sigma^2 (\eta - \eta^2) u \end{aligned} \right\} L = \frac{d^2}{d\eta^2} - \sigma^2 \quad \dots \dots \dots (1)$$

($u =$ dimensionslose Wirbelkomponente in Richtung der Grundströmung, $v =$ dimensionslose Wirbelkomponente in der radialen Richtung r), sind unter den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$, $v(0) = v(1) = 0$, $v'(0) = v'(1) = 0$ zu lösen. Dabei ist $\eta = (R_2 - r)/(R_2 - R_1)$, $\sigma = \alpha d$ ($\alpha = 2\pi/\lambda$, $\lambda/2 =$ Wirbeldicke) und $S = 72 Re^2 \frac{d}{R_1}$ ($Re = \bar{u}_0 d/\nu$, Reynoldssche Zahl der Grundströmung u_0 mit $\bar{u}_0 = \int_0^1 u_0(\eta) d\eta$).

Die gesuchte „kritische Kurve“ ist die des kleinsten Eigenwertes $S_1(\sigma)$, und der „kritische Wert“ ist der Wert von $\frac{1}{36} S_1 = 2 Re^2 \frac{d}{R_1}$ im Minimum dieser Kurve.

Diese Fragestellung wurde bereits 1928 von W. R. Dean und kürzlich von C.-S. Yih und W. M. Sangster behandelt. In beiden Arbeiten wird der kritische Wert berechnet, jedoch stehen die angegebenen Werte im Verhältnis 150:1. Unsere Untersuchungen hatten ein zweifaches Ziel: Einerseits sollte durch strenge Verfahren die genannte Diskrepanz aufgeklärt werden, andererseits sollte die noch offene Frage nach dem Aussehen der entstehenden Wirbel beantwortet werden.

Dazu werden die Dgln. (1) mit Hilfe ihrer Greenschen Funktionen in Integralgleichungen verwandelt. Eine Abschätzung von J. Schur liefert zunächst untere Schranken für $|S_1|$; der genaue Wert von S_1 wird dann mit Hilfe eines Iterationsverfahrens nach H. Wielandt ermittelt.

Für den kritischen Wert ergibt sich $2 Re^2 \frac{d}{R_1} = 2,55 \cdot 10^3$, wobei die angegebenen Ziffern als gültig anzusehen sind. Dean hatte seinerzeit den ebenfalls richtigen Wert $2,6 \cdot 10^3$ gefunden; die Resultate von Yih und Sangster werden als falsch erkannt. Das Iterationsverfahren liefert gleichzeitig auch die zu dem kleinsten Eigenwert gehörenden Eigenfunktionen, mit deren Hilfe das Aussehen der entstehenden Wirbel beschrieben werden kann. Die zu dem kritischen Wert gehörigen neutralen Wirbel haben die Dicke $\lambda/2 = 0,79 d$ in Richtung der Mantellinien der benachbarten Zylinder. Ihre Kerne sind etwas zur äußeren Kanalwand hin verschoben.

Die ausführliche Arbeit mit Abbildungen der kritischen Kurve, der Eigenfunktionen und der entstehenden Wirbel ist inzwischen in Arch. Rat. Mech. Anal. 1, Nr. 3, 1958, S. 211—224, erschienen.

Die Totalreflexion von kugelförmigen Kompressionsfronten in elastischen Medien; v. Schmidtsche Kopfwellen¹⁾

Von K. Hasselmann in Hamburg

Bisher sind die bei der Totalreflexion von kugelförmigen Stoßfronten oder Wellen an Trennungsf lächen zweier verschiedener Medien auftretenden v. Schmidtschen Kopfwellen [1] nur für den einfachsten Fall der Totalreflexion einer Kugelwelle an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten ermittelt worden [2]. Die Berechnung der Kopfwellen aus den Integraldarstellungen der Störungen nach Ott ist schwierig und in dem wesentlich komplizierteren, für die Anwendung jedoch wichtigeren Fall der Totalreflexion an der Trennungsf läche zweier elastischer Medien kaum mehr durchführbar. Es wird hier nun ein einfacher Weg zur direkten Ermittlung

¹⁾ Dissertationsauszug. Herrn Prof. Dr. W. Tollmien bin ich für die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen sowie die mir im Max Planck-Institut für Strömungsforschung gewährte Unterstützung zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

der Kopfwellen aus den Grenzbedingungen beschrieben, der auch im Falle elastischer Medien ohne Schwierigkeiten zum Ziel führt. Die Methode wird im folgenden für Stoßfronten abgeleitet, die Ergebnisse lassen sich jedoch durch einfache Bezeichnungsänderung auch auf Wellen kleiner Wellenlänge übertragen.

Bei der Reflexion und Brechung einer kugelförmigen Kompressionsfront mit dem Zentrum O an der Trennungsebene $z = 0$ zweier elastischer Medien entstehen zunächst in beiden Medien je eine Kompressions- und eine Wirbelfront (siehe Bild). Als Kompressionsfronten

(1. Ordnung) werden dabei Flächen bezeichnet, auf denen die Normalkomponenten der Spannung und der Teilchengeschwindigkeit Sprünge aufweisen. Flächen, auf denen die Tangentialkomponenten der Spannung und der Teilchengeschwindigkeit unstetig sind, bezeichnen wir dann nach einem Vorschlag von W. Tollmien, da sie auf einer Unstetigkeit des Wirbelanteils der Verschiebung beruhen, als Wirbelfronten (an Stelle der geläufigeren Bezeichnung Scherungsfront). Es werden hier schwache Fronten, auf die die linearisierten Bewegungsgleichungen anwendbar sind, vorausgesetzt. Die Formen sowie die Springstärkenverteilung der durch direkte Reflexion und Brechung entstandenen Fronten können ohne Schwierigkeiten durch die Methode ermittelt werden, die von J. Nitsche [3] auf den Fall der normalen Reflexion und Brechung einer Stoßfront an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten angewandt wurde. Die Ergebnisse gelten allerdings nur für die durch die kritischen Strahlen begrenzten Bereiche BAB , HKH , FEF und MLM der Fronten, die noch normal reflektiert und gebrochen worden sind. Auf den übrigen, durch Totalreflexion entstandenen Bereiche der Fronten liegen keine Unstetigkeiten sondern logarithmische Singularitäten der Spannung und Teilchengeschwindigkeit vor.

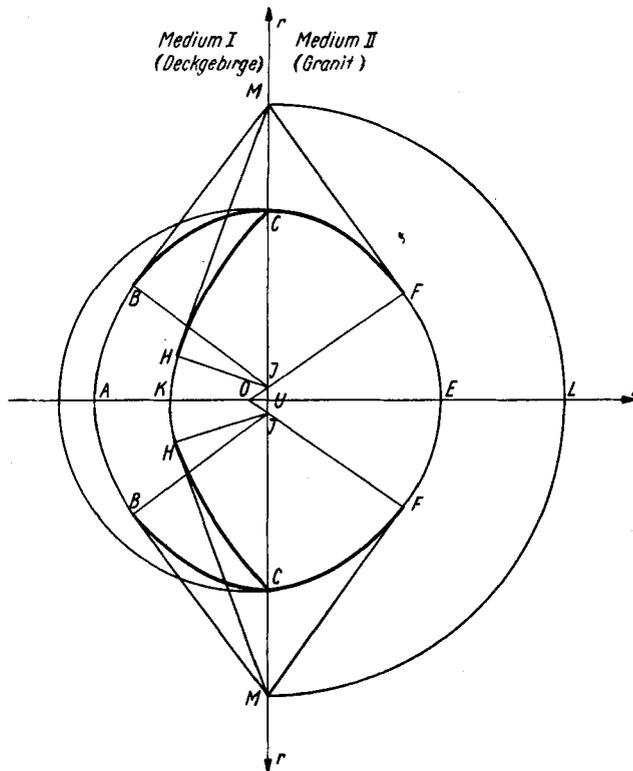


Bild 1. Die Reflexion und Brechung einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien

der Fronten liegen keine Unstetigkeiten sondern logarithmische Singularitäten der Spannung und Teilchengeschwindigkeit vor.

Zur Ermittlung der von der gebrochenen Kompressionsfront MLM ausgestrahlten Kopfwellen MB , MH und MF werden die vier Grenzbedingungen (Stetigkeit der beiden Komponenten der Spannung und der Teilchengeschwindigkeit beim Durchgang durch die Trennungsebene) an der Stelle M angewandt. Für die bereits berechnete gebrochene Kompressionsfront stellt man zunächst fest, daß die Unstetigkeit an der Trennungsebene verschwindet, woraus dann aus den Grenzbedingungen folgt, daß auch auf den Kopfwellen keine Unstetigkeiten 1. Ordnung auftreten. Jedoch weisen die Kopfwellen Unstetigkeiten 2. Ordnung auf, d. h. Unstetigkeiten in den Ableitungen der Spannungen und Teilchengeschwindigkeiten senkrecht zur Front. Wegen der Grenzbedingungen müssen nun die Sprünge in den längs der Trennungsebene genommenen Ableitungen der Spannungen und Teilchengeschwindigkeiten an der Stelle M in beiden Medien gleich sein, woraus sich zur Bestimmung der Unstetigkeiten 2. Ordnung an der Trennungsebene das Gleichungssystem

$$M \mathfrak{x}_2 = a \frac{\partial \Phi_1^{gk}}{\partial z}$$

ergibt. Dabei bestehen die Komponenten des Vektors \mathfrak{x}_2 aus den geeignet normierten Unstetigkeiten 2. Ordnung Φ_2 der drei Kopfwellen und der gebrochenen Kompressionsfront, a ist ein von den Materialkonstanten abhängiger konstanter Vektor, $\frac{\partial \Phi_1^{gk}}{\partial z}$ die (bekannte) Ableitung der Unstetigkeit 1. Ordnung der gebrochenen Kompressionsfront in (z -) Richtung tangential zur Front und M die gleiche Koeffizientenmatrix, die sich bei der Reflexion und Brechung einer unter dem kritischen Winkel einfallenden ebenen Kompressionswelle ergibt.

Die Unstetigkeiten auf den Kopfwellen im Innern der Medien erhält man aus den Werten an der Trennungsebene aus der Formel für die Fortpflanzung der Unstetigkeiten längs der Orthogonalstrahlen der Fronten, die nach F. G. Friedlander [4] mit dem Intensitätsgesetz der geometrischen Akustik übereinstimmt:

$$\Phi_2^2 \sim \frac{1}{a \cdot b},$$

wo a , b die beiden Hauptkrümmungsradien der Front sind. Längs der Orthogonalstrahlen klingen die Unstetigkeiten demnach umgekehrt proportional der Wurzel des von einem scheinbaren Anfangspunkt auf der z -Achse zurückgelegten Weges ab. Zu einem festen Zeitpunkt findet man dann weiter, daß die Unstetigkeiten tangential zur Kopfwelle je nach dem, ob die Kopfwelle einen kleinen oder einen großen Winkel gegen die Trennungsebene einschließt, etwa wie q^{-2} bzw. wie $q^{-3/2}$ abklingen, wobei q die Entfernung von der Einmündungsstelle der Kopfwelle in die entsprechende Front 1. Ordnung ist. (Eine ausführliche Veröffentlichung ist vorgesehen.)

[1] O. v. Schmidt, Phys. Zeitschr. **39** (1938) 868—874.

[2] H. Ott, Ann. d. Phys. **41** (1942) 443—466.

[3] J. Nitsche, Z. angew. Math. Mech. **34** (1954) 361—373.

[4] F. G. Friedlander, Proc. Camb. Phil. Soc. **38** (1942) 378—382.

Über Formen der Flachwasserströmung auf einer schwach geneigten ebenen Platte

Von Dipl.-Ing. *D. Huhnt* in Berlin

Die Untersuchung zeigte, daß ein Zusammenhang besteht zwischen dem statistischen Auftreten der Emmons'schen spots und dem hydrodynamischen Störprinzip der angefachten infinitesimalen Partialwellen.

Es erweist sich, daß ein nicht mehr unterdrückbarer Restteil der von Emmons eingeführten spot-Entstehungsdichte von anwachsenden, zunächst sehr kleinen Wellenstörungen verursacht werden kann, selbst wenn Einlaufstörungen fehlen.

Die Untersuchung ergab im einzelnen, daß nur dann wachsende spots auftreten, wenn die auf die örtlich und zeitlich konstante Wasserhöhe und Oberflächengeschwindigkeit bezogene Re -Zahl den Wert

$$Re^* = 970 \pm 2,5\%_{max}$$

überschritten hat. (Diesen genauen Meßwert erhält man durch die Anwendung eines experimentellen Einschachtelungsverfahrens!) Unterhalb von Re^* treten unter besonderen Verhältnissen der Strömungsparameter entweder

a) die laminare stationäre Grundströmung

oder

b) eine ebene Wellenströmung mit 2-dim. Gleichgewichtsamplitude

oder

c) eine ebene Wellenströmung mit 3-dim. Gleichgewichtsamplitude

stabil auf. Diese Stabilität ist in folgendem Sinne zu verstehen: Selbst grobe endliche Störungen klingen beim Stromabwärtswandern stets ab.

In der Ebene zweier frei wählbarer Strömungsparameter werden die Stabilitätsgebiete der oben angeführten 3 Strömungsformen durch „Kritische Funktionen“ begrenzt, die gemessen werden konnten.

Diskutiert man die Meßergebnisse, so erhält man eine Interpretationsmöglichkeit der in der Hydraulik üblichen Begriffe „Schießen“ und „Strömen“. Dem ersteren Fall entspricht die „Stabile Laminarströmung“, dem letzteren die „Im statistischen Gleichgewicht befindliche turbulente Gerinneströmung“.

Die Arbeit wurde mit der Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Hermann Föttinger-Institut der Technischen Universität Berlin durchgeführt, das unter der Leitung von Herrn Professor Dr.-Ing. R. Wille steht.

On the Stability of Flow in the Boundary Layer Near the Nose of Blunt Body

by *A. M. Kuethe*, University of Michigan

An approximate analysis indicates that the stretching of vortex filaments because of the change in body cross-sectional area and the positive velocity gradient near the nose of a body of revolution is a destabilizing influence on the boundary layer. The analysis indicates that the