ANNALEN DER METEOROLOGIE
(Neue Folge)
Nr. 12

Die Meteorologen-Tagung in Garmisch-Partenkirchen

vom 13. bis 16. April 1977

Offenbach a. M. 1977
Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes

LÖSUNG VON BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DURCH PROJEKTION AUF PARAMETERGLEICHUNGEN, DARGESTELLT AN DER OZEANISCHEN DECKSCHICHT

G. Leipold und K. Hasselmann

Max-Planck-Institut für Meteorologie, Hamburg

Kurzfassung: Es wird ein dreidimensionales Modell der durchmischten ozeanischen Deckschicht betrachtet, mit dem die langperiodische und jahreszeitliche Variabilität des Oberflächentemperaturfeldes im Äquatorgebiet in Abhängigkeit von den atmosphärischen Anfachungsfunktionen untersucht werden kann. Tiefe und Dichte der Schicht werden prognostisch, die Strömung diagnostisch betrachtet. Die tatsächlichen Felder werden durch vorgegebene Felder mit variablen, zeitabhängigen Parametern approximiert, die Bewegungsgleichungen werden auf Gleichungen für diese Parameter projeziert.

1 PARAMETRISCHE LÖSUNG VON BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

Die numerische Lösung von Bewegungsgleichungen für geophysikalische Felder nach den üblichen Gitterpunkt- oder Spektralmethoden ist im allgemeinen zwar hinreichend genau, aber recht rechenaufwendig. Bei Anwendungen, in denen man auf hohe Genauigkeit verzichten möchte zugunsten längerer Integrationszeiten - z.B. bei Klimamodellen - kann es zweckmäßiger sein, die tatsächlichen Felder durch parametrisch dargestellte Felder zu approximieren. Die Zeitentwicklung der Näherungsfelder erhält man dann durch Projektion der Bewegungsgleichungen auf entsprechende prognostische Gleichungen für die Parameter. Für ein Skalarfeld ist diese Methode in Hasselmann (1976) angewandt worden; wir skizzieren sie hier für ein Vektorfeld.

Das Vektorfeld $u_\alpha(\vec{x}, t)$ genüge den Bewegungsgleichungen:

$$\dot{u}_\alpha = F_\alpha(u_\beta). \qquad (1)$$

Für u_α wird ein Näherungsfeld $\hat{u}_\alpha(\vec{x}, a_1, \dots a_n)$ angesetzt, das von n Parametern $a_1(t), \dots a_n(t)$ abhängt. Die Parameter a_j werden so bestimmt, daß $\hat{u}_\alpha$ sich möglichst wenig von u_α unterscheidet. Das Anpassungsverfahren definiert ein Funktional

$$a_j = \phi_j(u_\alpha). \qquad (2)$$

Variiert man nun u_α nach der Zeit, so ist die Variation δu_α mit einer Variation δa_j der Parameter verknüpft und es gilt (über doppelt vorkommende Indizes wird summiert):

$$\delta a_j = \phi_j^\alpha(\delta u_\alpha), \qquad (3)$$

wobei $\phi_j^\alpha := \frac{\partial \phi_j}{\partial u_\alpha}$ die Funktionalableitung von ϕ_j ist. (3) gilt insbesondere auch für $\delta \hat{u}_\alpha$, und mit $\delta \hat{u}_\alpha = \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial a_k} \cdot \delta a_k$ folgt daher wegen der Linearität von ϕ_j^α:

$$\phi_j^\alpha\left(\frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial a_k}\right) = \delta_{jk} \qquad (4)$$

Wenn nun $\hat{u}_\alpha$ eine hinreichend gute Approximation für u_α ist, so kann man in (1) u_α durch $\hat{u}_\alpha$ ersetzen und erhält nach Anwendung des Operators ϕ_j^α unter Berücksichtigung von (4):

$$\dot{a}_k = \phi_k^\alpha(F_\alpha(\hat{u}_\beta)). \qquad (5)$$

Wählt man insbesondere als Anpassungsverfahren die Bedingung des kleinsten Fehlerquadrats:

$$\int (u_\alpha - \hat{u}_\alpha)(u_\alpha - \hat{u}_\alpha)\, d^3x = min,$$

so kann man den Operator ϕ_j^α explizit angeben:

$$\phi_k^\alpha(F_\alpha(\hat{u}_\beta)) = M_{kj}^{-1} \int \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial a_j} \cdot F_\alpha(\hat{u}_\beta) \cdot d^3x. \qquad (6)$$

Dabei ist M_{kj}^{-1} die Inverse der Matrix

$$M_{kj} = \int \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial \hat{u}_\alpha}{\partial a_j}\, d^3x. \qquad (7)$$

Die Gleichungen (5), (6) und (7) stellen ein geschlossenes System von Vorhersagegleichungen für die Parameter a_j dar.

2 EIN MODELL DER OZEANISCHEN DECKSCHICHT

Bisherige Untersuchungen der ozeanischen Deckschicht beschränken sich größtenteils auf eindimensionale Modelle (Pollard, Rhines, Thompson (1973); Kraus, Turner (1967); Niiler (1975)). Für viele Langzeit-Wechselwirkungen zwischen Ozean und Atmosphäre sind jedoch die horizontale Advektion und der Auftrieb nicht vernachlässigbar (z.B. am Äquator). Wir betrachten daher ein dreidimensionales Modell einer Deckschicht der Tiefe h und der (vertikal homogenen) Dichte ϱ. Salzgehaltseffekte werden vernachlässigt (also ist $d\varrho = \frac{1}{\alpha} dT$). Eine Skalenanalysis zeigt, daß im Vergleich zu h und ϱ die Strömung praktisch trägheitslos der atmosphärischen Anfachung folgt und deshalb durch die stationären Ekmangleichungen

$$-fv = -g\frac{\partial\xi}{\partial x} + k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$fu = -g\frac{\partial\xi}{\partial y} + k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad (8)$$

mit den Randbedingungen

$$k\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\tau_x}{\rho}, \quad k\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\tau_y}{\rho} \qquad (9)$$

$$k\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-h} = u(-h)\frac{\partial h_e}{\partial t}, \quad k\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=-h} = v(-h)\frac{\partial h_e}{\partial t} \qquad (10)$$

beschrieben werden darf. Dabei ist (τ_x, τ_y) der Windstress und $(\frac{\partial\xi}{\partial x}, \frac{\partial\xi}{\partial y})$ die Neigung der Meeresoberfläche, die aus der Annahme, daß unter der durchmischten Schicht eine "layer of no motion" ist, bestimmt wird. Die Randbedingungen an der unteren Grenze stellen den Impulsfluß infolge der Deckschichtzunahme $\frac{\partial h_e}{\partial t}$ durch Vermischung (Entrainment) an der Deckschichtuntergrenze dar.

Die Wärmebilanz liefert die Gleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\bar{u}\frac{\partial\rho}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial\rho}{\partial y} - \frac{\alpha}{c\cdot\rho}\cdot\frac{1}{h}\int_{-h}^{0} Q\,dz + \frac{1}{h}\Delta\rho\cdot\frac{\partial h_e}{\partial t}. \qquad (11)$$

$\Delta\rho$ ist der Dichtesprung an der unteren Grenze der durchmischten Schicht, $\bar{u}$, $\bar{v}$ sind die vertikal gemittelten Horizontalgeschwindigkeiten, Q die äußeren Wärmequellen.

Zur Schließung des Problems wird nach Kraus-Turner (1967) angenommen, daß ein Bruchteil m der Windenergie, die in die durchmischte Schicht geht, dazu verwendet wird, die für die Vertiefung der Schicht notwendige potentielle Energie aufzubringen:

$$\frac{\partial h_e}{\partial t} = \frac{m}{g\cdot\Delta\rho\cdot h}\cdot\vec{\tau}\cdot\vec{U}_{10}. \qquad (12)$$

($\vec{U}_{10}$ ist die Windgeschwindigkeit in 10 m Höhe.) Unter Berücksichtigung der zusätzlich durch horizontale Advektion und Auftrieb bewirkten Änderung der Deckschichtdicke ergibt sich dann für h die prognostische Gleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -h\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right) - \bar{u}\frac{\partial h}{\partial x} - \bar{v}\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{m}{g\Delta\rho h}\cdot\vec{\tau}\cdot\vec{U}_{10}. \qquad (13)$$

Das System wird somit durch die beiden prognostischen Gleichungen (11) und (13) für die Dichte ρ und Tiefe h der durchmischten Schicht beschrieben, wobei $\bar{u}$ und $\bar{v}$ aus den (diagnostischen) Ekmangleichungen (8) - (10) bestimmt werden. Wir wählen dann für ρ und h eine parametrische Darstellung ihrer Horizontalabhängigkeit und erhalten dann nach der oben beschriebenen Methode prognostische Gleichungen für die Parameter. Für verschiedene idealisierte Anregungen eines Ozeans im Äquatorgebiet werden diese Gleichungen numerisch gelöst.

3 LITERATURVERZEICHNIS

Hasselmann, K.; Ross, D.B.; Müller, P.; Sell, W.: A Parametric Wave Prediction Model. J.Phys. Oceangr. 6 (1976) Nr. 2, S.200-228.

Kraus, E.B.; Turner, J.S.: A one-dimensional Model of the seasonal thermocline, Part II. Tellus 19 (1967), S.98-105.

Niiler, P.P.: Deepening of the wind-mixed layer. J.Mar.Res. 33 (1975) Nr. 3, S.405-422.

Pollard, R.T.; Rhines, P.B.; Thompson, R.O.R.Y.: The Deepening of the Wind-Mixed Layer. Geophys. Fl.Dyn. 3 (1973), S.381-404.