81 | Oktober 1960

SCHRIFTENREIHE SCHIFFBAU

K. Hasselmann

Über den Einfluß nichtlinearer Wechselwirkungen auf die Energieverteilung in einem Seegangsspektrum

TUHH
Technische Universität Hamburg-Harburg

Über den Einfluß nichtlinearer Wechselwirkungen auf die Energieverteilung in einem Seegangsspektrum

K. Hasselmann, Hamburg, Technische Universität Hamburg-Harburg, 1960

Schriftenreihe Schiffbau
Schwarzenbergstraße 95c
D-21073 Hamburg

http://www.tuhh.de/vss

Ueber den Einfluß nichtlinearer Wechselwirkungen auf die Energieverteilung in einem Seegangsspektrum.

Einleitung:

Unter der Einwirkung eines ausgedehnten Windfeldes bildet sich auf einem Meer ein Seegang aus, der nach einiger Zeit einen stationären, "ausgereiften" Endzustand erreicht. Das Spektrum dieser ausgereiften Windsee befindet sich im Gleichgewicht unter der Einwirkung der anfachenden Windkräfte, der Dissipation durch Turbulenz und der nichtlinearen Effekte, die sich aus der endlichen Steilheit des Seegangs ergeben. Einen wichtigen Beitrag zum Verständnis der Windkräfte lieferte O.M. Phillips [1] durch seine Erklärung der Seegangsentstehung als Folge der Einwirkung statistischer Druckschwankungen auf die Wasseroberfläche. Der Einfluß der Turbulenz auf den Seegang ist im einzelnen noch ungeklärt, jedoch wird allgemein angenommen, daß die erhöhte Dissipation infolge der Turbulenz in erster Näherung durch einen zusätzlichen konstanten Reibungskoeffizienten berücksichtigt werden kann. Weit weniger geklärt ist dagegen bisher die Rolle, die die nichtlinearen Effekte bei der Ausbildung des vollentwickelten Spektrums spielen. Gewöhnlich wird der Haupteinfluß der Nichtlinearität in dem Vorgang der Wellenbrechung gesehen, wodurch die Energie der Wellen einerseits unmittelbar in Turbulenz, andererseits durch die erhöhte turbulente Reibung schneller dissipiert wird. Im folgenden soll jedoch nicht dieser, sondern ein weiterer, bisher unberücksichtigt gebliebener nichtlinearer Effekt näher untersucht werden. Aus der Nichtlinearität der Oberflächenbedingungen ergeben sich Wechselwirkungen zwischen den verschiedenen Wellenkomponenten des Seegangs, die zu einer Energieumschichtung innerhalb des Seegangspektrums führen. Die Wechselwirkungen lassen sich mit Hilfe einer von der linearen Näherung ausgehenden Störungsrechnung ermitteln. Eine Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung ist bereits von L.J. Tick [2] durchgeführt worden. Er erhielt eine im Mittel stationäre Störungslösung, die eine zeitlich konstante Korrektion des Energiespektrums ergab. In unserem Zusammenhang interessieren jedoch weniger stationäre Störungen, welche lediglich eine Modifizierung der linearen Näherung und nicht den dynamischen Einfluß der nichtlinearen Wechselwirkungen darstellen, als vielmehr Störungen, die mit der Zeit ständig zunehmen und dadurch eine laufende Änderung des Spektrums hervorrufen. Hierzu ist es allerdings notwendig, die Störungsrechnung bis zur fünften Ordnung durchzuführen. Der Energieaustausch selber ergibt sich dann als Effekt vierter Ordnung. Obwohl der nichtlineare Energieaustausch somit relativ klein ist, zeigt es sich, daß er mit den übrigen auf den Seegang einwirkenden Kräften durchaus vergleichbar ist, da diese ebenfalls nur quasistationäre Änderungen des Spektrums bewirken. Die Energieübertragung erfolgt allgemein von den Spektralgebieten höherer zu denen niedrigerer Energiedichte. Insgesamt entsteht, ähnlich wie beim Kaskadenprozess der Turbulenz, ein Energiefluß innerhalb des Spektrums in Richtung auf die kürzeren Wellen. Bei dem ausgereiften Seegangsspektrum stellt sich dann wahrscheinlich ein Gleichgewicht ein zwischen der Energiezufuhr durch Windeinwirkung im langwelligen Bereich, dem nichtlinearen Energietransport von längeren zu kürzeren Wellen, und den Energieverlusten durch turbulente Reibung und Wellenbrechung, die vorwiegend im kurzwelligen Bereich des Spektrums erfolgen. Die numerische Auswertung der Ergebnisse soll einer weiteren Arbeit vorbehalten bleiben, in der die Energiebilanz des Spektrums unter Berücksichtigung der nichtlinearen sowie der anfachenden, konvektiven und dissopativen Terme näher untersucht wird.

I. Störungsgleichungen.

Wir betrachten die Bewegung einer unendlich tiefen, horizontal unbegrenzten, idealen Flüssigkeit mit einer freien Oberfläche $z = h(x,y,t)$ (x, y, z kartesische Koordinaten mit vertikal nach oben gerichteter z-Achse). Unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung lauten die (nicht linearisierten) Bestimmungsgleichungen für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(\mathfrak{r},t)$:

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{für} \quad z \leq h \tag{1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 + gh = 0 \qquad \text{für} \quad z = h \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \widetilde{\operatorname{grad}}\, h\, \widetilde{\operatorname{grad}}\, \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \qquad \text{für} \quad z = h \tag{3}$$

$$\varphi \to 0 \qquad \text{für} \quad z \to -\infty \tag{4}$$

(g = Erdbeschleunigung)

Hierzu kommen Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$\varphi(\mathfrak{r},0) = \varphi_0(\mathfrak{r}) \tag{5}$$

$$h(\tilde{\mathfrak{r}},0) = h_0(\tilde{\mathfrak{r}}) \tag{6}$$

Mit der Tilde werden zweidimensionale Projektionen von Vektoren in die xy-Ebene bezeichnet.

Es wird angenommen, daß die mittlere Wellensteilheit noch genügend klein ist, um eine von der linearen Näherung ausgehende Störungsrechnung anwenden zu können. Für φ und h werden also Störungsreihen

$$\varphi = {}_1\varphi + {}_2\varphi + {}_3\varphi + \ldots . \tag{7}$$

$$h = {}_1h + {}_2h + {}_3h + \ldots . \tag{8}$$

angesetzt, wobei die Indizes zugleich die Ordnungen der Terme angeben. Aus (1) und (4) folgt zunächst

$$\Delta_{\nu}\varphi = 0 \qquad \text{für } z \leqq h \tag{9}$$

$$_{\nu}\varphi \to 0 \qquad \text{für } z \to -\infty \tag{10}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) ergeben sich dann durch Entwickelung nach z und Einsetzen der Reihen (7) und (8) Randbedingungen für die Störungsfunktionen an der Fläche $z = 0$. Für die ersten fünf Ordnungen lauten diese:

$${}_1\varphi_{tt} + g_1\varphi_z = 0 \tag{11}$$

$$g_1 h + {}_1\varphi_t = 0 \tag{12}$$

$${}_2\varphi_{tt} + g_2\varphi_z = -1/2\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_1\varphi)^2 + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi - {}_1h_t\,{}_1\varphi_{tz} \tag{13}$$

$$g_2 h + {}_2\varphi_t = -1/2\,(\mathrm{grad}_1\varphi)^2 - {}_1h\,{}_1\varphi_{tz} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} {}_3\varphi_{tt} + g_3\varphi_z = {} & -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_2\varphi) + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_2\varphi + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_2 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi \\ & - {}_1h\left[{}_2\varphi_{ttz} + g_2\varphi_{zz}\right] + {}_1h\left[-\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}\frac{(\mathrm{grad}_1\varphi)^2}{2} + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi_z\right] \\ & - {}_1h_t\left[{}_2\varphi_{tz} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{(\mathrm{grad}_1\varphi)^2}{2}\right] - {}_2h_t\,{}_1\varphi_{tz} - {}_1h\,{}_1h_t\,{}_1\varphi_{tzz} \end{aligned} \tag{15}$$

$$g_3 h + {}_3\varphi_t = \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot$$

$$\begin{aligned} {}_4\varphi_{tt} + g_4\varphi_z = {} & -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_3\varphi) + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3\varphi \\ & + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi - {}_1h_t\,{}_3\varphi_{tz} - {}_3h_t\,{}_1\varphi_{tz} + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

$$g_4 h + {}_4\varphi_t = -(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_3\varphi) - {}_1h\,{}_3\varphi_{tz} - {}_3h\,{}_1\varphi_{tz} + \cdots \tag{17}$$

$$\begin{aligned} {}_5\varphi_{tt} + g_5\varphi_z = {} & -\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_4\varphi) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}_2\varphi\,\mathrm{grad}_3\varphi) + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_4\varphi \\ & + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_2 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3\varphi + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_2\varphi + g\,\widetilde{\mathrm{grad}}_4 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi \\ & - {}_1h\left[{}_4\varphi_{ttz} + g_4\varphi_{zz}\right] - {}_3h\left[{}_2\varphi_{ttz} + g_2\varphi_z\right] - {}_1h\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_3\varphi) \\ & - \frac{{}_3h}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}(\mathrm{grad}_1\varphi)^2 + g\,{}_1h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi_z + g\,{}_1h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_3\varphi_z \\ & + g\,{}_3h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1 h\,\widetilde{\mathrm{grad}}_1\varphi_z - {}_1h_t\left[{}_4\varphi_{tz} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{grad}_1\varphi\,\mathrm{grad}_3\varphi)\right] \\ & - {}_2h_t\,{}_3\varphi_{tz} - {}_3h_t\left({}_2\varphi_{tz} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{(\mathrm{grad}_1\varphi)^2}{2}\right) - {}_4h_t\,{}_1\varphi_{tz} - {}_1h\,{}_1h_t\,{}_3\varphi_{tzz} - ({}_1h\,{}_3h)_t\,\varphi_{tzz} \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

Die angedeuteten weiteren Terme in (16), (17), (18) und (19) enthalten lediglich Störungsfunktionen erster und zweiter Ordnung und gehen in die spätere Rechnung nicht ein. Als Anfangsbedingungen ergeben sich aus (2), (3) und (6) schließlich:

$$_1\varphi = \varphi_0(\tilde{v}) \qquad \text{für} \quad t = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial_1\varphi}{\partial t} = -g h_0(\tilde{v}) \qquad \text{für} \quad t=0, \; z=0 \tag{21}$$

und für $\nu \geq 2$:

$$_\nu\varphi = \qquad \text{für} \quad t = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial_\nu\varphi}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Produktausdrücke aus Störungs-} \\ \text{funktionen von niedrigerer Ord-} \\ \text{nung als } \nu \end{array} \right\} \tag{23}$$

für $t = 0, \; z = 0$

Die Gleichungen (9) bis (23) lassen sich nach steigender Ordnung suksessiv auflösen.
Wegen (9) und (10) können die Potentialfunktionen $_\nu\varphi$ durch Fourierreihen dargestellt werden.[1]

$$_\nu\varphi = \sum_{\bar{k}} {_\nu\phi_{\bar{k}}}(t)\, e^{i(\bar{k}\tilde{v})+kz} \qquad \text{mit} \quad k = |\bar{k}| \tag{24}$$

Da $_\nu\varphi$ reell ist, gilt

$$_\nu\phi_{\bar{k}} = \left(_\nu\phi_{-\bar{k}}\right)^* \tag{25}$$

Für die $_\nu h$ gelten dann entsprechende Fourierdarstellungen

$$_\nu h = \sum_{\bar{k}} {_\nu H_{\bar{k}}}\, e^{i(\bar{k}\tilde{v})} \qquad \text{mit} \quad {_\nu H_{\bar{k}}} = \left(_\nu H_{-\bar{k}}\right)^* \tag{26}$$

Für die Amplituden der linearen Näherung ergibt sich aus (11) die bekannte Differentialgleichung:

1) Die Darstellbarkeit des Seegangs durch ein diskretes Spektrum wird durch die Einführung einer - sehr großen - Periodizität in den x- und y-Richtungen erreicht. Der Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum wird dann wie üblich in den Energieausdrücken durchgeführt.

$$\frac{d^2}{dt^2}\,{}_1\phi_{\bar k} + gk\,{}_1\phi_{\bar k} = 0 \tag{27}$$

mit der Lösung $${}_1\phi_{\bar k}(t) = {}_1\phi^+_{\bar k}\, e^{-i\omega_{\bar k} t} + {}_1\phi^-_{\bar k}\, e^{+i\omega_{\bar k} t}, \tag{28}$$

$$\omega_{\bar k} = \sqrt{gk} \tag{29}$$

und ${}_1\phi^+_{\bar k} = \left({}_1\phi^-_{-\bar k}\right)^*$.

Die oberen Vorzeichenindizes kennzeichnen die positive oder negative Fortpflanzungsrichtung der betreffenden Welle relativ zum Wellenzahlenvektor $\bar k$.

Durch Einsetzen der bekannten Lösungen niedrigerer Ordnung erhält man dann allgemein für die Fourierkomponenten ${}_\nu\phi_{\bar k}$ mit $\nu \geqq 2$ inhomogene Schwingungsdifferentialgleichungen der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\,{}_\nu\phi_{\bar k} + \omega^2_{\bar k}\,{}_\nu\phi_{\bar k} = \sum_{\substack{\bar k_1+\bar k_2+\dots+\bar k_\nu=\bar k\\ s_1,s_2,\dots s_\nu}} A^{s_1\omega_{\bar k_1},\, s_2\omega_{\bar k_2},\dots s_\nu\omega_{\bar k_\nu}}_{\bar k_1,\ \bar k_2,\ \dots\ \bar k_\nu}(t)\,{}_1\phi^{s_1}_{\bar k_1},{}_1\phi^{s_2}_{\bar k_2}\cdots{}_1\phi^{s_\nu}_{\bar k_\nu} \tag{30}$$

mit Anfangsbedingungen

$${}_\nu\phi_{\bar k}(t=0) = \sum_{\substack{\bar k_1+\bar k_2+\dots+\bar k_\nu=\bar k\\ s_1,s_2,\dots s_\nu}} B^{s_1\omega_{\bar k_1},\, s_2\omega_{\bar k_2},\dots s_\nu\omega_{\bar k_\nu}}_{\bar k_1,\ \bar k_2,\ \dots\ \bar k_\nu},\,{}_1\phi^{s_1}_{\bar k_1},{}_1\phi^{s_2}_{\bar k_2},\dots{}_1\phi^{s_\nu}_{\bar k_\nu} \tag{31}$$

(S = Signum)

$$\frac{d}{dt}\,{}_\nu\phi_k\,(t=0) = \sum_{\substack{\bar k_1+\bar k_2+\dots+\bar k_\nu=\bar k\\ s_1,s_2,\dots s_\nu}} C^{s_1\,s_2\dots s_\nu}_{\bar k_1,\bar k_2\dots\bar k_\nu}\,\phi^{s_1}_{\bar k_1},\phi^{s_2}_{\bar k_2}\cdots\phi^{s_\nu}_{\bar k_\nu}$$

Das Ziel der Störungsrechnung wird nun die Auffindung instationärer Lösungen sein, die zwar zur Anfangszeit t = 0 sehr klein sind im Vergleich zur linearen Näherung, jedoch mit der Zeit ständig zunehmen, bis sie schließlich eine wesentliche Veränderung des Wellenbildes darstellen. Zunächst scheint sich eine methodische Schwierigkeit aus dem Störungsansatz zu ergeben, da dieser gerade dann, wenn die Störungen mit der linearen Näherung vergleichbar und somit interessant werden, versagt. Diese Schwierigkeit läßt sich jedoch überwinden, indem man die Störungen laufend zur Korrektion der Ausgangsnäherung heranzieht und mit diesen korrigierten Werten die Integration der Störungsgleichungen fortsetzt. Es wird also praktisch aus den Lösungen der

Störungsgleichungen eine Differentialgleichung (später zeigt sich genauer: eine Integro-Differentialgleichung) gewonnen, die die momentane Änderung des Spektrums unter dem Einfluß der nichtlinearen Wechselwirkungen beschreibt. Die Integration dieser Gleichung läßt sich dann über beliebig lange Zeit fortsetzen.

Wir nehmen nun an, daß die Oberfläche $h_0(\tilde{\nu})$ und das Potential $\varphi_0(\nu)$ zur Zeit $t = 0$ Zufallsfunktionen mit Gaußverteilungen sind. Die Amplituden ${}_1\phi_k^s$ des linearen Spektrums sind in diesem Falle statistisch unabhängige Größen mit gleichverteilten Phasen. Es ist anzunehmen, daß die Darstellung des Seegangs durch ein solches "Rauschspektrum" in der linearen Näherung gut zutrifft. Ein Spektrum dieser Art würde sich z.B. ergeben, wenn die Entstehung des Spektrums auf die akkumulative Wirkung einer großen Anzahl statistisch unabhängiger Einzelerregungen zurückzuführen wäre.

II. Störungsentwicklung der Seegangsenergie.

Um den Einfluß der Störungen auf die Verteilung der Seegangsenergie zu untersuchen, muß diese zunächst in Abhängigkeit der Störungsamplituden ermittelt werden. Die mittlere Gesamtenergie des Seegangs pro Oberflächeneinheit ist

$$\overline{E = E_{pot} + E_{kin} = \rho g \frac{\overline{h^2}}{2} + \int_{-\infty}^{h} \rho \frac{(\mathrm{grad}\,\varphi)^2}{2} dz} \qquad (32)$$

Unter Mittelwert werden wir stets eine Mittelung zugleich über die xy-Ebene und über ein statistisches Ensemble verstehen. Beim Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum wird die Ensemble-Mittelung hinfällig. Es erleichtert jedoch die Darstellung, wenn Eigenschaften mittlerer Amplitudenprodukte, die sonst erst beim Grenzübergang zum kontinuierlichen Spektrum einen Sinn bekämen, durch Mittelung über ein hypothetisches Ensemble bereits in der diskreten Spektraldarstellung vorweggenommen werden. Durch die Oberflächen- und Ensemble-Mittelung verschwinden sowohl räumlich als auch zeitlich periodische Schwingungsanteile. Eine Zeitabhängigkeit des Mittelwertes bleibt jedoch weiterhin bestehen, falls die Wellenamplituden selber zeitlich veränderlich sind.

Gleichung (32) kann wegen $\Delta\varphi = 0$ nach Gauß umgeformt werden:

$$E = \rho g \overline{\frac{h^2}{2}} + \frac{1}{2}\overline{\left[\varphi(\varphi_z - \operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad} h)\right]_{z=h}} \tag{33}$$

oder, nach z entwickelt:

$$E = \rho g \overline{\frac{h^2}{2}} + \frac{1}{2}\left[\overline{\varphi\varphi_z} - \overline{\varphi \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad} h + h\frac{\partial}{\partial z}\left\{\varphi\varphi_z - \varphi \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad} h\right\} \ldots}\right]_{z=0} \tag{34}$$

Die einzelnen Terme der Störungsentwicklung

$$E = {}_2E + {}_3E + {}_4E + \ldots \tag{35}$$

erhält man dann aus (34) durch Einsetzen der Fourierdarstellungen der Störungsentwicklungen von φ und h.

Der erste Energieterm ergibt sich aus der linearen Näherung:

$${}_2E = 2\rho \sum_{\bar{k}} k \overline{|{}_1\phi^{+}_{\bar{k}}|^2}. \tag{36}$$

Im Grenzfall eines kontinuierlichen Spektrums wird (36) dann:

$${}_2E = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} {}_2F(\bar{k})\, dk_x dk_y \tag{37}$$

${}_2F(\bar{k})\,dk_x dk_y$ stellt die Energie der sich in positive $\bar{k}$-Richtung fortpflanzenden Wellen dar, deren Wellenzahlen $\bar{k}'$ im Intervall

$$k_x \leqq k_x' \leqq k_x + dk_x\,, \qquad k_y \leqq k_y' \leqq k_y + dk_y \qquad \text{liegen.}$$

Die ungeraden Störungsterme der Energieentwicklung enthalten ausschließlich ungerade Produkte der Amplituden ${}_1\phi^{s}_{\bar{k}}$. Wegen der Phasengleichverteilung der ${}_1\phi^{s}_{\bar{k}}$ verschwinden diese Produkte im Mittel, so daß

$${}_3E = {}_5E = {}_7E = \ldots\ldots = 0. \tag{38}$$

Für die geraden Energieterme der nächsten Ordnungen erhält man:

$${}_4E = \rho \sum_{\bar{k}} k\left\{\overline{{}_2\phi_{\bar{k}}\, {}_2\phi_{-\bar{k}}} + \left(\overline{{}_1\phi_{\bar{k}}\, {}_3\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_1\phi_{-\bar{k}}\, {}_3\phi_{\bar{k}}}\right)\right\} + \sum \cdots \tag{39}$$

$$ {}_6E = \varrho \sum_{\bar{k}} k \left\{ \overline{{}_3\phi_{\bar{k}}\,{}_3\phi_{-\bar{k}}} + \left(\overline{{}_2\phi_{\bar{k}}\,{}_4\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_2\phi_{-\bar{k}}\,{}_4\phi_{\bar{k}}} \right) + \left(\overline{{}_1\phi_{\bar{k}}\,{}_5\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_1\phi_{-\bar{k}}\,{}_5\phi_{\bar{k}}} \right) \right\} + \sum \cdots \qquad (40) $$

Die angedeuteten Summen enthalten Produktterme aus drei oder mehr Störungsamplituden. Sie werden in unserem Zusammenhang nicht näher interessieren, da es sich später zeigen wird, daß sie keinen instationären Beitrag zur Energie liefern. Wegen dieser Summen ist die Seegangsenergie in höherer Näherung im allgemeinen nicht mehr allein in der Form eines Integrals über ein Spektrum darstellbar. In unserem Falle werden sich jedoch die instationären Energiestörungen ausschließlich auf Störungen des Energiespektrums zurückführen lassen, so daß sich die dynamischen nichtlinearen Wechselwirkungen im Seegang mit Hilfe des Energiespektrums weiterhin vollständig beschreiben lassen.

Unsere Aufgabe ist nun, die instationären Anteile der Energiepertubationen ${}_4E$ und ${}_6E$ an Hand der Lösungen der Differentialgleichungen für die Störungsamplituden ${}_\nu\phi_{\bar{k}}$ zu ermitteln. Die Entwicklung muß dabei bis zum Term ${}_6E$ durchgeführt werden, da es sich später herausstellt, daß ${}_4E$ wegen gewisser Dispersionseigenschaften von Schwerewellen keine instationären Anteile enthält. Zunächst werden, um häufigere Nebenrechnungen im folgenden zu vermeiden, einige allgemeine Beziehungen, die bei der Beschreibung ungedämpfter Schwingungen mit stationären (oder quasistationären) Zufallserregungen Anwendung finden, vorweggestellt.

III. Asymptotische Integralformeln.

Es sei $I_1(\omega, \omega'; t)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$ \frac{d^2\psi}{dt^2} + \omega^2\psi = e^{i\omega' t} $$

mit den Anfangsbedingungen $\psi = \frac{d\psi}{dt} = 0$ für $t = 0$.
Es ist

$$ I_1 = \int_0^t \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega}\, e^{i\omega' t'}\, dt' \qquad (41) $$

$$I_1 = \frac{e^{i\omega' t}}{\omega^2-\omega'^2} - \frac{1}{2\omega}\left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega-\omega'} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega+\omega'}\right) \qquad \text{für } \omega' \neq \pm\omega \tag{41a}$$

$$= \frac{t\cdot e^{i\omega' t}}{2i\omega'} + \frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{4\omega\omega'} \qquad \text{für } \omega' = \pm\omega \tag{41b}$$

Für eine beliebige (stetige) reelle Funktion $f(\omega')$, für die die folgenden Integrale existieren, gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} I_1(\omega,\omega';t) I_1(\omega,-\omega';t) f(\omega')\, d\omega' = \frac{\pi}{2\omega^2}\left\{f(\omega)+f(-\omega)\right\} \tag{42}$$

Ist insbesondere $f(\omega')$ das Spektrum einer stationären Zufallserregung der Schwingung ψ, so besagt (42), daß die Energie der Schwingung für große Zeiten linear mit der Zeit zunimmt und der Spektraldichte der Erregung an der Stelle ω proportional ist. Eine ähnliche Beziehung, in der an Stelle der Spektraldichte an der Resonanzstelle ω ein Autokorrelationsintegral über die Erregung auftritt, ist bereits von Phillips [1] abgeleitet worden. Mit Hilfe der Diracschen δ-Funktion läßt sich (42) etwas einfacher schreiben:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\left[I_1(\omega,\omega';t) I_1(\omega,-\omega';t)\right] = \frac{\pi}{2\omega^2}\left\{\delta(\omega'-\omega)+\delta(\omega'+\omega)\right\} \tag{43}$$

Es gilt weiter:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} I_1(\omega,\omega';t)\, e^{-i\omega' t} f(\omega')\, d\omega' = 0 \tag{44}$$

Wir werden (44) in einer etwas allgemeineren Form verwenden:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt}\int\cdots\int I_1(\omega,\omega';t)\, e^{-i\omega' t} f(\lambda_1,\cdots\lambda_n)\, d\lambda_1\cdots d\lambda_n = 0 \tag{45}$$

mit $\qquad \omega = \omega(\lambda_1,\cdots\lambda_n), \qquad \omega' = \omega'(\lambda_1,\cdots\lambda_n)$

und $\qquad \frac{\partial}{\partial\lambda_i}(\omega'-\omega) \neq 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda_j}(\omega'+\omega) \neq 0$

für mindestens ein i bzw. j auf den Flächen

$\omega' - \omega = 0 \quad$ bzw. $\quad \omega' + \omega = 0$

Wir betrachten ferner die Lösung $I_2(\omega, \omega', \omega'', \omega'''; t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi + \omega^2\psi = e^{i\omega' t} I_1(\omega'', \omega'''; t)$$

mit den Anfangsbedingungen $\psi = \frac{d\psi}{dt} = 0$ für $t = 0$. Es ist

$$I_2 = \int_0^t \frac{\sin\omega(t-t')}{\omega} e^{i\omega' t'} I_1(\omega'', \omega'''; t')\,dt' \qquad (46)$$

$$= + \frac{I_1(\omega'', \omega'''; t) e^{i\omega' t}}{\omega^2 - (\omega' + \omega''')^2} + \dots \qquad \text{für} \quad \begin{matrix} \omega' + \omega''' \\ \omega' + \omega'' \neq \pm\omega \\ \omega' - \omega'' \end{matrix} \qquad (46a)$$

$$= - \frac{t^2 e^{i(\omega' + \omega''')t}}{8\omega'''(\omega' + \omega''')} - \frac{it(2\omega''' + \omega')}{(\omega''')^2(\omega' + \omega''')^2} e^{i(\omega' + \omega''')t} + \dots \quad \begin{matrix} \text{für } \omega''' = \pm\omega'' \\ \text{für } \omega' + \omega''' = \pm\omega \end{matrix} \qquad (46b)$$

Die angedeuteten Terme sind nicht näher interessierende stationäre Schwingungen, deren Amplituden für $\omega''' = \pm\omega''$ beschränkt bleiben. Für I_2 gilt die asymptotische Formel

$$\lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} \left[e^{-i\omega t} I_2(\omega, -\omega', \omega'', \omega + \omega'; t) + e^{i\omega t} I_2(\omega, \omega', \omega'', -\omega - \omega'; t) \right]$$
$$= - \frac{\pi}{2\omega(\omega + \omega')} \left\{ \delta(\omega + \omega' + \omega'') + \delta(\omega + \omega' - \omega'') \right\} \qquad (47)$$

Auf den Beweis der asymptotischen Integralformeln (43), (45) und (47) sei hier verzichtet. Das Auftreten der δ-Funktionen ist eine Folge der für große t sehr schnellen Veränderlichkeit der Exponentialfunktionen in den Integranden. Beim Grenzübergang $t \to \infty$ verschwinden dann die Integrale bis auf Restbeträge, die von den Polen der Integranden herrühren. Wir untersuchen nunmehr mit Hilfe dieser Beziehungen die einzelnen Störungsterme der Energieentwickelung.

IV. Der Energieterm $_4E$

Die Störungsamplitude $_2\phi_{\bar{k}}$ des Terms $\overline{_2\phi_{\bar{k}}\,_2\phi_{-\bar{k}}}$ in (39) genügt nach (13) der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\,{}_2\phi_{\bar{k}} + \omega_{\bar{k}}^2\,{}_2\phi_{\bar{k}} = \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k}\\ s_1,\,s_2}} A^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\,s_2\omega_{\bar{k}_2}}_{\bar{k}_1\;,\;\bar{k}_2}\;{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\,{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\,e^{-i(s_1\omega_{\bar{k}_1}+s_2\omega_{\bar{k}_2})t} \tag{48}$$

mit

$$A^{\omega_1\omega_2}_{\bar{k}_1\bar{k}_2} = i(\omega_1+\omega_2)\left[k_1 k_2-(\bar{k}_1,\bar{k}_2)\right] \tag{49}$$

Aus der Dreiecksungleichung $|\bar{k}_1 + \bar{k}_2| \leqq k_1 + k_2$ ergibt sich für die Frequenzen $\omega_{\bar{k}_i} = \sqrt{g k_i}$ die Ungleichung $\omega_{\bar{k}_1+\bar{k}_2} \leqq \omega_{\bar{k}_1} + \omega_{\bar{k}_2}$. Durch die Substitution $\bar{k}' = \bar{k}_1 + \bar{k}_2$, $\bar{k}'' = -\bar{k}_2$ folgt weiter: $\omega_{\bar{k}'} - \omega_{\bar{k}''} \leqq \omega_{\bar{k}'+\bar{k}''}$, also insgesamt:

$$\omega_{\bar{k}_1} - \omega_{\bar{k}_2} \leqq \omega_{\bar{k}_1+\bar{k}_2} \leqq \omega_{\bar{k}_1} + \omega_{\bar{k}_2} \tag{50}$$

Das rechte Gleichheitszeichen gilt nur für $\bar{k}_1$ oder $\bar{k}_2$ $= 0$; das linke nur für $\bar{k}_2 = 0$ oder $\bar{k}_1 + \bar{k}_2 = 0$. Nach (50) können keine der Erregungskomponemten der rechten Seite von (48) der Resonanzbedingung

$$s_1\,\omega_{\bar{k}_1} + s_2\,\omega_{\bar{k}_2} = \pm\,\omega_{\bar{k}_1+\bar{k}_2}$$

genügen (außer im Falle $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$ oder $\bar{k}_1 + \bar{k}_2 = 0$, in dem jedoch die betreffende Amplitude verschwindet).

Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich somit aus rein periodischen Schwingungen zusammen:

$$\begin{aligned} {}_2\phi_{\bar{k}} = &\sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k}\\ s_1,\,s_2}} C^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\,s_2\omega_{\bar{k}_2}}_{\bar{k}_1\;,\;\bar{k}_2}\;{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\,{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\,e^{-i(s_1\omega_{\bar{k}_1}+s_2\omega_{\bar{k}_2})t} \\ &+ \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k}\\ s_1,\,s_2}} {}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\,{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\left\{D^{+,s_1,s_2}_{\bar{k}_1,\bar{k}_2}\,e^{-i\omega_{\bar{k}}t} + D^{-,s_1,s_2}_{\bar{k}_1,\bar{k}_2}\,e^{+i\omega_{\bar{k}}t}\right\} \end{aligned} \tag{51}$$

mit

$$C^{\omega_1\omega_2}_{\bar{k}_1\bar{k}_2} = \frac{A^{\omega_1\omega_2}_{\bar{k}_1\bar{k}_2}}{\omega^2_{\bar{k}_1+\bar{k}_2}-(\omega_1+\omega_2)^2} \tag{52}$$

Die Eigenschwingungen $D^{\pm,s_1,s_2}_{\bar{k}_1,\bar{k}_2}\,e^{\mp i\omega_{\bar{k}}t}$ sind durch die Anfangswerte festgelegt. Es ist nun intuitiv zu erwarten, daß das instationäre Verhalten der Störungen nicht von deren zufälligen Anfangswerten, sondern allein von den Erregungstermen in den Schwingungsdifferentialgleichungen bestimmt wird. Andererseits ist es nicht selbstverständlich, daß die von den Anfangswerten abhängigen Eigenschwingungen von ${}_2\phi_{\bar{k}}$, z.B., keine instationären Schwingungen in den Störungsamplituden höherer Ordnung anfachen. Dennoch werden wir im folgenden Schwingungsterme, die von Anfangswerten der Störungen abhängen, nicht berücksichtigen, da sie in den höheren Ordnungen zahlenmäßig stark zunehmen und die Gleichungen übermäßig verkomplizieren würden. Daß sie tatsächlich keinen instationären Beitrag zu den Energietermen liefern, läßt sich nachträglich ohne große Schwierigkeiten einsehen.

Da ${}_2\phi_{\bar{k}}$ nur stationäre Terme enthält, ist der Term $\overline{{}_2\phi_{\bar{k}}\,{}_2\phi_{-\bar{k}}}$ konstant. Aus dem gleichen Grund sind die mittleren Produkte aus drei oder mehr Störungsamplituden in den angedeuteten Summen in (39) ebenfalls konstant; denn es können in ihnen keine Störungsamplituden höher als zweiter Ordnung vorkommen.

Aus ${}_4E$ bleibt somit nur noch der Term $(\overline{{}_1\phi_{\bar{k}}\,{}_3\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_1\phi_{-\bar{k}}\,{}_3\phi_{\bar{k}}}\ )$ zu untersuchen. Für ${}_3\phi_{\bar{k}}$ ergibt sich zunächst aus (15) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dt^2}\,{}_3\phi_{\bar{k}} + \omega_{\bar{k}}^2\,{}_3\phi_{\bar{k}} = \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2+\bar{k}_3=\bar{k}\\ s_1,s_2,s_3}} A^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\,s_2\omega_{\bar{k}_2},\,s_3\omega_{\bar{k}_3}}_{\bar{k}_1,\quad \bar{k}_2,\quad \bar{k}_3}\;{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\,{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\,{}_1\phi^{s_3}_{\bar{k}_3}\,e^{-i(s_1\omega_{\bar{k}_1}+s_2\omega_{\bar{k}_2}+s_3\omega_{\bar{k}_3})t} \tag{53}$$

mit
$$A^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3} = \frac{1}{3}\left[C^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3} + C^{\omega_2\omega_1\omega_3}_{\bar{k}_2\bar{k}_1\bar{k}_3} + C^{\omega_3\omega_2\omega_1}_{\bar{k}_3\bar{k}_2\bar{k}_1}\right] \tag{54}$$

und
$$\begin{aligned} C^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3} &= \frac{2\left[(\bar{k}_2\bar{k}_3)-k_2k_3\right](\omega_2+\omega_3)(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\left[k_1|\bar{k}_2+\bar{k}_3|-(\bar{k}_1,\bar{k}_2+\bar{k}_3)\right]}{\left(\omega_{\bar{k}_2+\bar{k}_3}\right)^2-(\omega_2+\omega_3)^2} \\ &+\left[k_2,k_3-(\bar{k}_2,\bar{k}_3)\right]\left[\frac{1}{2}(\bar{k}_1,\bar{k}_2+\bar{k}_3)+\frac{\omega_1(\omega_2+\omega_3)|\bar{k}_2+\bar{k}_3|}{g}+\frac{\omega_1^3(\omega_2+\omega_3)}{2g^2}-\frac{\omega_1^2(\omega_2^2+\omega_3^2)}{2g^2}\right. \\ &\left.-\frac{\omega_1(\omega_2+\omega_3)}{2g^2}(\omega_2^2+\omega_3^2+\omega_2\omega_3)\right]+\frac{\omega_2\omega_3}{2g}(k_2+k_3)(\bar{k}_1,\bar{k}_2+\bar{k}_3)-\frac{\omega_1^3}{2g^4}\omega_2\omega_3(\omega_2^2+\omega_3^2)(\omega_2+\omega_3)+\frac{\omega_1\omega_2^2\omega_3^2}{2g^4}\left[\omega_2\omega_3(\omega_2+\omega_3)-\omega_2^3-\omega_3^3\right] \end{aligned} \tag{55}$$

Der Koeffizient $C^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}$ ist symmetrisch in den letzten beiden Indizes, so daß $A^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{\bar{k}_1\bar{k}_2\bar{k}_3}$ nach (54) in allen Indizes symmetrisch ist.

Die Lösung der Differentialgleichung lautet

$$ {}_3\phi_{\bar{k}} = \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2+\bar{k}_3=\bar{k} \\ s_1\, s_2\, s_3}} A^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\, s_2\omega_{\bar{k}_2},\, s_3\omega_{\bar{k}_3}}_{\bar{k}_1 \quad \bar{k}_2 \quad \bar{k}_3} \, {}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\, {}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\, {}_1\phi^{s_3}_{\bar{k}_3}\, I_1(\omega_{\bar{k}}, -s_1\omega_{\bar{k}_1}-s_2\omega_{\bar{k}_2}-s_3\omega_{\bar{k}_3}; t) \tag{56} $$

${}_3\phi_{\bar{k}}$ ist die erste Störung, die instationäre Terme enthält; denn die Resonanzbedingung

$$ s_1\omega_{\bar{k}_1} + s_2\omega_{\bar{k}_2} + s_3\omega_{\bar{k}_3} = \pm\, \omega_{\bar{k}_1+\bar{k}_2+\bar{k}_3} \tag{57} $$

läßt sich mit drei geeigneten Wellenzahlen $\bar{k}_i$ und Vorzeichen s_i erfüllen. Dennoch bleibt das mittlere Produkt $\overline{{}_3\phi_{\bar{k}}\, {}_1\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_3\phi_{-\bar{k}}\, {}_1\phi_{\bar{k}}}$ konstant, da die instationären Schwingungen in ${}_3\phi_{\bar{k}}$ gegen die Schwingung ${}_1\phi_{\bar{k}}$ gerade um $\pi/2$ phasenverschoben sind. Wegen der statistischen Unabhängigkeit der Amplituden ${}_1\phi^{s}_{\bar{k}}$ werden nur solche Terme des mittleren Produktes $\overline{{}_3\phi_{\bar{k}}\, {}_1\phi_{-\bar{k}}}$ von Null verschieden sein, bei denen zwei der drei Indexgruppen $\binom{s_i}{\bar{k}_i}$ in der Summe (56) entgegengesetzt gleich (konjugiert) sind, so daß:

$$ \overline{{}_3\phi_{\bar{k}}\, {}_1\phi_{-\bar{k}}} + \overline{{}_3\phi_{-\bar{k}}\, {}_1\phi_{\bar{k}}} = 2\,\mathcal{Re}\left\{ 3 \sum_{\substack{\bar{k}_1 \\ s_1, s}} A^{s\omega_{\bar{k}},\, s_1\omega_{\bar{k}_1},\, -s_1\omega_{\bar{k}_1}}_{\bar{k}\;,\;\bar{k}_1\;,\;-\bar{k}_1} \overline{\left|{}_1\phi^{s}_{\bar{k}}\right|^2}\, \overline{\left|{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\right|^2}\, I_1(\omega_{\bar{k}}, -s\omega_{\bar{k}}; t)\, e^{is\omega_{\bar{k}}t} \right\} \tag{58} $$

Nach (54), (55) ist der Koeffizient $A^{s\omega_{\bar{k}},\, +s_1\omega_{\bar{k}_1},\, -s_1\omega_{\bar{k}_1}}_{\bar{k},\;\bar{k}_1,\;-\bar{k}_1}$ reell, während der instationäre Anteil von $I_1(\omega_{\bar{k}}, -s\omega_{\bar{k}}; t)\exp(is\omega_{\bar{k}}t)$ nach (41b) imaginär ist. Der zeitabhängige Anteil von (58) verschwindet also. Insgesamt hat sich somit ergeben, daß die Energiestörung ${}_4E$ ausschließlich aus stationären Termen besteht.

Die Energiestörung ${}_4E$ stellt demnach eine stets klein bleibende, konstante Korrektion der ersten Näherung ${}_2E$ dar. Daß in dieser Ordnung noch kein instationärer Energieaustausch auftritt, ist eine Folge der resonanzfreien Erregung der ersten Störungskomponente ${}_2\phi_{\bar{k}}$. Dies wiederum ist auf eine zufällige Eigenschaft der Dispersion von Schwerewellen zurückzuführen; denn Ungleichung (50) ergibt sich aus der negativen Krümmung der Frequenzfunktion $\omega(k)$ bzw. aus der Ungleichung $\frac{d\omega}{dk}$ (Gruppengeschwindigkeit) $<$ $\frac{\omega}{k}$ (Phasengeschwindigkeit). Bei anderen dispergierenden Wellensystemen (z.B. bei Kapillarwellen), bei denen die Ungleichung (50) nicht zutrifft, würden Resonanzerscheinungen mit einem entsprechenden Energieaustausch bereits im Energieterm $_4E$ auftreten. Für die Entwicklung der normalen Windsee ist die "zufällige" Stationarität des Energieterms $_4E$ jedoch von großer Bedeutung; denn ein Energieaustausch von dieser Größenordnung würde bereits bei sehr kleinen Wellensteilheiten mit den übrigen Seegangskräften vergleichbar werden und ein wesentlich kleineres vollentwickeltes Spektrum zur Folge haben.

V. Der Energieterm $_6E$

Der Term $_3\phi_{\bar{k}}\,{}_3\phi_{-\bar{k}}$ in $_6E$ ist nach (56) als eine Summe über mittlere Produkte aus sechs Amplituden erster Ordnung darstellbar. Wegen der statistischen Unabhängigkeit der Amplituden werden wieder nur solche Summenterme einen Betrag ergeben, bei denen die sechs Indexgruppen $\binom{s_i}{\bar{k}_i}$ in drei konjugierte Paare zerfallen. Unter Berücksichtigung der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten solcher Paare und der Symmetrie von $A^{\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}_{\bar{k}_1\,\bar{k}_2\,\bar{k}_3}$ erhält man dann:

$$\begin{aligned}\overline{{}_3\phi_{\bar{k}}\,{}_3\phi_{-\bar{k}}} &= 6\sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2+\bar{k}_3=\bar{k}\\ s_1\,s_2\,s_3}}\left(A^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\,s_2\omega_{\bar{k}_2},\,s_3\omega_{\bar{k}_3}}_{\bar{k}_1,\;\bar{k}_2,\;\bar{k}_3}\right)^2\overline{\left|{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\right|^2}\,\overline{\left|{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\right|^2}\,\overline{\left|{}_1\phi^{s_3}_{\bar{k}_3}\right|^2}\,I_1(\omega_{\bar{k}},s_1\omega_{\bar{k}_1}+s_2\omega_{\bar{k}_2}+s_3\omega_{\bar{k}_3};t)\,I_1(\omega_{\bar{k}},-s_1\omega_{\bar{k}_1}-s_2\omega_{\bar{k}_2}-s_3\omega_{\bar{k}_3};t)\\ &+9\sum_{\substack{\bar{k}_1\,\bar{k}_2\\ s\,s_1\,s_2}}A^{s_1\omega_{\bar{k}_1},\,-s_1\omega_{\bar{k}_1},\,s\omega_{\bar{k}}}_{\bar{k}_1,\;-\bar{k}_1,\;\bar{k}}\,A^{s_2\omega_{\bar{k}_2},\,-s_2\omega_{\bar{k}_2},\,-s\omega_{\bar{k}}}_{\bar{k}_2,\;-\bar{k}_2,\;-\bar{k}}\,\overline{\left|{}_1\phi^{s}_{\bar{k}}\right|^2}\,\overline{\left|{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\right|^2}\,\overline{\left|{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\right|^2}\,I_1(\omega_{\bar{k}},\omega_{\bar{k}};t)\,I_1(\omega_{\bar{k}},-\omega_{\bar{k}};t)\end{aligned}\tag{59}$$

Nach (42) bzw. (41b) nimmt die erste Summe für große Zeiten linear, die zweite quadratisch mit der Zeit zu. Die zweite Summe wird also schließlich sehr groß gegen die erste. Im Laufe der weiteren Rechnung zeigt es sich jedoch, daß sich die zweite Summe gegen einen anderen Term in $_6E$ weghebt, so daß lediglich die erste Summe einen echten instationären Energiebeitrag darstellt.

Die instationären Beiträge beider Summen bestehen aus angeregten Eigenschwingungen der Frequenzen $\pm\omega_{\bar{k}}$. Je nach Vorzeichen der anregenden Frequenzen pflanzt sich die angefachte Welle in positive oder negative $\bar{k}$-Richtung fort. Der instationäre Anteil von $_3\phi_{\bar{k}}$ läßt sich daher ebenso wie $_4\phi_{\bar{k}}$ in zwei in entgegengesetzter Richtung laufende Wellen aufspalten.*)

$$ {}_3\phi_{\vec{k}} = {}_3\phi^{+}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + {}_3\phi^{-}_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}}t} \quad + \text{ stationäre Anteile} \qquad (60) $$

Entsprechend wird

$$ \overline{{}_3\phi_{\vec{k}}\; {}_3\phi_{-\vec{k}}} = \overline{{}_3\phi^{+}_{\vec{k}}\; {}_3\phi^{-}_{-\vec{k}}} + \overline{{}_3\phi^{-}_{\vec{k}}\; {}_3\phi^{+}_{-\vec{k}}} \quad + \text{ stationäre Anteile} \qquad (61) $$

Nach Trennung der Wellenanteile verschiedener Fortpflanzungsrichtung in der rechten Seite von (60) und Anwendung der Beziehungen (43) und (42b) erhält man dann:

$$ \begin{aligned} \overline{{}_3\phi^{+}_{\vec{k}}\; {}_3\phi^{-}_{-\vec{k}}} = t \sum_{\substack{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3=\vec{k} \\ s_1, s_2, s_3}} \overline{|{}_1\phi^{s_1}_{\vec{k}_1}|^2}\; \overline{|{}_1\phi^{s_2}_{\vec{k}_2}|^2}\; \overline{|{}_1\phi^{s_3}_{\vec{k}_3}|^2}\; \frac{3\pi}{\omega^2_{\vec{k}}} \left(A^{s_1\omega_{\vec{k}_1}, s_2\omega_{\vec{k}_2}, s_3\omega_{\vec{k}_3}}_{\vec{k}_1,\; \vec{k}_2,\; \vec{k}_3} \right)^2 \delta(\omega_{\vec{k}} + s_1\omega_{\vec{k}_1} + s_2\omega_{\vec{k}_2} + s_3\omega_{\vec{k}_3}) \\ + t^2 \overline{|{}_1\phi^{+}_{\vec{k}}|^2} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \\ s_1, s_2}} \overline{|{}_1\phi^{s_1}_{\vec{k}_1}|^2}\; \overline{|{}_1\phi^{s_2}_{\vec{k}_2}|^2}\; \frac{9}{4\omega^2_{\vec{k}}} A^{s_1\omega_{\vec{k}_1}, -s_1\omega_{\vec{k}_1}, \omega_{\vec{k}}}_{\vec{k}_1,\; -\vec{k}_1,\; \vec{k}} A^{s_2\omega_{\vec{k}_2}, -s_2\omega_{\vec{k}_2}, -\omega_{\vec{k}}}_{\vec{k}_2,\; -\vec{k}_2,\; -\vec{k}} \end{aligned} \qquad (62) $$

Als nächsten Term in ${}_6E$ untersuchen wir

$$ \overline{{}_2\phi_{\vec{k}}\; {}_4\phi_{-\vec{k}}} + \overline{{}_2\phi_{-\vec{k}}\; {}_4\phi_{\vec{k}}} = 2\, \mathrm{Re} \left\{ \overline{{}_2\phi_{-\vec{k}}\; {}_4\phi_{\vec{k}}} \right\} $$

Für ${}_4\phi_{\vec{k}}$ ergibt sich aus (17) die Differentialgleichung:

$$ \begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\, {}_4\phi_{\vec{k}} + \omega^2_{\vec{k}}\, {}_4\phi_{\vec{k}} = \sum_{\substack{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4=\vec{k} \\ s_1, s_2, s_3, s_4}} A^{s_1\omega_{\vec{k}_1}, s_2\omega_{\vec{k}_2}, s_3\omega_{\vec{k}_3}, s_4\omega_{\vec{k}_4}}_{\vec{k}_1,\; \vec{k}_2,\; \vec{k}_3,\; \vec{k}_4}\; {}_1\phi^{s_1}_{\vec{k}_1}\, {}_1\phi^{s_2}_{\vec{k}_2}\, {}_1\phi^{s_3}_{\vec{k}_3}\, {}_1\phi^{s_4}_{\vec{k}_4}\, e^{-is_1\omega_{\vec{k}_1}t} \cdot \\ \cdot I_1(\omega_{\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4}, -s_2\omega_{\vec{k}_2} - s_3\omega_{\vec{k}_3} - s_4\omega_{\vec{k}_4}; t) \\ + \sum_{\substack{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3+\vec{k}_4=\vec{k} \\ s_1, s_2, s_3, s_4}} C^{s_1\omega_{\vec{k}_1}, s_2\omega_{\vec{k}_2}, s_3\omega_{\vec{k}_3}, s_4\omega_{\vec{k}_4}}_{\vec{k}_1,\; \vec{k}_2,\; \vec{k}_3,\; \vec{k}_4}\; {}_1\phi^{s_1}_{\vec{k}_1}\, {}_1\phi^{s_2}_{\vec{k}_2}\, {}_1\phi^{s_3}_{\vec{k}_3}\, {}_1\phi^{s_4}_{\vec{k}_4}\, e^{-i(s_1\omega_{\vec{k}_1} + s_2\omega_{\vec{k}_2} + s_3\omega_{\vec{k}_3} + s_4\omega_{\vec{k}_4})t} \end{aligned} \qquad (63) $$

Die Koeffizienten beider Summen sind imaginäre Größen, die im einzelnen jedoch nicht näher interessieren.
Die erste Summe enthält die Terme der Störungsgleichung (17), in denen Störungsfunktionen dritter Ordnung auftreten. Aus den übrigen Termen, die lediglich Störungsfunktionen erster und zweiter Ordnung enthalten, ergeben sich dann die rein periodischen Schwingungsanteile der zweiten Summe.

---

*) Die Darstellung (60) ist nicht ganz exakt, da sich der instationäre Anteil jeder Fortpflanzungsrichtung in Wirklichkeit nicht aus einer einzigen Eigenwelle, sondern aus einer großen Anzahl der Eigenwelle eng benachbarter Wellen, über die in (60) und (61) noch zu summieren wäre, zusammensetzt.

In der Summendarstellung des mittleren Produktes $\overline{{}_4\phi_{\bar{k}}\,{}_2\phi_{-\bar{k}}}$ werden nun wegen der statistischen Unabhängigkeit der Amplituden $\phi_{\bar{k}}^{s}$ wieder nur solche Terme einen Beitrag liefern, bei denen die sechs Indexgruppen $\binom{s_i}{\bar{k}_1}$ der beiden Störungsamplituden in drei konjugierte Paare zerfallen. Für $\bar{k} \neq 0$ müssen dann zwei Indexgruppen in der ${}_4\phi_{\bar{k}}$-Summe ein konjugiertes Paar bilden und die übrigen Indizes dieser Summe konjugierte Paare mit den entsprechenden Indizes der ${}_2\phi_{-\bar{k}}$-Summe bilden. Im Falle $\bar{k} = 0$ können die Indizes der ${}_2\phi_{-\bar{k}}$-Summe auch unter sich ein konjugiertes Paar bilden, jedoch verschwindet dann die Amplitude ${}_2\phi_{-\bar{k}}$ nach (49). Unter diesen Bedingungen sind nun wegen (50) keine der Erregungskomponenten auf der rechten Seite von (63) in Resonanz mit einer Eigenschwingung von ${}_4\phi_{\bar{k}}$. Von den Termen der zweiten Summe werden somit lediglich stationäre Schwingungen angeregt. Die Schwingungen

$$I_2(\omega_{\bar{k}}, -s_1\omega_{\bar{k}_1}, \omega_{\bar{k}_2+\bar{k}_3+\bar{k}_4}, -s_2\omega_{\bar{k}_2} - s_3\omega_{\bar{k}_3} - s_4\omega_{\bar{k}_4}; t),$$

die von den Termen der ersten Summe angeregt werden, können dann nach (46a) auf die Schwingung

$$I_1(\omega_{\bar{k}_2+\bar{k}_3+\bar{k}_4}, -s_2\omega_{\bar{k}_2} - s_3\omega_{\bar{k}_3} - s_4\omega_{\bar{k}_4}; t)$$

zurückgeführt werden. Unter Berücksichtigung der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten bei der Bildung des konjugierten Indexpaares in ${}_4\phi_{\bar{k}}$ erhält man also:

$$\begin{aligned} \mathcal{Re}\left(\overline{{}_4\phi_{\bar{k}}\,{}_2\phi_{-\bar{k}}}\right) = \mathcal{Re}\Bigg\{ & \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k} \\ \bar{k}_3 \\ s_1, s_2, s_3}} D^{s_1\omega_{\bar{k}_1}, s_2\omega_{\bar{k}_2}, s_3\omega_{\bar{k}_3}}_{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \overline{\left|{}_1\phi^{s_1}_{\bar{k}_1}\right|^2}\, \overline{\left|{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\right|^2}\, \overline{\left|{}_1\phi^{s_3}_{\bar{k}_3}\right|^2}\, e^{i(s_1\omega_{\bar{k}_1}+s_2\omega_{\bar{k}_2}+s_3\omega_{\bar{k}_3})t} \cdot \\ & \cdot I_1(\omega_{\bar{k}_1}, -s_1\omega_{\bar{k}_1} - s_2\omega_{\bar{k}_2} - s_3\omega_{\bar{k}_3}; t) \\ & + \sum_{\substack{\bar{k}_1+\bar{k}_2=\bar{k} \\ \bar{k}_3 \\ s_1, s_2, s_3}} E^{s_1\omega_{\bar{k}_1}, s_2\omega_{\bar{k}_2}, s_3\omega_{\bar{k}_3}}_{\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3} \overline{\left|{}_1\phi^{s}_{\bar{k}_1}\right|^2}\, \overline{\left|{}_1\phi^{s_2}_{\bar{k}_2}\right|^2}\, \overline{\left|{}_1\phi^{s_3}_{\bar{k}_3}\right|^2}\, e^{is_1\omega_{\bar{k}_1}t} I_1(\omega_{\bar{k}_1}, -s_1\omega_{\bar{k}_1}; t) \Bigg\} \end{aligned} \tag{64}$$

Die Koeffizienten sind Produkte an den imaginären Koeffizienten der ${}_4\phi_{\bar{k}}$- und ${}_2\phi_{-\bar{k}}$-Summen und daher reell.

In der ersten Summe sind die Terme zusammengefaßt, bei denen der Index $\binom{s_i}{\bar{k}_i}$ aus (63) in dem konjugierten Indexpaar von ${}_4\phi_{\bar{k}}$

vorkommt, während bei den Termen der zweiten Summe das konjugierte Indexpaar aus zweien der übrigen Indizes $\binom{s_2}{k_2}$, $\binom{s_3}{k_3}$, $\binom{s_4}{k_4}$ gebildet wird. Obwohl einzelne Terme der ersten Summe instationär sind, bleibt das Integral im kontinuierlichen Grenzfall nach (44) konstant. Die Terme der zweiten Summe sind sämtlich instationär; der Realteil der Summe bleibt jedoch auch in diesem Falle konstant, da der instationäre Anteil der Resonanzschwingung $I_1(\omega_{k_1}, -s_1\omega_{k_1}; t)$ gegen die Schwingung $e^{is_1\omega_{k_1}t}$ gerade um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben ist und somit wegen des reellen Koeffizienten $E^{\omega_1\omega_2\omega_3}_{k_1k_2k_3}$ lediglich einen imaginären Beitrag ergibt. Insgesamt gilt also:

$$\frac{d}{dt}\left\{\overline{{}_4\phi_k\,{}_2\phi_{-k}} + \overline{{}_4\phi_{-k}\,{}_2\phi_k}\right\} = 0 \tag{65}$$

Auf die gleiche Weise läßt sich zeigen, daß die Zeitableitungen der in (40) angedeuteten Summen über drei- und mehrfache Produkte ebenfalls verschwinden; denn die einzelnen Produkte dieser Summen können höchstens Störungsterme bis zur vierten Ordnung und jeweils nur eine instationäre Amplitude ${}_3\phi_k$ oder ${}_4\phi_k$ enthalten.

Als letzter Term in ${}_6E$ bleibt noch

$$\overline{{}_1\phi_k\,{}_5\phi_{-k}} + \overline{{}_1\phi_{-k}\,{}_5\phi_k} = 2\,\mathcal{Re}\left\{\overline{{}_5\phi_k\,{}_1\phi_{-k}}\right\}$$

zu untersuchen. ${}_5\phi_k$ wird sich als Summe über fünf Wellenzahlen k_i mit $\sum_{i=1}^{5} k_i = k$ darstellen lassen. Bei der mittleren Produktbildung mit ${}_1\phi_{-k}$ werden wieder nur solche Terme einen Beitrag ergeben, bei denen die sechs Indexgruppen $\binom{-s}{-k}\binom{s_1}{k_1}\binom{s_2}{k_2}\cdots\binom{s_5}{k_5}$ drei konjugierte Paare bilden. Betrachten wir von vornherein nur Summenterme, die dieser Bedingung genügen, und bezeichnen die übrigen Terme kurz mit $\sum_{Rest}$, so wird

$$
\begin{aligned}
{}_5\phi_{\bar k} = {} & 18\sum_{\substack{\bar k_1,\bar k_2\\ s,s_1,s_2}} {}_1\phi_{\bar k}^{s}\,|{}_1\phi_{\bar k_1}^{s_1}|^2\,|{}_1\phi_{\bar k_2}^{s_2}|^2\, A^{s\omega_{\bar k}+s_1\omega_{\bar k_1}+s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_1\omega_{\bar k_1},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k+\bar k_1+\bar k_2,\,-\bar k_1,\,-\bar k_2}\cdot A^{s\omega_{\bar k},\,s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k,\,\bar k_1,\,\bar k_2}\,\cdot \\
& \qquad \cdot I_2(\omega_{\bar k},\, s_1\omega_{\bar k_1}+s_2\omega_{\bar k_2},\, \omega_{\bar k+\bar k_1+\bar k_2},\, -s\omega_{\bar k}-s_1\omega_{\bar k_1}-s_2\omega_{\bar k_2};t) \\
& + 9\sum_{\substack{\bar k_1,\bar k_2\\ s,s_1,s_2}} {}_1\phi_{\bar k}^{s}\,|{}_1\phi_{\bar k_1}^{s_1}|^2\,|{}_1\phi_{\bar k_2}^{s_2}|^2 \Big\{ A^{s\omega_{\bar k},+s_1\omega_{\bar k_1},-s_1\omega_{\bar k_1}}_{\bar k,\,\bar k_1,\,-\bar k_1}\cdot A^{s\omega_{\bar k},\,s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k,\,\bar k_2,\,-\bar k_2}\cdot I_2(\omega_{\bar k}, Q\omega_{\bar k}, -s\omega_{\bar k};t) \\
& \qquad + A^{s_1\omega_{\bar k_1},\,s\omega_{\bar k},\,-s_1\omega_{\bar k_1}}_{\bar k_1,\,\bar k,\,-\bar k_1}\cdot A^{s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k_1,\,\bar k_2,\,-\bar k_2}\cdot I_2(\omega_{\bar k},\, +s_1\omega_{\bar k_1}-s\omega_{\bar k},\, \omega_{\bar k_1},\, -s_1\omega_{\bar k_1};t)\Big\} \qquad (66) \\
& + \sum_{\substack{\bar k_1,\bar k_2\\ s,s_1,s_2}} {}_1\phi_{\bar k}^{s}\,|{}_1\phi_{\bar k_1}^{s_1}|^2\,|{}_1\phi_{\bar k_2}^{s_2}|^2\cdot F^{s\omega_{\bar k},\,s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k,\,\bar k_1,\,\bar k_2}\cdot I_1(\omega_{\bar k}, -s\omega_{\bar k};t) \\
& + \sum_{Rest}
\end{aligned}
$$

Die ersten beiden Summen stammen von den Erregungstermen, die instationäre Störungen dritter oder vierter Ordnung enthalten. Sie unterscheiden sich, ähnlich wie die beiden Summen in (64), durch verschiedene Kombinationen der Indexgruppen bei der konjugierten Paarbildung. Unter Berücksichtigung der Struktur der Störungsgleichungen (15) - (19) lassen sich die Koeffizienten der Summen auf den Koeffizienten $A^{\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}_{\bar k_1\,\bar k_2\,\bar k_3}$ in der Summendarstellung von ${}_3\phi_{\bar k}$ zurückführen. Aus den stationären Erregungstermen ergibt sich dann die dritte Summe. Der Koeffizient $F^{\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}_{\bar k_1\,\bar k_2\,\bar k_3}$ dieser Summe ist reell. Da der instationäre Anteil der Resonanzschwingung $I_1(\omega_{\bar k}, -s\omega_{\bar k};\, t)$ gegen die Schwingung $e^{is\omega_{\bar k}t}$ gerade um $\pi/2$ phasenverschoben ist, ergibt die dritte Summe keinen instationären Beitrag zum Ausdruck $2\mathrm{Re}\,({}_5\phi_{\bar k}\,{}_1\phi_{-\bar k})$. Die mittleren Produkte der ersten beiden Summen mit ${}_1\phi_{-\bar k}$ ergeben dagegen Beiträge, die nach (47) bzw. (46b) linear bzw. quadratisch mit der Zeit zunehmen. Da der instationäre Anteil von ${}_5\phi_{\bar k}$ wieder nur aus Eigenschwingungen mit Frequenzen $\pm\omega_{\bar k}$ besteht, kann er wieder in zwei Wellen verschiedener Fortpflanzungsrichtung zerlegt werden:*)

$$
{}_5\phi_{\bar k} = {}_5\phi_{\bar k}^{+}\,e^{-i\omega_{\bar k}t} + {}_5\phi_{\bar k}^{-}\,e^{i\omega_{\bar k}t} \quad + \text{ stat. Anteile} \qquad (67)
$$

*) Siehe Fußnote Seite 16

Entsprechend wird

$$\overline{{}_5\phi_{\bar k}\,{}_1\phi_{-\bar k}} + \overline{{}_5\phi_{-\bar k}\,{}_1\phi_{\bar k}} = \left[\overline{{}_5\phi^+_{\bar k}\,{}_1\phi^-_{\bar k}} + \overline{{}_5\phi^-_{-\bar k}\,{}_1\phi^+_{\bar k}}\right] + \left[\overline{{}_5\phi^+_{-\bar k}\,{}_1\phi^-_{\bar k}} + \overline{{}_5\phi^-_{\bar k}\,{}_1\phi^+_{-\bar k}}\right] + \underset{\text{Anteile}}{\text{stat.}} \tag{68}$$

Durch Zerlegung der rechten Seite von (66) in zwei entsprechende Anteile entgegengesetzter Fortschreitungsrichtung erhält man dann

$$\begin{aligned}\overline{{}_5\phi^+_{\bar k}\,{}_1\phi^-_{-\bar k}} + \overline{{}_5\phi^-_{-\bar k}\,{}_1\phi^+_{\bar k}} = &-t\sum_{\substack{\bar k_1,\bar k_2\\ s_1,s_2}} \overline{|{}_1\phi^+_{\bar k}|^2}\,\overline{|{}_1\phi^{s_1}_{\bar k_1}|^2}\,\overline{|{}_1\phi^{s_2}_{\bar k_2}|^2}\cdot A^{\omega_{\bar k}+s_1\omega_{\bar k_1}+s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_1\omega_{\bar k_1},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k+\bar k_1+\bar k_2,\,-\bar k_1,\,-\bar k_2}\cdot A^{\omega_{\bar k},\,s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k,\,\bar k_1,\,\bar k_2}\\ &\cdot\frac{g\pi}{\omega_{\bar k}(\omega_{\bar k}+s_1\omega_{\bar k_1}+s_2\omega_{\bar k_2})}\left\{\delta(\omega_{\bar k+\bar k_1+\bar k_2}-\omega_{\bar k}-s_1\omega_{\bar k_1}-s_2\omega_{\bar k_2})+\delta(\omega_{\bar k+\bar k_1+\bar k_2}+\omega_{\bar k}+s_1\omega_{\bar k_1}+s_2\omega_{\bar k_2})\right\}\\ &-t^2\sum_{\substack{\bar k_1,\bar k_2\\ s_1,s_2}} \overline{|{}_1\phi^+_{\bar k}|^2}\,\overline{|{}_1\phi^{s_1}_{\bar k_1}|^2}\,\overline{|{}_1\phi^{s_2}_{\bar k_2}|^2}\left\{\frac{g}{4\omega^2_{\bar k}}A^{\omega_{\bar k},\,s_1\omega_{\bar k_1},\,-s_1\omega_{\bar k_1}}_{\bar k,\,\bar k_1,\,-\bar k_1}\cdot A^{\omega_{\bar k},\,s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k,\,\bar k_2,\,-\bar k_2}\right.\\ &\left.+\frac{g}{8\omega_{\bar k}\,s_1\omega_{\bar k_1}}A^{s_1\omega_{\bar k_1},\,\omega_{\bar k},\,-s_1\omega_{\bar k_1}}_{\bar k_1,\,\bar k,\,-\bar k_1}\cdot A^{s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{\bar k_1,\,\bar k_2,\,-\bar k_2}-\frac{g}{8\omega_{\bar k}\,s_1\omega_{\bar k_1}}A^{-s_1\omega_{\bar k_1},\,\omega_{\bar k},\,s_1\omega_{\bar k_1}}_{-\bar k_1,\,\bar k,\,\bar k_1}\cdot A^{-s_1\omega_{\bar k_1},\,s_2\omega_{\bar k_2},\,-s_2\omega_{\bar k_2}}_{-\bar k_1,\,\bar k_2,\,-\bar k_2}\right\}\end{aligned} \tag{69}$$

In der quadratisch mit der Zeit zunehmenden zweiten Summe sind die letzten beiden Terme wegen

$$A^{\omega_1\,\omega_2\,\omega_3}_{\bar k_1\,\bar k_2\,\bar k_3} = A^{-\omega_1\,-\omega_2\,-\omega_3}_{-\bar k_1\,-\bar k_2\,-\bar k_3}$$

entgegengesetzt gleich. Der erste Term hebt sich dann gegen den quadratischen Term in $\overline{{}_3\phi_{\bar k}\,{}_3\phi_{-\bar k}}$ ebenfalls weg. In ${}_6E$ bleiben also lediglich instationäre Terme übrig, die linear mit der Zeit zunehmen. Es zeigte sich, daß diese ausschließlich auf die Anfachung von Eigenschwingungen zurückzuführen waren. Durch die nichtlinearen Wechselwirkungen wird also auf Oberwellen mit Frequenzen $\omega(\bar k) \neq \sqrt{gk}$ keine Energie übertragen, sondern allein auf Eigenwellen vom Typus der Grundwellen des linearen Spektrums. Die instationäre Störung ${}_6E$ der Gesamtenergie läßt sich aus diesem Grund als ein Integral über die Störung des linearen Energiespektrums darstellen. Schreiben wir

$$E = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\bar k)\, dk_x\, dk_y \qquad + \text{ stationäre Anteile} \tag{70}$$

mit $$F(\bar k) = {}_2F(\bar k) + {}_4F(\bar k) + {}_6F(\bar k) + \cdots \tag{71}$$

so ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\,{}_4F(\vec{k}) = 0 \tag{72}$$

und nach (62) und (69):

$$\begin{aligned} {}_6F(\vec{k}) = t \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} {}_2F(\vec{k}')\,{}_2F(\vec{k}'')\,{}_2F(\vec{k}'+\vec{k}''-\vec{k})\, T_1(\vec{k}',\vec{k}'',-\vec{k}+\vec{k}'+\vec{k}'')\, dk_x'\, dk_y'\, dk_x''\, dk_y'' \\ - t \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} {}_2F(\vec{k})\,{}_2F(\vec{k}')\,{}_2F(\vec{k}'')\, T_2(\vec{k},\vec{k}',\vec{k}'')\, dk_x'\, dk_y'\, dk_x''\, dk_y'' \end{aligned} \tag{73}$$

mit

$$T_1(\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3) = \frac{9\pi}{4g\varrho^2 \cdot k_1 k_2 k_3} \left(A^{\omega_{\vec{k}_1},\,\omega_{\vec{k}_2},\,-\omega_{\vec{k}_3}}_{\vec{k}_1,\,\vec{k}_2,\,-\vec{k}_3}\right)^2 \delta\left(\omega_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3} - \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3}\right) \tag{74}$$

und

$$\begin{aligned} T_2(\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2) = \frac{9\pi}{4\varrho^2 k_1 k_2} & \frac{A^{\omega_{\vec{k}},\,-\omega_{\vec{k}_1},\,-\omega_{\vec{k}_2}}_{\vec{k},\,-\vec{k}_1,\,-\vec{k}_2} \cdot A^{-\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}_1}+\omega_{\vec{k}_2},\,-\omega_{\vec{k}_1},\,-\omega_{\vec{k}_2}}_{-\vec{k}+\vec{k}_1+\vec{k}_2,\,-\vec{k}_1,\,-\vec{k}_2}}{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2})} \cdot \delta\left(\omega_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2}\right) \\ & + \frac{A^{\omega,\,\omega_{\vec{k}_1},\,-\omega_{\vec{k}_2}}_{\vec{k},\,\vec{k}_1,\,-\vec{k}_2} \cdot A^{-\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}_1}+\omega_{\vec{k}_2},\,\omega_{\vec{k}_1},\,-\omega_{\vec{k}_2}}_{-\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2,\,\vec{k}_1,\,-\vec{k}_2}}{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2})} \cdot \delta\left(\omega_{\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2}\right) \\ & + \frac{A^{\omega_{\vec{k}},\,-\omega_{\vec{k}_1},\,\omega_{\vec{k}_2}}_{\vec{k},\,-\vec{k}_1,\,\vec{k}_2} \cdot A^{-\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}_1}-\omega_{\vec{k}_2},\,-\omega_{\vec{k}_1},\,-\omega_{\vec{k}_2}}_{-\vec{k}+\vec{k}_1-\vec{k}_2,\,-\vec{k}_1,\,-\vec{k}_2}}{\omega_{\vec{k}}(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2})} \cdot \delta\left(\omega_{\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2}\right) \end{aligned} \tag{75}$$

Die vierfachen Integrale in (73) sind wegen der Resonanzbedingungen, die in den δ-Funktionen in T_1 und T_2 zum Ausdruck kommen, in Wirklichkeit nur dreifache Integrale über Hyperflächen im $\vec{k}',\vec{k}''$-Raum. Die Summen über die Vorzeichen s_i in (62) und (69) sind in der kontinuierlichen Darstellung (73) bereits ausgeführt. In beiden Fällen sind jeweils nur drei Vorzeichenkombinationen zu berücksichtigen, da sich die Resonanzbedingungen wegen der aus (50) folgenden Ungleichung

$$\omega_{\vec{k}_1} - \omega_{\vec{k}_2} - \omega_{\vec{k}_3} \leqq \omega_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3} \leqq \omega_{\vec{k}_1} + \omega_{\vec{k}_2} + \omega_{\vec{k}_3} \tag{76}$$

mit den übrigen Kombinationen nicht erfüllen lassen.

Das Ergebnis (73) läßt sich nun nachträglich an Hand der Bedingung der Energieerhaltung kontrollieren. Für ${}_6F(\vec{k})$ lautet diese

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} {}_6F(\vec{k})\, dk_x\, dk_y = 0 \tag{77}$$

(77) kann für beliebige Formen des Ausgangsspektrums ${}_2F(\bar{k})$ nur erfüllt werden, wenn

$$\sum_{\text{Perm. der } \bar{k}_i} \left\{ T_1(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3) - T_2(\bar{k}_1,\bar{k}_2,\bar{k}_3) \right\} = 0 \tag{78}$$

Diese Gleichung ergibt sich in der Tat aus der Beziehung

$$A^{\omega_1 \omega_2 \omega_3}_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3} = \frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2+\omega_3} A^{-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\,\omega_2,\omega_3}_{-\bar{k}_1-\bar{k}_2-\bar{k}_3,\,\bar{k}_2,\bar{k}_3} + \frac{\omega_2}{\omega_1+\omega_2+\omega_3} A^{-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\,\omega_1,\omega_3}_{-\bar{k}_1-\bar{k}_2-\bar{k}_3,\,\bar{k}_1,\bar{k}_3} + \frac{\omega_3}{\omega_1+\omega_2+\omega_3} A^{-\omega_1-\omega_2-\omega_3,\,\omega_1,\omega_2}_{-\bar{k}_1-\bar{k}_2-\bar{k}_3,\,\bar{k}_1,\bar{k}_2} \tag{79}$$

mit $\omega_i = s_i \omega_{\bar{k}_i}$, (und für $\omega_{\bar{k}_1+\bar{k}_2+\bar{k}_3} = \omega_1+\omega_2+\omega_3$) welche sich an Hand der Formeln (54) und (55) für $A^{\omega_1 \omega_2 \omega_3}_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3}$ bestätigen läßt.

Gleichung (73) ist nur für beschränkte Zeiten t gültig, da die Energiestörung ${}_6F(\bar{k})$ nach dem Störungsansatz als klein gegen das ungestörte Anfangsspektrum ${}_2F(\bar{k})$ vorausgesetzt wird. Durch Differentiation nach t und durch die (im Rahmen unserer Näherung zulässige) Substitution von ${}_2F(\bar{k})$ durch $F(\bar{k})$ erhalten wir unser Ergebnis jedoch in einer wesentlich allgemeineren Form, die für alle t und für jedes Spektrum $F(\bar{k})$ mit statistisch unabhängigen Fourierkomponenten gültig ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\bar{k})}{\partial t} = & \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{k}')F(\bar{k}'')F(\bar{k}'+\bar{k}''-\bar{k})T_1(\bar{k}',\bar{k}'',\bar{k}'+\bar{k}''-\bar{k})\,dk_x'\,dk_y'\,dk_x''\,dk_y'' \\ & - F(\bar{k}) \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\bar{k}')F(\bar{k}'')T_2(\bar{k},\bar{k}',\bar{k}'')\,dk_x'\,dk_y'\,dk_x''\,dk_y'' \end{aligned} \tag{80}$$

Im Laufe der Zeit wird nun die anfängliche statistische Unabhängigkeit der Spektralkomponenten verschiedener Wellenzahlen infolge der nichtlinearen Wechselwirkungen allmählich aufgehoben. Bei unserer Untersuchung der Energiestörungen zeigte es sich jedoch, daß bis zur sechsten Ordnung lediglich mittlere Produkte von Störungsamplituden gleicher Wellenzahl an dem instationären Energieaustausch beteiligt sind. Der Einfluß der Kopplungen zwischen Fourierkomponenten verschiedener Wellenzahl auf den Energieaustausch wird also um mindestens zwei Ordnungen langsamer zunehmen als die Energiestörungen selber. Für die

Zeiten, die bei der Integration von (80) in Frage kommen, können diese Kopplungen also vernachlässigt und die Fourierkomponenten als statistisch unabhängig angesehen werden.

Die Integration der Gleichung (80) bei beliebig vorgegebenem Anfangsspektrum wird im allgemeinen nur auf numerischem Wege möglich sein. Auf diese Frage wird in einer weiteren Arbeit, in der die vollständige Energiebilanz des Spektrums untersucht wird, näher eingegangen. Einige allgemeine Eigenschaften lassen sich jedoch aus der Form der Gleichung (80) und der Austauschfunktion T_1 und T_2 unmittelbar ablesen. Der nichtlineare Energieaustausch erfolgt durch die Wechselwirkung von je drei Wellenkomponenten

$$\phi^{+}_{\bar{k}_1} e^{i[(\bar{k}_1\bar{x}) - \omega_{\bar{k}_1} t]}, \quad \phi^{+}_{\bar{k}_2} e^{i[(\bar{k}_2\bar{x}) - \omega_{\bar{k}_2} t]}, \quad \phi^{-}_{\bar{k}_3} e^{i[(\bar{k}_3\bar{x}) + \omega_{\bar{k}_3} t]}$$

die unter der Resonanzbedingung

$$\omega_{\bar{k}_1} + \omega_{\bar{k}_2} - \omega_{\bar{k}_3} = \omega_{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3}$$

ihre Energie auf eine resultierende vierte Welle

$$\phi^{+}_{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3} e^{i[(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3, \bar{x}) - \omega_{\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3} t]}$$

übertragen. Das erste Integral in (80) stellt dann die Energiezunahme des Spektrums an der Stelle $\bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3$ durch die Wechselwirkung dreier solcher Wellen an anderen Stellen des Spektrums dar, während das zweite Integral den Energieverlust durch die unmittelbare Wechselwirkung der Wellenkomponenten an der Stelle $\bar{k}$ mit den Komponenten an jeweils zwei weiteren Stellen des Spektrums wiedergibt. Nach (74) ist T_1 stets positiv, so daß das erste Integral stets eine echte Energiezunahme darstellt. Aus der Bedingung der Energieerhaltung (78) folgt jedoch nur, daß $\sum_{\text{Perm des } \bar{k}_i} T_2(\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3) \geq 0$, so daß T_2 und somit das zweite Integral für bestimmte $\bar{k}$ eventuell negativ ausfallen kann. Für Diskussionszwecke setzen wir jedoch voraus, daß das zweite Integral ebenfalls einen echten Energieverlust darstellt.

Die Energiezunahme an der Stelle $\bar{k}$ ist vom Wert des Spektrums bei $\bar{k}$ unabhängig, der Energieverlust diesem jedoch proportional. Die nichtlinearen Wechselwirkungen haben also die Tendenz, scharfe Spitzen des Spektrums zu glätten und die Energie gleichmäßiger über alle Wellenzahlen zu verteilen. Hierin besteht eine weitgehende Analogie zu den nichtlinearen Wechselwirkungen in einem Turbulenzspektrum. Es ist anzunehmen, daß sich in einem vollentwickelten Seegangsspektrum dann, ähnlich wie beim nichtlinearen Kaskadenprozeß der Turbulenz, Energie von den energiereichen langen zu den energiearmen kurzen Wellen des Spektrums fließt, bis die Energiezufuhr ins kurzwellige Gebiet schließlich durch die dort stattfindende Dissipation durch turbulente Reibung und Wellenbrechung aufgehoben wird.

Der Energieaustausch ist der vierten Potenz der Wellensteilheit proportional. Er ist also ein relativ schwacher Effekt. Wird Gleichung (80) durch eine jeweils charakteristische Wellenlänge λ, Periode Tw und Wellenhöhe H in dimensionslose Form gebracht, so ergibt sich für die charakteristische Zeit T des nichtlinearen Energieaustausches:

$$T \sim T_w (H/\lambda)^{-4} \qquad (81)$$

Für die mittlere Wellensteilheit (H/λ) können wir in einer voll-entwickelten Windsee nach Neumann und Pierson [3] etwa 1/7 annehmen. Mit T_w ungefähr 10 sec ergibt (81) dann $T \approx 7$ Stunden. Diese (naturgemäß sehr grobe) Schätzung liegt in der Größenordnung der Entwicklungszeiten für Windseen, so daß zu erwarten ist, daß der nichtlineare Energieaustausch mit den übrigen auf den Seegang einwirkenden Kräften vergleichbar ist.

Literatur

[1] O.M. Phillips: (1957) On the generation of waves by turbulent wind. J.Fluid Mech. 2, 417-445

[2] L.J. Tick: (1958) A non-linear random model of gravity waves I. N.Y.Univ.Coll.Eng.Scientific Paper No. 11, Stat.Lab. Oct. 1958 (To be published in J.Math. and Mech. Univ.Indiana)

[3] G. Neumann, W.J. Pierson Jr.: (1957) A detailed comparison of theoretical wave spectra and wave foreecasting methods. DHZ 10, 73-92, 134-146