Algebra in Keilschrift

Einführung in eine altbabylonische geometrische Technik

Edition Open Access

The Edition Open Access (EOA) platform was founded to bring together publication initiatives seeking to disseminate the results of scholarly work in a format that combines traditional publications with the digital medium. It currently hosts the open-access publications of the "Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge" (MPRL) and "Edition Open Sources" (EOS). EOA is open to host other open access initiatives similar in conception and spirit, in accordance with the *Berlin Declaration on Open Access to Knowledge* in the sciences and humanities, which was launched by the Max Planck Society in 2003.

By combining the advantages of traditional publications and the digital medium, the platform offers a new way of publishing research and of studying historical topics or current issues in relation to primary materials that are otherwise not easily available. The volumes are available both as printed books and as online open access publications. They are directed at scholars and students of various disciplines, as well as at a broader public interested in how science shapes our world.

Algebra in Keilschrift

Einführung in eine altbabylonische geometrische Technik

Jens Høyrup

Übersetzt aus dem Englischen von Franz Lemmermeyer und Schülerinnen des Gymnasiums St. Gertrudis in Ellwangen

Textbooks 3

Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge
Textbooks 3

Communicated by:
Robert K. Englund †

Titelbild:
Eine Collage des Autors von Diagrammen aus dem Buch und dessen
Preprint-Version.

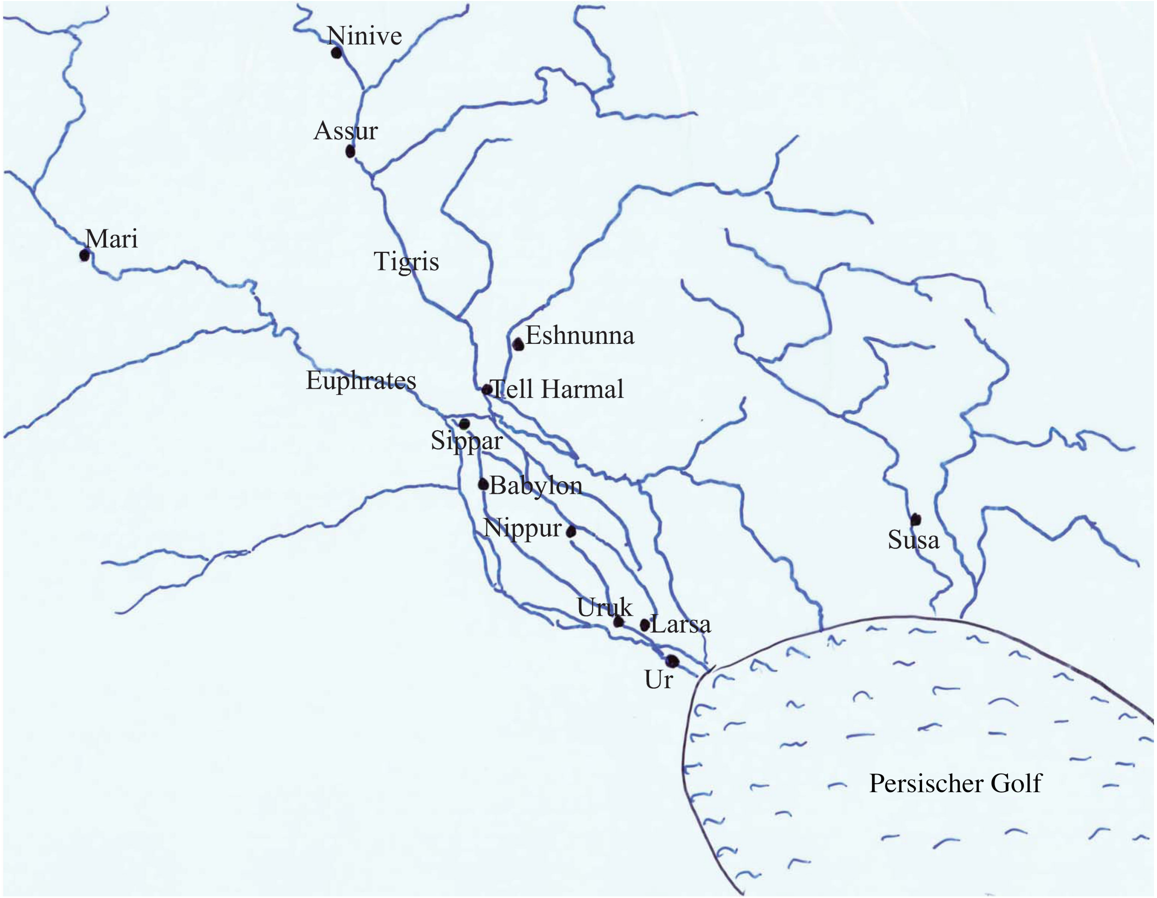
ISBN 978-3-945561-59-1
e-ISBN [PDF] 978-3-945561-60-7
e-ISBN [EPUB] 978-3-945561-61-4
DOI 10.34663/9783945561607-00
First published 2021 by Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften
Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge:
https://www.mprl-series.mpg.de/
Printed and distributed by epubli / neopubli GmbH, Berlin

The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de

Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge

The Max Planck Research Library for the History and Development of Knowledge comprises the subseries, Studies, Proceedings and Textbooks. They present original scientific work submitted under the scholarly responsibility of members of the Scientific Board and their academic peers. The initiative is currently supported by research departments of three Max Planck Institutes: the MPI for the History of Science, the Fritz Haber Institute of the MPG and the MPI for Gravitational Physics (Albert Einstein Institute). The publications of the Studies series are dedicated to key subjects in the history and development of knowledge, bringing together perspectives from different fields and combining source-based empirical research with theoretically guided approaches. The Proceedings series presents the results of scientific meetings on current issues and supports, at the same time, further cooperation on these issues by offering an electronic platform with further resources and the possibility for comments and interactions. The Textbooks volumes are prepared by leading experts in the relevant fields.

Zum Gedenken an Peter Damerow


Ninive
Assur
Mari
Tigris
Eshnunna
Euphrates
Tell Harmal
Sippar
Babylon
Nippur
Susa
Uruk
Larsa
Ur
Persischer Golf

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Buch präsentiert einen wichtigen Bestandteil der babylonischen Mathematik, nämlich die Technik der sogenannten „Babylonischen Algebra“. Diese „Algebra“ ist das älteste Beispiel fortgeschrittener Mathematik, das uns erhalten ist, und deswegen wird es in den meisten Büchern über die Geschichte der Mathematik angesprochen. Die meisten dieser Darstellungen verlassen sich allerdings auf Übersetzungen und Interpretationen, die teilweise auf die 1930er Jahre zurückgehen. Das vorliegende Buch dagegen baut auf jüngeren Forschungen auf.

Die traditionelle Interpretation erlaubte es, eine Liste der von den Babyloniern erzielten Resultate zu erstellen, von den Rechnungen, die sie ausführen konnten und von den „Formeln“, die sie kannten. Weil man dabei aber von der heutigen Mathematik ausgegangen ist, war es nicht möglich, die *ganz anderen* Gedanken hinter den babylonischen Resultaten zu rekonstruieren. Das Ziel dieses Buchs ist es, diesen Unterschied zu beleuchten und damit zu zeigen, dass *Mathematik auf verschiedene Arten gedacht werden kann*.

Eine erste Version dieses Buchs wurde 1998 für dänische Gymnasiasten geschrieben[1]; eine überarbeitete und erweiterte Version erschien 2010 auf Französisch[2]. Diese Version wendet sich ebenso wie die vorliegende wiederum aktualisierte Version an alle, die sich für die Geschichte der Mathematik interessieren, aber nicht notwendig über mathematische Kenntnisse verfügen, welche über die Schulmathematik hinausgehen. Außerdem wendet es sich an Assyriologen, welche eine Einführung in das moderne Verständnis Babylonischer Mathematik wünschen.

Lehrer können das Buch zusammen mit ihren Schülern auf verschiedenen Niveaus benutzen. Ein erster Zugang (sowohl in der Lehre als auch für ein privates Studium) könnte sich auf die Gleichung ersten Grades TMS XVI #1 konzentrieren, sowie auf die grundlegenden quadratischen Gleichungen, nämlich BM 13901 #1 und #2, YBC 6967, sowie TMS IX #1 und #2. Die Einführung und die Kapitel 6–8 geben einen allgemeinen Überblick.

Für ein tieferes Verständnis der Sache sollte man die anderen Texte in Kap. 2 und 3 lesen, sowie die Texte TMS IX #3, AO 8862 #2, BM 13901 #23 und YBC 6504 #4 aus Kapitel 4.

[1] *Algebra på lertavler*, Roskilde 1998; siehe http://ruc.dk/~jensh/Publications/1998%7Bc%7D_AlgebraPaaLertavler.pdf, besucht am 2020-08-26.

[2] *L’algèbre au temps de Babylone*, Paris 2010.

Leser, die sich vom babylonischen Virus haben anstecken lassen, können alle Texte aus den Kapiteln 2–5 lesen und dann versuchen, mit den Texten aus Anhang A zurechtzukommen.

In Anhang B finden Leser, welche die Grundlagen der babylonischen Sprache und Grammatik (oder etwas mehr) verstehen, Transliterationen der meisten Texte aus den Kapiteln 2–5 und Anhang A.

Ich bin dem Institute for the History of Natural Science of the Chinese Academy of Sciences für die Einladung zu Dank verpflichtet, einen Kurs über das Thema dieses Buches abzuhalten. Dies hat mich zu einer englischen Version dieses Buches angespornt und mir erlaubt, während des Aufenthaltes die letzten Unebenheiten zu glätten.

Ich widme dieses Buch dem Andenken an Peter Damerow, der lange Zeit mein Reisebegleiter in das weite Feld der mesopotamischen Mathematik gewesen ist.

Vorwort des Übersetzerteams

Die Übersetzung der mathematischen Texte von Jens Høyrups Buch *Algebra in Cuneiform* wurde im Schuljahr 2019/20 von zehn Schülerinnen des Gymnasiums St. Gertrudis in Ellwangen unter meiner Federführung in Angriff genommen. Ich habe auch den Rest des Buchs übersetzt und mich um die Übertragung in XƎLaTeX und die Modifikation der Abbildungen gekümmert.

Tafel	übersetzt von
TMS XVI # 1	Leonie Powelleit
TMS VII # 2	Vivien Rettenmeier
YBC 6967	Stella Keresmann
BM 13901 # 10	Stella Keresmann
BM 13901 # 14	Julia Wolf
TMS IX #1, #2	Julia Wolf
TMS IX # 3	Noreen Saur
AO 8862 # 2	Noreen Saur
VAT 7532	Charlotte Uhl
TMS XIII	Charlotte Uhl
BM 13901 # 12, # 23	Evi Grundler, Marie Fürst
TMS VIII # 1	Evi Grundler, Marie Fürst
YBC 6504 # 4	Evi Grundler, Marie Fürst
VAT 8512	Fine Fürst
BM 85200 + VAT 6599 # 6	Fine Fürst
BM 15285 # 24	Pia Mayle

Durchgeführt wurde die Übersetzung als fächerübergreifendes Projekt, bei welchem die Übersetzung aus einer Fremdsprache (eine Technik, die heute nur noch im Lateinunterricht auftaucht), Mathematik (im Prinzip die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen, aber in einer Schülern vollkommen unbekannten Form, nämlich mit Hilfe der Technik des falschen Ansatzes und der quadratischen

Ergänzung; auch die Darstellung der Zahlen und die Ausführung der Grundrechenarten stellen eine nicht zu unterschätzende Hürde dar) und Geschichte (auf der Schule wird, was vorgriechische Geschichte angeht, nur kurz auf Ägypten eingegangen – Mesopotamien spielt dort überhaupt keine Rolle) zusammenkamen.

Ich danke meinen Schülerinnen für ihre Bereitschaft, sich auf dieses Experiment einzulassen, und Jens Høyrup für die genaue Durchsicht der Übersetzung.

Franz Lemmermeyer, Sommer 2020

1. Kapitel
Einführung: Worum es geht – und etwas Hintergrund

„Nutzlose Mathematik“

In den späten 1970er Jahren stellte die dänische Vereinigung der Mathematiklehrer ihren Mitgliedern eine delikate Frage: Sie sollten eine Anwendung der Lösung quadratischer Gleichungen finden, die innerhalb des Horizonts ihrer Schüler liegt.

Ein Mitglied fand eine solche Anwendung: das Verhältnis zwischen der Zeitdauer und dem Zähler eines Kassettenrekorders (also eine Anwendung, an welche sich höchstens die Eltern der heutigen Schüler erinnern werden!). Dies war die einzige Antwort.

Viele Schüler werden sicherlich erstaunt sein zu hören, dass nicht einmal ihre Lehrer echte Anwendungen quadratischer Gleichungen kennen. Schüler ebenso wie Lehrer werden nicht weniger erstaunt sein wenn sie erfahren, dass solche Gleichungen seit 1800 v. Chr. unterrichtet werden, und zwar 2500 Jahre lang mit *keinerlei* Bezug auf praktische Anwendungen (erst um das Jahr 700 n. Chr. begannen *möglicherweise* persische und arabische Astronomen damit, diese in trigonometrischen Rechnungen zu benutzen.

Wir werden auf die Frage, warum man quadratische Gleichungen unterrichtet hat und sie immer noch unterrichtet, zurückkommen. Aber zuerst werden wir uns anschauen, wie die ältesten quadratischen Gleichungen, einige Gleichungen ersten Grades und eine kubische Gleichung ausgesehen haben, und wie man sie gelöst hat.

Wir werden dabei zu beachten haben, dass manche Probleme zwar den Anschein erwecken, praktische Probleme zu behandeln, weil sie sich beispielsweise um kaufmännische Fragen, den Bau von Belagerungsrampen oder die Teilung von Feldern drehen, deren mathematische Substanz aber in Wirklichkeit immer „rein“ ist, also keine unmittelbare Anwendungen außerhalb der Mathematik besitzt.

Geschichte Mesopotamiens

Mesopotamien (das „Land zwischen den Flüssen“) bezeichnet seit dem Altertum das Gebiet um die beiden großen Flüsse Euphrat und Tigris – ganz grob das Gebiet des heutigen Irak. Um 3500 v. Chr. war der Meeresspiegel im Persischen Golf weit genug gefallen, um im südlichen Teil des Landes eine großflächige Landwirtschaft mit einem ausgefeilten Bewässerungssystem zu ermöglichen, und bald darauf erschien die erste „Zivilisation", also ein Gesellschaft mit städtischen Zentren und als Staat organisiert. Das Herz des Staates bildeten die Tempel und ihre Priesterschaft, und zum Zwecke der Buchhalten entwickelten diese Priester eine frühe Schrift (siehe den Kasten „Keilschrift" auf Seite 12).

Die älteste Keilschrift war rein ideographisch (vergleichbar mit der modernen mathematischen Symbolschrift, wo eine Gleichung wie $E = mc^2$ in jeder Sprache erklärt und ausgesprochen werden kann, und uns daher nicht erlaubt zu entscheiden, in welcher Sprache Einstein gedacht hat). Während der ersten Hälfte des dritten Jahrtausends v. Chr. wurden allerdings phonetische und grammatikalische Ergänzungen eingeführt, und um 2700 v. Chr. war die Sprache, die mit der Keilschrift notiert wurde, zweifelsfrei das Sumerische. Zwischen 2700 und etwa 2350 v. Chr. war die Gegend in etwa ein Dutzend Stadtstaaten eingeteilt, die oft miteinander Krieg (etwa um Wasser) führten. Dies führte zu einer Transformation der Staatsstruktur: der Heerführer („König") ersetzte die Tempel als das Zentrum der Macht. Ab 2600 bildete sich aufgrund der Ausbreitung der Schrift ein neuer Berufszweig heraus. Die Buchhaltung war nicht länger die Aufgabe der höheren Beamten von Tempeln und König: Schreiber wurden in Schulen unterrichtet und übernahmen diese Aufgabe.

Um 2340 eroberte ein akkadischer Herrscher ganz Mesopotamien (Akkadisch ist eine semitische Sprache und gehört zur selben Sprachfamilie wie Arabisch und Hebräisch; es wurde in manchen Gegenden Mesopotamiens seit mindestens 2600 gesprochen). Dieser akkadische Staat hielt sich bis etwa 2200 und wurde für ein Jahrhundert durch konkurrierende Stadtstaaten abgelöst. Um 2100 etablierte sich Ur als Zentrum eines neuen Regionalstaats, dessen offizielle Sprache Sumerisch war, obwohl der Großteil der Bevölkerung einschließlich der Könige vermutlich akkadisch gesprochen hat. Dieser Neu-Sumerische Staat (auch als Ur III bekannt) war hoch bürokratisiert (vielleicht mehr als jeder andere Staat vor der Einführung von Computern) und es scheint, als wäre die Stellenwertnotation als Antwort auf die Nachfrage der Bürokratie nach geschickten Recheninstrumenten geschaffen worden (vgl. den Kasten „Das Sexagesimalsystem" auf Seite 16).

Langfristig war die Bürokratie zu teuer, und um 2000 zerfiel das Neu-Sumerische Reich in kleinere Staaten. Zwei Jahrhunderte später setzt eine Phase der Zentralisierung um die Stadt Babylon ein; erst ab diesem Zeitpunkt kann man sinnvoll von Süd- und Zentralmesopotamien als „Babylonien" sprechen.

Inzwischen war (vielleicht schon seit Jahrhunderten) das Sumerische eine tote Sprache, und Akkadisch die Umgangssprache – im Süden und in Zentralmesopotamien herrschte der babylonische Dialekt vor, im Norden der assyrische. Dennoch hat die sumerische Sprache bei den Schreibern – ein wenig wie Latein in Europa – so lange überlebt wie Keilschrift geschrieben wurde, also bis ins erste Jahrhundert n. Chr.

Den Zeitraum ab 2000 bis zum endgültigen Kollaps des babylonischen Zentralstaats um 1600 nennt man die altbabylonische Epoche. Alle Texte, die wir im folgenden besprechen, stammen aus der zweiten Hälfte dieser Epoche, wurden also zwischen 1800 und 1600 v. Chr. geschrieben.

Algebra: Die erste Interpretation

Bevor wir von Algebra sprechen sollten wir klären, was unter diesem Wort zu verstehen ist. Vorläufig wollen wir diese Frage aber nicht beachten; wir werden am Ende dieses Buchs darauf zurückkommen. Im Moment müssen wir nur wissen, dass Algebra mit Gleichungen zu tun hat.

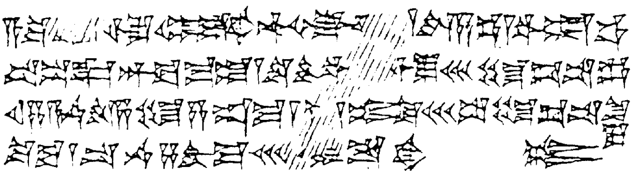


Abb. 1.1: Die Keilschriftversion des Problems BM 13901 #1.

Als nämlich Mathematikhistoriker in den späten 1920er Jahren entdeckten, dass manche Keilschrifttafeln (siehe den Kasten „Keilschrift" auf S. 12) „algebraische" Probleme enthielten, glaubten sie, dass jeder die Bedeutung des Wortes kannte.

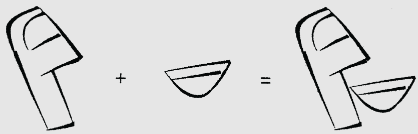
Wir wollen dies erst einmal so hinnehmen, um uns in deren Denken hineinversetzen zu können, und betrachten ein sehr einfaches Beispiel aus einem im 18. Jahrhundert v. Chr. geschriebenen Text in der Transliteration, wie sie für gewöhnlich von Assyriologen benutzt wird (was die Funktion von Kursivschrift und Kapitälchen angeht verweisen wir auf S. 27 und den Kasten „Keilschrift" (Abb. 1.1 zeigt die Keilschriftversion des Texts):

1. A.ŠÀ$^{l[am]}$ *ù mi-it-ḫar-ti ak-m*[*ur-m*]*a* 45-E 1 *wa-ṣi-tam*
2. *ta-ša-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ḫe-pe* [3]0 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*
3. 15 *a-na* 45 *tu-ṣa-ab-ma* 1-[E] 1 ÍB.SI$_8$ 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*
4. *lìb-ba* 1 *ta-na-sà-aḫ-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

Unvorbereitete Leser, welche dies als kompliziert empfinden, sollten sich vor Augen halten, dass es für die ersten Wissenschaftler fast genauso kompliziert war. 90 Jahre später verstehen wir die technische Terminologie altbabylonischer mathematischer Texte; aber im Jahre 1928 war diese noch nicht entziffert, und die im Text enthaltenen Zahlen waren der einzige Anhaltspunkt.[1]

Keilschrift

Von Anfang an hat man in Mesopotamien auf plattgedrückten Tafeln aus Ton geschrieben, die dann getrocknet wurden. Im vierten Jahrtausend wurden die Zeichnungen mit einem spitzen Griffel gemacht; meist handelte es sich um wiedererkennbare Objekte, die einfache Konzepte darstellten. Komplexe Konzepte wurden durch Kombinationen von Zeichen ausgedrückt; ein Kopf und eine Schale, welche die tägliche Ration eines Arbeiters enthielt, bedeutete „Essensration“ (und später „essen“).



Die Zeichen für Zahlen und Maße wurden jedoch durch vertikale oder schräge Einkerbungen mit einem zylindrischen Griffel gemacht.

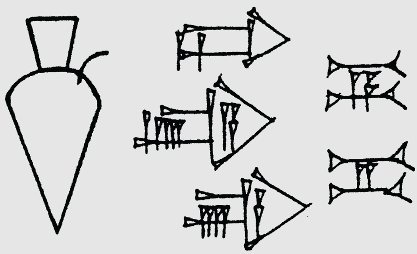
Im Laufe der Zeit änderte sich der Charakter der Schrift in zweierlei Hinsicht. Zum Einen wurden die Bilder nicht mehr gezeichnet, sondern durch einen Griffel mit scharfen Kanten durch Zeichen symbolisiert, die aus geraden

[1] Um 1930 musste man mit Texten beginnen, die weitaus komplexer waren als das Beispiel, das wir gerade betrachten; dieses wurde erst 1936 entdeckt. Die Prinzipien waren aber dieselben. Die wichtigsten Beiträge in den frühen Jahren stammen von Otto Neugebauer, ein Historiker der antiken Mathematik und Astronomie, und dem Assyriologen François Thureau-Dangin.

Strichen bestanden. Dadurch erscheinen die Zeichen aus kleinen Keilen zusammengesetzt, was zum Namen Keilschrift führte.

Ab der zweiten Hälfte des dritten Jahrtausends wurden numerische und metrologische Zeichen auf dieselbe Art und Weise geschrieben. Die Zeichen wurden zunehmend stilisiert und verloren ihre piktographischen Eigenschaften; es ist daher nicht möglich, deren Bedeutung zu erraten, wenn man nicht die historische Entwicklung des Zeichens kennt. Bis um 2000 v. Chr. zeigen die Variationen der Zeichen zwischen den einzelnen Schreibern, dass diese die ursprünglichen Zeichnungen noch kannten.

Betrachten wir beispielsweise das Zeichen, das ursprünglich durch ein Gefäß mit Ausguss dargestellt wurde (linkes Bild).



In der Mitte sehen wir drei Varianten, wie sie im dritten Jahrtausend für das gleiche Symbol benutzt wurden (weil die Schrift im zweiten Jahrtausend um 90° nach links gedreht worden ist, zeigt man auch die Schrift des dritten Jahrtausend üblicherweise so). Wenn man den Ursprung des Zeichens kennt, kann man das zugrunde liegende Bild immer noch leicht erkennen. Rechts sieht man zwei altbabylonische Varianten; hier ist das Bild nicht mehr erkennbar.

Die zweite Änderung betrifft den Gebrauch der Zeichen (wir sollten aus diesem Grund eher von „Charakter" reden). Das sumerische Wort für Gefäß ist DUG. Weil sich neben der Buchhaltung weitere literarische Gattungen entwickelten (beispielsweise königliche Inschriften, Verträge, Sammlungen von Sprichwörtern), mussten die Schreiber Wege finden, Silben zu schreiben, welche der Kennzeichnung grammatikalischer Deklinationen von Wortstämmen dienten. Dieses System einer Silbenschrift wurde auch zum Schreiben des Akkadischen benutzt. Zu diesem Zweck wurden Zeichen gemäß ihres ungefähren phonetischen Werts benutzt; das Zeichen für „Gefäß" konnte daher für die Silben *dug, duk, tug* und *tuk* stehen. In babylonischen Texten konnte das sumerische Zeichen auch als „Logogramm" oder „Wortzeichen" für ein Wort mit derselben Bedeutung wie *dug* benutzt werden, nämlich für *karpatum*.

Wörter, die als Logogramme oder auf Sumerisch gelesen werden sollen, werden in Transliterationen in KAPITÄLCHEN gesetzt; Spezialisten (siehe Anhang B) unterscheiden oft sumerische Wörter, deren phonetischer Wert als bekannt angenommen wird und welche dann in S p e r r s c h r i f t gesetzt werden, von den Zeichen, welche durch ihren „Zeichennamen" wiedergegeben werden und als KAPITÄLCHEN gesetzt werden. Das phonetische Akkadisch wird in *Kursivschrift* transkribiert.

Assyriologen unterscheiden zwischen einer „Transkription" und einer „Transliteration". Eine „Transkription" ist eine Übersetzung ins Akkadische unter Benutzung des lateinischen Alphabets. In einer „Transliteration" wird jedes Keilschriftzeichen gemäß seines phonetischen oder logographischen Werts wiedergegeben.

Es war bereits bekannt, dass diese Zahlen in einem Stellenwertsystem mit Basis 60 geschrieben wurden, allerdings ohne Angabe der Größenordnung der Zahl (siehe den Kasten „Das Sexagesimalsystem" auf Seite16). Wir müssen annehmen, dass die Zahlen, welche im Text auftauchen, irgendwie zusammenhängen und zumindest ungefähr dieselbe Größenordnung besitzen (wir erinnern daran, dass „1" sowohl 60 als auch $\frac{1}{60}$ bedeuten kann). Wir wollen daher versuchen, diese Zahlen wie folgt zu interpretieren:

$$45' \left(= \tfrac{3}{4}\right) - 1^\circ - 1^\circ - 30' \left(= \tfrac{1}{2}\right) - 30' - 15' \left(= \tfrac{1}{4}\right) - 45' - 1^\circ - 1^\circ - 30' - 1^\circ - 30'.$$

Für den nächsten Schritt braucht man etwas Fantasie. Wenn man bemerkt, dass $30'$ gleich $\frac{1}{2} \cdot 1$ und $15' = (30')^2$ ist, dann liegt es nahe, an die Gleichung

$$x^2 + 1 \cdot x = \tfrac{3}{4}.$$

zu denken. Heute lösen wir eine solche Gleichung mit den folgenden Schritten (wir betrachten dabei keine negativen Zahlen – diese sind eine moderne Erfindung):

$$\begin{aligned} x^2 + 1 \cdot x = \tfrac{3}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x + \tfrac{1}{2} = \sqrt{1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wie wir sehen können, basiert diese Methode auf der Addition des Quadrats des halben Koeffizienten des linearen Terms (x), hier also $(\frac{1}{2})^2$, zu beiden Seiten der Gleichung. Dies erlaubt uns, die linke Seite als das Quadrat eines Binoms zu schreiben:

$$x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

Dieser kleine Trick heißt „quadratische Ergänzung".

Wenn wir den antiken Text und die moderne Lösung vergleichen, dann bemerken wir, dass dieselben Zahlen in fast derselben Reihenfolge auftreten; Ähnliches gilt für andere Texte. In den frühen 1930er Jahren gelangten Mathematikhistoriker deshalb zu der Überzeugung, dass die babylonischen Schreiber zwischen 1800 und 1600 v. Chr. etwas ganz Ähnliches wie unsere algebraische Methode zum Lösen quadratischer Gleichungen besessen hatten. Diese Periode macht die zweite Hälfte der altbabylonischen Epoche (siehe den Kasten „Geschichte Mesopotamiens" auf S. 9).

Der nächste Schritt war die genaue Interpretation der Texte. In gewisser Hinsicht konnte die allgemeine, nicht-technische Bedeutung der einzelnen Wörter helfen. In Zeile 1 des Problems auf S. 11 kann man *ak-mur* als „Ich habe angehäuft" übersetzen. Die Übersetzung des „Anhäufens" zweier Zahlen als Addition ist daher natürlich und stimmt mit der Beobachtung überein, dass das „Anhäufen" von 45′ und 15′ (also von $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$) 1 ergibt. Wenn in anderen Texten davon die Rede ist, eine Größe auf eine andere zu „erhöhen" (*našûm*), dann wird es schwieriger. Allerdings können wir bemerken, das das „Erhöhen" von 3 zu 4 die Zahl 12 liefert, während 5 „erhöht" auf 6 die 30 ergibt, und daher erraten, dass „erhöhen" eine Multiplikation bedeutet.

Aus diesem Grund wählten die Wissenschaftler der 1930er Jahre eine rein arithmetische Interpretation der Rechenoperationen, also der Addition, Subtraktion, Multiplikation und der Division *von Zahlen*. Die folgende Übersetzung gibt dafür ein Beispiel:[2]

1. Ich habe die Fläche und [die Seite] ein[es] Quadrat[s] addiert: 45′.
2. Du nimmst 1°, die Einheit. Du brichst entzwei 1° : 30′. Du multiplizierst [30′ und] 30′:
3. 15′. Du fügst 15′ zu 45′ hinzu: 1°. 1° ist das Quadrat von 1°.
   30′, was du (mit sich selbst) multipliziert hast,
4. von 1° subtrahierst du: 30′ ist die Seite des Quadrats.

[2] Eine wörtliche Rückübersetzung von François Thureau-Dangins französischer Übersetzung. Otto Neugebauers deutsche Übersetzung stimmt bis auf einen Punkt damit überein: wo Thureau-Dangin „1°, die Einheit" übersetzt, schlägt Neugebauer „1, der Koeffizient" vor. Außerdem transkibiert er Zahlen im Sexagesimalsystem anders.

Solche Übersetzungen findet man auch heute noch in Büchern über die Geschichte der Mathematik. Sie erklären die Zahlen, welche in den Texten auftauchen, und sie geben einen fast modernen Eindruck der altbabylonischen Methoden. Es gibt keinen wesentlichen Unterschied zwischen der obigen Übersetzung und der Lösung mit Hilfe von Gleichungen. Ist die Seite des Quadrats gleich x, dann ist die Fläche x^2. Also entspricht die erste Zeile des Texts – des zu lösenden Problems – der Gleichung $x^2+1\cdot x=\frac{3}{4}$. Wenn wir die Übersetzung weiterverfolgen, dann sehen wir, dass sie der symbolischen Umformung auf Seite 15 Schritt für Schritt folgt.

Obwohl jedoch die vorliegende Übersetzung ebenso wie andere, die nach denselben Prinzipien erstellt wurden, die Zahlen des Texts erklären, stimmen sie weniger gut mit den Wörtern, und manchmal auch nicht mir der Reihenfolge der Operationen überein. Zum Einen berücksichtigen diese Übersetzungen nicht den geometrischen Charakter der Terminologie, indem sie davon ausgehen, dass Wörter und Ausdrücke wie „die Seite meines Quadrats", „Länge", „Breite" und „Fläche" eines Rechtecks nichts als unbekannte Zahlen und deren Produkte bezeichnen. Man muss dabei beachten, dass dies in den 1930ern *a priori* nicht unmöglich erschien – auch wir reden von 3^2 als dem „Quadrat von 3", ohne dabei an ein geometrisches Quadrat zu denken.

Allerdings gibt es andere Probleme. Die bedeutendste ist, dass die Zahl der Operationen zu groß ist. Zum Beispiel gibt es zwei Operationen, welche in der traditionellen Interpretation als Addition interpretiert werden: „hinzufügen zu" (*waṣābum*/DAḪ, dessen Infinitiv dem *tu-ṣa-ab* unseres Texts entspricht) und „anhäufen" (*kamārum*/GAR.GAR, das zu *ak-mur* des Texts gehört). Beide Operationen kommen also in unserem kurzen Text vor, „anhäufen" in Zeile 1 (wo es als „addiere" erscheint) und „hinzufügen" in Zeile 3.

Das Sexagesimalsystem

Die altbabylonischen Texte benutzen ein Stellenwertsystem mit der Basis 60, aber ohne ein Sexagesimalkomma. In unserem Dezimalsystem, das ebenfalls ein Stellenwertsystem ist, steht die Ziffer „1" für die Zahl 1 ebenso wie für die Zahlen $10, 100, \ldots$ sowie $0,1$, $0,01, \ldots$. Ihr Wert ist bestimmt durch ihren Abstand vom Dezimalkomma.

Ähnlich kann ein „45" eines babylonischen Schreibers 45 bedeuten; es kann aber auch für $\frac{45}{60}$ (also $\frac{3}{4}$), für $45\cdot 60$ usw. stehen. Kein Dezimalkomma bestimmt den „wirklichen" Wert. Dieses System entspricht demjenigen, das Ingenieure mit dem Rechenstab vor dem Aufkommen von Taschenrechnern benutzt haben. Der Rechenstab besaß ebenfalls kein Dezimalkomma und zeigte somit auch nicht die wahre Größe eines Ergebnisses an. Um herauszufinden, ob ein bestimmtes Ergebnis nun 3,5 m³, 35 m³ oder 350 m³ bedeutete, musste der Ingenieur Kopfrechnen.

Um die Zahlen zwischen 1 und 59 zu schreiben benutzten die Babylonier einen senkrechten Keil (𒁹), der bis zu neun mal wiederholt mit bestimmten Mustern wurde, um die Zahlen von 1 bis 9 darzustellen, und einen *Winkelhaken* (𒌋), der bis zu fünf Mal wiederholt wurde, um die Zahlen $10, 20, \ldots, 50$ darzustellen.

Heutige Leser sind es nicht gewohnt, Zahlen unbestimmter Größe zu lesen. In Übersetzungen babylonischer mathematischer Texte ist es daher üblich, die Größenordnung einer Zahl anzugeben. Dafür sind verschiedene Methoden in Gebrauch. Im vorliegenden Buch werden wir eine Verallgemeinerung der Grad-Minute-Sekunde-Notation benutzen. Wenn 𒌋𒐊 den Bruch $\frac{15}{60}$ bedeutet, werden wir die Zahl als $15'$ transkribieren, bedeutet es $\frac{15}{60 \cdot 60}$, werden wir $15''$ schreiben. Wenn es für $15 \cdot 60$ steht, schreiben wir 15` usw. Steht es für 15, so schreiben wir 15 oder, falls dies notwendig ist, um Missverständnisse zu vermeiden, 15°. Wenn 𒌋𒐊 als $10 + 5 \cdot 60^{-1}$ zu verstehen ist, wird es also als $10°5'$ transkribiert.

𒌍 aufgefasst als $30'$ bedeutet daher $\frac{1}{2}$.

𒐏𒐊 aufgefasst als $45'$ bedeutet $\frac{3}{4}$.

𒌋𒈫 aufgefasst als $12'$ bedeutet $\frac{1}{5}$; aufgefasst als 12` bedeutet es 720.

𒌋 aufgefasst als $10'$ bedeutet $\frac{1}{6}$.

𒌋𒐋𒐏 kann 16`40 = 1000 oder $16°40' = 16\frac{2}{3}$ usw. bedeuten.

𒁹𒐏 kann 1`40 = 100, $1°40' = 1\frac{2}{3}$, $1'40'' = \frac{1}{36}$ usw. bedeuten.

Außerhalb der Schreiberschulen benutzten die Babylonier das Stellenwertsystem ausschließlich für Zwischenrechnungen (auf dieselbe Art wie ein Ingenieur vor 50 Jahren einen Rechenschieber benutzt hat). Wenn ein Ergebnis in einen Vertrag oder einen Bestand einzufügen war, konnte man sich offensichtlich keine Mehrdeutigkeit erlauben; andere Notationen erlaubten ihnen, die gewünschte Zahl genau aufzuschreiben.

Sicherlich kennen auch wir Synonyme in unserem mathematischen Wortschatz, zum Beispiel „und“, „addiert zu“ oder „plus“; die Wahl zwischen diesen Wörtern hängt vom Stil oder persönlichen Gewohnheiten ab, oder von unseren Erwartungen an unseren Gesprächspartner usw. Thureau-Dangin benutzt diese Wörter, wie wir sehen werden, und folgt dabei den Unterschieden im Text, indem er einmal von „Addition“ und dann von „hinzufügen“ spricht; er argumentiert aber, dass es keinen Unterschied zwischen diesen Begriffen gibt, und dass hier wirklich Synonyme vorliegen – „es gibt nur *eine* Multiplikation“, schreibt er, ohne zu bemerken, dass dies ein Zirkelschluss ist.

Es ist richtig, dass es Synonyme auch in der altbabylonischen Mathematik gibt. Die Verben „ausreißen“ (*nasāḫum*/ZI) und „abschneiden“ (*ḫarāṣum*/KUD) sind Bezeichnungen für ein und dieselbe Operation des Subtrahierens: sie können beide in analogen Situationen gebraucht werden. Der Unterschied zwischen „hinzufügen“ und „anhäufen“ dagegen ist von einer anderen Natur. Es gibt keinen Text, in dem eine quadratische Ergänzung (siehe etwa oben Seite 15) als „Anhäufen“ bezeichnet wird. Das „Anhäufen“ ist eine Operation, die benutzt wird, wenn etwa eine Fläche und eine Länge addiert werden. Es handelt sich also um verschiedene Operationen. Ebenso gibt es zwei verschiedene Subtraktionen, vier Multiplikationen und sogar zwei verschiedene Methoden zu halbieren. Wir werden später darauf zurückkommen.

Eine Übersetzung, welche Operationen vermischt, die die Babylonier als verschieden betrachtet haben, kann erklären, warum die babylonischen Rechnungen zu korrekten Ergebnissen führen; aber sie kann deren mathematische Schlussweise nicht durchdringen-

Außerdem mussten traditionelle Übersetzungen manche Worte auslassen, die keinen Sinn zu ergeben schienen. Eine eher wörtliche Übersetzung der letzten Zeile unseres kleinen Problems würde etwa beginnen mit „vom Inneren von 1°“ (oder sogar „aus dem Herzen“ oder „aus den Innereien“). Weil man nicht gesehen hat, wie eine Zahl 1 ein Inneres besitzen kann, hat der Übersetzer dieses Wort stillschweigend übergangen.

Andere Wörter wurden auf Arten übersetzt, die so stark von ihrem üblichen Gebrauch abwichen, dass es Verdacht erregen musste. Normalerweise bezieht sich das Wort *waṣītum* (von *waṣûm*, hinausgehen), welches Thureau-Dangin mit „Einheit“ und Neugebauer mit „Koeffizient“ übersetzt haben, auf etwas, das herausragt, auf den Teil eines Gebäudes, der in der Architektur „Projektion“ genannt wird. Dies muss den ersten Übersetzern absurd vorgekommen sein – wie kann eine Zahl 1 „herausragen“? Aus diesem Grund haben sie es vorgezogen, das Wort mit einem Begriff der heutigen Mathematik zu übersetzen.

Endlich ist auch die Reihenfolge, in welcher die Operationen ausgeführt werden, manchmal von derjenigen verschieden, die bei einer arithmetischen Interpretation als die natürliche empfunden wird.

Trotz dieser Einwände war die arithmetische Interpretation aus den 1930er Jahren eine beeindruckende Leistung, und sie bleibt eine hervorragende „erste Approximation“. Für die Wissenschaftler, welche diese Interpretation geschaffen haben, war es auch nichts anderes. Andere dagegen, nicht zuletzt Mathematikhistoriker und an der Geschichte interessierte Mathematiker, übernahmen sie als eine eindeutige und endgültige Übersetzung der „babylonischen Algebra“ – so beeindruckend waren die erhaltenen Resultate und so furchterregend die Alternative, die Texte in ihrer Originalsprache lesen zu müssen. Bis in die 1980er Jahre hinein fiel niemandem[3] auf, dass gewisse scheinbare Synonyme verschiedene Operationen darstellen.

Eine neue Lesart

Wie wir eben gesehen haben, kann die arithmetische Interpretation die Wörter, mit welchen die Babylonier ihre Operationen bezeichneten, nicht vollständig erklären. Zum einen vermengt sie Operationen, welche die Babylonier als verschieden angesehen haben. Zweitens entspricht die dadurch nahegelegte Reihenfolge der Operationen nicht immer derjenigen der babylonischen Rechnungen. Streng genommen stellt sie keine Interpretation dar, sondern eine Kontrolle der Korrektheit der babylonischen Methoden mit Hilfe moderner Techniken.

Eine echte Interpretation – also eine Art des Lesens, welche offenlegt, was der altbabylonische Schreibe gedacht und getan hat – muss zwei Dinge beachten. Zum einen die Ergebnisse, welche die Wissenschaftler der 1930er Jahre als „erste Approximation“ erhalten haben, und zum andern diejenigen Ebenen des Texts, welche diese Wissenschaftler vernachlässigen mussten, um ihre erste Approximation zu erhalten.

In den folgenden Kapiteln werden wir eine Reihe von Problemen analysieren, und zwar in einer Übersetzung, die einer solchen Interpretation entspricht. Zuvor ist noch angebracht, auf einige allgemeine Informationen hinzuweisen.

Darstellung und „Variablen“

In unserer Algebra benutzen wir x und y als Namen für unbekannte *Zahlen*. Wir benutzen Algebra als Hilfsmittel zum Lösen von Problemen über alle Arten von Größen, etwa Preisen, Entfernungen, Energiedichten usw.; aber in all diesen Fällen betrachten wir diese Größen als durch Zahlen repräsentiert. Für uns sind Zahlen die *fundamentale Darstellung*.

Bei den Babyloniern war die fundamentale Darstellung geometrischer Natur. Die meisten ihrer „algebraischen“ Probleme betreffen Rechtecke mit Länge, Breite und Fläche[4], oder Quadrate mit Seite und Fläche. Wir werden unten ein

[3] Niemandem außer vielleicht Neugebauer, der bei einer Gelegenheit (völlig zu Recht) bemerkte, dass ein Text eine falsche Multiplikation benutzt. Jedenfalls muss man bemerken, dass weder er noch Thureau-Dangin jemals eine falsche Operation gewählt haben, wenn sie fehlende Teile einer zerbrochenen Tafel rekonstruiert haben.

[4] Genau gesagt steht das Wort, das wir mit Länge übersetzen, für „Entfernung“, „Länge“ oder „Ausdehnung“ während „Breite“ eigentlich „Vorderseite“, „Stirn“ oder „Kopf“ bedeutet. Sie beziehen sich auf die Idee der Länge und Breite eines bewässerten Feldes. Das Wort für Fläche bedeutet ursprünglich „Feld“, sodass die Texte andere, weniger geeignete Wörter benutzen, wenn es um die Teilung von echten Feldern geht. Im Folgenden werden wir das Wort mit „Fläche“ übersetzen. Dieses Wort hat einen ähnlichen Wandel der Bedeutung durchgemacht und steht sowohl für die räumliche Ausdehnung als auch für seinen Flächeninhalt.

Problem (YBC 6967, Seite 52) besprechen, in welchem nach zwei unbekannten *Zahlen* gefragt ist, aber weil ihr Produkt als „Fläche“ bezeichnet wird, ist klar, dass diese Zahlen als die Seiten eines Rechtecks *dargestellt* werden.

Es ist eine wichtige Eigenschaft der babylonischen Geometrie, dass sie als „algebraische“ Darstellung dienen kann: sie dreht sich immer um *gemessene Größen*. Die Maßzahl von Strecken und Flächen kann also als *Unbekannte* verwendet werden – aber selbst dann existiert sie als numerische Maßzahl, und das Problem besteht darin, ihren Wert zu finden.

Einheiten

Jede Messung setzt eine Metrologie voraus, also ein System von Maßeinheiten; die Zahlen, die von einer Messung produziert werden, sind konkrete Zahlen. Dies kann in dem oben auf Seite 11 zitierten Problem nicht direkt gesehen werden; die mathematischen Texte zeigen dies meist nicht, weil sie das Sexagesimalsystem benutzen (außer wenn gelegentlich die gegebenen Größen oder das Ergebnis genannt werden). In diesem System werden alle Größen derselben Art in einer „Standardeinheit“ gemessen, welche, bis auf wenige Ausnahmen, nicht genannt, sondern stillschweigend vorausgesetzt wird.

Die Standardeinheit für *horizontale Entfernung* war NINDAN, eine „Rute“ mit einer Länge von etwa 6 m.[5] In unserem Problem ist die Seite des Quadrats also $\frac{1}{2}$ NINDAN, also etwa 3 m lang. Für vertikale Entfernungen (Höhrn und Tiefen) war die Grundeinheit das KÙŠ, eine „Elle“ von $\frac{1}{12}$ NINDAN (also etwa 50 cm).

Die Standardeinheit für *Flächen* war das SAR, was 1 NINDAN^2 entspricht. Die Standardeinheit für Volumen hatte denselben Namen: die Idee dahinter war, dass eine Grundfläche von 1 NINDAN^2 mit einer Standardhöhe von 1 KÙŠ versehen wurde. In der landwirtschaftlichen Buchhaltung wurde für Flächen eine geeignetere Einheit benutzt, das BÙR, was 30` SAR, also etwa $6\frac{1}{2}$ ha entspricht.

Die Standardeinheit für *Hohlmaße* (gebräuchlich für Produkte, die in Vasen und Gefäßen aufbewahrt werden, wie etwa Getreide und Öl) war das SÌLA, etwas weniger als ein Liter. Im täglichen Leben wurden oft größere Einheiten gebraucht: 1 BÁN = 10 SÌLA, 1 PI = 1` SÌLA, und 1 GUR, ein „Fass“ von 5` SÌLA.

Eine ähnliche Unterscheidung wurde für Längen und Breiten geschaffen. Wenn diese für „algebraische“ Variablen stehen, dann wurden sie mit den Logogrammen UŠ und SAĜ geschrieben; wenn sie für allgemeine Zwecke (Länge einer Mauer, eine Entfernung) benutzt werden, werden sie mit phonetischen Komplementen oder in Silbenschrift als *šiddum* und *pūtum* geschrieben.

[5] Wegen des Fehlens eines Sexagesimalpunkts ist es nicht möglich zu sagen, ob die Grundeinheit 1 NINDAN, 60 NINDAN oder $\frac{1}{60}$ NINDAN ist. Die Wahl von 1 NINDAN erscheint (zumindest uns) als die natürlichste Wahl für einen babylonischen Rechner, weil sie bereits als Einheit existiert (dies gilt auch für 60 NINDAN, aber nicht für $\frac{1}{60}$ NINDAN) und weil Entfernungen, die in NINDAN gemessen wurden, vor der Einführung des Sexagesimalsystems jahrhundertelang ohne expliziten Verweis auf die Einheit aufgeschrieben worden sind.

Die Standardeinheit für *Gewichte* ist das Schekel, ca. 8 g. Größere Einheiten waren die *Mine* gleich 1` Schekel (und damit etwa ein Pfund)[6] und das GÚ, eine „Ladung“ von etwa 1`` Schekel, also etwa 30 Kilogramm. Die letzte Einheit ist gleich dem Talent aus der Bibel (wo ein Talent *Silber* gemeint ist).

Additive Operationen

Es gibt zwei additive Operationen. Eine (*kamārum*/UL.GAR/GAR.GAR) kann, wie wir bereits gesehen haben, mit „*a* und *b* anhäufen“ übersetzt werden , die andere (*waṣābum*/DAḪ) als „*j* zu *S* hinzufügen“. Hinzufügen ist eine konkrete Operation, welche die Identität von *S* bewahrt. Um zu verstehen, was damit gemeint ist, könnten wir an „mein“ Guthaben *S* bei einer Bank denken; addiert man die Zinsen *j* (im Babylonischen *ṣibtum* genannt, das „Hinzugefügte“, ein Substantiv, das vom Verb *waṣābum* abgeleitet ist), dann ändert dies nicht dessen Identität als *mein* Guthaben. Wenn eine geometrische Operation *j* zu *S* „hinzufügt“, dann bleibt *S* immer an seinem Platz, und *j* wird, wenn nötig, bewegt.

„Anhäufen“ mag dagegen die Addition abstrakter Zahlen bezeichnen. Daher hindert einen nichts daran, eine Fläche und eine Länge (also deren Maßzahlen) „anzuhäufen“. Allerdings werden auch oft Größen angehäuft, die eine konkrete Addition zulassen würden.

Die Summe, die aus einem „Hinzufügen“ resultiert, hat keinen besonderen Namen: tatsächlich erschafft diese Operation nichts Neues. Andererseits hat die Summe beim Anhäufen, wo beide Summanden in die Summe absorbiert werden, einen Namen (*nakmartum*, abgeleitet von *kamārum*, „anhäufen“), den wir als „Haufen“ übersetzen können. In einem Text, wo die beiden Summanden unterschieden bleiben, wird der Plural benutzt (*kimrātum*, ebenfalls von *kamārum* abgeleitet); wir können dies als „die angehäuften Dinge“ übersetzen (AO 8862 #2, übersetzt in Kapitel 4, Seite 66).

Subtraktive Operationen

Es gibt auch zwei subtraktive Operationen. Die eine, nämlich (*nasāḫum*/ZI) „von *B* reiße *a* heraus“, ist die Umkehroperation von „hinzufügen“; es ist eine konkrete Operation, bei der angenommen ist, dass *a* ein Teil von *B* ist. Die andere ist ein Vergleich, den man in der Form „*A* über *B* geht *d* hinaus“ (eine holprige Phrase, die aber die babylonische Redewendung genau wiedergibt). Auch dies ist eine konkrete Operation, die benutzt wird, um zwei Größen zu vergleichen, bei welchen die kleinere kein Teil der größeren ist. Manchmal wird der Vergleich, wohl aus stilistischen oder anderen Gründen, andersherum gemacht, als eine Beobachtung der Form, *B* verfehle *A* um *d* (in Fußnote 4, Seite 53 wird ein Beispiel diskutiert).

[6] Wir sollten nicht ausschließen, dass die Babylonier die Mine als Standardeinheit betrachteten, oder dass sie beide Möglichkeiten zuließen.

Der Unterschied bei der ersten Subtraktion heißt „der Rest“ (*šapiltum*, wörtlicher „das Verringerte“). Bei der zweiten Subtraktion wird der Überschuss als das „darüber Hinausgehende“ (*watartum*/DIRIG) bezeichnet.

Es gibt diverse Synonyme oder Fast-Synonyme für „herausreißen“. Wir werden davon „abschneiden“ (*ḫarāṣum*) (AO 8862 #2, Seite 66) und „zum Verschwinden bringen“ (*šutbûm*) (VAT 7532, Seite 71) kennenlernen.

Multiplikationen

Vier verschiedene Operationen sind traditionell als Multiplikationen interpretiert worden.

Die erste Version taucht auf altbabylonischen Tafeln auf, welche das Gegenstück des kleinen Einmaleins enthalten. Der sumerische Ausdruck (A.RÁ, abgeleitet vom sumerischen Verb RÁ, „gehen“) kann als „Schritte von“ übersetzt werden. Die Tabelle der Vielfachen von 6 beispielsweise verläuft so:

1 Schritt von 6 ist 6
2 Schritte von 6 sind 12
3 Schritte von 6 sind 18
…

Drei der Texte, auf die wir unten eingehen werden (TMS VII #2, Seite 39, TMS IX #3, Seite 63, und TMS VIII #1, Seite 85) benutzen ebenso das akkadische Verb für „gehen“ (*alākum*) um die Wiederholung einer Operation anzuzeigen: die beiden ersten wiederholen n Mal eine Größe s, mit dem Ergebnis $n \cdot s$ (TMS VII #2, Zeile 18; TMS IX #3, Zeile 21); TMS VIII #1 Zeile 1 fügt n Mal eine Größe s n zu einer anderen Größe A hinzu, mit dem Ergebnis $A + n \cdot s$.

Die zweite „Multiplikation“ ist durch das Verb „erhöhen“ (*našûm*/ÍL/NIM) gekennzeichnet. Dieser Ausdruck scheint zuerst für die Berechnung von Volumina benutzt worden zu sein: Um das Volumen eines Prismas mit Grundfläche G SAR und Höhe h KÙŠ zu berechnen, „erhöht“ man die Grundfläche mit der Standardhöhe 1 KÙŠ zur wirklichen Höhe h. Später wurde dieser Ausdruck analog für alle Bestimmungen einer konkreten Größe durch Multiplikation benutzt. Dagegen bezeichnet „Schritte von“ die Multiplikation einer abstrakten Zahl mit einer anderen abstrakten Zahl.

Die dritte Multiplikation (*šutakūlum*/GU$_7$.GU$_7$), „p und q enthalten lassen“ (gemeint ist, dass die Seiten p und q dann ein Rechteck bilden)[7], ist keine wirkliche Multiplikation. Sie betrifft immer die Strecken p und q, und „lass p und q enthalten“ bedeutet, aus diesen Seiten ein Rechteck mit den Seiten p und q zu bilden. Weil p und q ebenso wie die Fläche A des Rechtecks messbar sind, geben fast

[7] Die gebräuchliche Verbform wäre ein Kausativ-Reziprokativ. Gelegentlich ist der gebrauchte Ausdruck aber „Lass p zusammen mit q enthalten“, was die reziprokative Interpretation auszuschließen scheint.

alle Texte den numerischen Wert der Fläche A sofort nach der Beschreibung der Operation – beispielsweise „lass 5 und 5 enthalten: 25" – ohne die Multiplikation von 5 mit 5 explizit zu erwähnen. Es gibt aber Texte, welche die Multiplikation extra als „p Schritte von q" erwähnen, oder bemerken, dass „lass enthalten" eine Fläche produziert; beide Möglichkeiten tauchen in AO 8862 #2 (Seite 66) auf. Wenn ein Rechteck bereits existiert, dann wird dessen Fläche durch „erhöhen" bestimmt, ebenso wie die Fläche eines Dreiecks oder eines Trapezes. Im Folgenden werden wir das Rechteck, das von den Strecken p und q gehalten wird, mit dem Symbol ▭(p, q) bezeichnen, während □(a) für das Quadrat, das die Seite a „zusammen mit sich selbst hält". In beiden Fällen steht das Symbol sowohl für die Figur als auch für ihren Flächeninhalt; dies stimmt mit der Mehrdeutigkeit überein, der im Konzept von „Fläche" enthalten ist. Die entsprechende numerische Multiplikation wird symbolisch als $p{\times}q$ und $a{\times}a$ notiert.

Die letzte Multiplikation (*eṣēpum*) ist ebenfalls keine wirkliche numerische Multiplikation. „Wiederholen" oder „Wiederholen bis n" (wo n eine ganze Zahl ist, klein genug, um sie sich vorzustellen, nämlich höchstens 9) steht für eine „physikalische" Ver-n-fachung, zum Beispiel die Verdopplung eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b zu einem Rechteck ▭(a, b).

Division

Das Problem „Was muss ich zu d erhöhen um P zu erhalten?" ist eine *Divisionsaufgabe* mit der Antwort $P \div d$. Offenbar kannten die altbabylonischen Rechner solche Aufgaben sehr gut. Diese tauchten in ihrer „Algebra" (wir werden unten viele Beispiele dafür sehen) ebenso auf wie beim praktischen Planen: Ein Arbeiter kann an einem Tag N NINDAN eines Bewässerungskanals graben; wie viele Arbeiter braucht man, um 30 NINDAN in 4 Tagen zu graben? In diesem Beispiel taucht das Problem zwei Mal auf; das Ergebnis ist $(30 \div 4) \div N$. Aber Division war für die Babylonier keine eigene *Operation*, sondern nur ein besonderer Typ eines Problems.

Um 30 durch 4 zu teilen, benutzten sie eine Tafel (siehe Tabelle 1.1), aus der sie, falls sie die Tafeln nicht auf der Schreiberschule[8] auswendig gelernt hatten, ablesen konnten, dass IGI 4 gleich $15'$ ist; danach „erhöhten" sie $15'$ auf 30

[8] Wenn wir von einer „Schule" im babylonischen Kontext sprechen, dann müssen wir uns der Tatsache bewusst sein, dass wir Schulen nur aus Texten kennen. Kein Raum ist von Archäologen jemals als Schulzimmer identifiziert worden (was man zeitweilig einmal für ein Schulzimmer gehalten hat, hat sich später als Lagerraum herausgestellt). Wir wissen also nicht, ob die Schreiber im Palast oder Tempelschulen unterrichtet wurden, oder Schreiber-Lehrer in ihren privaten Häusern jeweils ein paar Schüler ausbildeten. Wahrscheinlich wurden viele von Privatlehrern unterrichtet. Die große Zahl an fast identischen Kopien von Reziprokentafeln, die zum Zwecke des Auswendiglernens erstellt wurden, zeigen aber, dass künftige Schreiber nicht (oder nicht allein) Lehrlinge eines Schreibers waren, sondern nach einem genau definierten Lehrplan unterrichtet wurden. Dies legen auch andere Quellen nahe.

(auch dafür existierten Tabellen, die in den Schreiberschulen auswendig gelernt wurden) und erhielten 7°30′.[9]

von 1, dessen 2/3	40	27, dessen IGI	2 13 20
dessen Hälfte	30	30, dessen IGI	2
3, dessen IGI	20	32, dessen IGI	1 52 30
4, dessen IGI	15	36, dessen IGI	1 40
5, dessen IGI	12	40, dessen IGI	1 30
6, dessen IGI	10	45, dessen IGI	1 20
8, dessen IGI	7 30	48, dessen IGI	1 15
9, dessen IGI	6 40	50, dessen IGI	1 12
10, dessen IGI	6	54, dessen IGI	1 6 40
12, dessen IGI	5	1, dessen IGI	1
15, dessen IGI	4	1 4, dessen IGI	56 15
16, dessen IGI	3 45	1 12, dessen IGI	50
18, dessen IGI	3 20	1 15, dessen IGI	48
20, dessen IGI	3	1 20, dessen IGI	45
24, dessen IGI	2 30	1 21, dessen IGI	44 26 40
25, dessen IGI	2 24		

Tabelle 1.1: Übersetzung der altbabylonischen Reziproken-Tafel (IGI).

In erster Linie steht IGI n für *die Reziproke von n*, die man der Tabelle entnehmen oder zumindest leicht damit finden kann, nicht für die Zahl $\frac{1}{n}$ in einem abstrakten Sinn. Auf diese Art lösten die Babylonier das Problem $P \div d$ durch eine Multiplikation $P \cdot \frac{1}{d}$ *soweit dies möglich war*.

Allerdings war dies nur möglich, falls n in der IGI-Tafel auftauchte. Zum einen war dafür notwendig, dass n eine „reguläre Zahl“ ist, dass also $\frac{1}{n}$ als „endlicher Sexagesimalbruch“ geschrieben werden kann.[10] Von diesen unendlich vielen Zahlen wurden allerdings nur eine kleine Anzahl auf den Tafeln gefunden, in

[9]Es erscheint seltsam, dass die Multiplikation von IGI 4 mit 30 durch „Erhöhen“ ausgeführt wurde. Geht es hier nicht um ein Produkt einer Zahl mit einer anderen? Nicht notwendig: der Ausdruck im Text, wo IGI 4 gesucht ist, zeigt, dass es „abgespalten“ wird. Die Idee ist also ein Aufteilen in 4 Teile, von denen einer abgespalten wird. Es sieht so aus, dass das, was ursprünglich abgespalten wurde (zu den Zeiten, als das Sexagesimalsystem entwickelt wurde), eine Länge war – nämlich 1` [NINDAN] , nicht 1 [NINDAN]. Diese Vorstellung aus den Zeiten von Ur-III war in der altbabylonischen Epoche sicherlich vergessen; aber die terminologische Gewohnheit hatte überlebt.

[10]Außerdem versteht es sich von selbst, dass n selbst in dieser Form geschrieben werden kann. Man überzeugt sich leicht davon, dass alle „reguläre Zahlen“ in der Form $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ geschrieben werden können, wobei p, q und r ganze Zahlen sind. 2, 3 und 5 sind in der Tat die einzigen Primzahlen, welche die Basis 60 teilen. Die „regulären Zahlen“ in unserem Dezimalsystem lassen sich analog in der Form $2^p \cdot 5^q$ schreiben, und 2 und 5 sind die einzigen Primteiler von 10.

der Regel um die 30 (oft wurden etwa 1 12, 1 15 und 1 20 „auf der linken Seite" ausgelassen, weil sie schon „auf der rechten Seite" auftauchen).

Für die üblichen Rechnungen hat dies in der Regel ausgereicht. Man hat die technischen Konstanten – etwa der Betrag an Erde, den ein Arbeiter an einem Tag ausgraben konnte – tatsächlich als einfache reguläre Zahlen gewählt. Die Lösung „algebraischer" Probleme führen andererseits oft auf Divisionen durch einen nicht regulären Divisor d. In solchen Fällen liest man in den Texten „was soll ich zu d setzen, das mir A gibt?", unmittelbar gefolgt von der Antwort: „Setze Q, A gibt es dir."[11] Dafür gibt es eine natürliche Erklärung: Diese Aufgaben wurden rückwärts aus den bekannten Ergebnissen konstruiert. Divisoren waren also immer Teiler, und der Lehrer, der eine Aufgabe konstruierte, kannte sowohl die Antwort als auch das Ergebnis der auftretenden Divisionen.

Halbieren

$\frac{1}{2}$ kann ein Bruch wie jeder andere sein: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, usw. Diese Art der Hälfte, falls es die *Hälfte von etwas* und nicht einfach ein Bruch ist. wird durch Erhöhen auf $30'$ gefunden. Ähnlich erhält man $\frac{1}{3}$ durch Erhöhen auf $20'$ usw. Diese Art der Hälfte taucht in AO 8862 #2 (Seite 66) auf.

Aber $\frac{1}{2}$ (in diesem Fall notwendig die Hälfte von etwas) kann auch eine „natürliche" Hälfte sein, also eine „eindeutige" Hälfte. Der Radius eines Kreises ist etwa die „natürliche" Hälfte des Durchmessers: kein anderer Teil kann dieselbe Rolle spielen. Ganz ähnlich ist es auch genau die Hälfte der Grundseite eines Dreiecks, welche zur Höhe erhöht werden muss, um die Fläche zu erhalten, wie man an der Figur ablesen kann, welche gewöhnlich zum Beweis der Formel benutzt wird (siehe Abb. 1.2).

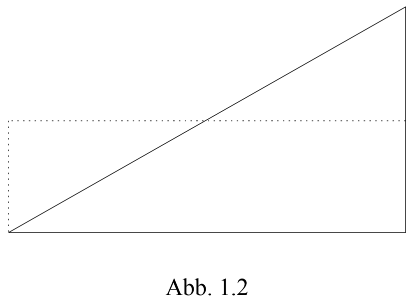


Abb. 1.2

[11] Der Ausdruck „setzen zu" bezieht sich auf die Art und Weise, wie einfache Multiplikationsaufgaben in der Schreiberschule gestellt wurden: Die beiden Faktoren wurden übereinander geschrieben (die zweite wurde zur ersten „gesetzt"), und das Ergebnis wurde unter die beiden Faktoren geschrieben.

Diese „natürliche“ Hälfte hatte einen besonderen Namen (*bāmtum*), den wir mit „Halbe“ übersetzen können. Die Operation, welche das Halbe produziert, wurde mit dem Verb „zerbrechen“ (*ḫepûm*/GAZ) beschrieben, also dem Zerbrechen in zwei gleiche Teile. Diese Bedeutung des Wortes gehört zum spezifisch mathematischen Wortschatz; im allgemeinen Gebrauch bedeutete es das Zerbrechen in eine beliebige Anzahl von Teilen.

Quadrat und Quadratwurzel

Das Produkt $a \cdot a$ spielte keine besondere Rolle, weder als Ergebnis von „Erhöhen“ noch von „Schritte von“. Eine spezielle Bedeutung hatte lediglich das geometrische Quadrat.

Dieses geometrische Quadrat hatte allerdings einen Sonderstatus. Man konnte sicherlich „*a* und *a* enthalten machen“ oder „*a* mit sich selbst enthalten machen“; aber man konnte auch “*a* sich gegenüberstellen“ (*šutamḫurum*, von *maḫārum*, „jemanden annehmen, empfangen, willkommen heißen“). Das Quadrat als geometrische Figur war eine „Gegenüberstellung“ (*mitḫartum*, vom selben Verb).[12] Numerisch wurde der Wert mit der Seitenlänge identifiziert. Eine babylonische Gegenüberstellung *ist* also die Seite, *hat* aber eine Fläche, weswegen wir im Folgenden das Wort Gegenseite benutzen werden. Umgekehrt *ist* unser Quadrat (identifiziert mit dem Inhalt, nicht mit dem Rahmen) eine Fläche und *hat* eine Seite. Wenn der Wert einer „Gegenseite“ (verstanden als dessen Seite) gefunden wird, dann kann man von der anderen Seite, welche sie in einem Eck trifft, als sein „Gegenstück“ (*meḫrum* von *maḫārum*) bezeichnen, ein Wort, das auch für die exakte Kopie einer Tontafel benutzt wird.

Um zu sagen, dass *s* die Seite eines Quadrats mit der Fläche *Q* ist, wurde die folgende sumerische Redewendung (bereits auf Tafeln von Quadratwurzeln, die wahrscheinlich aus der Epoche Ur III stammen) benutzt: „bei *Q*, *s* ist gleich“; das sumerische Verb ist hierbei ÍB.SI$_8$. Bisweilen wird das Wort ÍB.SI$_8$ als Substantiv benutzt, und dann wird es im Folgenden als „das Gleiche“ übersetzt. In der arithmetischen Interpretation wird aus „das Gleiche“ die Quadratwurzel.

Genauso wie es Multiplikations- und Reziprokentafeln gegeben hat, gab es auch Tabellen von Quadraten und ihren „Gleichen“ Diese benutzten die Wendungen „n Schritte von n, n^2“ und „bei n^2, n ist gleich“ ($1 \leq n \leq 60$). Die Lösung „algebraischer“ Probleme jedoch führte oft auf die Bestimmung der „Gleichen“ von Zahlen, die nicht in den Tabellen aufgeführt waren. Die Babylonier besaßen eine Technik zum Auffinden von Näherungen von Quadratwurzeln von Zahlen, die keine Quadratzahlen waren – aber diese *waren* Näherungen. Die Texte geben stattdessen den genauen Wert, und zwar wieder, weil die Autoren das Problem

[12] Genauer steht das babylonische Wort für eine „Situation, bei welcher sich Gleiche gegenüberstehen“.

rückwärts konstruiert hatten und daher die Lösung kannten. Einige Texte enthalten Rechenfehler, aber zum Schluss geben sie die Quadratwurzel der Zahl, die sie hätten berechnen *sollen* und nicht von der Zahl, die sie erhalten hatten! Ein Beispiel dafür ist in der Fußnote 7, Seite 79 zu finden.

Die Texte und ihre Übersetzungen

Die Texte, die im Folgenden präsentiert und erläutert werden, sind in Babylonisch geschrieben, der Sprache, die in Babylonien während der altbabylonischen Epoche gesprochen wurde. Im Wesentlichen sind sie in (phonetischer) Silbenschrift notiert, wie sie in *Kursivschrift* auf Seite 14 erscheinen. Alle Texte benutzen auch Logogramme, die ein ganzes Wort darstellen, aber nicht die grammatische Form oder die Aussprache (obwohl manchmal grammatikalische Zusätze gegeben werden). Diese Logogramme sind in KAPITÄLCHEN gesetzt (siehe den Kasten „Keilschrift" auf Seite 12). Bis auf seltene Ausnahmen sind diese Logogramme dem Sumerischen entlehnt, ehemals die Hauptsprache Mesopotamiens, die als Sprache der Wissenschaft (vergleichbar mit Latein in der europäischen Neuzeit) bis zum ersten Jahrhundert n. Chr. überlebt hat. Einige dieser Logogramme entsprechen technischen Ausdrücken die bereits von sumerischen Schreibern benutzt worden sind; ein Beispiel dafür ist IGI. Andere Logogramme dienten als Abkürzungen für babylonische Wörter, mehr oder weniger wie das englische „viz", die Abkürzung für den lateinischen Ausdruck „videlicet" in mittelalterlichen Manuskripten, das aber als *namely* ausgesprochen wird.

Wir wir bereits erwähnt haben, stammen unsere Texte aus der zweiten Hälfte der altbabylonischen Epoche, wie man an der Handschrift und der Sprache erkennen kann. Leider ist es oft unmöglich, Genaueres zu sagen, weil fast alle dieser Tafeln aus Raubgrabungen stammen und von Museen auf dem Antiquitätenmarkt in Bagdad oder Europa gekauft worden sind.

Wir haben keine direkten Informationen über die Autoren der Texte. Sie stellen sich nie vor, und keine andere Quelle spricht von ihnen. Da sie die Schrift beherrschen (und zwar besser als nur die Grundlagen der Silbenschrift, die auch manche Laien schreiben konnten), müssen sie zur Kategorie der Schreiber gehört haben. Weil sie auch rechnen konnten, können wir sie als „Rechner" bezeichnen; und weil das Format der Texte sich auf didaktische Situationen bezieht, dürfen wir annehmen, dass sie Lehrer an Schreiberschulen[13] gewesen sind.

Alle diese Informationen basieren auf indirekten Argumenten. Vermutlich hat die Mehrzahl der Schreiber nie Mathematik jenseits einfacher Berechnungen getrieben; wahrscheinlich waren nur sehr wenige auf dem hohen mathematischen

[13] Was das Problem der „Schulen" angeht, verweisen wir auf die Fußnote 8, Seite 23, und Seite 107.

Niveau unserer Texte ausgebildet. Es ist sogar wahrscheinlich, dass nur eine Minderheit der Lehrer solche Dinge *unterrichtet* hat. Folglich, und weil mehrere Stimmen aus diesen Texten sprechen (siehe Seite 38), ist es oft besser anzunehmen, dass es der Text selbst ist, der „gibt“, „findet“ und „berechnet“.

Die Übersetzungen in diesem Buch, die alle auf Grundlage der englischen Übersetzungen des Autors gemacht worden sind, unterscheiden nicht zwischen Wörtern, die in Silbenschrift oder in Logogrammen geschrieben sind (Leser, die dies wissen möchten, müssen die Transliterationen in Anhang B konsultieren). Bis auf diese Ausnahme sind sie „konform,“ also in der Struktur der Redewendungen sehr nahe am Original[14]; außerdem benutzt die Übersetzung verschiedene Wörter für solche, die auch im Akkadischen verschieden sind und dieselbe Übersetzung für gleiche Wörter, es sei denn, dass diese in offensichtlich verschiedener Funktion gebraucht werden (vgl. die Liste der „Standardübersetzungen“ auf Seite 135). So weit wie möglich respektiert die Übersetzung die nicht-technischen Bedeutungen der babylonischen Wörter (beispielsweise „zerbrechen“ statt „halbieren“) und die Beziehung zwischen Ausdrücken (etwa „sich selbst gegenüberstehen“ und „Gegenseite“).

Damit will nicht gesagt sein, dass die Babylonier keine technische Terminologie über ihre Umgangssprache hinaus besaßen; aber es ist wichtig, dass die technische Bedeutung eines Wortes aus dem Gebrauch in altbabylonischen Texten gelernt und nicht von unserer modernen Terminologie übernommen wird (mit dem Risiko, dass diese Übernahme schlecht ist, wie es oft vorgekommen ist).

Die Struktur der babylonischen Sprache ist sehr verschieden von der Struktur des Deutschen; deswegen sind die konformen Übersetzungen weit davon entfernt, elegant zu sein. Aber das Prinzip der Konformität hat den zusätzlichen Vorteil, dass Leser, die das möchten, dem Original in Anhang B Zeile für Zeile folgen können (die bibliographischen Bemerkungen auf Seite 155 gibt an, wo die wenigen Texte, die im Anhang nicht wiedergegeben sind, veröffentlicht worden sind.

Um vollkommen unleserliche Übersetzungen zu vermeiden, wird das Prinzip der Konformität nicht auf die Spitze getrieben. Im Deutschen muss man wählen, ob man einem Substantiv einen bestimmten oder einen unbestimmten Artikel voransetzt; im Babylonischen, ebenso wie im Lateinischen und Russischen, ist dies nicht der Fall. Auch gibt es im Altbabylonischen keine Satzzeichen (außer Zeilenumbruch und ein Partikel, den wir mit „:“ wiedergeben), und die absolute Größenordnung von Zahlen im Sexagesimalsystem wird nicht angezeigt; mi-

[14] Im Akkadischen steht das Verb am Ende des Satzes. Diese Struktur erlaubt es, eine Zahl ein einziges Mal zu schreiben. zuerst als das Ergebnis einer Rechnung und dann als das Objekt einer weiteren Rechnung. Um diese Architektur des Texts (Zahl/Operation: Ergebnis/neue Operation) zu bewahren wird die Stellung des Verbs am Ende in den Übersetzungen respektiert, auch wenn es ungrammatisch ist. Die Leser werden sich daran gewöhnen müssen.

nimale Interpunktion sowie Angaben der Größenordnungen (′, ` und °) wurden hinzugefügt. Zahlen, die im Original als Zahlen geschrieben sind, wurden mit arabischen Ziffern übersetzt, während Zahlen, die durch Wörter (oder Logogramme) gegeben sind, als Wörter übersetzt wurden; gemischte Schreibweisen erscheinen gemischt (z.B. „die 17te“ oder sogar „die 3te“ für die dritte).

Beschriftete Tontafeln überleben besser als Papier, insbesondere wenn die Stadt zusammen mit ihren Büchereien und Archiven abbrennt, aber auch wenn sie als Müll weggeworfen werden. Dennoch sind fast alle Tafeln, auf die wir Bezug nehmen, beschädigt. Auf der anderen Seite ist die Sprache der mathematischen texte extrem gleichförmig mit vielen Wiederholungen, und es ist daher oft möglich, die beschädigten Passagen aus parallelen Passagen derselben Tafel zu rekonstruieren. Um das Lesen zu erleichtern sind die Rekonstruktionen in den Übersetzungen nur angedeutet (als ¿…?) wenn die genauen Wörter nicht vollkommen sicher sind. Manchmal hat ein Schreiber ein Wort oder eine Passage beim Schreiben einer Tafel ausgelassen, die aber aus parallelen Passagen derselben oder einer verwandten Tafel wieder hergestellt werden kann. In solchen Fällen erscheint der wiederhergestellte Text als ⟨…⟩, während {…} für eine Wiederholung oder fälschlich geschriebene Zeichen steht (die Originaledition der Texte gibt die vollständige Information über zerstörte und unleserliche Passagen, sowie von Schreibern gemachte Fehler. Erklärende Wörter, die im Text eingefügt sind, erscheinen zwischen runden Klammern (…).

Tontafeln haben Namen, meist Museumsnummern. Das kleine Problem, das wir oben zitiert haben, ist das erste auf der Tafel BM 13901, also Tafel #13901 in der Sammlung der Keilschrifttafeln des Britischen Museums. Andere Namen beginnen mit AO (Antiker Orient, Louvre, Paris), VAT (Vorderasiatische Texte, Berlin) oder YBC (Yale Babylonian Collection). TMS bezieht sich auf die Edition *Textes mathématiques de Suse*, einer Sammlung des Louvre von Tafeln aus Susa, einer iranischen Grabungsstätte in der östlichen Nachbarschaft von Babylon.

Die Tafeln sind zum großen Teil auf beiden Seiten beschriftet (auf Vorderseite (abgekürzt mit Vs.) und Rückseite (Rs.), manchmal in mehreren Spalten, und bisweilen auch auf der Kante. Die Texte sind in Zeilen eingeteilt, die von links nach rechts gelesen werden. Den Originaleditionen folgend geben die Übersetzungen die Zeilennummern und, falls vorhanden, die Vorderseite, Rückseite und Spalte.

2. Kapitel
Techniken für Grad 1

Unser Hauptthema wird die Lösung quadratischer Gleichungen in der altbabylonischen Mathematik sein.[1] Weil die Lösung quadratischer Gleichung aber oft Umformungen linearer Probleme erfordert, werden wir mit einem Text beginnen, der erklärt, wie Gleichungen ersten Grades umgeformt und gelöst wurden.

TMS XVI #1

1. Den 4ten Teil der Breite habe ich von der Länge und der Breite herausgerissen: 45′. Du, 45′
2. auf 4 erhöhe, 3 siehst Du. 3, was ist das? 4 und 1 setze,
3. 50′ und 5′, zum Herausreißen, setze. 5′ auf 4 erhöhe, 1 Breite. 20′ auf 4 erhöhe,
4. 1°20′ ⟨siehst⟩ Du,[2] 4 Breiten. 30′ auf 4 erhöhe, 2 ⟨siehst⟩ Du, 4 Längen. 20′, 1 Breite zum Herausreißen,
5. von 1°20′, 4 Breiten, reiße heraus, 1 siehst Du. 2, die Länge, und 1, 3 Breiten, häufe an, 3 siehst Du.
6. IGI 4 spalte ab, 15′ siehst Du. 15′ auf 2, Längen, erhöhe, 30′ ⟨siehst⟩ Du, 30′ die Länge.
7. 15′ auf 1 erhöhe, 15′ der Beitrag der Breite. 30′ und 15′ lasse enthalten.
8. Weil „Das 4tel der Breite, zum Herausreißen“, wie man Dir gesagt hat, von 4, 1 reiße heraus, 3 siehst Du.
9. IGI 4 ⟨spalte⟩ ab, 15′ siehst Du, 15′ auf 3 erhöhe, 45′ ⟨siehst⟩ Du, 45′ so viel wie Breiten.

---

[1] Wie im Falle der „Algebra“ werden wir vorläufig so tun, als wüssten wir, was mit „Gleichung“ gemeint ist. Eine Untersuchung des vorliegenden Texts wird uns bald erlauben zu verstehen, in welchem Sinn die altbabylonischen Probleme als Gleichungen aufgefasst werden können.

[2] „Du ⟨siehst⟩“ ist die Übersetzung von *ta-*⟨*mar*⟩. Der Schreiber lässt also kein Wort aus, sondern benutzt die erste Silbe, (welche die Information über das grammatische Geschlecht enthält) als Logogramm für das ganze Wort. Dies ist in den Texten aus Susa eine übliche Praxis und illustriert, dass die Benutzung von Logogrammen mit der Textart verbunden ist: nur in mathematischen Texten können wir relativ sicher sein, dass kein anderes Verb, das mit der Silbe *ta* beginnt, an dieser Stelle stehen kann.

10. 1, so viel wie Längen, setze. 20, die wahre Breite nimm, 20 auf 1′ erhöhe, 20′ siehst Du.
11. 20′ auf 45′ erhöhe, 15′ siehst Du. 15′ von $^{30}{}_{15'}$ reiße heraus,
12. 30′ siehst Du, 30′ die Länge.

Dieser Text unterscheidet sich im Charakter von der großen Mehrheit altbabylonischer mathematischer Texte: er stellt kein Problem auf und löst keines. Stattdessen gibt er eine didaktische Erklärung der Konzepte und Prozeduren, welche dem Verständnis und der Vereinfachung eines bestimmten oft vorkommenden Gleichungstyps dienen.

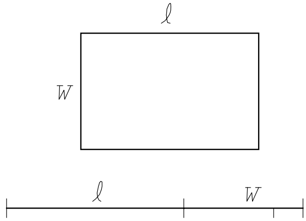


Abb. 2.1: Die Geometrie von TMS XVI #1.

Obwohl viele der Ausdrücke, die in der Übersetzung auftauchen, schon im Abschnitt „Eine neue Interpretation“ erklärt wurden, ist es wohl hilfreich, den Text Wort für Wort durchzugehen.

Zeile 1 formuliert eine Gleichung: *Das 4tel der Breite, von der Länge und der Breite habe ich herausgerissen, 45′*.

Die Gleichung dreht sich also um eine Länge und eine Breite. Dies bedeutet, dass das Objekt ein Rechteck ist – vom altbabylonischen Standpunkt aus ist das Rechteck die einfachste Figur, die nur von einer Länge und einer Breite festgelegt ist.[3] Was die Notation der Zahlen angeht, siehe den Kasten „Das Sexagesimal-

[3] Ein rechtwinkliges Dreieck ist ebenso durch eine Länge und eine Breite festgelegt (die beiden Katheten), und diese beiden Größen reichen aus, um es festzulegen (die dritte Seite, wenn sie denn erscheint, kann dann „die lange Seite“ sein). Aber ein Dreieck wird immer als solches eingeführt. Wenn es nicht praktisch rechtwinklig ist, gibt der Text eine Skizze.

Das Wort „praktisch“ ist zu beachten: Die Babylonier hatten kein Konzept eines Winkels als einer messbaren Größe, also nichts, was unserem „Winkel von 78°“ entsprechen würde. Aber sie unterschieden klar zwischen „guten“ und „schlechten“ Winkeln – wie verwenden hier das Wortspiel, dass das Gegenteil eines *rechten Winkels* ein *falscher Winkel* war.

Ein *rechter Winkel* ist einer, dessen Schenkel eine Fläche bestimmen – seien es die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, die einen rechten Winkel bilden, die Seiten eines Rechtecks, oder die Höhe und die mittlere Grundseite eines rechtwinkligen Trapezes.

system“ auf Seite 16. Bezeichnet ℓ die Länge und w die Breite, dann können wir die Gleichung in Symbolen so ausdrücken:

$$(\ell + w) - \tfrac{1}{4}w = 45'.$$

Etwas ist jedoch bei dieser Übersetzung verloren gegangen. Tatsächlich ist *die Länge und die Breite* ein verkürzter Ausdruck für das „Anhäufen“, die symmetrische Addition der beiden Größen (oder deren Maßzahlen; siehe Seite 21). Die Länge wird also nicht um die Breite erweitert, vielmehr werden die beiden Größen gleichberechtigt addiert, unabhängig vom Rechteck. Die einzige Rolle des Rechtecks ist es, seine Seiten als unbekannte Größen zur Verfügung zu stellen (siehe Abb. 2.1).

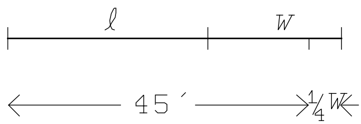


Abb. 2.2: „Die Gleichung” von TMS XVI #1.

Sind die Länge und die Breite einmal „angehäuft“, ist es möglich, $\frac{1}{4}w$ „herauszureißen“, weil diese Größe ein Teil der Breite und damit auch der Summe ist. Wir erinnern daran, dass „herausreißen“ die Umkehroperation von „hinzufügen“ ist, also die Entfernung einer Größe von einer anderen, von welche sie ein Teil ist (siehe Abb. 2.2).

Zeile 1 zeigt die Natur einer babylonischen Gleichung: eine Kombination messbarer Größen (oft, wie hier, geometrische Größen), für welche das Gesamtmaß gegeben ist. Alternativ sagt der Text, das Maß einer Kombination sei gleich der einer anderen, oder um wieviel sie die andere übertrifft. Dies ist nicht der Typ von Gleichungen, die in der heutigen Schulmathematik unterrichtet werden, bei denen es normalerweise um reine Zahlen geht – aber diese Gleichungen ähneln denjenigen, mit welchen Ingenieure, Physiker oder Wirtschaftswissenschaftler arbeiten. Im babylonischen Kontext von „Gleichungen“ zu sprechen ist also alles andere als anachronistisch.

Als nächstes fordern Zeilen 1 und 2 den Schüler auf, die $45'$ (auf der rechten Seite der Version in moderner Symbolsprache) mit 4 zu multiplizieren: *Du, 45′ auf 4 erhöhe, 3 siehst Du.* „Erhöhen“ ist, wie wir auf Seite 15 gelernt haben, die Multiplikation einer konkreten Größe – hier die Zahl, welche eine zusammengesetzte Strecke darstellt. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist 3, und der Text stellt eine rhetorische Frage: *3, was ist das?*

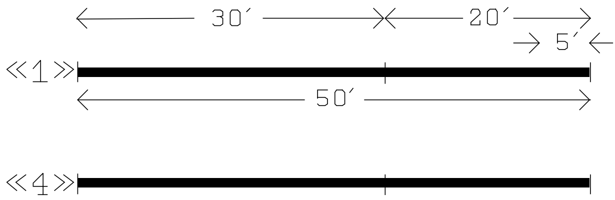


Abb. 2.3: Interpretation von TMS XVI, Zeilen 1–3.

Die Antwort zu dieser Frage findet man in Zeilen 2–5. *4 und 1 setze*: Zuerst soll der Schüler 4 und 1 „setzen". Etwas zu „setzen" bedeutet, dem Objekt eine materielle Darstellung zu geben; hier soll die Zahl vermutlich an eine geeignete Stelle in der Figur geschrieben werden (Abb. 2.3 ist eine mögliche Interpretation).

Die Zahl „1" entspricht der Tatsache, dass die Zahl 45′, die in der ursprünglichen Gleichung rechts steht, ebenso wie die Größen auf der linken Seite alle ein einziges Mal benutzt werden. Die Zahl „4" wird „gesetzt"; weshalb werden wir gleich sehen, wenn wir erklären was passiert, wenn 45′ und die entsprechenden Größen 4 Mal genommen werden.

50′ und 5′, zum Herausreißen, setze: die Zahlen 50′ und 5′ werden auf das Niveau „1" des Diagramms gesetzt. Dies sollte uns überraschen: es zeigt, dass der Schüler bereits wissen muss, dass die Breite 20′ und die Länge 30′ ist. Wüsste er das nicht, dann könnte er nicht verstehen, dass $\ell + w = 50'$ und dass $\frac{1}{4}w$ (das, was herausgerissen werden soll) 5′ ist. Um der Klarheit willen sind in unserem Diagramm nicht nur die Zahlen 50′ und 5′, sondern auch 30′ und 20′ auf Niveau „1" eingezeichnet, obwohl der Text nicht von ihnen spricht.

Die Zeilen 3–5 zeigen noch überzeugender, dass der Text voraussetzt, dass der Schüler die Lösung des Problems (das also daher nur ein Quasi-Problem ist) bereits kennt. Das Ziel des Textes ist daher nicht, eine Lösung zu finden. Wie bereits gesagt, soll der Text die konzepte und die Verfahren erklären, um die Gleichung zu verstehen und reduzieren zu können.

Diese Zeilen erklären, warum und wie die Ausgangsgleichung

$$(\ell + w) - \frac{1}{4}w = 45'$$

durch Multiplikation mit 4 in die Gleichung

$$4\ell + (4-1)w = 3$$

transformiert wird.

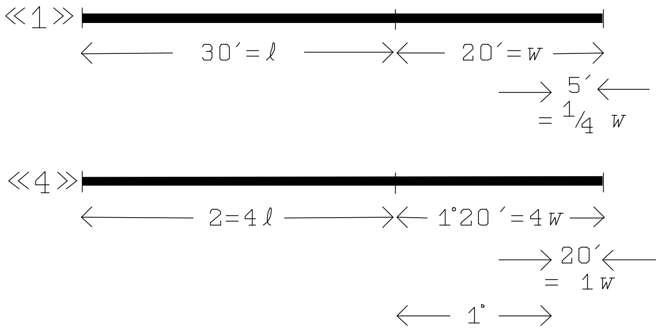


Abb. 2.4: Interpretation von TMS XVI, Zeilen 3–5.

Diese Rechnung kann in Abb. 2.4 verfolgt werden, wo die Zahlen auf dem Niveau „1“ mit 4 multipliziert werden und so diejenigen auf dem Niveau „4“ ergeben:

- *5′ auf 4 erhöhe, 1 Breite*: 5′, also $\frac{1}{4}$ der Breite, wird mit 4 multipliziert, was 20′ ergibt, also eine Breite.
- *20′ auf 4 erhöhe, 1°20′ ⟨siehst⟩ Du, 4 Breiten*: 20′, also 1 Breite, wird mit 4 multipliziert, was´ 1°20′ ergibt, also 4 Breiten.
- *30′ auf 4 erhöhe, 2 ⟨siehst⟩ Du, 4 Längen*: 30′, also 1 Länge, wird mit 4 multipliziert. Dies ergibt 2, also 4 Längen.

Nachdem alle Zahlen auf dem Niveau „1“ mit 4 multipliziert worden sind und wir nun die entsprechenden Zahlen auf Niveau „4“ kennen, sagt der Text (Zeilen 4 und 5), was bleibt, wenn 1 Breite von den 4 Breiten eliminiert wird: *20′, 1 Breite, zum Herausreißen, von 1°20′, 4 Breiten, reiße aus, 1 siehst Du*

Schließlich werden die individuellen Komponenten der Summe $4\ell + (4-1)$ w identifiziert, wie in Abb. 2.5 gezeigt wird: *2, die Längen, und 1, 3 Breiten, häufe an, 3 siehst Du*: 2, also 4 Längen, und 1, also $(4 - 1) = 3$ Breiten, werden addiert. Dies ergibt die Zahl *3*. Wir haben jetzt die Antwort auf die Frage aus Zeile 2 gefunden: *3 siehst Du*. *3, was ist das?*

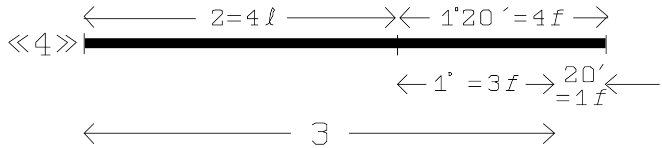


Abb. 2.5: Interpretation von TMS XVI, Zeile 5.

Aber die Lektion endet hier nicht. Während Zeilen 1–5 erklären, wie die Gleichung $(\ell + w) - \frac{1}{4}w = 45'$ in $4 \cdot \ell + (4-1) \cdot w = 3$ umgewandelt werden kann, führt das, was in Zeilen 6–10 durch eine Division durch 4 folgt, zu einer Umformung dieser Gleichung in

$$1 \cdot \ell + \frac{3}{4} \cdot w = 45'.$$

Die Babylonier haben Divisionen durch 4 als Multiplikationen mit $\frac{1}{4}$ ausgeführt. Daher sagt Zeile 6, dass $\frac{1}{4} = 15'$: *IGI 4 spalte ab, 15′ siehst Du*. IGI 4 kann in der Tabelle der IGI gefunden werden, also der Reziprokentabelle (siehe Seite 24).

Abb. 2.6 zeigt, dass dies einer Rückkehr auf das Niveau „1“ entspricht:

15′ auf 2, Längen, erhöhe, 30′ ⟨siehst⟩ Du, 30′ die Länge: 2, also 4 Längen, multipliziert mit $\frac{1}{4}$ gibt $30'$, also 1 Länge.

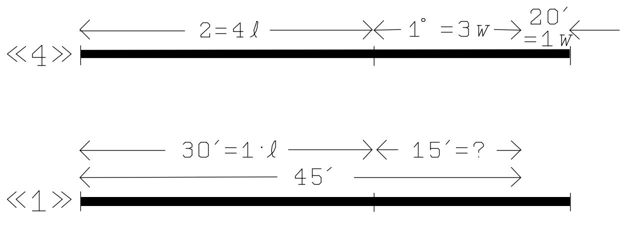


Abb. 2.6: Interpretation von TMS XVI, Zeilen 6–12.

15′ auf 1 erhöhe, 15′ der Beitrag der Breite. (Zeile 7): 1, also 3 Breiten, multipliziert mit $\frac{1}{4}$ ergibt $15'$, der Beitrag der Breite zur Summe $45'$. Die Anzahl der Breiten´, welchem dieser Beitrag entspricht, wird in Zeilen 8 und 9 bestimmt. In der Zwischenzeit werden die Beiträge der Länge und der Breite wiederholt: *30′ und 15′ halte* – eine Abkürzung für *möge Dein Kopf halten*, wie es in anderen Texten formuliert wird. Man beachte den Kontrast zur Behandlung der Zahlen 1, 4, 50′ und 5′, die zu Beginn „gesetzt“ wurden.

Der Beitrag der Breite ist also $15'$. Das Ende von Zeile 9 zeigt an, dass die Anzahl der Breiten, welche dem entsprechen – *der Koeffizient* der Breite in unserer Sprache – gleich $\frac{3}{4}$ (= $45'$) ist: *45′ so viel wie Breiten*. Das Argument dahinter ist bekannt als ein „einfacher falscher Ansatz“[4].

Zeile 8 zitiert die Aufgabenstellung des Quasi-Problems als Rechtfertigung für das Vorgehen (solche Rechtfertigungen durch Zitate sind Standard): *Weil „Das 4tel der Breite, zum Herausreißen“, wie man Dir gesagt hat*. Wir müssen also herausfinden, wie viel von der Breite bleibt, wenn $\frac{1}{4}$ entfernt wird.

Der Bequemlichkeit halber wird „gesetzt“, dass die Anzahl der Breiten 4 ist (dies ist der „falsche Ansatz“). $\frac{1}{4}$ von 4 ist 1 (der Text gibt diese Zahl ohne Rechnung). Wenn diese eliminiert wird, bleiben 3: *von 4, 1 reiße heraus, 3 siehst Du.*

Um zu sehen, welchem Teil der falsch gesetzten 4 diese 3 entspricht, multiplizieren wir mit $\frac{1}{4}$. Obwohl dies bereits in Zeile 6 gesagt wurde, wird in Zeile 9 wiederholt, dass $\frac{1}{4}$ der Zahl $15'$ entspricht: *IGI 4 ⟨spalte⟩ ab, 15′ siehst Du.*

Immer noch in Zeile 9 ergibt die Multiplikation mit 3 den Koeffizienten der Breite als $45'$ ($=\frac{3}{4}$): *15′ auf 3 erhöhe, 45′ ⟨siehst⟩ Du, 45′ so viel wie Breiten.*

Ohne Rechnung behauptet Zeile 10, dass der Koeffizient der Länge 1 ist. Wir wissen in der Tat aus Zeile 1, dass eine einzelne Länge zu den $45'$ beiträgt, ohne Addition oder Subtraktion. Wir haben daher erklärt, wie die Gleichung

$$4 \cdot \ell + (4-1) \cdot w = 3 \quad \text{in} \quad 1 \cdot \ell + \frac{3}{4} \cdot w = 45'$$

umgewandelt wird.

Der Schluss von Zeile 10 gibt uns ein kleines Rätsel: was ist der Zusammenhang zwischen der „wahren Breite“ und der Breite, die in den Gleichungen auftaucht?

Die Erklärung könnte die folgende sein: ein richtiges Feld könnte 30 [NINDAN] auf 20 [NINDAN] groß sein (ca. 180 m auf 120 m, also $\frac{1}{3}$ BÙR), aber sicherlich nicht $30'$ auf $20'$ (3 m auf 2 m). Auf der anderen Seite ist es unmöglich, ein Feld mit den Dimensionen 30×20 im Schulhof oder dem Hof des Lehrers zu zeichnen; tatsächlich ist ein Hof, der mit Sand bestreut ist, der plausibelste Träger der Zeichnungen, die beim Unterricht benutzt werden. Aber $30'$ auf $20'$ würde sehr gut passen (das wissen wir von ausgegrabenen Häusern), und diese Größenordnung ist diejenige, die normalerweise in mathematischen Aufgaben

[4] „Einfach“ deswegen, weil es auch einen „doppelten falschen Ansatz“ gibt, der zum Lösen komplexerer linearer Probleme benutzt werden kann. Dieser besteht darin, dass man zwei verschiedene Lösungen annimmt, die dann (wie in Legierungsaufgaben) so „gemischt“ werden, dass die beiden Fehler sich herausheben (in moderner Sprache läuft dies auf eine Art lineare Interpolation hinaus). Weil die Babylonier diese Technik nie benutzt haben, bezieht sich „falscher Ansatz“ im Folgenden immer auf den „einfachen falschen Ansatz“.

erscheint. Weil es keinen Unterschied beim Schreiben von 20 und 20′ gibt, ist dies nur eine mögliche Erklärung – aber eine plausible, weil keine Alternative vorhanden zu sein scheint .

Jedenfalls findet man in Zeile 11 wieder, dass die Breite 15′ beiträgt, nämlich durch Multiplikation von 20′ (der Breite) mit dem Koeffizienten 45′: *20′ auf 45′ erhöhe, 15′ siehst Du.*

Am Schluss wird der Beitrag der Breite von 45′ eliminiert, das bereits in der Form $_{30}{}^{15}$ geschrieben ist, also als die Summe von 30′ und 15′, in Übereinstimmung mit der Unterteilung, die man sich am Schluss von Zeile 7 gemerkt hat. 30′ bleibt als die Länge: *15′ von* $^{30}{}_{15'}$ *reiße heraus, 30′ siehst Du, 30′ die Länge.*

Alles in allem ist dies eine hübsche pädagogische Erklärung, die den Schüler an der Hand nimmt und ihn kreuz und quer durch das Thema „Wie man eine Gleichung ersten Grades umwandelt, und wie man versteht, was dabei vor sich geht“, führt.

Bevor wir den Text hinter uns lassen, verweilen wir noch bei den hier auftretenden Akteure, die auch in den meisten Texten, die ein Problem und das Verfahren zur Lösung beschreiben, auftreten.[5] Zum einen beschreibt eine „Stimme“ in der ersten Person Singular die Situation, die er hergestellt hat, und formuliert die Frage. Dann adressiert eine andere Stimme den Schüler und gibt im Imperativ oder in der zweiten Person Singular Präsens Anweisungen; diese Stimme kann nicht mit der ersten identisch sein, die das Problem gestellt hat, weil es diese oft in der dritten Person zitiert, als „weil er gesagt hat“.

In einem schulischen Zusammenhang könnte man sich vorstellen, dass die Stimme, welche das Problem formuliert, diejenige des Lehrers ist, und diejenige, welche den Schüler anspricht, die eines Assistenten – „edubba Texte“[6], literarische Texte über die Schule und das schulische Leben, erwähnen oft einen „älteren Bruder“, dessen Aufgabe es ist, Anweisungen zu geben. Der Ursprung des Schemas erscheint aber davon verschieden zu sein. Gewisse Texte aus dem frühen 18. Jahrhundert beginnen mit „Wenn Dich jemand fragt, ‚ich habe' …“. In diesen Texten ist der Fragesteller eine hypothetische Person die nicht zu der didaktischen Situation gehört – ein Vorwand für ein mathematisches Rätsel. Der anonyme Führer ist dann der Lehrer, ursprünglich wohl zu identifizieren mit einem Feldmessermeister, der den Lehrlingen das berufliche Handwerkszeug erklärt.

[5]Das hier vorliegende Dokument benutzt viele Logogramme ohne phonetische oder grammatikalische Ergänzungen. Es ist jedoch genügend in akkadischer Silbenschrift geschrieben, das uns erlaubt, das übliche Schema wahrzunehmen, das folglich auch auf die Übersetzung übertragen ist.

[6]Das sumerische Wort É.DUB.BA bedeutet „Tafelhaus“, also „Schule“.

TMS VII #2

Dieser Text ist ziemlich verwickelt. Wer ihn zu undurchschaubar findet, kann ihn erst überspringen und dann hierher zurückkehren, wenn er sich mit der babylonischen Denkart vertraut gemacht hat.

17. Das Viertel der Breite habe ich zur Länge hinzugefügt; dessen Siebtel
18. bin ich bis 11 gegangen, über den Haufen
19. von Länge und Breite ging es 5′ hinaus. Du, setze 4;
20. 7 setze; 11 setze; und 5′ setze.
21. 5′ auf 7 erhöhe, 35′ siehst Du.
22. 30′ und 5′ setze. 5′ auf 11 erhöhe, 55′ siehst Du.
23. 30′, 20′, und 5′, zum Herausreißen, setze. 5′ auf 4
24. erhöhe, 20′ siehst Du, 20 die Breite. 30′ auf 4 erhöhe:
25. 2 siehst Du, 2, Längen. 20′ aus 20′ reiße heraus.
26. 30′ aus 2 reiße heraus, 1°30′ setze, und 5′ zu ¿50′, dem Haufen von Länge und Breite, füge hinzu?
27. 7 auf 4, vom Viertel, erhöhe, 28 siehst Du.
28. 11, den Haufen aus 28 reiße heraus, 17 siehst Du.
29. Aus 4, vom Viertel, 1 reiße heraus, 3 siehst Du.
30. IGI 3 spalte ab, 20′ siehst Du. 20′ auf 17 erhöhe,
31. 5°40′ siehst Du, 5°40′, (für) die Länge. 20′ auf 5′, was darüber hinausgeht, erhöhe,
32. 1′40″ siehst Du, 1′40″, was zur Länge hinzugefügt werden soll. 5°40′, (für) die Länge,
33. von 11, dem Haufen, reiße heraus, 5°20′ siehst Du.
34. 1′40″ zu 5′, was darüber hinausgeht, füge hinzu, 6′40″ siehst Du.
35. 6′40″, was von der Breite herauszureißen ist. 5′, der Schritt,
36. auf 5°40′, Längen, erhöhe, 28′20″ siehst Du.
37. 1′40″, das von der Länge Hinzuzufügende, zu 28′20″ füge hinzu,
38. 30′ siehst Du, 30′ die Länge. 5′ auf 5°20′
39. erhöhe: 26′40″ siehst Du. 6′40″,
40. das aus der Breite Herauszureißende, aus 26′40″ reiße heraus,
41. 20′ siehst Du, 20′ die Breite.

Dies ist das zweite, schwierige Problem einer Tafel. Das erste, leichte (siehe Seite 124 für eine deutsche Übersetzung) kann wie folgt in mathematischer Symbolsprache ausgedrückt werden:

$$10 \cdot \left(\tfrac{1}{7}[\ell + \tfrac{1}{4}w]\right) = \ell + w.$$

Vereinfachen ergibt die Gleichung

$$\ell \cdot 10 = 6 \cdot (\ell + w).$$

Dies ist eine „unbestimmte“ Gleichung und besitzt unendlich viele Lösungen. Wenn wir eine von ihnen (etwa ℓ_o, w_o) gefunden haben, dann kann man alle anderen in der Form $(k \cdot \ell_o, k \cdot w_o)$ schreiben.

Der Text findet eine Lösung, indem er den ersten Faktor auf der linken gleich dem ersten Faktor auf der rechten Seite setzt (also $\ell = 6$), und den zweiten Faktor links gleich dem zweiten Faktor rechts setzt (also $\ell + w = 10$, folglich $w = 4$). Danach erhält man die Lösung, auf die man von Beginn an stillschweigend gezielt hat, durch „Erhöhen“ auf $5'$ (der „Schritt“ $\frac{1}{7}[\ell + \frac{1}{4}w]$ der 10 mal „gegangen“ worden ist). In der Tat: ist $\ell = 6$, $w = 4$, dann ist der „Schritt“ 1; wenn wir wollen, dass er $5'$ ist (was den üblichen Dimensionen eines „Schulrechtecks“ $\ell = 30', w = 20'$ entspricht), dann muss die Lösung mit diesem Wert multipliziert werden. All dies – und dies ist nicht offensichtlich – ist nützlich zum Verständnis des zweiten Problems.

Das erste Problem ist „homogen“ – alle seine Terme haben Grad 1 in ℓ und w. Das zweite Problem, das wir oben übersetzt haben, ist inhomogen, und kann in Symbolen wie folgt ausgedrückt werden:

$$11 \cdot \left(\tfrac{1}{7}[\ell + \tfrac{1}{4}w]\right) = [\ell + w] + 5'.$$

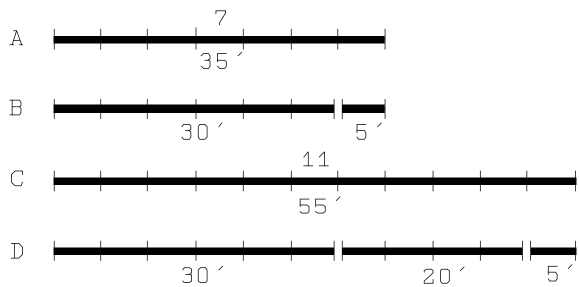


Abb. 2.7: Interpretation von TMS XII, Zeilen 21–23.

Wir bemerken, dass $\frac{1}{4}w$ zur Länge „hinzugefügt“ wird; dass wir $\frac{1}{7}$ des Ergebnisses nehmen, und dass wir danach diese Strecke 11 mal “gehen“. Das Ergebnis geht um $5'$ über den Haufen von Länge und Breite hinaus. Der Haufen ist also kein Teil dessen, was sich aus der Wiederholung des Schritts ergibt – wäre es das, hätte man es „herausreißen“ können.

Die Lösung beginnt mit einer pädagogischen Erklärung im Stile von TMS XVI #1, dem vorhergehenden Quasi-Problem. Eine genaue Lektüre zeigt, dass die $5'$, welche in Zeile 21 auf 7 erhöht werden, der „Schritt" $\frac{1}{7}[\ell + \frac{1}{4}w]$ sein muss – das Erhöhen ist eine Verifikation, dass es wirklich das Siebtel ist – und nicht das „darüber Hinausgehende" aus Zeile 20. Einmal mehr soll der Schüler davon ausgehen, dass der Text sich um das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(30', 20')$ dreht. Mit dieser Figur im Hinterkopf werden wir der Erklärung der Zeilen 21 bis 23 an der Abbildung 2.7 verfolgen können: wenn der „Schritt" $5'$ auf 7 „erhöht" wird, erhalten wir $35'$ (A), was in ℓ und $\frac{1}{4}w$ zerlegt werden kann (B). Wird dies auf 11 „erhöht", finden wir $55'$ (C), was in ℓ, w, und $5'$ aufgeteilt werden kann (D).

Als nächstes folgt die Vorschrift zur Lösung der Gleichung; diese ist immer noch so formuliert, dass die Lösung als bekannt angenommen wird. „Erhöhen" auf 4 (Zeilen 23 bis 25) gibt das Äquivalent der folgenden symbolischen Gleichung

$$11 \cdot \left(\tfrac{1}{7}[4\ell + 4 \cdot \tfrac{1}{4}w]\right) = 4 \cdot ([\ell + w] + 5').$$

Weil der Autor unsere Symbolsprache nicht besitzt, spricht der Text von $\frac{1}{4}w$ als $5'$, findet, dass $4 \cdot \frac{1}{4}w$ gleich $20'$ ist, und identifiziert dies mit der Breite (Zeile 24); dann erscheint 4ℓ als 2, das die Länge repräsentieren soll (Zeile 25).

Mittels eines eleganten Tricks, der nicht ganz einfach zu verstehen ist, wird die Gleichung jetzt homogenisiert. Der Text zerlegt $4\ell + w$ als

$$(4-1)\ell - 5' + (w - w) + (\ell + w + 5')$$

und „erhöht" die ganze Gleichung auf 7. Wir können der Rechnung in moderner symbolischer Übersetzung folgen:

$$\begin{aligned} 11 \cdot ([4-1]\ell - 5' + 0 + [\ell + w + 5']) &= (7 \cdot 4) \cdot ([\ell + w] + 5') \\ \Leftrightarrow \quad 11 \cdot ([4-1]\ell - 5') &= (28 - 11) \cdot ([\ell + w] + 5') \\ &= 17 \cdot ([\ell + w] + 5') \\ \Leftrightarrow \quad 11 \cdot \left(\ell - \tfrac{1}{3} \cdot 5'\right) &= \tfrac{1}{3} \cdot 17 \cdot (\ell + w + 5') \\ \Leftrightarrow \quad (\ell - 1'40'') \cdot 11 &= 5°40' \cdot (\ell + w + 5'). \end{aligned}$$

Die Babylonier haben allerdings nicht mit solchen Gleichungen gearbeitet; vermutlich haben sie die Zahlen entlang der Linien einer Zeichnung (siehe Abb. 2.8) aufgeschrieben. Dies ist der Grund, warum der „Koeffizient" $(4 - 1)$ nicht vor Zeile 29 zu erscheinen braucht.

Wie im ersten Problem des Texts wird eine Lösung der homogenen Gleichung durch Identifikation der Faktoren „auf der linken Seite“ mit denen „auf der rechten Seite“ gefunden (dies ist der Grund, warum die Faktoren auf der linken Seite der letzten Gleichung invertiert wurden): $\ell - 1'40''$ (jetzt „die Länge“ genannt und daher in Abbildung 2.8 mit λ bezeichnet) entspricht also 5°40′, während $\ell + w + 5'$ (als der „Haufen“ der neuen Länge λ und einer neuen Breite ϕ bezeichnet, also $\lambda + \phi$) ist gleich 11; ϕ muss daher $11 - 5°40' = 5°20'$ sein.

Als nächstes bestimmt der Text das „Hinzuzufügende“ (*wāṣbum*) der Länge, also das, was zur Länge λ hinzugefügt werden muss, um die ursprüngliche Länge ℓ zu erhalten: dies ist gleich $1'40''$, weil $\lambda = \ell - 1'40''$ ist. Weiter findet der Text das „Herauszureißende“ (*nāsḫum*) der Breite, also das, was von der Breite ϕ „herausgerissen“ werden muss, um w zu erhalten. Wegen $\ell + w + 5' = 11$ muss w gleich $11-\ell-5' = 11-(\lambda+1'40'')-5' = (11-\lambda)-(1'40''+5') = \phi-6'40''$ sein; das zu „Herausreißende“ ist also 6′40″.

Aber das „Hinzufügen“ zu λ und das „Herausreißen“ von ϕ gibt nur eine *mögliche* Lösung, nicht die angestrebte. Um die gewünschten Werte für ℓ und w zu erhalten, wird der Schritt $5'$ (wie im ersten Problem) auf 5°40′ und 5°20 „erhöht“. Dies ergibt 28′20″ bzw. 26′40″; indem man dem ersten sein „Hinzuzufügendes“ hinzufügt und dem letzteren sein „Herauszureißendes“ herausreißt, erhalten wir endlich $\ell = 30'$, $w = 20'$.

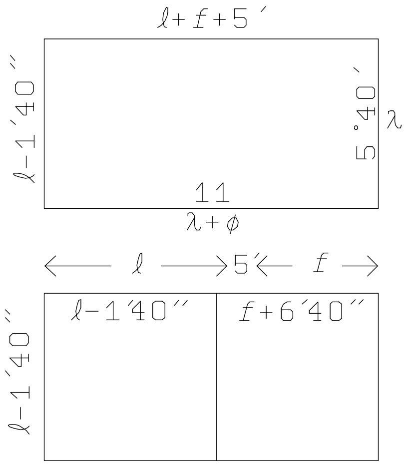


Abb. 2.8: Die Auflösung von TMS VII #2.

Wir müssen anerkennen, wie meisterhaft der Autor es versteht, bei seinem Verfahren die ihm bekannte Lösung zu vermeiden (außer zum Schluss, wo er den „Schritt“ braucht, um die gewünschte Lösung unter den unendlich vielen zu produzieren). Die numerischen Werte, die *bekannt* sind, ohne *gegeben* zu sein, dienen der pädagogischen Erklärung. Danach ist es ihre Funktion, *Namen* zur Verfügung zu stellen – da sie keine mathematischen Symbole wie ℓ und λ hatten, mussten die Babylonier Identifizierungen wie „die Länge 30′“ und „die Länge 5′40″“ benutzen (beides sind Längen, sodass der Name „Länge“ ohne Zusatz nicht ausreicht).

Numerische Werte dienen in vielen Texten der Identifizierung; dennoch sind Missverständnisse, die aus einer Verwechslung von *gegebenen* und *lediglich bekannten* Zahlen resultieren, sehr selten.

3. Kapitel
Techniken für Grad 2

Nach diesen Beispielen von Methoden zum Lösen von Problemen ersten Grades kommen wir nun zum eigentlichen Kern der altbabylonischen Algebra, wobei wir einmal mehr die Frage übergehen, was genau wir unter „Algebra“ im Zusammenhang mit babylonischer Mathematik verstehen wollen.

In diesem Kapitel werden wir einige einfache Probleme untersuchen, und dies wird uns erlauben, die fundamentalen Techniken zu entdecken, welche die altbabylonischen Gelehrten benutzt haben. In Kap. 4 werden wir komplexere und raffiniertere Aufgaben besprechen.

BM 13901 #1

Vs. I

1. Die Fläche und meine Gegenseite habe ich angehäuft: 45′ ist es. 1, die Projektion
2. setzt Du. Das Halbe von 1 brich ab, 30′ und 30′ lässt Du enthalten.
3. 15′ zu 45′ fügst Du hinzu: bei 1 ist 1 gleich. 30′, welche Du enthalten lassen hast,
4. aus dem Inneren von 1 reiße heraus: 30′ ist die Gegenseite.

Dies ist das Problem, das auf Seite 11 in der „Transliteration“ der Assyriologen und auf Seite 15 in traditioneller Übersetzung zitiert wurde. Eine Übersetzung in moderne mathematische Symbolsprache findet man auf Seite 15.

Auch wenn wir diese Aufgabe von diesem Gesichtspunkt aus gut kennen, wollen wir den Text und die Terminologie noch einmal genau untersuchen, um mit ihm auch aus der Perspektive des Autors umgehen zu können.

In Zeile 1 wird die Aufgabe formuliert: es geht um eine *Fläche*, hier ein Quadrat, und um die dazugehörige *Gegenseite*, also die Figur eines Quadrats, das von seiner Seite parametrisiert ist; siehe Seite 26. Das Erscheinen des Wortes „Gegenseite“ bedeutet, dass die „Fläche“ diejenige eines Quadrats ist.

„Fläche“ und „Gegenseite“ sind *angehäuft*. Diese Addition muss benutzt werden, wenn verschiedenartige Größen im Spiel sind, hier eine Fläche (zwei Dimensionen) und eine Seite (eine Dimension). Der Text gibt die Summe der beiden Größen, also ihrer Maßzahlen: $45'$. Wenn c für die Seite des Quadrats und $\square(c)$ für dessen Fläche steht, dann kann das Problem wie folgt in Symbolen ausgedrückt werden:

$$\square(c) + c = 45'\left(= \frac{3}{4}\right).$$

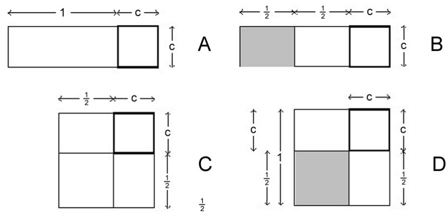


Abb. 3.1: Das Verfahren von BM 13901 #1, in leicht veränderten Proportionen.

Abbildung 3.1 zeigt die einzelnen Schritte des Verfahrens wie sie im Text erklärt sind:

A. *1, die Projektion, setzt Du.* Dies bedeutet, dass ein Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, 1)$ neben das Quadrat $\square(c)$ gezeichnet wird.

Dadurch erhält die Summe einer Länge und einer Fläche, was per se sinnlos ist, eine geometrische Bedeutung als rechteckige Fläche $\sqsubset\!\sqsupset(c, c+1) = \frac{3}{4} = 45'$. Diese geometrische Interpretation erklärt das Auftauchen der „Projektion" weil das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, 1)$ aus dem Quadrat heraus verläuft wie eine Projektion aus einem Gebäude. Wir erinnern daran (siehe Seite 18), dass das Wort ursprünglich als „Einheit" oder „Koeffizient" übersetzt worden ist, nur weil die Übersetzer nicht verstanden haben, wie eine Zahl 1 „projizieren" kann.

B. *Das Halbe von 1 brich ab.* Die „Projektion" mit dem angrenzenden Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, 1)$ wird in zwei „natürliche" Hälften zerbrochen.

C. *30′ und 30′ lass enthalten.* Die äußere Hälfte der Projektion (grau gefärbt) wird so bewegt, dass seine beiden Teile (jedes mit Länge $30'$) das Quadrat mit gepunktetem Rand unten links „enthalten". Dieses cut-and-paste-Verfahren hat uns also erlaubt, das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, c+1)$ in ein „Gnomon" zu verwandeln, also ein Quadrat, dem in einer Ecke ein kleineres Quadrat fehlt.

D. *15′ zu 45′ fügst Du hinzu: 1.* $15'$ ist die Fläche des Quadrats, das von den beiden Hälften ($30'$ und $30'$) gehalten wird, und $45'$ die des Gnomon. Wie wir von Seite 21 wissen, ist das „Hinzufügen" einer Größe zu einer anderen eine Vergrößerung der letzteren und nur dann möglich, wenn wenn beide Größe konkret gegeben und von derselben Art sind, wie etwa zwei Flächen. Wir fügen also das fehlende Quadrat hinzu und ergänzen so das Gnomon zu einem neuen Quadrat. Die Fläche des vervollständigten Quadrats ist dann $45' + 15' = 1$.

Bei 1, 1 ist gleich. Im allgemeinen bedeutet die Phrase „bei Q, s ist gleich“ (siehe Seite 26), dass die Fläche Q, dargestellt als Quadrat, s als eine seiner gleichen Seiten besitzt (in arithmetischer Sprache: $s = \sqrt{Q}$). Im vorliegenden Fall sagt uns der Text also, dass die Seite des vervollständigten Quadrats gleich 1 ist, wie es in D links vom Quadrat angezeigt ist.

30′, welche Du enthalten lassen hast, aus dem Inneren von 1 reiße heraus. Um die Seite c des ursprünglichen Quadrats zu finden, müssen wir jetzt das Stück der Länge $\frac{1}{2} = 30'$ entfernen, welches wir darunter angefügt haben. „Reiße a aus H heraus“, ist, wie wir auf Seite 21 gesehen haben, die Umkehroperation von „Hinzufügen“, eine konkrete Elimination, die voraussetzt, dass a tatsächlich ein Teil von H ist. Wie wir oben bemerkt haben (Seite 18), wurde die Phrase „vom Innern“ bei den ersten Übersetzungen ausgelassen, weil sie bedeutungslos ist, solange man annimt, dass sich alles um abstrakte Zahlen dreht. Wenn die Zahl 1 dagegen eine Strecke repräsentiert, dann ist diese Phrase sinnvoll.

30′ die Gegenseite. Entfernen wir von 1 die Strecke $\frac{1}{2} = 30'$, die wir hinzugefügt hatten, dann erhalten wir die ursprüngliche Seite c, die „Gegenseite“, die folglich gleich $1 - 30' = 30' = \frac{1}{2}$ (ganz links D).

Dies löst das Problem. In dieser geometrischen Interpretation werden nicht nur die auftretenden Zahlen erklärt, sondern auch die Wörter und Erklärungen, die im Text benutzt werden.

Was die neue Übersetzung angeht sind einige Beobachtungen angebracht. Wir bemerken, dass kein explizites Argument gegeben ist, wonach die cut-and-paste-Methode zu einem korrekten Ergebnis führt. Andererseits ist es intuitiv klar, dass dies so sein muss. Wir können daher von einem „naiven“ Zugang sprechen, müssen aber zugeben, dass *unsere* übliche Art, mit Gleichungen umzugehen, etwa im Beispiel, in welchem wir dasselbe Problem auf Seite 15 gelöst haben, nicht weniger naiv ist. Ebenso wie der altbabylonische Rechner gehen wir Schritt für Schritt voran, ohne irgend einen expliziten Beweis dafür zu geben, dass die Operationen, die wir ausführen (und denen wir „ansehen“, dass sie angemessen sind), gerechtfertigt sind.

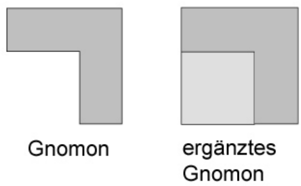


Abb. 3.2

Der wesentliche Schritt in der altbabylonischen Methode ist die Ergänzung des Gnomons wie in Abb. 3.2 gezeigt. Diesen Schritt nennen wir eine „quadratische Ergänzung“; derselbe Ausdruck wird für den entsprechenden Schritt in unserer Lösung durch algebraische Symbole benutzt:

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 \cdot x = \tfrac{3}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \cdot x + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Der Name scheint jedoch noch besser zum geometrischen Verfahren zu passen.

Offensichtlich würde eine negative Lösung in dieser konkreten Interpretation nicht sinnvoll sein. Altbabylonische Algebra ist auf handfesten Größen aufgebaut, und zwar sogar in Fällen, in denen die Aufgaben kaum einen praktischen Nutzen hatten. Keine Länge (oder Fläche, Volumen oder Gewicht) kann negativ sein. Die einzige Idee, die in altbabylonischen Texten zu finden ist und der Vorstellung von Negativität nahekommt, ist die einer *subtraktiven* Größe, also eine Größe, die dazu vorherbestimmt ist, herausgerissen zu werden. Wir haben solche Größen im Text TMS XVI #1 (Zeilen 3 und 4; siehe Seite 31) sowie TMS VII #2 (Zeile 35, die „herauszureißende Breite“ – siehe Seite 39) getroffen. In Zeile 25 des letzten Texts beobachten wir auch, dass die Babylonier das Ergebnis einer Subtraktion $20'$ von $20'$ nicht als *Zahl* betrachtet haben, sondern wörtlich als *etwas, wovon es sich nicht zu sprechen lohnt*.

Einige allgemeine Darstellungen der Geschichte der Mathematik behaupten, dass die Babylonier negative Zahlen gekannt haben. Dies ist eine Legende, die auf schlampigem Lesen beruht. Wie wir bereits gesagt haben, behaupten manche Texte aus stilistischen Gründen nicht, dass eine Größe A eine andere um den Betrag d übertrifft, sondern dass B um d kürzer ist als A; wir werden in BM 13901 #10 (siehe Fußnote 4, Seite 52) ein Beispiel dafür antreffen. In seinen *mathematischen Kommentaren* hat Neugebauer diese in der Form $A - B = d$ bzw. $B - A = -d$ ausgedrückt; ($A = B + d$ bzw. $B = A - d$ wären näher an den alten Texten gewesen, aber auch Neugebauer hatte seine stilistischen Gründe). Auf diese Art haben Mathematiker, welche nur die Übersetzung in Formeln gelesen haben und nicht die Erklärungen ihrer Bedeutung (und schon gar nicht die übersetzten Texte), ihre „babylonischen“ negativen Zahlen gefunden.

Wie der französische Orientalist Léon Rodet 1881 geschrieben hat, als er modernisierende Interpretationen eines alten ägyptischen mathematischen Papyrus kritisierte:

> Um die Geschichte einer Wissenschaft zu studieren, ebenso wie wenn man etwas bekommen will, ist es besser, sich direkt an Gott zu wenden als an seine Heiligen.[1]

[1] Léon Rodet, *Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien (Papyrus Rhind)*, *Journal asiatique* (7) **18** (1881), S. 205.

BM 13901 #2

Vs. I

5. Meine Gegenseite aus der Fläche habe ich herausgerissen: 14`30 ist es. 1, die Projektion,
6. setzt Du. Das Halbe von 1 brichst Du, 30′ und 30′ lässt Du enthalten,
7. 15′ zu 14`30 fügst Du hinzu: bei 14`30°15′, 29°30′ ist gleich.
8. 30′, welches Du enthalten lassen hast, zu 29°30′ füge hinzu: 30 die Gegenseite.

Dieses Problem, auf einer Tafel mit insgesamt 24 Aufgaben, welche sich auf immer raffiniertere Art und Weise um eines oder mehrere Quadrate drehen, folgt unmittelbar auf dasjenige, das wir eben besprochen haben.

Vom altbabylonischen Standpunkt aus betrachtet ebenso wie von unserem ist es ein „natürliches" Gegenstück. Wo das vorherige Problem „hinzufügt", dreht sich dieses um ein „Herausreißen". Der wesentliche Teil des Verfahrens ist identisch: Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Gnomon, gefolgt von einer quadratischen Ergänzung.

Zu Beginn (Zeile 5) wird das Problem formuliert: *Meine Gegenseite aus der Fläche habe ich herausgerissen: 14`30 ist es.* Einmal mehr geht es also um die Fläche eines Quadrats und seine Seite, aber dieses Mal ist die Gegenseite c „herausgerissen".

Das „Herausreißen" ist eine konkrete Subtraktion durch Wegnehmen, die Umkehrung der Operation des „Hinzufügens", und wird nur benutzt, wenn das, was „herausgerissen" werden soll, Teil der Größe ist, aus der es „herausgerissen" wird.[2] Die „Gegenseite" c wird also als Teil (des Inneren) der Fläche betrachtet. Abb. 3.3, A zeigt, wie dies möglich ist: Die „Gegenseite" wird mit einer „Breite" 1 versehen (eine „Projektion") und dadurch in ein Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, 1)$ verwandelt, das im Innern des Quadrats sitzt. Dieses Rechteck (dunkelgrau schattiert) muss daher „herausgerissen" werden; was bleibt, nachdem wir $\sqsubset\!\sqsupset(c, 1)$ aus $\square(c)$ eliminiert haben, soll 14`30 sein. In moderner Symbolsprache entspricht das Problem also

$$\square(c) - c = 14`30.$$

Einmal mehr haben wir jetzt ein Rechteck, von dem wir den Flächeninhalt (14`30) und die Differenz zwischen der Länge (c) und der Breite ($c - 1$) kennen – und wieder einmal ist diese Differenz gleich 1, also der „Projektion".

[2] Auf der anderen Seite ist die Umkehroperation des „Anhäufens" überhaupt keine Subtraktion, sondern eine *Zerlegung in Bestandteile*. Siehe Fußnote 3, Seite 105.

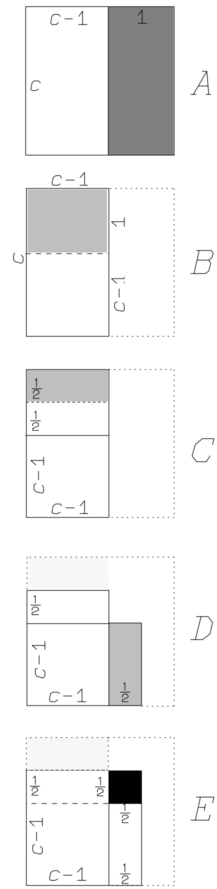


Abb. 3.3: Die Prozedur von BM 13901 #2.

1, die Projektion, setzt Du. In Abb. 3.3, B, besteht das Rechteck ▭$(c, c-1)$ aus einem (weißen) Quadrat und einem (schattierten) „überschüssigen“ Rechteck, dessen Breite gleich der Projektion 1 ist.

Das Halbe von 1 brichst Du. Das überschüssige Rechteck, dargestellt durch seine Breite 1, wird in zwei “Halbe“ geteilt; die Halbe, welche abgetrennt wird, ist in Abb. 3.3, C, schattiert.

Durch cut-and-paste, wie in Abb. 3.3, D gezeigt, erhalten wir wieder ein Gnomon mit derselben Fläche wie die des Rechtecks ▭$(c, c-1)$, also 14ˋ30.

30′ und 30′ lässt Du enthalten, 15′. Das Gnomon wird durch ein kleines Quadrat (schwarz in Abb. 3.3, E) ergänzt, welches von den beiden Halben „gehalten“ wird. Die Fläche dieses vervollständigten Quadrats ist 30′× 30′ = 15′.

Als nächstes werden die Fläche des vervollständigten Quadrats und seine Seite bestimmt: *15′ zu 14ˋ30 füge hinzu: bei 14ˋ30°15′, 29°30′ ist gleich.*

Indem wir das „Halbe“, das bewegt worden ist, zurücklegen, finden wir die Seite des ursprünglichen Quadrats zu 29°30′ + 30′ = 30: *30′, welches Du enthalten lassen hast, zu 29°30′ füge hinzu: 30 die Gegenseite.*

Wir bemerken das dieses Mal die „Gegenseite“ des Quadrats 30 ist, nicht 30′. Der Grund ist einfach und überzeugend: wenn c nicht größer als 1 ist, dann wird die Fläche kleiner als die Seite sein, und wir müssten mehr „herausreißen“ als vorhanden ist, was offensichtlich nicht möglich ist. Wie wir bereits erklärt haben, waren die Babylonier mit „subtraktiven Größen“ vertraut, also mit Größen, welche dazu bestimmt waren, „herausgerissen“ zu werden; aber nichts in ihrem mathematischen Denken entspricht unseren negativen Zahlen.

Wir bemerken ebenfalls, dass das Paar (14ˋ30°15′, 29°30′) nicht in Tabellen von Quadratzahlen und Quadratwurzeln aufgeführt ist (siehe Seite 26); die Aufgabe ist also rückwärts aus einer bekannten Lösung konstruiert worden.

YBC 6967

Vs.

1. Das *igibûm* über das *igûm*, 7 geht es hinaus
2. *igûm* und *igibûm* was?
3. Du, 7 welches das *igibûm*
4. über das *igûm* hinausgeht,
5. brich es entzwei: 3°30′;
6. 3°30′ zusammen mit 3°30′
7. lasse enthalten: 12°15′.
8. Zu 12°15′ welches für Dich herauskommt,
9. 1ˋ die Fläche füge hinzu: 1ˋ12°15′.
10. Das Gleiche von 1ˋ12°15′ was? 8°30′.
11. 8°30′ und 8°30′, die Gegenseite, lege nieder.

Rs.

1. 3°30′, was Du halten lassen hast,
2. von Eins reiße aus,
3. zu Eins füge hinzu.
4. Das erste ist 12, das zweite ist 5.
5. 12 ist das *igibûm*, 5 ist das *igûm*.

Probleme zweiten Grades, die von Rechtecken handeln, treten häufiger auf als solche über Quadrate. Zwei Arten von Problemen gehören zu dieser Kategorie; andere, komplexere Probleme können auf diese beiden Grundtypen reduziert werden. In einem der beiden ist die Fläche und die Summe der Seiten bekannt; im anderen ist die Fläche und die Differenz der Seiten gegeben.

Die obige Übung gehört zu letzterem Typ – wenn wir von der Tatsache absehen, dass es dabei gar nicht um ein Rechteck geht, sondern um ein Zahlenpaar, das in einer Tabelle von Reziproken steht (siehe Tafel. 1.1 auf Seite 24). *Igûm* ist die babylonische Aussprache des sumerischen IGI, und *igibûm* diejenige von IGI.BI, „seinem IGI" (das Verhältnis zwischen den beiden Zahlen ist in der Tat symmetrisch: wenn 10′ das IGI 6 ist, dann ist 6 das IGI 10′).

Man könnte erwarten, dass das Produkt von *igûm* and *igibûm* 1 ist; im vorliegenden Problem ist das jedoch nicht der Fall: hier soll das Produkt 1ˋ sein, also 60. Die beiden Zahlen werden von den Seiten eines Rechtecks der Fläche 1ˋ repräsentiert (siehe Zeile Vs. 9); die Situation ist in Abb. 3.4 A dargestellt. Wir haben es hier also einmal mehr mit einem Rechteck zu tun, von dem die Fläche und die Differenz von Länge und Breite gegeben ist, nämlich 1ˋ bzw. 7.

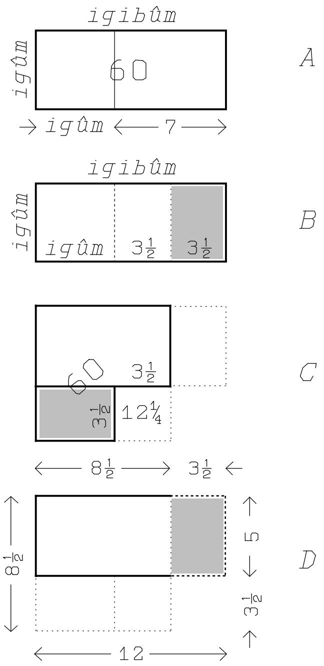


Abb. 3.4: Die Prozedur von YBC 6967.

Es ist wichtig zu bemerken, dass hier die „fundamentale Darstellung“ (die messbaren geometrischen Größen) dazu dient, Größen einer anderen Art zu repräsentieren: die beiden Zahlen *igûm* und *igibûm*. In unserer Algebra liegt die Sache anders herum: *unsere* fundamentale Darstellung kommt aus dem Gebiet der abstrakten Zahlen, und diese dienen der Darstellung von Größen anderer Art: Preise, Massen, Geschwindigkeiten, Abstände usw. (siehe Seite 19).

Wie in den beiden analogen vorhergehenden Fällen wird das Rechteck in ein Gnomon verwandelt, und wie üblich wird das Gnomon zu einem Quadrat vervollständigt, das von den beiden „Halben“ des Überschusses (Zeilen Vs. 3–10) „enthalten“ wird. Das Verfahren lässt sich an den Figuren in Abb. 3.4, B und 3.4, C verfolgen.

Die nächsten Schritte sind bemerkenswert. Die „Halbe“, die abgebrochen und bei der Bildung des Gnomons verschoben wurde (das, was das vervollständigende Quadrat „enthalten lässt“) wird zurück an seinen Platz gesetzt. Weil es um *dasselbe* Stück geht, muss es grundsätzlich verfügbar sein, bevor es „hinzugefügt“ werden kann. Dies hat zwei Konsequenzen. Zum einen muss das „Gleiche“ $8^\circ30'$ zwei Mal „niedergelegt“ werden[3], wie wir in Abb. 3.4, D sehen können: dadurch kann das Stück aus dem einen „herausgerissen“ werden (es bleibt die Breite *igûm*) und dem anderen „hinzugefügt“ werden (dies ergibt die Länge *igibûm*). Zum anderen muss das „Herausreißen“ dem „Hinzufügen“ vorangehen (Zeilen Rs. 1–3), obwohl die Babylonier (wie wir auch) es normalerweise vorziehen, erst zu addieren und dann zu subtrahieren – vgl. BM 13901 #1–2: das erste Problem addiert die Seite, das zweite subtrahiert

[3]Das fragliche Verb (*nadûm*) hat ein breites Spektrum an Bedeutungen, darunter „zeichnen“ oder „schreiben“ (auf einer Tafel); das Verb *lapātum*, das wir als „einschreiben“ übersetzen, hat übrigens dieselbe Bedeutung. Weil das, was „niedergelegt“ wird, ein numerischer Wert ist, könnte es scheinen, dass die letztere Interpretation vorzuziehen ist – aber weil geometrische Größen regelmäßig mit ihren numerischen Maßen identifiziert wurden, muss dies nicht zwangsläufig der Fall sein.

sie: *3°30′, was Du enthalten lassen hast, vom einen reiße heraus, dem anderen füge hinzu.*

In BM 13901 #1 und #2 wurde die Ergänzung dem Gnomon „hinzugefügt“, hier wird das Gnomon „hinzugefügt“. Beide Varianten sind möglich, weil beide an ihrem Platz bleiben können. Wenn 3°30′ in der Konstruktion des *igibûm* zu 8°30′ hinzugefügt wird, ist dies nicht der Fall: wenn eine Größe an ihrem Platz bleibt und die andere verschoben wird, dann ist es immer die letztere, die „hinzugefügt“ wird. Im Gegensatz zu unserer Addition und dem „Anhäufen“ der Babylonier ist „hinzufügen“ keine symmetrische Operation.

BM 13901 #10

Vs. II

11. Die Flächen meiner beiden Gegenseiten habe ich angehäuft: 21°15′.
12. Gegenseite von Gegenseite, ein Siebtel ist es kleiner geworden.
13. 7 und 6 schreibst Du ein. 7 und 7 lasse enthalten, 49.
14. 6 und 6 lasse enthalten, 36 und 49 häufe an:
15. 1`25. IGI 1`25 wird nicht abgespalten. Was zu 1`25
16. soll ich setzen das mir 21°15′ gibt? Bei 15′, 30′ ist gleich.
17. 30′ zu 7 erhöhst Du: 3°30′ die erste Gegenseite.
18. 30′ zu 6 erhöhst Du: 3 die zweite Gegenseite.

Wir kehren nun zu der Tafel zurück, welche eine Sammlung von Aufgaben über Quadrate enthält, und betrachten eines der einfachsten Probleme über zwei Quadrate. Zeilen 11 und 12 enthalten die Formulierung: Die Summe der beiden Flächen ist als 21°15′ gegeben, und uns wird gesagt, dass die zweite „Gegenseite“ ein Siebtel kürzer ist als die erste[4] In Symbolen liest sich die Gleichung, wenn die beiden Seiten mit c_1 bzw. c_2 bezeichnet werden, so:

$$\square(c_1) + \square(c_2) = 21°15' \quad , \quad c_2 = c_1 - \tfrac{1}{7}c_1 .$$

In anderen Worten ist das Verhältnis der beiden Seiten wie 7 zu 6. Dies eröffnet die Möglichkeit einer Lösung durch einen „falschen Ansatz“ (siehe Seite 37). Die Zeilen 13 und 14 beschreiben die Konstruktion zweier „Modellquadrate“ mit den Seiten 7 und 6 (indem man diese Seiten „enthalten lässt“; siehe Abb. 3.5),

[4] Hier sehen wir einen der stilistischen Gründe, der zu einer Formulierung durch Fehlen statt durch Überschuss führt: man hätte genauso gut sagen können, dass die eine Seite die andere um ein Sechstel übertrifft, aber auf dem Gebiet der Multiplikation und des Nehmens von Bruchteilen gaben die Babylonier den Zahlen 4, 7, 11, 13, 14 und 17 einen besonderen Status. Im nächsten Problem dieser Tafel geht es darum,dass eine Seite die andere um ein Siebtel übertrifft, und wieder wäre es möglich gewesen zu sagen, dass die zweite ein Achtel kürzer ist als die erste.

deren Gesamtfläche $49 + 36 = 1`25$ ist. Die Aufgabenstellung verlangt aber, dass diese Summe gleich $21°15'$ sein soll; also muss die Fläche um einen Faktor $21°15'/1`25$ reduziert werden. Jetzt ist $1`25$ aber keine „reguläre" Zahl (siehe Seite 24) – sie besitzt also kein IGI: *IGI 1`25 wird nicht abgespalten*. Wir müssen daher den Quotienten „aus dem Ärmel schütteln" – dies wird in den Zeilen 15-16 gemacht, wo er als $15'$ (also $\frac{1}{4}$) angegeben wird. Wenn aber die Fläche um einen Faktor $15'$ reduziert wird, dann müssen die entsprechenden Seiten um einen Faktor $30'$ reduziert werden: *Bei 15′, 30′ ist gleich.* Zum Schluss bleibt noch (Zeilen 17 und 18) 7 und 6 auf $30'$ „zu erhöhen".

Die erste „Gegenseite" ist daher $7 \cdot 30' = 3°30'$, die zweite $6 \cdot 30' = 3$.[5]

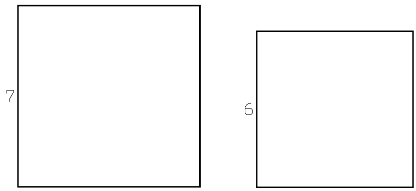


Abb. 3.5: Die beiden Quadrate von BM 13901 #10.

BM 13901 #14

Vs. II

44. Die Flächen meiner beiden Gegenseiten habe ich angehäuft: $25'25''$.
45. Die [andere] Gegenseite, zwei Drittel der Gegenseite und $5'$ NINDAN.
46. 1 und $40'$ und $5'$ gehend über $40'$ schreibe ein.
47. $5'$ und $5'$ lasse enthalten, $25''$ aus $25'25''$ reißt Du heraus:

Rs. I

1. $25'$ schreibst Du ein. 1 und 1 lässt Du enthalten: 1. $40'$ und $40'$ lässt Du enthalten,
2. $26'40''$ zu 1 fügst Du hinzu: $1°26'40''$ auf $25'$ erhöhst Du:
3. $36'6''40'''$ schreibst Du ein. $5'$ zu $40'$ erhöhst Du: $3'20''$

[5] Es wäre denkbar, dass die zugrunde liegende Idee eine leicht andere ist, dass nämlich die ursprünglichen Quadrate in 7×7 bzw. 6×6 Teilquadrate zerlegt werden, deren Anzahl insgesamt $1`25$ wäre, von denen dann also jedes einzelne eine Fläche von $\frac{21°15'}{1`25} = 15'$ und eine Seite $30'$ hätte. Diese Interpretation wird allerdings ausgeschlossen durch die Operation „enthalten lassen": Tatsächlich sind die ursprünglichen Quadrate bereits vorhanden, und es gibt folglich keinen Grund, sie zu konstruieren (in TMS VIII #1 wird eine Unterteilung in kleinere Teilquadrate vorgenommen, und dort wird deren Anzahl tatsächlich durch „erhöhen" gefunden – siehe Seite 85).

4. und $3'20''$ lässt Du enthalten, $11''6'''40''''$ zu $36'6''40'''$ fügst Du hinzu:
5. bei $36'17''46'''40''''$, $46'40''$ ist gleich. $3'20''$, welches Du enthalten lassen hast,
6. aus $46'40''$ reißt Du heraus: $43'20''$ schreibst Du ein.
7. IGI $1°26'40''$ wird nicht abgespalten. Was zu $1°26'40''$
8. soll ich setzen das mir $43'20''$ gibt? $30'$ ist sein *bandûm*.
9. $30'$ zu 1 erhöhst Du: $30'$ die erste Gegenseite.
10. $30'$ zu $40'$ erhöhst Du: $20'$, und $5'$ fügst Du hinzu:
11. $25'$ die zweite Gegenseite.

Auch bei diesem Problem geht es um zwei Quadrate (Zeilen Vs. II.44–45).[6]

Die etwas obskure Formulierung in Zeile 45 bedeutet, dass die zweite „Gegenseite" zwei Drittel der ersten ausmacht, mit zusätzlichen $5'$ NINDAN. Wenn c_1 und c_2 für die beiden „Gegenseiten" stehen, dann sagt uns Zeile 44, dass die Summe der Flächen $\square(c_1) + \square(c_2) = 25'25''$ ist, während Zeile 45 angibt, dass $c_2 = 40' \cdot c_1 + 5'$ ist.

Dieses Problem kann nicht durch einen einfachen falschen Ansatz gelöst werden, bei dem eine Zahl vorläufig als der Wert der Unbekannten angenommen wird – dies funktioniert nur für homogene Probleme.[7] Die Zahlen 1 und $40'$ in Zeile 46 zeigen uns den tatsächlich eingeschlagenen Weg: c_1 und c_2 werden durch eine *neue Größe* ausgedrückt, welche wir c nennen können:

$$c_1 = 1 \cdot c \quad , \quad c_2 = 40' \cdot c + 5'.$$

Dies entspricht Abb. 3.6. Es zeigt, wie das Problem auf ein einfacheres reduziert wird, in dem es um ein einziges Quadrat $\square(c)$ geht. Es ist klar, dass die Fläche des ersten der beiden ursprünglichen Quadrate ($\square(c_1)$) gleich $(1\times1)\square(c)$ ist, aber diese Rechnung muss bis Zeile Rs. I.1. warten.

Der Text beginnt mit der Betrachtung von $\square(c_2)$, was komplizierter ist und zu mehreren Beiträgen Anlass gibt. Zuerst geht es um das Quadrat $\square(5')$ in der rechten unteren Ecke: *$5'$ und $5'$ lasse enthalten,* $25''$. Dieser Beitrag wird aus der Summe $25'25''$ der beiden Flächen eliminiert: $25''$ *aus* $25'25''$ *reiße heraus: 25' schreibe ein*. Die verbleibenden $25'$ müssen nun in Abhängigkeit der Fläche und der Seite des neuen Quadrats $\square(c)$ erklärt werden.

[6] Dieser Teil der Tafel ist schwer beschädigt. Aufgabe #24 auf derselben Tafel dreht sich um drei Quadrate, verläuft aber sonst streng parallel, und erlaubt so eine unzweifelhafte Rekonstruktion.

[7] Bei einem einfachen falschen Ansatz wird die vorläufig angenommene Zahl um einen Faktor reduziert, der dem gefundenen Fehler entspricht; wenn wir aber die Werte für c_1 und c_2 mit einem gewissen Faktor reduzieren, etwa mit $\frac{1}{5}$, dann würde das zusätzliche $5'$ ebenfalls um diesen Faktor reduziert, also auf $1'$. Nach der Reduktion würden wir daher $c_2 = \frac{2}{3}c_1 + 1'$ haben.

$\square(c_1)$ ist, wie schon gesagt, $1\times1 = 1$ mal die Fläche $\square(c)$: *1 und 1 lasse enthalten: 1.*[8] Nach der Elimination der Ecke $5' \times 5'$ bleibt von $\square(c_2)$ einerseits ein Quadrat $\square(40'c)$ übrig, andererseits zwei „Flügel“, auf die wir gleich zurückkommen werden. Die Fläche des Quadrats $\square(40'c)$ ist $(40'\times40')\square(c) = 26'40''\square(c)$: *40' und 40' lasse enthalten, 26'40''*. Insgesamt haben wir also das $1 + 26'40'' = 1°26'40''$-fache der Quadratfläche $\square(c)$: *26'40'' zu 1 füge hinzu: 1°26'40''*.

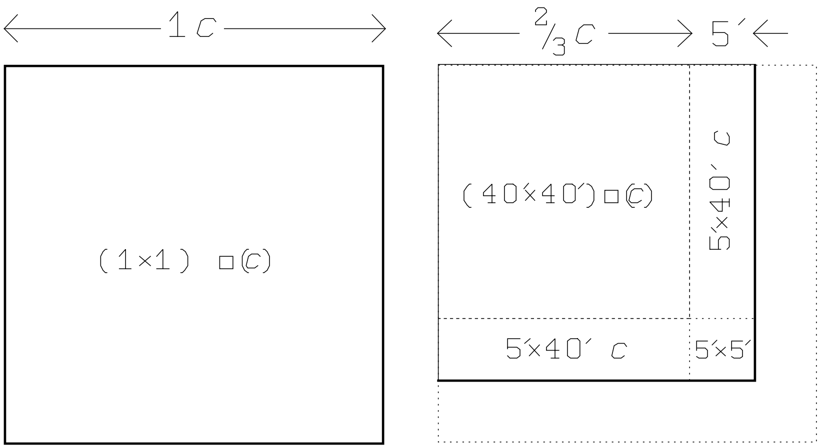


Abb. 3.6: Die beiden Quadrate von BM 13901 #14.

Jeder „Flügel“ ist ein Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(5', 40'c)$, mit der Fläche $5' \cdot 40'c = 3'20''c$: *5' auf 40' erhöhe: 3'20''*. Damit haben wir die Gleichung

$$1°26'40''\square(c) + 2 \cdot 3'20''c = 25'.$$

Diese Gleichung stellt uns vor ein Problem, welches der altbabylonische Autor schon in Zeile Rs. I.2 vorhergesehen hat, und das ihn dazu bewegt hat, die Berechnung der Flügel auf später zu verschieben. Wir würden heute sagen, die Gleichung sei nicht „normalisiert“, weil der Koeffizient des quadratischen Terms nicht gleich 1 ist. Der altbabylonische Rechner hätte dies erklären können, indem er in der Terminologie von TMS XVI sagt, dass „so viel wie es von Flächen (gibt)“ nicht eins ist – siehe den linken Teil von Abb. 3.7, wo wir eine Summe

[8] Diese sorgfältige Rechnung zeigt, dass der Autor sich ein *neues* Quadrat vorstellt, und nicht $\square(c_2)$ in Abhängigkeit von $\square(c_1)$ und c_1 ausdrückt.

von α Quadratflächen (das weiße Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, \alpha c)$) und von β Seiten haben, also das schattierte Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c, \beta)$, was der Gleichung

$$\alpha\square(c) + \beta c = \Sigma$$

entspricht (im vorliegenden Fall ist $\alpha = 1°26'40''$, $\beta = 2 \cdot 3'20''$, und $\Sigma = 25'$). Dies hindert uns daran, unsere gewohnte cut-and-paste-Methode direkt anzuwenden. Das „Zerbrechen“ von β und das Enthaltenlassen der beiden Halben würde uns kein Gnomon geben.

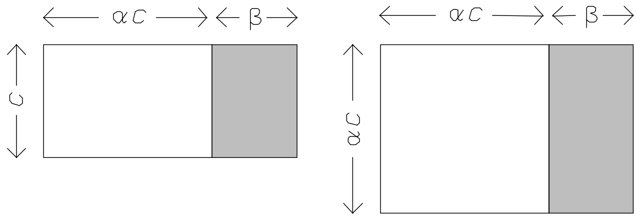


Abb. 3.7: Transformation des Problems $\alpha\square(c) + \beta c = \Sigma$.

Die Babylonier umgingen diese Schwierigkeit mit Hilfe eines Tricks, der auf der rechten Seite von Abb. 3.7 zu sehen ist: Der Maßstab der Figur wird in der vertikalen Richtung geändert, und zwar so, dass die vertikale Seite αc statt c wird. Also ist die Summe der beiden Flächen nicht mehr $\Sigma\,(= 25')$, sondern $\alpha\Sigma(= 1°26'40'' \cdot 25' = 36'6''40''')$: *1°26′40″ auf 25′ erhöhe: 36′6″40‴* schreibe ein. Wir wir sehen, hat sich die Zahl β der Seiten nicht geändert, sondern nur der Wert der Seite, der von c zu αc geworden ist.[9]

In moderner Symbolsprache entspricht diese Umformung der Multiplikation beider Seiten der Gleichung

$$\alpha c^2 + \beta c = \Sigma$$

mit α, und dies gibt uns die normalisierte Gleichung

$$(\alpha c)^2 + \beta \cdot (\alpha c) = \alpha\Sigma,$$

in der Unbekannten αc.

Eine Gleichung dieses Typs ist uns schon in BM 13901 #1 begegnet. Wir sind also an einem Punkt angelangt, an dem wir die gewohnte Methode anwenden können: man „zerbreche“ des schattierten Rechtecks und lasse die beiden

[9]Dieser Trick wurde bei der Lösung nicht-normalisierter Gleichungen regelmäßig benutzt, und es gibt keinen Grund anzunehmen, dass die Babylonier eine bestimmte Darstellung wie in Abb. 3.7 benötigt haben. Sie könnten sich vorstellen, dass der *Maßstab* in einer Richtung geändert wurde – wir wissen aus anderen Texten, dass ihre Diagramme sehr ungenau sein konnten, also bloße Strukturdiagramme waren – mehr wurde zur Gedankenführung nicht benötigt. Sie mussten also nur die Summe Σ mit α multiplizieren, und dies konnten (und, wie hier, würden) sie tun, bevor sie β ausrechneten.

„Halben“ eine quadratische Ergänzung „enthalten“ (siehe Abb. 3.8); die äußere „Halbe“ ist leicht schattiert in ihrer ursprünglichen Position, die stärker schattierte in der Position, auf die sie gebracht wurde). Erst jetzt muss der Rechner die Anzahl der Seiten im schattierten Rechteck von Abb. 3.7 wissen (also β bestimmen). Wie wir schon gesagt haben, trägt jeder „Flügel“ $5'40''$=$3'20''$ Seiten bei. Hätte der Rechner mechanisch nach festen Algorithmen gearbeitet, hätte er nun mit 2 multipliziert, um β zu finden. Aber er tut es nicht! Er weiß in der Tat, dass die beiden Flügel den Überschuss darstellen, der in zwei „Halbe“ „zerbrochen“ werden muss. Er lässt daher $3'20''$ und $3'20''$ „enthalten“, was die quadratische Ergänzung liefert, und „fügt“ die sich ergebende Fläche $11''6'''40''''$ zu der Fläche $36'6''40'''$ des Gnomons hinzu: *3′20″ und 3′20″ lasse enthalten, 11″6‴40⁗ zu 36′6″40‴ füge hinzu [...] 36′17″46‴40⁗*.

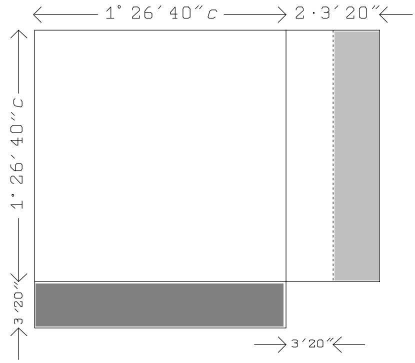


Abb. 3.8: BM 13901 #14, das normalisierte Problem.

$36'17''46'''40''''$ ist daher die Fläche des vervollständigten Quadrats, und dessen Seite ist $\sqrt{36'17''46'''40''''} = 46'40''$: *bei 36′17″46‴40⁗, 46′40″ ist gleich*. Diese Zahl stellt $1°26'40'' \cdot c + 3'20''$ dar; $1°26'40''c$ ist folglich $46'40'' - 3'20'' = 43'20''$: *3′20″, das du enthalten lassen hast, aus 46′40″ reiße heraus: 43′20″ schreibe ein*. Als nächstes müssen wir den Wert von c finden. $1°26'40''$ ist eine irreguläre Zahl, und der Quotient $46'40''/1°26'40''$ wird direkt als $30'$ angegeben:[10] *IGI 1°26′40″ wird nicht abgespalten. Was soll ich zu 1°26′40″ setzen, das mir 43′20″ gibt? 30′, sein bandûm*. Zum Schluss werden c_1 und c_2 bestimmt,

[10]Der Quotient heißt BA.AN.DA. Dieser sumerische Ausdruck könnte „das was an die Seite gestellt wird“ bedeuten, was der Art entsprechen könnte, wie Multiplikationen auf einer Hilfstafel ausgeführt wurden. Siehe die Fußnote 11, Seite 25.

$c_1 = 1 \cdot c = 30', c_2 = 40' \cdot c + 5' = 25'$:[11] *30′ auf 1 erhöhe: 30′ die erste Gegenseite. 30′ auf 40′ erhöhe: 20′, und 5′ füge hinzu: 25′ die zweite Gegenseite.* Die Aufgabe ist gelöst.

TMS IX #1 und #2

#1

1. Die Oberfläche und 1 die Länge habe ich angehäuft, 40′. ¿30, die Länge,? 20′ die Breite
2. Als 1 Länge zu 10′ der Fläche wurde hinzugefügt,
3. oder 1 (als) Basis zu 20′, der Breite, wurde hinzugefügt,
4. oder 1°20′ ¿ist gesetzt? zur Breite, welche 40′ zusammen mit der Länge ¿hält?
5. oder 1°20′ zusam⟨men⟩ mit 30′ der Länge enthält, 40′ (ist) dessen Name.
6. Weil so, zu 20′ der Breite, wie Dir gesagt ist,
7. 1 wird hinzugefügt: 1°20′ siehst Du. Hiervon ausgehend
8. fragst Du. 40′ die Fläche, 1°20′ die Breite, die Länge was?
9. 30′ die Länge. Dies ist das Verfahren.

#2

10. Fläche, Länge und Breite habe ich angehäuft, 1. Nach der akkadischen (Methode)
11. 1 zur Länge füge hinzu. 1 zur Breite füge hinzu. Weil 1 zur Länge hinzugefügt ist,
12. 1 zur Breite hinzugefügt ist, 1 und 1 lasse enthalten, 1 siehst Du.
13. 1 zum Haufen von Länge, Breite und Fläche füge hinzu, 2 siehst Du.
14. Zu 20′, der Breite, 1 füge hinzu, 1°20′. Zu 30′, der Länge, 1 füge hinzu, 1°30′.
15. ¿Weil? eine Fläche, die von Breite 1°20′, von Länge 1°30′,
16. ¿die Länge zusammen mit? der Breite man enthalten lassen hat, was ist ihr Name?
17. 2 die Fläche.
18. So geht die akkadische (Methode).

Wie TMS XVI #1 lösen die Abschnitte #1 und #2 der vorliegenden Tafel kein Problem.[12] Stattdessen bieten sie eine pädagogische Erklärung der Bedeu-

[11] Dass der Wert von c_1 als $1{\cdot}c$ berechnet wird und nicht direkt mit c identifiziert wird bestätigt, dass wir mit einer *neuen* Seite c gearbeitet haben.

[12] Die Tafel ist ziemlich beschädigt; wir erinnern daran, dass die mit ¿…? gekennzeichneten Abschnitte Rekonstruktionen sind, welche die Bedeutung (die dem Kontext entnommen werden können), aber nicht notwendig den genauen Wortlaut des Originals wiedergeben.

tung der Addition von Flächen und Strecken, sowie der Operationen zur Behandlung von Problemen zweiten Grades. In den Abschnitten #1 und #2 geht es um zwei verschiedene Situationen. In #1 ist die Summe der Fläche und der Länge, in #2 die Summe der Fläche, der Länge und der Breite eines Rechtecks gegeben; erst #3 (das wir im nächsten Kapitel behandeln werden) ist ein echtes Problem, das in Übereinstimmung mit den in #1 und #2 gelehrten Methoden formuliert und gelöst wird.

Die Abbildung in Abb. 3.9 links ist in Übereinstimmung mit dem Text von #1 gezeichnet, in welchem die Summe der Fläche und der Länge eines Rechtecks gegeben ist. Parallel zu unserer symbolischen Umformung

$$\ell \cdot w + \ell = \ell \cdot w + \ell \cdot 1 = \ell \cdot (w + 1),$$

wird die Breite mit einer „Basis"[13] versehen. Dies führt zu einer ganzen Reihe von Erklärungen, die gegenseitig voneinander abhängen und mit „oder … oder … oder" verbunden sind, merkwürdig ähnlich zur Art, wie wir über unsere Umformungen einer Gleichung sprechen, wenn wir etwa

$$2a^2 - 4 = 4, \quad \text{oder} \quad 2a^2 = 4 + 4, \quad \text{oder} \quad a^2 = 4$$

schreiben.

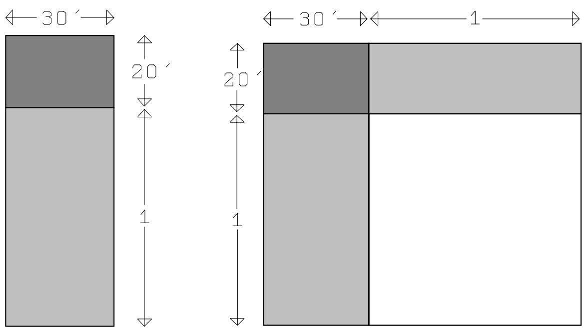


Abb. 3.9: TMS IX, #1 und TMS IX, #2.

Zeile 2 spricht von der „Fläche" als $10'$. Der Schüler soll also einmal mehr annehmen, dass die Diskussion sich um das Rechteck $\square(30', 20')$ dreht. Die Tafel ist zerbrochen, weswegen wir nicht wissen, ob die Länge explizit gegeben war; Zeile 6 zeigt allerdings, dass die Breite gegeben war.

[13] Das Wort KI.GUB.GUB ist eine Zusammensetzung sumerischer Wörter, welches nicht von andern Tafeln bekannt ist, und das eine *ad hoc*-Konstruktion sein könnte. Es bezeichnet vermutlich etwas, das stabil auf den Boden gelegt wird.

Am Ende zeigen Zeilen 7-9, wie man die Länge findet, wenn die Breite zusammen mit der Summe von Fläche und Länge bekannt ist (durch eine Division, die hier nur implizit durchgeführt wird).

Aufgabe #2 lehrt, wie man sich in einer komplexeren Situation verhält: Jetzt ist die Summe der Fläche und beider Seiten eines Rechtecks gegeben (siehe Abb. 3.9 rechts). Sowohl Länge als auch Breite werden um 1 verlängert; dies erzeugt zwei Rechtecke $\sqsubset\!\sqsupset(\ell, 1)$ und $\sqsubset\!\sqsupset(w, 1)$, deren Flächen die Länge bzw. die Breite darstellen. Aber dies erzeugt auch ein leeres Eckquadrat $\sqsubset\!\sqsupset(1, 1)$. Ist dieses gefüllt, dann haben wir ein größeres Rechteck der Länge $\ell + 1$ (= 1°30′), der Breite $w + 1$ (= 1°20′) und der Fläche $1 + 1 = 2$; eine Probe bestätigt, dass das Rechteck, das diese beiden Seiten enthalten, tatsächlich Fläche 2 besitzt.

Diese Methode hat einen Namen, was in der altbabylonischen Mathematik (zumindest in den uns erhaltenen Texten) sehr selten ist. Sie heißt „die akkadische (Methode).“ „Akkadisch“ ist die Bezeichnung für die Sprache, deren Hauptdialekte das Babylonische und das Assyrische sind (siehe den Kasten „Geschichte Mesopotamiens“; entsprechend wird „Akkader“ für den nicht-sumerischen Anteil der Bevölkerung im dritten Jahrtausend v.Chr. benutzt. Es gibt Hinweise darauf (so etwa durch den hier vorliegenden Text), dass die „Algebra“ der altbabylonischen Schreiberschule sich von der Praxis einer akkadischen Feldmesserprofession inspiriert wurde (wir werden dieses Thema auf Seite 114 besprechen). Die „akkadische“ Methode ist in der Tat nichts anderes als eine *quadratische Ergänzung*, wenn auch eine etwas untypische Variante, also das Grundwerkzeug zur Lösung aller gemischten quadratischen Probleme, seien diese geometrisch oder, wie bei uns, durch numerische Algebra ausgedrückt; es ist genau dieses Werkzeug, das als die „akkadische Methode“ bezeichnet wird.

4. Kapitel
Komplexe quadratische Probleme

Im letzten Kapitel haben wir die Methoden vorgestellt, welche die Babylonier für die Lösung der grundlegenden Probleme zweiten Grades benutzt haben: cut-and-paste, quadratische Ergänzung und Maßstabswechsel. Die Babylonier haben allerdings, wie man am Ausdruck „grundlegend“ erkennen kann, auch komplexere Aufgaben bearbeitet. Solche Aufgaben stehen im Mittelpunkt dieses Kapitels, und wir beginnen mit dem dritten Abschnitt des Texts, von dem wir die beiden einführenden pädagogischen Abschnitte bereits untersucht haben.

TMS IX #3

19. Fläche, Länge und Breite habe ich angehäuft; 1 die Fläche. 3 Längen, 4 Breiten angehäuft,
20. dessen 17tel zur Breite hinzugefügt, 30′.
21. Du, 30′ bis 17 gehe: 8°30′ siehst Du.
22. Zu 17 Breiten füge 4 Breiten hinzu, 21 siehst Du.
23. 21, so viel wie von Breiten, setze. 3, von drei Längen
24. 3, so viel wie von Längen, setze. 8°30′, was ist dessen Name?
25. 3 Längen und 21 Breiten angehäuft.
26. 8°30′ siehst Du,
27. 3 Längen und 21 Breiten angehäuft
28. Weil 1 zur Länge hinzugefügt ist und 1 zur Breite hinzugefügt, lasse enthalten:
29. 1 zum Haufen von Fläche, Länge und Breite füge hinzu, 2 siehst Du,
30. 2 die Fläche. Weil die Länge und die Breite von 2 der Fläche,
31. 1°30′, die Länge, zusammen mit 1°20′, der Breite, sind enthalten gelassen,
32. 1, das Hinzugefügte der Länge, und 1, das Hinzugefügte der Breite,
33. lasse enthalten, ¿1 siehst Du.? 1 und 1, die verschiedenen (Dinge), häufe an, 2 siehst Du.
34. 3 …, 21 …, und 8°30′ häufe an, 32°30′ siehst Du;
35. so fragst Du.
36. …der Breiten, zu 21, dem Haufen:

37. …auf 3, Längen, erhöhe,
38. 1\`3 siehst Du. 1\`3 auf 2, die Fläche, erhöhe:
39. 2\`6 siehst Du, ¿2\`6 die Fläche?. 32°30′ den Haufen breche, 16°15′ ⟨siehst⟩ Du.
40. {…}. 16°15′ die Gegenseite setze, lasse enthalten,
41. 4\`24°3′45″ siehst Du. 2\`6 ¿ aus dem Innern?
42. von 4\`24°3′45″ reiße heraus, 2\`18°3′45″ siehst Du.
43. Was ist gleich? 11°45′ ist gleich, 11°45′ zu 16°15′ füge hinzu,
44. 28 siehst Du. Vom 2ten reiße aus,4°30′ siehst Du.
45. IGI 3, von den Längen, spalte ab, 20′ siehst Du. 20′ auf 4°30′
46. {…} erhöhe: 1°30′ siehst Du;
47. 1°30′ die Länge von 2 der Fläche. Was zu 21, der Breite, kann ich setzen
48. das mir 28 gibt? 1°20′ setze, 1°20′ die Breite
49. von 2 der Fläche. Gehe zurück. 1 von 1°30′ reiße aus,
50. 30′ siehst Du. 1 von 1°20′ reiße aus,
51. 20′ siehst Du.

Zeilen 19 und 20 präsentieren ein System von zwei Gleichungen über ein Rechteck, eine ersten und eine zweiten Grades. Die erste ist vom selben Typ wie diejenige, die in TMS XVI #1 (siehe Seite 31) erklärt wurde. Die zweite stimmt mit derjenigen überein, welche in Abschnitt #2 des vorliegenden Textes untersucht wurde (siehe Seite 59). In symbolischer Übersetzung können die Gleichungen wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{1}{17}(3\ell + 4w) + w = 30' \quad , \quad \square(\ell, w) + \ell + w = 1.$$

In Übereinstimmung mit dem, was wir anderswo gesehen haben, multipliziert der Text die Gleichung ersten Grades mit 17 (unter Benutzung des akkadischen Verbs „gehen“, siehe Seite 22), und erhält so ganzzahlige Koeffizienten (*so viel wie*):

$$3\ell + (4 + 17)w = 3\ell + 21w = 17 \cdot 30' = 8°30'.$$

Dies wird in den Zeilen 21-25 gemacht, während die Zeilen 26 und 27 das Ergebnis zusammenfassen.

Zeilen 28-30 wiederholen den Trick, der in Abschnitt #2 des Texts (siehe Abb. 3.9 rechts) schon benutzt wurde: die Länge und die Breite werden auf 1 verlängert, und das Quadrat, das die beiden „hinzugefügten“[1] Seiten „enthalten“,

[1] Was das „Hinzuzufügende“ auf Seite 42 angeht, ist dieses Substantiv (*wuṣubbûm*) vom Verb „hinzufügen“ abgeleitet.

wird dem „Haufen“ $\sqsubset\!\!\!\sqsupset(\ell, w) + \ell + w$ „hinzugefügt“. Dies ergibt eine „Fläche 2“, deren Bedeutung in den Zeilen 30-33 wieder erklärt wird.

Die Zeilen 34-37 sind sehr beschädigt, zu beschädigt, um sie sicher rekonstruieren zu können, was die Wortwahl angeht. Allerdings reichen die Zahlen aus um zu sehen, wie die Rechnungen verlaufen. Wir wollen die Größen $\lambda = \ell + 1$ und $\phi = w + 1$ einführen. Der Text bezieht sich auf diese als die Länge und die Breite „der Fläche 2“, in anderen Worten: $\sqsubset\!\!\!\sqsupset(\lambda, \phi) = 2$. Weiter ist

$$\begin{aligned} 3\lambda + 21\phi &= 3 \cdot (\ell + 1) + 21 \cdot (w + 1) \\ &= 3 + 21 + 3\ell + 21w \\ &= 3 + 21 + 8^\circ 30' \\ &= 32^\circ 30'. \end{aligned}$$

Um das Verständnis für das Folgende zu erleichtern, können wir weiter die Variablen

$$L = 3\lambda \quad , \quad W = 21\phi$$

einführen (wir müssen allerdings im Auge behalten, dass der Text für diese keine besonderen Namen hat – im Gegensatz zu λ und ϕ, die solche Namen haben; wir sprechen nun *über*, nicht *mit* dem babylonischen Autor). Zeilen 36-39 finden

$$\sqsubset\!\!\!\sqsupset(L, W) = (21 \cdot 3) \cdot 2 = 1\text{`}3^\circ 2' = 2\text{`}6^\circ;$$

zusammenfassend haben wir also

$$L + W = 32^\circ 30' \quad , \quad \sqsubset\!\!\!\sqsupset(L, W) = 2\text{`}6^\circ.$$

Wir sind nun bei Zeile 39 angekommen, und damit bei einem Problem, das wir bisher noch nicht angetroffen haben: Ein Rechteck, von dem wir die Fläche und die *Summe* der beiden Seiten kennen.

Einmal mehr wird zur cut-and-paste-Methode gegriffen (siehe Abb. 4.1). Wie zuvor wird die bekannte Strecke zusammen mit dem dazugehörigen Rechteck „gebrochen“. In der vorliegenden Situation ist diese Strecke die Summe von L und W. Dieses Rechteck besteht aus $\sqsubset\!\!\!\sqsupset(L, W)$, mit durchgezogenen Linien gezeichnet, und einem Quadrat $\square(L)$ rechts davon, das mit punktierten Seiten gezeichnet ist. Als nächstes lassen wir die beiden „Halben“ dieser Strecke ein Quadrat „enthalten“ (Zeilen 39-40). Wie wir sehen, passt der Teil des ursprünglichen Rechtecks $\sqsubset\!\!\!\sqsupset(L, W)$, der außerhalb des neuen Quadrats liegt, genau in dieses hinein und bildet so zusammen mit dem Teil, der an seinem Platz geblieben ist, ein Gnomon. In seiner ursprünglichen Lage erscheint dieser Teil leicht schattiert, in der neuen Lage dagegen dunkel schattiert.

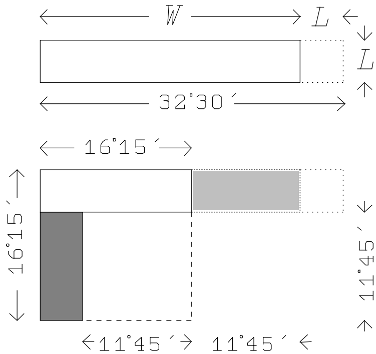


Abb. 4.1: Die cut-and-paste-Methode von TMS IX #3.

Ein Teil des neuen Quadrats □(16°15′) besteht aus dem Gnomon, dessen Fläche gleich derjenigen des ursprünglichen Rechtecks ▭(L, W) ist; dies Fläche ist daher 2`6. Wir kennen auch die Fläche des äußeren Quadrats, nämlich $16°15' \times 16°15 = 4`24°3'45''$ (Zeilen 40 und 41). Wenn das Gnomon „herausgerissen“ wird (Zeilen 41 und 42), bleibt $2`18°3'45''$ für das Quadrat, das im Gnomon enthalten ist. Dessen Seite (diejenige, welche „gleich ist“) ist 11°45′, und diese muss nun zu einem der Stücke 16°15′ „hinzugefügt“ (was uns W gibt) und aus dem anderen, seinem „Gegenstück“, „herausgerissen“ werden (was uns L gibt). Dieses Mal wird jedoch nicht *dasselbe* Stück „hinzugefügt“ und „herausgerissen“, und es gibt daher keinen Grund, es „herauszureißen“ bevor es „hinzugefügt“ wird, wie in YBC 6967 (Seite 52), und die übliche Priorität der Addition kann sich durchsetzen. Zeilen 43-44 finden $W = 28$ und $L = 4°30'$. Schließlich bestimmt der Text zuerst λ und ϕ, und dann ℓ und w – wir erinnern daran, dass $L = 3\lambda$, $\lambda = \ell + 1$, $W = 21\phi$ und $\phi = w + 1$ ist. Weil 28 kein IGI besitzt, erklärt Zeile 48, dass $21 \cdot 1°20' = 28$ ist.

AO 8862 #2

I

30. Länge, Breite. Länge und Breite
31. habe ich enthalten lassen: Eine Fläche habe ich gebaut.
32. Ich ging (um sie) herum. Die Hälfte der Länge
33. und ein Drittel der Breite

34. zum Innern der Fläche
35. habe ich hinzugefügt: 15.
36. Ich ging zurück. Länge und Breite
37. habe ich angehäuft: 7.

II

1. Länge und Breite was?
2. Du, in deinem Verfahren,
3. 2 (als) Einschreibung der Hälfte
4. und 3 (als) Einschreibung
5. des Drittels schreibe ein:
6. IGI 2, 30′, spalte ab:
7. 30′ Schritte von 7, 3°30′; zu 7,
8. den angehäuften Dingen, Länge und Breite,
9. bringe ich:
10. 3°30′ von 15, meinen angehäuften Dingen.
11. schneide ab:
12. 11°30′ der Rest.
13. Geh nicht darüber hinaus. 2 und 3 lasse enthalten:
14. 3 Schritte von 2, 6.
15. IGI 6, 10′ gibt es Dir.
16. 10′ von 7, deinen angehäuften Dingen,
17. Länge und Breite, reiße ich heraus:
18. 6°50′ der Rest.
19. Sein Halbes, das von 6°50′, breche ich ab:
20. 3°25′ gibt es Dir.
21. 3°25′ zwei Mal
22. schreibe ein; 3°25′ Schritte von 3°25′,
23. 11°40′25″; vom Innern
24. 11°30′ reiße ich heraus:
25. 10′25″ der Rest. ⟨Bei 10′25″, 25′ ist gleich ⟩.
26. Zum ersten 3°25′
27. 25′ füge hinzu: 3°50′,
28. und was von den angehäuften Dingen,
29. Länge und Breite, ich herausgerissen habe,
30. zu 3°50′ füge hinzu:
31. 4 die Länge. Von den zweiten 3°25′
32. 25′ reiße ich heraus: 3 die Breite.
32a. 7 die angehäuften Dinge.
32b. 4, die Länge; 3, die Breite; 12, die Fläche.

Die ersten beiden Wörter der ersten Zeile (I.30) sagen uns, dass wir es mit einer Figur zu tun haben, die durch Länge und Breite vollständig bestimmt ist, also mit einem Rechteck (siehe Seite 32 – oder eher mit einem rechteckigen Feld: Hinweise auf die Tätigkeiten eines Feldmessers sind im Text nicht zu übersehen (beispielsweise bedeutet *Ich ging (um es) herum* in Zeile I.32 vermutlich, dass der Feldmesser, nachdem er ein Feld abgesteckt hat, um dieses herumgelaufen ist; in I.36 *ging er zurück*).

Bevor wir das Verfahren untersuchen, wollen wir uns einige Besonderheiten der Formulierung des Texts genauer ansehen. In Zeile I.31 sehen wir, dass die Operation „enthalten lassen“ nicht unmittelbar ein numerisches Resultat ergibt – weil die Maße der Seiten noch unbekannt sind, wäre das in der Tat schwierig. Der Text sagt nur, dass eine „Fläche gebaut“ wurde; vermutlich ist das so zu verstehen, dass es auf dem Gelände abgesteckt worden ist. Später, wenn die beiden bekannten Strecken etwas „enthalten“ sollen (Zeilen II.13–14, und vielleicht II.21–22), erscheint die numerische Bestimmung der Fläche als eine davon verschiedene Operation, und wird mit den Worten von Multiplikationstabellen beschrieben. Schließlich bemerken wir, dass der Text das Ergebnis eines „Anhäufens“ im Plural angibt, übersetzt als „die angehäuften Dinge“, und dass das übliche alternierende Muster der grammatischen Person nicht respektiert wird.

Der Text, ziemlich sicher aus Larsa, scheint um 1750 v.Chr. verfasst worden zu sein und gehört daher zur frühen Phase der Übernahme der Algebra durch die südlichen Schreiberschulen (siehe Seite 116). Diese Besonderheiten können uns daher Informationen über die Ideen liefern, auf welchen diese aufgebaut war – solche Ideen sind schlechter sichtbar, sobald die Sprache und das Format standardisiert worden sind.

Das Thema der Aufgabe ist also ein Rechteck. Zeilen I.36–37 sagen uns, dass der „Haufen“ von Länge und Breite 7 ist, während die Zeilen I.32–35 sagen, dass das „Hinzufügen“ der halben Länge und eines Drittels der Breite zur „Fläche“ 15 ergibt:[2]

[2] Wir sollten bemerken, dass die Hälfte, die hier erscheint, wie jeder andere Bruch behandelt wird, gleichberechtigt mit dem darauf folgenden Drittel. Es ist nicht eine „Halbe“, und der Text findet das Resultat durch Multiplikation mit 30′, und nicht durch „zerbrechen“.

Wir sollten ebenfalls bemerken, dass die Hälfte der Länge und das Drittel der Breite zur Fläche „hinzugefügt“ werden und nicht angehäuft. Ein paar andere frühe Texte teilen diese Besonderheit. Es scheint, dass die Feldmesser sich „breite Linien“ vorgestellt haben, also Streifen, von denen stillschweigend angenommen wurde, dass sie 1 Längeneinheit Breite haben. Ein solches Vorgehen ist von vielen prä-modernen Feldmessertraditionen bekannt, und stimmt gut mit dem babylonischen Verständnis von Flächen als „dick“ überein, die mit einer impliziten Höhe von 1 KÙŠ versehen sind (wie in der Metrologie von Volumina vorgegeben, welche mit der von Flächen übereinstimmt – siehe Seite 20). Die „Projektion“ und „Basis“ von BM 13901 und TMS IX #1 sind vermutlich eigene Erfindungen der Schreiberschulen – verschiedener Schulen, und daher tatsächlich auch verschiede-

$$\square(\ell, w) + \tfrac{1}{2}\ell + \tfrac{1}{3}w = 15 \quad , \quad \ell + w = 7.$$

Der obere Teil von Abb. 4.2 illustriert diese Situation, mit 2 und 3 „als Beschriftung" von $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ der „Projektionen"[3] 1 von Länge und Breite „eingeschrieben" (Zeilen II.2–5); die dick gezeichnete Konfiguration hat daher eine Fläche von 15.

Die Lösung *hätte* dem Muster TMS IX #3 (Seite 63) folgen können. Durch die Einführung einer „erweiterten Länge" $\lambda = \ell + \frac{1}{3}$ und einer „erweiterten Breite" $\phi = w + \frac{1}{2}$, und durch Addition (nach der „akkadischen" Methode) des Rechtecks $\square(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, das in der Ecke fehlt, in der 2 und 3 „eingeschrieben" sind, hätten wir das Problem auf

$$\square(\lambda, \phi) = 15 + \square\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right) = 15°10', \lambda + \phi = 7 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} = 7°50'$$

reduziert.

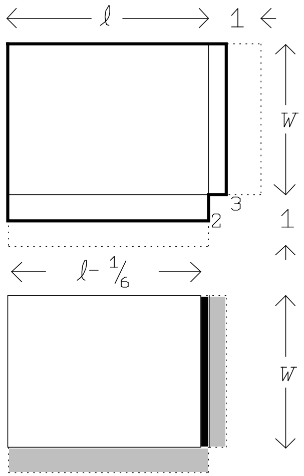


Abb. 4.2: Die Reduktion von AO 8862 #2.

Der vorliegende Text geht jedoch nicht so vor – die altbabylonische Algebra war ein flexibles Instrument, keine Sammlung von Rezepten oder Algorithmen, die

ne Wörter. Sie erlaubten, von Strecken als wirklich eindimensionalen Objekten zu denken und ihnen gleichzeitig die Verwandlung in Rechtecke mit Breite 1 zu erlauben.

[3]Die Abwesenheit dieses Begriffs im Text sollte uns nicht davon abhalten, ihn als technischen allgemeingültigen Ausdruck zu verwenden.

buchstabengetreu zu befolgen waren. Der Text findet die Hälfte von 7 (der Summe von Länge und Breite) und „bringt“ das Ergebnis zu den „angehäuften Dingen, Länge und Breite“. „Bringen“ ist keine neue arithmetische Operation – die Berechnung kommt später. Der Text muss wörtlich verstanden werden: das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(\ell + w, \frac{1}{2})$ (repräsentiert durch die Zahl 3°30′) wird *physisch* an den Platz gebracht, an dem sich Länge und Breite (welche die Breiten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ besitzen) befinden. Dadurch wird es möglich, das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(\ell + w, \frac{1}{2})$ „abzuschneiden“ – solange es anderswo war, hätte dies keinen Sinn gehabt. In Abb. 4.2 ist die Fläche, die eliminiert wird, schattiert und schwarz gezeichnet: der Rest, in weiß, ist dann gleich 11°30′.

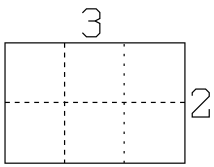


Abb. 4.3

Wir wissen also, dass wir, zusätzlich zu dem Drittel der Breite, ein Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(w, 10')$ (schwarz gezeichnet) eliminiert haben; mit $\lambda = \ell - 10'$ haben wir also

$$\lambda + w = 7 - 10' = 6°50' \quad , \quad \sqsubset\!\sqsupset(\lambda, w) = 11°30' .$$

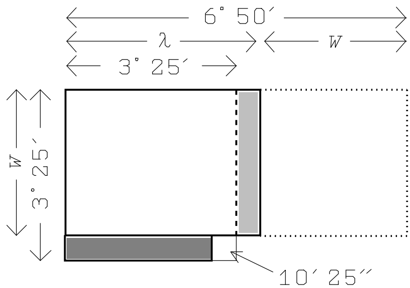


Abb. 4.4

Einmal mehr haben wir also ein Rechteck, von dem wir die Fläche und die Summe von Länge und Breite kennen. Das Verfahren ist dasselbe wie am Ende von TMS IX #3 – siehe Abb. 4.4; die Fläche, die verschoben werden soll, ist wieder leicht schattiert gezeichnet in der Lage, von wo sie weggenommen wird, und stark schattiert dort, wo sie hingeschoben wird. Der einzige Unterschied ist terminologischer Natur: in TMS IX #3 lässt man die beiden „Halben“ „enthalten“, hier werden sie „eingeschrieben“ – aber da unmittelbar darauf die Multiplikation einer Zahl mit einer Zahl folgt, dürfte hier die übliche Konstruktion eines Rechtecks (hier eines Quadrats) gemeint sein (Zeilen II.13–14).[4]

Am Schluss geht die Addition der Seite des Quadrats der Subtraktion voraus, ebenso wie in TMS IX #3. Einmal mehr wird bei diesen Operationen nicht dasselbe Stück verwendet; es gibt daher keinen Grund, es zur Verfügung zu stellen, bevor es addiert wird.

VAT 7532

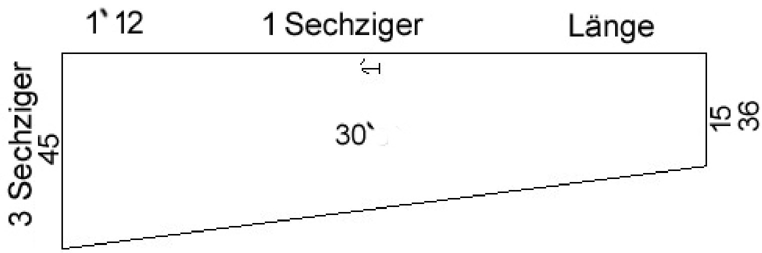


Abb. 4.5: Das Diagramm von VAT 7532. Die „obere Breite“ ist links zu sehen.

Vs.

1. Ein Trapez. Ich habe ein Schilfrohr geschnitten. Ich habe das Schilfrohr genommen,
2. 1 Sechzig längs der Länge bin ich gegangen. Der 6te Teil
3. ist mir abgebrochen: 1ˋ12 entlang der Länge bin ich weitergegangen.
4. Ich bin umgekehrt. Der 3te Teil und $\frac{1}{3}$ KÙŠ sind mir abgebrochen:
5. 3 Sechzig entlang der oberen Breite bin ich gegangen.
6. Mit dem Abgebrochenen habe ich es verlängert:

[4] Wir können nicht wirklich ausschließen, dass der Text nicht direkt die Konstruktion beschreibt, sondern sich zweimal auf die Einschreibung von 3°25′ auf einer Hilfstafel bezieht, gefolgt vom numerischen Produkt – siehe oben, Fußnote 11, Seite 25; in diesem Fall würde die Konstruktion selbst implizit geblieben sein, so wie die numerische Berechnung in anderen Texten. Selbst das „Einschreiben“ von 2, gefolgt von seinem IGI (II.3 und 6), könnte sich auf eine derartige Hilfstafel beziehen. In diesem Fall würde man aber erwarten, dass die „Abspaltung“ des IGI dem Einschreiben unmittelbar folgt; außerdem folgt auf das Einschreiben der 3 in Zeile II.4 überhaupt keine „Abspaltung“ dessen IGI, was dann gegen diese Lesart der Zeilen II.3–6 und II.21–22 spricht.

7. 36 bin ich entlang der Breite gegangen. 1 BÙR die Fläche. Der Kopf (ursprüngliche Größe) des Schilfrohrs, was?
8. Du, bei Deinem Verfahren, (für) das Schilfrohr, das Du nicht kennst,
9. 1 mögest Du setzen. Dessen 6ten Teil brich ab, 50′ lässt Du zurück.
10. IGI 50′ spalte ab, 1°12′ auf 1 Sechzig erhöhe:
11. 1‵12 zu ⟨1‵12⟩ füge hinzu: 2‵24 die falsche Länge gibt es Dir.
12. Für das Schilfrohr, das Du nicht kennst, 1 setze. Dessen 3ten Teil brich ab,
13. 40′ auf 3 Sechziger der oberen Breite erhöhe:
14. 2‵ gibt es Dir. 2‵ und 36, die untere Breite, häufe an,
15. 2‵36 auf 2‵24, die falsche Länge, erhöhe, 6‶14‵24 die falsche Fläche.
16. Die Fläche bis 2 wiederhole, 1‶ auf 6‶14‵24 erhöhe,
17. 6‵‵‵‵14‷24‶ ergibt es. Und $\frac{1}{3}$ KÙŠ, was abgebrochen ist,
18. auf 3 Sechziger erhöhe: 5 auf 2‵24, die falsche Länge,
19. erhöhe: 12‵. $\frac{1}{2}$ von 12‵ brich ab, 6‵ lass enthalten,

Rs.

1. 36‶ zu 6‵‵‵‵14‷24‶ füge hinzu, 6‵‵‵‵15‷ ergibt es.
2. Bei 6‵‵‵‵15‷, 2‶30′ ist gleich. 6‵ welche du zurückgelassen hast,
3. zu 2‶30‵ füge hinzu, 2‶36‵ ergibt es. IGI 6‶14‵24,
4. die falsche Fläche, kenne ich nicht. Was muss ich zu 6‶14‵24
5. setzen, das mir 2‶36 gibt? 25′ setze.
6. Weil der 6te Teil zuvor abgebrochen ist,
7. 6 schreibe ein: 1 lass weggehen, 5 bleibt Dir.
8. ⟨IGI 5 spalte ab, 12′ zu 25 erhöhe, 5′ gibt es Dir ⟩. 5′ zu 25′ füge hinzu: $\frac{1}{2}$ NINDAN, den Kopf des Schilfrohrs gibt es Dir.

Dieses Problem handelt ebenfalls von einer Fläche – allerdings einer Fläche, welche einem Feldmesser nur im Traum begegnet (genauer in einem Alptraum). Das „wirkliche Leben“ kommt durch den Bezug auf die Einheit BÙR ins Spiel, einer Einheit aus der landwirtschaftlichen Verwaltung, und durch den Bezug auf die Messung mittels eines Schilfrohrs, welches für diesen Zweck geschnitten wurde; dessen Länge ($\frac{1}{2}$ NINDAN) entspricht in der Tat einer Maßeinheit, die im täglichen Leben oft verwendet wurde, und die genau als „Schilfrohr“ bezeichnet wurde (GI auf Sumerisch). Man darf davon ausgehen, dass solche Schilfrohre leicht brechen. Schließlich zeigt uns der Gebrauch des Zahlworts „sechzig“ eine Möglichkeit, Zahlen eindeutig auszudrücken.

Alles andere jedoch – dass also die Fläche des Feldes bekannt ist, bevor sie gemessen wird, und auch die Art, die Maße der vom Schilfrohr abgebrochen Stücke anzugeben – zeigt, zu welchen Mitteln die altbabylonischen Schulmeister greifen mussten, um Probleme zweiten Grades zu erzeugen, die den Anschein erwecken, dem täglichen Leben entnommen zu sein.

Abbildung 4.5 zeigt ein Diagramm, das ausnahmsweise auf der Tafel selbst zu finden ist. Im allgemeinen, wie auch hier, werden Diagramme nur auf Tafeln gezeichnet, wenn sie dazu dienen, die Aussage zu präzisieren; sie werden nie genutzt um das Verfahren zu erklären. Zum Anderen zeigt Abbildung 4.5 einmal mehr, dass die Lösung im Voraus bekannt ist: Die Zahlen 1`, 45 und 15 sind in der Tat die Maße der Seiten, ausgedrückt in NINDAN.

Wir messen also das Trapez mittels eines Schilfrohrs unbekannter Länge R. Wir schaffen es, 1` Schilfrohrlängen entlang der Länge des Trapezes zu messen, bevor das Schilfrohr ein Sechstel seiner Länge verliert und auf $r = \frac{5}{6}R$ reduziert wird. Was von der Länge bleibt, stellt sich als 1`12r heraus (Zeilen Vs. 2-3).

Dann bricht das Schilfrohr zum zweiten Mal. Nach den Zeilen Vs. 4 und 5 ist das Maß für die „obere Breite" (auf der linken Seite)[5] gleich 3`z, wobei $z = \frac{2}{3}r - \frac{1}{3}$ KÙŠ die Länge des Schilfrohrs nach dieser zweiten Reduktion ist.

Das Stück, das zuletzt abgebrochen ist, wird wieder an seinen Platz gesetzt, und die „(untere) Breite" (offensichtlich diejenige auf der rechten Seite) wird als 36 r abgeschritten (Zeile Vs. 7). Schließlich erfahren wir, dass die Fläche des Feldes 1 BÙR = 30` SAR (1 SAR = 1 NINDAN^2, siehe Seite 20) ist. Wir sollen die ursprüngliche Länge des Schilfrohrs finden – seinen „Kopf" im Sinne von „Anfang".

Die Zeilen Vs. 9-11 bestimmen die Länge in der Einheit r durch einen falschen Ansatz: wenn R gleich 1 gewesen wäre, dann wäre r gleich 50′; R muss umgekehrt r multipliziert mit IGI 50′ = 1°12′ entsprechen. 1` Schritte von $R$ entsprechen somit 1`12 · r, und die Gesamtlänge wird

$$1`12 \cdot r + 1`12 \cdot r = 2`24 \cdot r.$$

Der Text spricht von 2`24 als der „falschen Länge", also der Länge, welche in der Einheit Einheit r ausgedrückt wird.

Ein weiterer falscher Ansatz wird in Zeile Vs. 12 angewandt. Der Text nimmt 1 für die Länge r des einmal gekürzten Schilfrohrs und folgert, dass das, was nach dem Verlust von $\frac{1}{3}$ übrig bleibt, gleich 40′ sein muss. Sieht man von dem zusätzlichen Verlust von $\frac{1}{3}$ KÙŠ ab, ist die falsche obere Breite (die obere Breite gemessen in der Einheit r) demnach 40′ multipliziert mit 3 Sechzigern, also 40′·3` = 2`. Mit

[5] Die Lage der „oberen" Breite auf der linken Seite eine Folge der neuen Ausrichtung der Keilschrift (eine Drehung von 90° gegen den Uhrzeigersinn), die im Kasten „Keilschrift" erwähnt wird. Die Drehung der Tafeln fand weit vor der altbabylonischen Epoche statt; als Folge davon schrieb man dann von links nach rechts. Aber die altbabylonischen Schreiber wussten genau, dass die *wahre* Richtung vertikal nach unten war - feierliche Inschriften auf Stein (zum Beispiel das Gesetz von Hammurabi) wurden noch in diesem Stil geschrieben. Es kann gut sein, dass die Schreiber ihre Tafeln zum Lesen um 90° im Uhrzeigersinn gedreht haben.

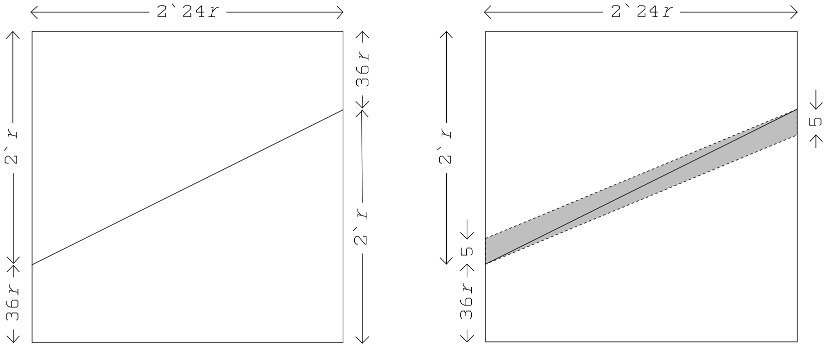


Abb. 4.6: Das verdoppelte Trapez von VAT 7532.

anderen Worten, die obere Breite misst 2`r – immer noch unter Vernachlässigung des fehlenden Stücks von $\frac{1}{3}$ KÙŠ.

Weil Zeile Vs. 7 anzeigt, dass die falsche (untere) Breite 36 ist, kennen wir – unter demselben Vorbehalt bezüglich der fehlenden $\frac{1}{3}$ KÙŠ – die drei Seiten, was uns die Bestimmung der Fläche des Trapezes in der Einheit $\square(r)$ erlaubt.

Der Text berechnet diese Fläche jedoch nicht: *Die Fläche bis 2 wiederhole.* Stattdessen verdoppelt er das Trapez, sodass ein Rechteck entsteht (siehe den linken Teil von Abbildung 4.6), und die Zeilen Vs. 14-16 berechnen die Fläche dieses Rechtecks (die „falsche Fläche"); es ergibt sich 6``14`24 (in der Einheit $\square(r)$).

Wenn das Schilf nicht ein letztes Stück von $\frac{1}{3}$ KÙŠ verloren hätte, könnten wir jetzt die Lösung durch einen letzten falschen Ansatz ähnlich demjenigen von BM 13901 #10 (siehe Seite 52) finden: gemäß der Zeile Vs. 7 beträgt die Fläche des Feldes 1 BÙR, die verdoppelte Fläche daher BÙR = 1`` NINDAN$^2$ (Vs. 16: *Die Fläche bis 2 wiederhole, 1``*). Allerdings liegen die Dinge hier etwas komplizierter. Für jeden der 3` Schritte, welche wir mit dem zweimal verkürzten Schilfrohr gemacht haben, fehlt ein Stück von $\frac{1}{3}$ KÙŠ in unserer Rechnung; das macht insgesamt also 3` $\cdot$ $\frac{1}{3}$ KÙŠ = 1` KÙŠ = 5 NINDAN (1 KÙŠ = $\frac{1}{12}$ NINDAN): *Und $\frac{1}{3}$ KÙŠ, welches abgebrochen ist, auf 3 Sechziger erhöhe: 5* (Vs. 17–18). Daher entspricht die Fläche des echten Feldes nicht dem, was wir links in Abbildung 4.6 sehen, sondern dem, was nach der Abspaltung des schattierten Streifens auf der rechten Seite übrig bleibt. Die Fläche dieses Streifens ist 5 $\cdot$ 2`24$r$ $=$ 12`r: *5 auf 2`24, die falsche Länge, erhöhe: 12`*. Die Beziehung zwischen der „falschen Fläche" und der des verdoppelten echten Trapezes kann nun durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24\square(r) - 12^{\backprime}r = 1^{\backprime\backprime}.$$

Diese nicht-normierte Gleichung wird auf die übliche Weise gelöst. Zuerst wird sie multipliziert mit $6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24$: *$1^{\backprime\backprime}$ auf $6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24$ erhöhe: $6^{\backprime\backprime\backprime\backprime}14^{\backprime\backprime\backprime}24^{\backprime\backprime}$ ergibt es* (Vs. 16–17). Dies führt zur normalisierten Gleichung

$$\square(6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24r) - 12^{\backprime} \cdot (6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24r) = 6^{\backprime\backprime\backprime\backprime}14^{\backprime\backprime\backprime}24^{\backprime\backprime}$$

oder, mit $s = 6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24r$ r als Unbekannter,

$$\square(s) - 12s = 6^{\backprime\backprime\backprime\backprime}14^{\backprime\backprime\backprime}24^{\backprime\backprime}.$$

Ab hier stimmt das Verfahren mit dem von BM 13901 #2 (Seite 49) überein, mit einer kleinen Abweichung am Ende. Die Rechnungen können in Abbildung 4.7 verfolgt werden.

Die Fläche $6^{\backprime\backprime\backprime\backprime}14^{\backprime\backprime\backprime}24^{\backprime\backprime}$ entspricht dem Rechteck mit (der Höhe) s und der Breite $s - 12^{\backprime}$. Die Hälfte des Überschusses der Höhe über die Breite wird „abgebrochen“ und, wie im Diagramm zu sehen, neu positioniert: die ursprüngliche Position ist leicht, die neue stark schattiert. Die Konstruktion der quadratischen Ergänzung wird mit einem der Synonyme von „enthalten lassen“ beschrieben, nämlich mit „zusammentreffen lassen“ (Vs. 19).

Nach den üblichen Operationen finden wir $s = 6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24\ r = 2^{\backprime\backprime}36^{\backprime}$, und in Zeile Rs. 5 $r = 25'$. Wir stellen jedoch fest, dass das „Halbe“, das herumbewegt worden ist, nicht wieder in seine ursprüngliche Lage zurückgesetzt wird, was s in der vertikalen Richtung wieder hergestellt hätte. Stattdessen wird das andere „Halbe“, die ursprünglich an ihrem Platz gelassen wurde, jetzt ebenfalls bewegt, was eine horizontale Wiederherstellung von $s = 6^{\backprime\backprime}14^{\backprime}24\ r = 2^{\backprime\backprime}36$ erlaubt: *$6^{\backprime}$, was du liegen lassen hast, zu $2^{\backprime\backprime}30^{\backprime}$ füge hinzu, $2^{\backprime\backprime}36^{\backprime}$ ergibt es.*[6]

In den Zeilen Rs. 6–8 führt der Rechner einen dritten falschen Ansatz durch: wenn R gleich 6 gewesen wäre, dann wäre r gleich 5. Die Differenz 1 von R und r ist $\frac{1}{5}$ von r oder $12'$ mal r. Jetzt folgt der wahre Wert r zu $25'$; um R zu erhalten müssen wir also $12' \cdot 25' = 5'$ dazu „hinzufügen“. Folglich ist $R = 25' + 5' = 30' = \frac{1}{2}$ NINDAN.

[6] Diese Unterscheidung zwischen den beiden Halben, von denen eine „(liegen) gelassen“ wird, ist bemerkenswert als weiterer Beweis der geometrischen Interpretation – diese Nomenklatur macht absolut keinerlei Sinn, wenn man sie nicht im räumlichen Sinne versteht.

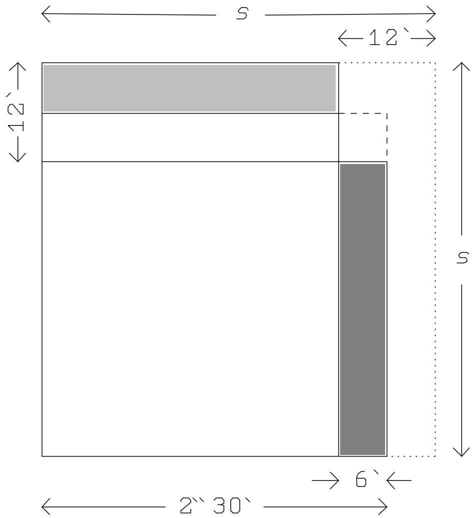


Abb. 4.7

Man könnte glauben, dass dieser Problemtyp zu den absoluten Favoriten der altbabylonischen Lehrer für anspruchsvolle Mathematik zählt. Wir kennen vier Varianten, die sich in der Wahl der numerischen Parameter unterscheiden. Sie alle gehören jedoch zu nur zwei Tafeln, die eine Reihe von terminologischen Besonderheiten gemeinsam haben – zum Beispiel, die Verwendung des Logogramms $\frac{1}{2}$ für das „Halbe“, und die Angewohnheit, dass die Ergebnisse „gegeben“ sind, und nicht etwa „gesehen“ werden oder „aufkommen“. Sicherlich sind beide Tafeln Produkte aus der gleichen Gegend und derselben lokalen Tradition (der Rechtschreibung nach aus der Gegend von Uruk), und sie kommen wahrscheinlich aus der gleichen Schule oder sind sogar von der gleichen Hand geschrieben worden. Eine einfachere Variante mit einem rechteckigen Feld findet sich jedoch in einem früheren Text aus dem Norden und auch in einem Text, welcher mit der Variante mit dem Trapez zusammengehört. Wenn das abgebrochene Schilfrohr nicht *das* Lieblingsproblem ist, dann doch *eines*.

TMS XIII

Wie TMS VII #2 ist auch dieses Problem recht schwierig. Es präsentiert ein erstaunliches Beispiel einer Anwendung der geometrischen Technik auf eine nichtgeometrische Frage.

1. 2 GUR 2 PI 5 BÁN Öl habe ich gekauft. Von was ich für 1 Schekel Silber gekauft habe,
2. 4 SILÀ jedes (Schekel) Öl habe ich weggenommen.
3. $\frac{2}{3}$ Minen Silber Profit habe ich gesehen. Entsprechend wozu
4. habe ich gekauft und entsprechend wozu habe ich verkauft?
5. Du 4 SILÀ Öl setze und 40, (von der Größenordnung der) Mine, als Profit setze.
6. IGI 40 spalte ab, $1'30''$ siehst Du, $1'30''$ auf 4 erhöhe, $6'$ siehst Du.
7. $6'$ auf 12`50, das Öl, erhöhe, 1`17 siehst Du.
8. $\frac{1}{2}$ von 4 brich ab, 2 siehst Du, 2 lasse enthalten, 4 siehst Du.
9. 4 zu 1`17 füge hinzu, 1`21 siehst Du. Wobei ist es gleich? 9 ist gleich.
10. 9 die Gegenseite setze. $\frac{1}{2}$ von 4, was du weggenommen hast, brich ab, 2 siehst Du.
11. 2 zu der ersten 9 füge hinzu, 11 siehst Du; von der zweiten reiße es ab,
12. 7 siehst Du. 11 SILÀ jedes (Schekel) hast Du gekauft, 7 SILÀ hast Du verkauft.
13. Silber entspricht was? Was zu 11 ¿SILÀ? kann ich setzen
14. was 12`50 Öl ergibt? 1`10 setze, 1 Mine 10 Schekel Silber.
15. Durch 7 SILÀ jedes (Schekel) was du an Öl verkauft hast,
16. das von 40 Silber entspricht was? 40 auf 7 erhöhe,
17. 4`40 siehst Du, 4`40 Öl.

Das ist ein weiteres Problem, welches bei oberflächlichem Lesen den Eindruck erweckt, als ginge es um eine echte Aufgabe aus der (hier kommerziellen) Praxis. Bei näherer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, dass es genauso künstlich ist wie das vorherige Problem des abgebrochenen Schilfrohrs: Ein Händler hat $M =$ 2 GUR 2 PI 5 BÁN (= 12`50 SÌLA) feines Öl (wahrscheinlich Sesamöl) gekauft. Uns wird nicht gesagt, wie viel er zahlte, aber der Text informiert uns, dass er von dem Öl, das er für einen Schekel (a) gekauft hat, 4 SÌLA abgezogen hat: Was er für einen Schekel gekauft hat, können wir a nennen. Dann verkauft er für einen Schekel $v = a - 4$ (beide in Einheiten SÌLA). Dabei hat er einen Gewinn von $\frac{2}{3}$ *mina* = 40 Schekel Silber gemacht. Hier sind a und v die Reziproken der beiden Preise – wir dürfen von ihnen als „Raten“ des Kaufs und Verkaufs sprechen. Für uns, die wir mit algebraischer Symbolik vertraut sind, ist es leicht zu erkennen, dass der Gesamtkaufpreis (die Investition) $M \div a$, der Gesamtverkaufspreis $M \div v$, und der Gewinn folglich $w = (M \div v) - (M \div a)$ sein muss. Multipliziert man mit $a \cdot v$, so erhält man die Gleichung

$$M \cdot (a - v) = w \cdot av,$$

und wegen $v = a - 4$ das System

$$a - v = 4, \qquad a \cdot v = (4M) \div w.$$

Diese System, das vom selben Typ ist wie das *igûm-igibûm* Problem (Seite 52) auf YBC 6967, ist in der Tat dasjenige, das ab Zeile 8 gelöst wird. Doch es wurde sicherlich nicht in der eben beschriebenen Weise erreicht: Einerseits, weil die Babylonier nicht unsere symbolische Algebra hatten, andererseits hätten sie dann die Größe $(4M) \div w$ gefunden und eben nicht $(4 \div w) \cdot M$.

Der Hinweis auf ihre Methode taucht gegen Ende des Textes auf. Hier findet der Text zuerst die Gesamtinvestition und als nächstes den Gewinn *in Öl* (4`40 SÌLA). Diese Berechnungen stellen keinen Beweis dar, da diese Größen nicht gegeben waren. Nach ihnen ist aber auch nicht gefragt. Sie müssen interessant sein, weil sie bei der Suche nach der Lösung eine Rolle gespielt haben.

Abbildung 4.8 zeigt eine mögliche und im Prinzip plausible Interpretation. Die Gesamtmenge des Öls wird durch ein Rechteck dargestellt, dessen Höhe dem Gesamtverkaufspreis in Schekel und dessen Breite der „Verkaufsrate“ v (SÌLA pro Schekel) entspricht. Der gesamte Verkaufspreis kann in den Gewinn (40 Schekel) und die Investition (Kaufpreis) eingeteilt werden, und die Ölmenge in ähnlicher Weise in den Ölgewinn und in die Menge, deren Verkauf die Investition zurückbringt.

Das Verhältnis zwischen den beiden letzten Größen muss mit dem Verhältnis übereinstimmen, in das die für einen Schekel gekaufte Menge geteilt wurde, also mit dem Verhältnis zwischen 4 SÌLA und dem, was für 1 Schekel verkauft wird (also v).

Ändert man den vertikalen Maßstab mit einem Faktor, der 40 auf 4 verringert, also um einen Faktor $4 \div w = 4 \div 40 = 6'$, dann wird die Investition auf v verringert, und die Fläche auf $(4 \div w) \cdot M = 1`17$. Auf diese Weise erhalten wir das Rechteck auf der rechten Seite, von dem wir die Fläche ($a \cdot v = 1`17$) und die Differenz zwischen den Seiten ($a - v = 4$) kennen, genau so, wie es sein soll. Außerdem folgen wir dem Text in der Reihenfolge der Operationen, und der Profit beim Ölverkauf sowie die Investition spielen eine Rolle.

Insgesamt folgt der letzte Teil des Verfahrens dem Modell von YBC 6967 (und von anderen Problemen desselben Typs). Der einzige Unterschied taucht in Zeile 10 auf: Anstatt das „Halbe“ von $a - v$ zu benutzen, das wir in Zeile 8

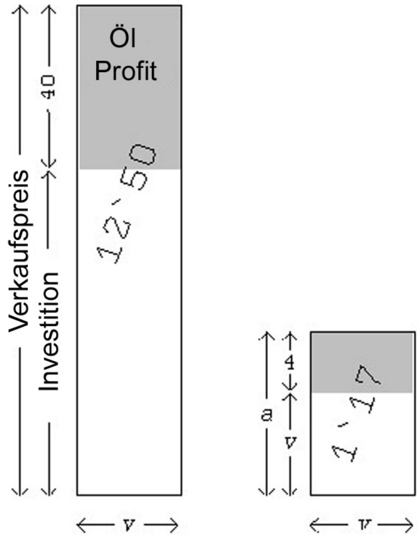


Abb. 4.8: Geometrische Darstellung von TMS XIII.

„enthalten lassen“ haben, wird $a - v$ ein zweites Mal „gebrochen“. Dies erlaubt uns zuerst das „Hinzufügen“ (das, was hinzugefügt wird, liegt schon vor) und dann das anschließende „ausreißen“.

Bei der *igûm-igibûm*-Aufgabe auf YBC 6967 (Seite 52) haben die geometrischen Größen andersartige Größen repräsentiert, nämlich abstrakte Zahlen. Im vorliegenden Fall ist die Darstellung raffinierter: eine Seite repräsentiert eine Menge an Silber, die andere die Menge an Öl, welche einem Schekel Silber entspricht.

BM 13901 #12

Vs. II

27. Die Flächen meiner beiden Gegenseiten habe ich angehäuft: $21'40''$.
28. Meine Gegenseiten habe ich enthalten lassen: $10'$.
29. Das Halbe meiner $21'40''$ brichst Du: $10'50''$ und $10'50''$ lässt Du enthalten,
30. $1'57''21\{+25\}'''40''''$[7] ist es. $10'$ und $10'$ machst Du enthalten, $1'40''$

[7] In Zeile 30 des Textes steht fälschlich $1'57''46'''40''''$ statt $1'57''21'''40''''$: offenbar wurde ein Teilprodukt 25 aus Versehen doppelt addiert. Dies zeigt, dass die Rechnung mit einem Hilfsmittel gemacht

31. aus $1'57''21\{+25\}'''40''''$ reißt Du heraus: bei $17''21\{+25\}'''40''''$, $4'10''$ ist gleich.
32. $4'10''$ zum einen $10'50''$ fügst Du hinzu: bei $15'$, $30'$ ist gleich.
33. $30'$ die erste Gegenseite.
34. $4'10''$ aus dem zweiten $10'50''$ reißt Du heraus: bei $6'40''$, $20'$ ist gleich.
35. $20'$ die zweite Gegenseite.

Mit diesem Problem verlassen wir den Bereich der pseudo-praktischen Aufgaben und kehren zur Geometrie abgemessener geometrischer Größen zurück. Bei dem Problem, das wir betrachten werden, werden wir auf einen möglicherweise noch bemerkenswerteren Fall von Darstellung treffen.

Dieses Problem stammt aus der Aufgabensammlung über Quadrate, aus der wir uns schon einige Male bedient haben. Das hier vorliegende Problem dreht sich um zwei Quadrate; die Summe ihrer Flächen ist gegeben, ebenso wie die Fläche des Rechtecks, das die beiden „Gegenseiten“ c_1 und c_2 „enthalten“ (siehe Abb. 4.9):

$$\square(c_1) + \square(c_2) = 21'40'' \quad , \quad \sqsubset\!\sqsupset(c_1, c_2) = 10'.$$

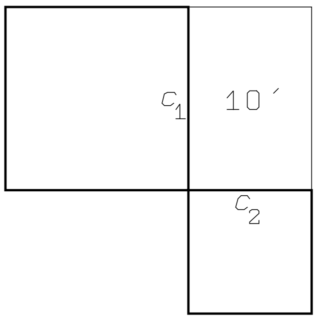


Abb. 4.9: Die beiden Quadrate und das Rechteck von BM 13901 #12.

Dies Aufgabe hätte mit den Methoden der Figur in Abb. 4.10 gelöst werden können, das anscheinend bereits für die Lösung des Problems #8 derselben Tafel benutzt wurde, welches symbolisch wie folgt formuliert werden kann:

worden ist, bei welchem Teilprodukte nach der Addition nicht mehr sichtbar waren. Damit ist eine schriftliche Rechnung auf einer Tontafel ausgeschlossen und legt die Benutzung einer Art Rechenbrett (Abakus) nahe.

Der Fehler wird in die darauffolgenden Zeilen übernommen, verschwindet aber beim Ziehen der Quadratwurzel in Zeile 31, welche daher schon im Voraus bekannt gewesen sein musste.

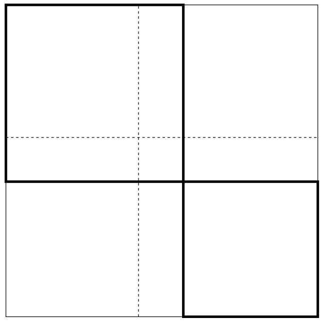


Abb. 4.10: Das Diagramm zur Lösung von BM 13901 #8.

$$\square(c_1) + \square(c_2) = 21'40'' \quad , \quad c_1 + c_2 = 50'.$$

Der Autor wählt jedoch eine andere Methode und unterstreicht so die Flexibilität der algebraischen Technik. Er nimmt die beiden *Flächen* $\square(c_1)$ und $\square(c_2)$ als die *Seiten* eines Rechtecks, dessen Fläche er findet, indem er $10'$ und $10'$ „enthalten lässt“ (siehe Abb. 4.10):

$$\square(c_1) + \square(c_2) = 21'40'' \quad , \quad \sqsubset\!\sqsupset(\square(c_1), \square(c_2)) = 10' \times 10' = 1'40''.$$

Trotz des geometrischen Charakters der Operationen war es den Babyloniern durchaus bewusst, dass die Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten die Quadrate $\square(c_1)$ und $\square(c_2)$ sind, mit dem eines Quadrats zusammenfällt, dessen Seite das Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(c_1, c_2)$ ist – dies entspricht unserer algebraischen Regel $p^2 \cdot q^2 = (pq)^2$.

Jetzt haben wir ein Rechteck, für das wir die Fläche und die Summe der beiden Seiten kennen, wie in den Aufgaben TMS IX #3 (Seite 63) und AO 8862 #2 (Seite 66). Die Lösung folgt demselben Muster, aber mit einem unvermeidlichen Unterschied: dieses Verfahren kann uns nur $\square(c_1)$ und $\square(c_2)$ geben. Zur Berechnung von c_1 und c_2 müssen wir noch herausfinden, „wobei sie gleich“ sind. Die Rechnungen kann man in Abb. 4.11 verfolgen.

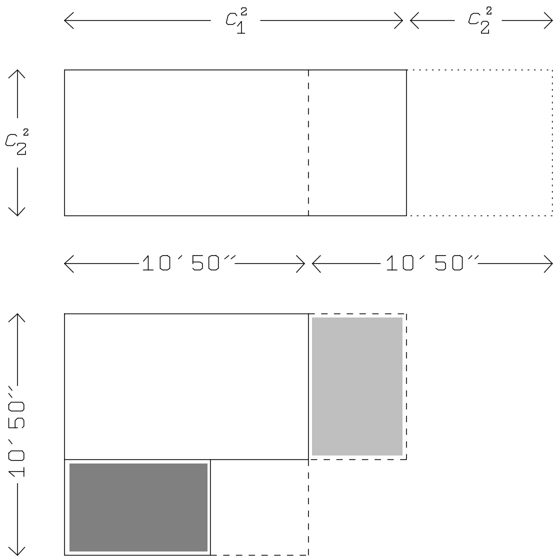


Abb. 4.11: Die bei der Lösung des Rechteckproblems benutzte Prozedur.

Bei diesem Problem ist die Tatsache beachtenswert, dass hier *Flächen* durch Strecken und und das *Quadrat der Fläche* durch eine Fläche dargestellt wird. Zusammen mit andern Beispielen von Darstellungen, die wir schon angetroffen haben, wird dieses Beispiel uns erlauben, die altbabylonische Technik auf Seite 105 als eine *echte Algebra* zu charakterisieren.

BM 13901 #23

Rs. II

11. Über eine Fläche; die vier Breiten und die Fläche habe ich angehäuft, 41′40″.
12. 4, die vier Breiten, schreibe ein. IGI 4 ist 15′.
13. 15′ auf 41′40″ erhöhe: 10′25″ schreibe ein.
14. 1, die Projektion, füge hinzu: bei 1°10′25″, 1°5′ ist gleich.
15. 1, die Projektion, welche Du hinzugefügt hast, reiße heraus: 5′ bis zwei
16. wiederhole: 10′, NINDAN, steht sich gegenüber.

Während das vorherige Problem den „modernen“ Aspekt der altbabylonischen Mathematik unterstreicht, scheint dieses hier die archaische Seite zu betonen – obwohl sie beide von derselben Tafel stammen.

Dies ist kein wirklicher Widerspruch. Das vorliegende Problem #23 ist *absichtlich* archaisch. Mit anderen Worten ist es *archaisierend* und nicht wirklich archaisch, was sein Auftauchen zusammen mit „modernen“ Aufgaben in derselben Sammlung erklärt. Der Autor ist nicht gleichzeitig modern und archaisch, vielmehr zeigt es seine Virtuosität, indem er mit Archaismen spielt. Die hier gewählten Formulierungen scheinen gewissermaßen den Tonfall der akkadischen Feldmesser zu imitieren Der Text spricht von der *Breite* eines Quadrats, nicht von seiner „Gegenseite“; außerdem erscheint dieses Wort in Silbenschrift, was ziemlich außergewöhnlich ist (siehe Fußnote 4, Seite 20).

Die einführende Phrase „Über eine Fläche“[8] scheint eine Abkürzung der charakteristischen Formel zu sein, die mathematische Rätsel einleitet: „Wenn Dich jemand über eine Fläche fragt …“ (siehe die Seiten 38, 116, 118 und 134). Der Ausdruck „die vier Breiten“[9] zeugt von einem Interesse an dem, was *wirklich da* und *auffällig* ist, ein Interesse, das Rätsel im Allgemeinen und mathematische Rätsel im Besonderen charakterisiert, die unter den mathematischen Praktikern der vor-modernen Welt (siehe Seite 112) zirkuliert sind. Sogar die benutzte Methode ist typisch für Rätsel: der Gebrauch eines erstaunlichen Kunstgriffs, der sich nicht leicht verallgemeinern lässt.

Das Problem kann daher wie folgt formuliert werden:

$$4c + \square(c) = 41'40''.$$

Abb. 4.12 macht das Verfahren klar: $4c$ wird durch 4 Rechtecke $\sqsubset\!\sqsupset(1, c)$ dargestellt; die Summe $41'40''$ entspricht daher der kreuzförmigen Figur bei der eine „Projektion“ in jede der vier Himmelsrichtungen verläuft.

Zeilen 12-13 verlangen, $\frac{1}{4}$ des Kreuzes (mit gestrichelten Linien dargestellt) herauszuschneiden und eine quadratische Ergänzung $\square(1)$ zum daraus resultierenden Gnomon „hinzuzufügen“. Es gibt keinen Grund, etwas „enthalten zu lassen“, weil die Seiten des ergänzenden Quadrats bereits an der richtigen Stelle sind. Wir bemerken allerdings, dass die „Projektion“ selbst „hinzugefügt“ wird:

[8] Im Original ist das Wort „Fläche“ durch eine phonetische Ergänzung markiert, die den Akkusativ anzeigt. Ein Akkusativ in dieser Position hat keine Parallele, und scheint keine andere Interpretation zu erlauben als die hier gegebene.

[9] Hier entspricht der bestimmte Artikel tatsächlich dem Akkadischen, nämlich zu einem Ausdruck der nur benutzt wird, um über eine untrennbare Vielfachheit (so wie die „vier Enden der Erde“ oder „die sieben Todsünden“) zu reden.

es ist also keine bloße Zahl mehr, sondern eine quadratische Figur identifiziert durch ihre Seite.

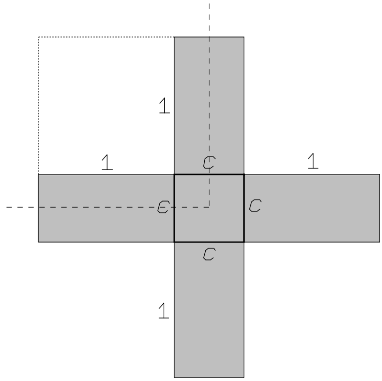


Abb. 4.12: Das Verfahren von BM 13901 #23.

Die Vervollständigung des Gnomons ergibt ein Quadrat der Fläche 1°10′25″ und damit der Seite 1°5′. Durch das „Herausreißen" der „Projektion" – hier als eindimensionale Größe – finden wir 5′. Verdoppeln des Ergebnisses liefert die Seite 10′. Auch hier vermeidet der Text den üblichen Ausdruck und spricht nicht von einer „Gegenseite" wie die „modernen" Aufgaben der Sammlung, sondern sagt stattdessen, dass 10′ NINDAN „sich gegenüber stehen".

Die Methode ist derart verschieden von allen anderen Texten, dass Neugebauer glaubte, es wäre das Resultat einer Vermischung zweier Aufgaben durch einen Kopisten, die zufällig einen mathematischen Sinn ergibt. Wie wir unten sehen werden (Seite 115), ist die Erklärung eine ganz andere.

Der archaisierende Aspekt, das sei noch bemerkt, dominiert nicht vollständig. Zeile 12, welche zuerst das „Einschreiben" der 4 verlangt und danach sein IGI angibt, scheint die Operationen zu beschreiben, die in der Schule unterrichtet und auf einer Hilfstafel gemacht wurden (siehe Fußnote 4, Seite 71, und Seite 126).

TMS VIII #1

1. Die Fläche 10′. Das 4tel der Breite zur Breite habe ich hinzugefügt, bis 3 bin ich gegangen, über
2. die Länge geht es 5′ hinaus. Du, 4, vom Viertel, so viel als Breite setze. Das Viertel von 4 nimm, 1 siehst Du.
3. 1 bis 3 gehe, 3 siehst Du. 4 Viertel der Breite zu 3 füge hinzu, 7 siehst Du.

4. 7 so viel als Länge setze. $5'$, das darüber Hinausgehende, zum Herauszureißenden der Länge setze. 7, von der Länge, auf 4, ¿von der Breite?, erhöhe,
5. 28 siehst Du. 28, von den Flächen, auf $10'$ die Fläche erhöhe, $4°40'$ siehst Du.
6. $5'$, das Herauszureißende der Länge, auf vier, von der Breite, erhöhe, $20'$ siehst Du. $\frac{1}{2}$ breche, $10'$ siehst Du. $10'$ lasse enthalten
7. $1'40''$ siehst Du. $1'40''$ zu $4°40'$ füge hinzu, $4°41'40''$ siehst Du. Was ist gleich? $2°10'$ siehst Du.
8. $10'$ ¿ …? zu $2°10'$ füge hinzu, $2°20'$ siehst Du. Was zu 28, von den Flächen, soll ich setzen, das mir $2°20'$ gibt?
9. $5'$ setze. $5'$ auf 7 erhöhe, $35'$ siehst Du. $5'$, das Herauszureißende der Länge, aus $35'$ reiße heraus,
10. $30'$ siehst Du, $30'$ die Länge. $5'$ die Länge, auf 4 von der Breite erhöhe, $20'$ siehst Du, 20 die Länge (fehlerhaft für Breite).

In BM 13901 #12 haben wir gesehen, wie ein Problem über Quadrate auf ein Problem über ein Rechteck zurückgeführt werden kann. Hier wird umgekehrt ein Problem über ein Rechteck auf eines über Quadrate zurückgeführt.

In Symbole übersetzt ist das Problem das Folgende:

$$\tfrac{7}{4}w - \ell = 5' \quad , \quad \square(\ell, w) = 10'$$

(„bis 3 bin ich gegangen" in Zeile 1 bedeutet, dass das „Hinzufügen" von $\frac{1}{4}w$ in Zeile 1 dreimal wiederholt wird) Das Problem hätte mit denselben Methoden gelöst werden können wie auf TMS IX #3 (Seite 63), also auf die folgende Art:

$$\begin{aligned}
&7w - 4\ell = 4 \cdot 5' \quad , \quad \square(\ell, w) = 10' \\
&7w - 4\ell = 20' \quad , \quad \square(7w, 4\ell) = (7 \cdot 4) \cdot 10' = 28 \cdot 10' = 4°40' \\
&\qquad 7w = \sqrt{4°40' + \left(\tfrac{20'}{2}\right)^2} + \tfrac{20'}{2} = 2°20, \\
&\qquad 4\ell = \sqrt{4°40' + \left(\tfrac{20'}{2}\right)^2} - \tfrac{20'}{2} = 2 \\
&\qquad w = 20' \quad , \quad \ell = 30'.
\end{aligned}$$

Einmal mehr zeigt der Rechner jedoch, dass er mehrgleisig fahren kann und zwischen verschiedenen Varianten die ihm genehmste wählen kann. Hier baut er seinen Zugang auf einem Quadrat auf, dessen Seite (z) gleich $\frac{1}{4}$ der Breite ist (siehe Abbildung 4.13). Auf diese Weise sorgt er dafür, dass die Breite 4 ist, verstanden als $4z$ *(Du, 4, vom Viertel, so viel als Breite setze)*, und dass die Länge, verlängert um $5'$, gleich 7 ist, verstanden als $7z$ *(7 so viel als Länge setze)*. Zeile

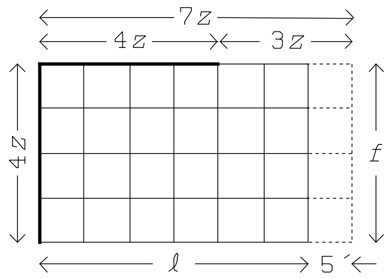


Abb. 4.13: Die Methode von TMS VIII #1.

4 findet, dass das Rechteck mit den Seiten $7z$ und $4z$ – mit anderen Worten, das ursprüngliche Rechteck verlängert um $5'$ – aus $7 \cdot 4 = 28$ kleinen Quadraten $\square(z)$ besteht[10]. Diese 28 Quadrate übertreffen die Fläche $10'$ um eine gewisse Anzahl von Seiten $(n \cdot z)$, deren Bestimmung auf später verschoben wird. Wie üblich wird das nicht normalisierte Problem

$$28\,\square(z) - n \cdot z = 10'$$

in

$$\square(28z) - n \cdot (28z) = 28 \cdot 10' = 4°40'$$

verwandelt.

Zeile 6 findet $n = 4 \cdot 5' = 20'$, und von hier an folgt alles dem üblichen Schema, wie man in Abbildung 4.14 sehen kann: $28z$ wird gleich $2°20'$, und z folglich gleich $5'$.[11] Also ist die Länge ℓ gleich $7 \cdot 5' - 5' = 30'$, und die Breite w gleich $4 \cdot 5' = 20'$.

[10]Die Benutzung der Multiplikation durch „Erhöhen“ zeigt, dass der Rechner kein neues Rechteck konstruiert, sondern sein Verfahren auf eine Unterteilung des bereits vorhandenen aufbaut – siehe die Diskussion und die Ausschaltung einer möglichen alternativen Interpretation des Verfahrens von BM 13901 #10 in Fußnote 5, Seite 54.

[11]Zeile 10 spricht davon als *5′ die Länge* – nämlich der Seite des kleinen Quadrats. Einige andere Texte aus Susa sprechen ebenfalls von der Seite eines Quadrats als seiner „Länge“.

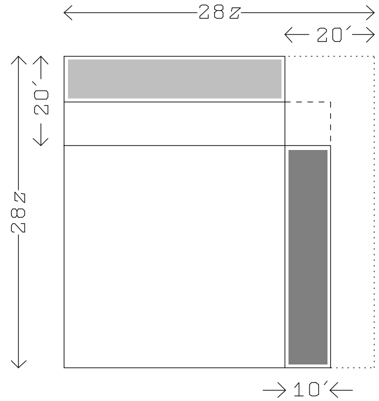


Abb. 4.14: Lösung der normalisierten Gleichung von TMS VIII #1.

YBC 6504 #4

Rs.

11. So viel wie die Länge über die Breite hinausgeht, gegenüber gestellt, aus dem Innern der Fläche habe ich herausgerissen:
12. $8'20''$. $20'$ die Breite, seine Länge was?
13. $20'$ stelle gegenüber: $6'40''$ setze.
14. $6'40''$ zu $8'20''$ füge hinzu: $15'$ setze.
15. Bei $15'$, $30'$ ist gleich. $30'$, die Länge, setze.

Bis jetzt waren alle Texte, die wir betrachtet haben, mathematisch korrekt, abgesehen von einigen wenigen Berechnungen und Kopierfehlern. Aber jeder, der Mathematik treibt, macht manchmal Fehler beim Argumentieren; es ist also kein Wunder, dass dies auch den Babyloniern so erging.

Der vorliegende Text ist ein Beispiel hierfür. Übersetzt in die moderne Symbolsprache ist das Problem das folgende:

$$\sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) - \square(\ell - w) = 8'20'' \quad , \quad w = 20'.$$

Erstaunlicherweise wird die Länge gefunden als das, was bei

$$\sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) - \square(\ell - w) + \square(w)$$

„gleich ist“, also nach einer Umformung und in Symbolen ausgedrückt durch $\sqrt{(3w - \ell) \cdot \ell}$.

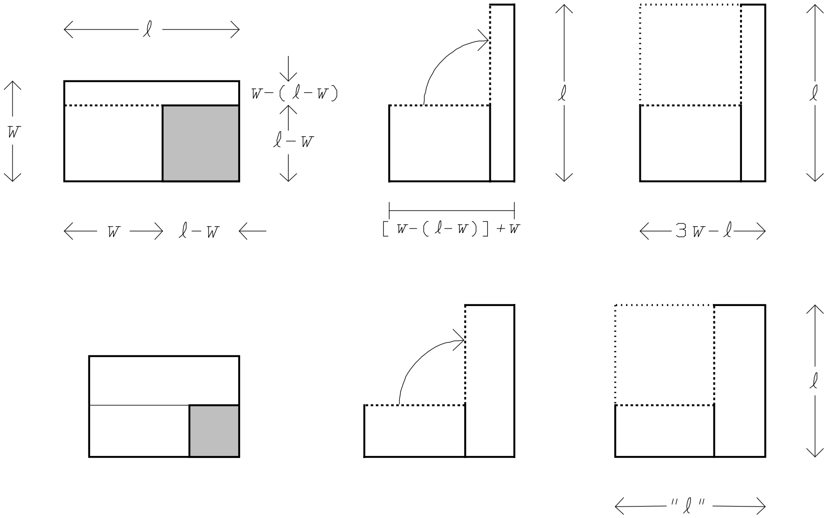


Abb. 4.15: Die cut-and-paste Operationen auf YBC 6504 #4.

Der Fehler scheint schwer erklärbar zu sein, aber eine Betrachtung der Geometrie des Arguments enthüllt dessen Ursprung (siehe Abb. 4.15). Oben ist das Verfahren (nicht maßstabsgetreu) dargestellt; wir sehen, dass das „Hinzufügen" von $\square(w)$ voraussetzt, dass das verstümmelte Rechteck entlang der gestrichelten Linie zerschnitten wird und als Pseudo-Gnomon gelegt wird. Es ist klar, dass das Ergebnis der Vervollständigung dieser Figur *nicht* $\square(\ell)$ ist, sondern, wenn man richtig zählt, $\sqsubset\!\sqsupset(3w-\ell,\ell)$.

Unten sehen wir dasselbe, aber jetzt maßstabsgetreu, und jetzt fällt der Fehler nicht mehr ins Auge. Hier ist $\ell = 30'$ und $w = 20'$, folglich $\ell - w = w - (\ell - w)$. Daher erscheint das verstümmelte Rechteck als wirkliches Gnomon, und die vervollständigte Figur entspricht $\square(\ell)$ – aber nur wegen $\ell = \frac{3}{2}w$.

Dieser Fehler illustriert einen wichtigen Aspekt der „naiven" Geometrie: wie bei geometrischen Beweisen muss man sehr gewissenhaft aufpassen, dass man nicht durch etwas „offensichtlich Wahres" fehlgeleitet wird. Dass solche Fehler sehr selten sind ist ein Hinweis auf die hohe Kompetenz der altbabylonischen Rechner und zeigt, dass sie fast immer die *gegebenen Größen* von dem, was sie darüberhinaus wussten, unterscheiden konnten.

5. Kapitel
Quasi-algebraische Techniken

Wir haben immer noch nicht festgelegt, was wir unter „Algebra“ verstehen wollen. Jede Unterscheidung zwischen altbabylonischer „Algebra“ und „Quasi-Algebra“ muss daher als vorläufig betrachtet werden – eine Hypothese, die uns erlauben wird, die Beobachtungen zu sammeln, die uns am Schluss für eine systematischere Diskussion dienlich sein werden.

VAT 8512

Vs.

1. Ein Dreieck. 30 die Breite. Im Innern zwei Felder,
2. die obere Fläche über die untere Fläche, 7‵ ging sie hinaus.
3. Die untere Absteigende über die obere Absteigende, 20 ging sie hinaus.
4. Die Herabsteigende und die Querlinie, was?
5. Und die Flächen der beiden Felder, was?
6. Du, 30 die Breite setze, 7‵ was die obere Fläche über die untere Fläche hinausging, setze,
7. und 20 was die untere Herabsteigende über die obere Herabsteigende hinausging, setze.
8. IGI 20 was die untere Herabsteigende über die obere Herabsteigende hinausging
9. spalte ab: 3′ auf 7‵ was die obere Fläche über die untere Fläche hinausging,
10. erhöhe, 21 möge Dein Kopf halten!
11. 21 zu 30 der Breite füge hinzu: 51
12. zusammen mit 51 lasse enthalten: 43‵21
13. 21 was Dein Kopf behalten hat zusammen mit 21
14. lasse enthalten: 7‵21 zu 43‵21 füge hinzu: 50‵42.
15. 50‵42 brich entzwei: 25‵21.
16. Das Gleiche von 25‵21 was? 39.
17. Aus 39, 21 das Gehaltene, reiße heraus, 18.
18. 18 welche Dir übrig bleiben ist die Querlinie.
19. Gut, wenn 18 die Querlinie ist,

20. die Herabsteigenden und die Flächen der beiden Felder sind was?
21. Du, 21 welches zusammen mit sich selbst Du enthalten lassen hast, aus 51
22. reiße heraus: 30 bleiben Dir. 30 welche Dir bleiben
23. brich entzwei, 15 auf 30 welche Dir bleiben, erhöhe
24. 7‵30 möge Dein Kopf behalten!

Kante

1. 18 die Querlinie zusammen mit 18 lass enthalten:
2. 5‵24 aus 7‵30 welche Dein Kopf hält
3. reiße heraus: 2‵6 bleiben Dir.

Rs.

1. Was zu 2‵6 soll ich setzen
2. was mir 7‵, welches die obere Fläche über die untere Fläche hinausging, gibt?
3. 3°20′ setze. 3°20′ auf 2‵6 erhöhe, 7‵ gibt es Dir.
4. 30 die Breite über 18 die Querlinie, wie viel geht es darüber hinaus? 12 geht es darüber hinaus.
5. 12 auf 3°20′, was Du gesetzt hast, erhöhe, 40.
6. 40 die obere Herabsteigende.
7. Gut, wenn 40 die obere Herabsteigende ist,
8. die obere Fläche ist was? Du, 30 die Breite,
9. 18 die Querlinie häufe an: 48 brich entzwei: 24.
10. 24 auf 40 die obere Herabsteigende erhöhe, 16‵.
11. 16‵ die obere Fläche. Gut, wenn 16‵ die obere Fläche,
12. die untere Herabsteigende und die untere Fläche was?
13. Du, 40 die obere Herabsteigende zu 20 welches die obere Herabsteigende über die untere Herabsteigende hinausgeht,
14. füge hinzu, 1‵ die untere Herabsteigende.
15. 18 die Querlinie brich entzwei: 9
16. auf 1‵ die untere Herabsteigende erhöhe, 9‵.
17. 9‵ die untere Fläche.

Viele altbabylonischen mathematischen Probleme behandeln die Aufteilung von Feldern. Die mathematische Substanz kann variieren – manchmal ist die Form des Feldes irrelevant und nur die Fläche wird zusammen mit den spezifischen Bedingungen für seine Teilung angegeben; manchmal, so wie hier, wird nach einer Aufteilung einer bestimmten geometrischen Form gefragt.

Bereits vor 2200 v.Chr. wussten mesopotamische Feldmesser, wie man *ein Trapez* durch eine parallele Transversale in zwei gleich große Teile teilt; wir werden gleich darauf zu sprechen kommen, wie sie das gemacht haben. Eine ähnliche Halbierung eines Dreiecks lässt sich ohne die Benutzung irrationaler Größen nicht exakt ausführen – und dies bedeutet, dass die altbabylonischen Feldmesser dies nur näherungsweise machen konnten, was allerdings nicht zu den üblichen Lernzielen gehört hat.

Das vorliegende Problem dreht sich um eine Variante der Aufteilung eines Dreiecks, die man exakt ausführen *kann*. Wie wir in Zeilen 1–3 sehen können und wie in Abbildung 5.1 gezeigt wird, wird ein dreieckiges Feld von einer „Querlinie", also einer parallelen Transversale, in zwei Stücke geteilt (eine „obere Fläche" und eine „untere Fläche"). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass das Dreieck rechtwinklig ist. Es ist ziemlich sicher, dass der Autor des Texts dies auch getan hat, und dass die „Herabsteigenden" daher Teile der Seite sind; wenn wir allerdings die „Herabsteigenden" als Höhen interpretieren, gelten die Rechnungen auch für ein schiefwinkliges Dreieck.

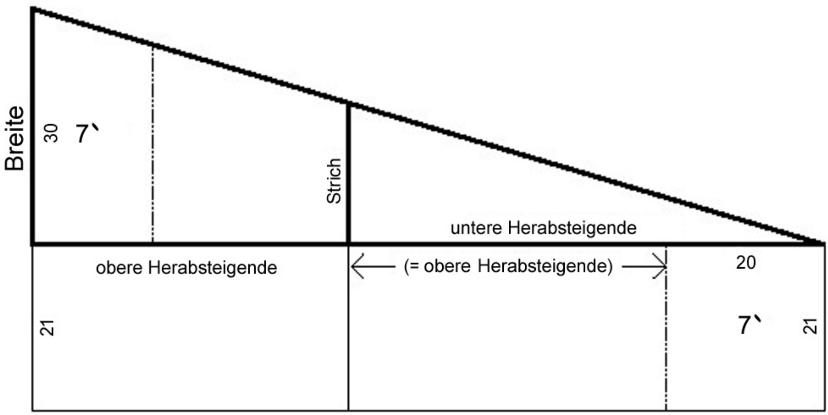


Abb. 5.1: Das dreieckige geteilte Feld von VAT 8512, mit dem Hilfsrechteck.

Die beiden Stücke haben also verschiedene Flächen. Wir kennen allerdings die Differenz der beiden Flächen, sowie die Differenz der beiden dazugehörigen Herabsteigenden. Die Lösung benutzt einen unerwarteten und eleganten Trick und mag daher schwer zu verstehen sein.

Zeilen Vs. 8–10 „erhöhen" das IGI der Differenz der beiden „Herabsteigenden" auf die Differenz der beiden „Flächen". Dies bedeutet, dass der Text die Breite eines Rechtecks findet, dessen Länge der Differenz der beiden Teilhöhen und dessen Fläche gleich der Differenz der beiden Teilflächen ist. Dies Breite (die 21 ist) wird zuerst im Kopf behalten und dann zur Breite des Dreiecks hinzugefügt.

Das Ergebnis ist ein Dreieck mit einem angehängten Rechteck – zusammengenommen das Trapez in Abbildung 5.1. Verlängert man die Querlinie zu einer parallelen Transversale des Trapezes, dann finden wir, dass das Trapez in zwei gleich große Teile aufgeteilt wird – und dies ist das Problem, das bereits die altbabylonischen Feldmesser seit einem halben Jahrtausend oder länger zu lösen wussten.

Die Zeilen Vs. 11–16 zeigen, wie sie es gemacht haben: Das Quadrat auf der halbierenden Transversale ist festgelegt als der Mittelwert zwischen den Quadraten der parallelen Seiten. Die dabei verwendeten Operationen („enthalten lassen" und „abbrechen") zeigen, dass dieser Prozess wirklich mit Hilfe geometrischer Quadrate und Mittelwerten gedacht ist. Abbildung (5.2) zeigt, warum das Verfahren ein korrektes Ergebnis liefert.

Per definitionem hat der Mittelwert gleichen Abstand zu den beiden Extremen. Also muss das Gnomon zwischen 21 und 39 gleich demjenigen zwischen 39 und 51 sein: ($39^2 - 21^2 = 51^2 - 39^2$); die Hälfte dieser Gnomone – die beiden Teile des schattierten Trapezes – müssen daher ebenfalls gleich sein. Zuerst gilt dies nur für ein Trapez, das entlang der Diagonalen aus einem Quadrat ausgeschnitten ist, aber wir können uns vorstellen, dass das Quadrat zu einem Rechteck gezogen wird und vielleicht zu einem Parallelogramm verdreht wird – keine dieser Operationen ändert das Verhältnis der Flächen oder paralleler Strecken, und dies erlaubt die Erzeugung eines beliebigen Trapezes. Dieses Trapez wird immer noch halbiert, und die Summe der Quadrate auf den parallelen Seiten wird immer noch doppelt so groß sein wie das auf der parallelen Transversalen.

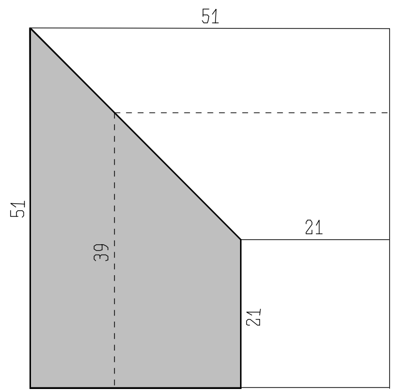


Abb. 5.2: Die Halbierung des Trapezes von BM 8512.

Wir bemerken, dass die Operation des „Langziehens“ auf einen Wechsel des Maßstabs in einer Richtung hinausläuft, eine Technik, die wir bereits in der Lösung nicht- normalisierter Probleme angetroffen haben, und die auch in der Aufgabe um einen Handel mit Öl in TMS XIII (siehe Seite 77) benutzt worden ist. Wir werden diese Technik auch weiter unten beim vorliegenden Problem antreffen.

Möglicherweise wurde die Regel zuerst auf der Basis konzentrischer Quadrate (siehe Abbildung 5.3) entdeckt – die geometrische Figur, die von zwei oder mehr konzentrisch ineinander geschachtelten Quadraten dargestellt wird, wurde in der babylonischen Mathematik sehr geschätzt, vielleicht bereits im dritten Jahrtausend (sie blieb populär bis zu den großen Architekten in der Renaissance); das Prinzip des Arguments bleibt offenkundig dasselbe.

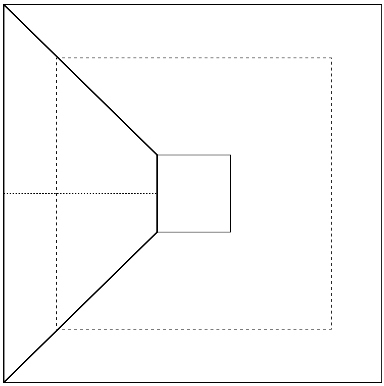


Abb. 5.3: Die Halbierung des Trapezes erklärt durch konzentrische Quadrate.

Zeile Vs. 17 findet also die halbierende Transversale; sie ergibt sich als 39, und die „Querlinie“ zwischen den beiden ursprünglichen Stücken muss daher die Länge $39 - 21 = 18$ haben.

Die nächsten Schritte erscheinen merkwürdig. Zeilen Vs. 21–22 scheinen die Breite des Dreiecks zu berechnen, aber die war eine der gegebenen Größen der Aufgabe. Zweifellos bedeutet dies, dass wir Abbildung 5.1 hinter uns gelassen haben und das Argument jetzt auf einer Figur wie in Abbildung 5.2 beruht. Wenn wir die zusätzliche Breite 21 eliminieren, dann bleibt ein Dreieck übrig, das dem ursprünglichen Dreieck entspricht, aber gleichschenklig ist – siehe Abbildung 5.4.

Um die „obere Herabsteigende“ zu finden, benutzt der Text einen falschen Ansatz und nimmt an, dass das gekürzte gleichschenklige Dreieck das ist, wonach wir suchen. Dessen Länge (die Summe der „Herabsteigenden“) ist dann gleich der

Breite, also 30. Um das wahre Dreieck zu finden, müssen wir den Maßstab in der Richtung der Länge wechseln.

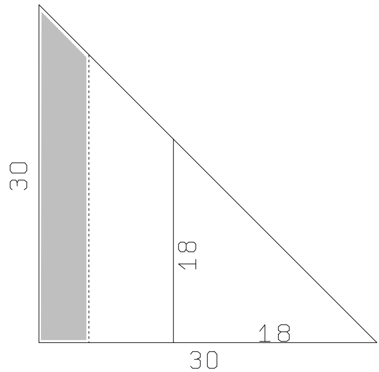


Abb. 5.4

Die Zeilen Vs. 23–24 berechnen, dass die Fläche des falschen Dreiecks 7`30 ist. Die beiden weißen Flächen sind gleich, und ihre summe muss $2 \cdot (\frac{1}{2} \cdot (18 \cdot 18)) = 5`24$ sein. Die schattierte Fläche – welche der Differenz der Flächen der beiden Teilstücke entspricht – muss daher $7`30 - 5`24 = 2`6$ (Kante 1–3) sein.

Wir wissen aber, dass die Differenz 7` ist und nicht 2`6. Die Zeilen Rs. 1–3 ergeben, dass die Differenz 2`6, die aus dem falschen Ansatz resultiert, mit $3°20'$ multipliziert werden muss, um die wahre Differenz 7` zu erhalten. Da die Breite bereits den gewünschten Wert hat, müssen wir die Länge und die „Herabsteigenden“ mit diesem Faktor multiplizieren. Die „obere Herabsteigende“ wird also $3°20' \cdot (30 - 18) = 40$ sein (Zeile Rs. 6). Danach ist alles sehr einfach; es könnte sogar noch einfacher sein, aber der gewählte Weg stimmt besser mit dem pädagogischen Stil überein, den wir von TMS XVI #1 kennen, und er ist von einem didaktischen Gesichtspunkt aus wahrscheinlich ergiebiger.

Die Art und Weise, wie dieses Problem gelöst wurde, unterscheidet sich sicherlich von dem, was wir bisher angetroffen haben. Jedoch gibt es auch Gemeinsamkeiten, die aus der Vogelperspektive deutlicher zu sehen sind.

Der Maßstabswechsel. in einer Richtung ist uns bereits als eine algebraische Technik bekannt. Ein nicht weniger auffälliger *Unterschied* – die Abwesenheit der quadratischen Ergänzung, also der „akkadischen Methode“ – deutet auf ein anderes Merkmal dieser Familie von Problemen hin: die Einführung einer Hilfsfigur welche zuerst „hinzugefügt“ und dann „herausgerissen“ wird.

Der „analytische“ Charakter dieser Methoden ist weniger offensichtlich aber fundamental. Seit der griechischen Antike nennt man die Lösung eines mathematischen Problems „analytisch“, wenn sie mit der Annahme beginnt, dass das Problem *bereits gelöst* ist; dies erlaubt uns, die Eigenschaften der Lösung zu untersuchen – zu „analysieren“ – um herauszufinden, wie man sie konstruiert.[1]

[1]Die Antithesis der „analytischen“ Methode ist die „Synthese, in welcher die Lösung direkt konstruiert wird, gefolgt von einem Beweis, dass die Konstruktion gültig ist“. Dies ist die Beweistechnik in den *Elementen* Euklids, und seit der Antike gibt es ständige Beschwerden darüber, dass es dies schwieriger als unbedingt nötig macht, dieses Werk zu verstehen: der Student sieht gut, dass jeder

Eine Lösung durch eine Gleichung ist immer analytisch. Um dies zu verstehen, betrachten wir noch einmal unsere moderne Lösung von TMS XIII, dem Handel mit Öl (Seite 77). Man beginnt mit der Annahme, dass die Menge von SÌ-LA, die mit 1 Schekel gekauft worden ist, eine bekannte Zahl ist, und wir nennen sie a. Wir machen dasselbe mit der Verkaufsrate (die wir v nennen). Die Gesamtinvestition ist daher $M \div a$, der Gesamtverkaufspreis $M \div v$, und der Gewinn folglich $w = \frac{M}{v} - \frac{M}{a}$. Dann multiplizieren wir mit $v \times a$ und so weiter.

Wir behandeln also a und v, als ob sie bekannte Zahlen wären; wir tun so, als hätten wir eine Lösung und wir beschreiben ihre Merkmale. Danach leiten wir Folgerungen ab und finden zum Schluss, dass $a = 11, v = 7$ ist.

Sogar die Lösungen mit der altbabylonischen cut-and-paste-Methode sind analytisch. Wir nehmen an, dass wir eine Lösung der Öl-Aufgabe kennen und stellen sie als Rechteck der Fläche 12`50 dar, von dem ein Teil der Länge 40 dem Gewinn entspricht. Dann untersuchen wir die Merkmale dieser Lösung und finden den normalisierenden Faktor, mit welchem wir multiplizieren müssen, um eine Differenz 4 der Seiten zu finden usw.

Die Lösung des vorliegenden Problems ist ebenfalls analytisch. Wir *nehmen an*, dass das Dreieck durch ein Rechteck derart ergänzt wird, dass der verlängerte „Querlinie" das sich ergebende Trapez in gleich große Teile teilt, und dann berechnen wir, wie groß die Breite des Rechtecks sein muss, wenn dies der Fall ist; und so weiter. Obwohl es seine Berechtigung hat, erscheint die Unterscheidung zwischen „algebraischen" Problemen (solche, die man leicht in moderne Gleichungen übersetzen kann) und „quasi-algebraischen" Problemen aus der Perspektive der altbabylonischen Texte weniger wichtig zu sein als aus unserer Sicht.

BM 85200 + VAT 6599 #6

Vs. I

9. Eine Ausgrabung. So viel wie die Länge ist die Tiefe. 1 die Erde habe ich ausgerissen. Den Grund und die Erde habe ich angehäuft, 1°10′. Länge und Breite, 50′. Länge, Breite, was?
10. Du, 50′ auf 1, die Umrechnung, erhöhe, 50′ siehst Du. 50′ auf 12 erhöhe, 10 siehst Du.
11. Stelle 50′ sich gegenüber, 41′40″ siehst Du; auf 10 erhöhe, 6°56′40″ siehst Du. Sein IGI spalte ab, 8′38″24‴ siehst Du;

Schritt des Beweises korrekt ist und muss folglich akzeptieren, dass das Endresultat unwiderlegbar ist – aber er versteht nicht die Gründe, warum der Autor diesen einen Schritt macht. Dadurch erscheint der Autor eher scharfsinnig als wirklich pädagogisch. Seit der Antike hat man Euklid (oder seine Vorgänger) verdächtigt, ihre Konstruktionen und Beweise erst mittels einer Analyse gefunden und die Lösung dann konstruiert zu haben, während sie ihre Spuren versteckt haben.

12. auf 1°10′ erhöhe, 10′4″48‴ siehst Du, 36′, 24′, 42′ sind Gleiche.
13. 36′ auf 50′ erhöhe, 30′ die Länge. 24′ auf 50′ erhöhe, 20′, die Breite; 36′ auf 10 erhöhe, 6, die Tiefe.
14. Das Verfahren.

Dies ist ein Problem dritten Grades, das von einer in zwei Teile zerbrochenen Tafel stammt, von denen sich der eine in London und der andere in Berlin befindet (daher der zusammengesetzte Name). Die Aufgabe dreht sich um eine quaderförmige Ausgrabung der Länge ℓ [NINDAN], Breite w [NINDAN] und Tiefe d [KÙŠ]. Die Länge ist gleich der Tiefe, aber wegen der verschiedenen Maßeinheiten in diesen beiden Richtungen bedeutet dies $d = 12\ell$.

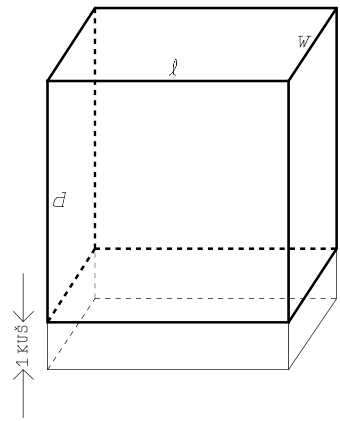


Abb. 5.5: Die Ausgrabung 1 KÙŠ nach unten erweitert.

Weiter ist die Summe von Länge und Breite [$\ell + w =$] 50′, und die Summe des Volumens der Erde, der „herausgerissen" (also ausgegraben)[2] wurde und des „Grunds" (der Grundfläche) ist

$$[\ell \cdot w \cdot d + \ell \cdot w =]1°10'.$$

Diese letzte Gleichung kann in

$$\ell \cdot w \cdot (d + 1) = 1°10'$$

umgeformt werden – wenn also die Ausgrabung 1 KÙŠ tiefer ausgeführt worden wäre, dann wäre das Volumen gleich 1°10′ [NINDAN^2·KÙŠ] gewesen (siehe Abbildung 5.5).[3]

Die Lösung basiert auf einer feinsinnigen Variante des falschen Ansatzes (in seiner eigentlichen Form kann dieser hier nicht angewendet werden, weil das Problem nicht homogen ist – siehe Fußnote 7, Seite 55). Der „Ansatz" besteht in der Konstruktion eines „Bezugswürfels" mit Kantenlänge $\ell + w$. In horizontalen Maßen ist die Kantenlänge $1 \cdot 50' = 50'$ [NINDAN], denn der „Umrechnungsfaktor" von NINDAN in NINDAN besteht in einer Multiplikation mit 1. In vertikalen Maßen ist es $12 \cdot 50' = 10$ KÙŠ, weil der „Umrechnungsfaktor" von NINDAN in KÙŠ in einer Multiplikation mit 12 besteht (beide Umrechnungen finden in Zeile 10 statt).

[2] Der Text benutzt dasselbe Verb „herausreißen" wie für die subtraktive Operation.

[3] Die Aussage bezieht sich auch auf „1 die Erde, die ich herausgerissen habe", aber diese Information wird nicht benutzt. Dies ist ein weiteres Beispiel einer Größe, die *bekannt aber nicht gegeben* ist. Die Kenntnis des numerischen Werts erlaubt dem Lehrer, eine Unterscheidung zwischen der wirklichen Ausgrabung („1, die Erde") und dem Volumen der Ausgrabung zu machen, die um 1 KÙŠ nach unten fortgesetzt wird („1°10′, die Erde").

Zeilen 11-12 finden das Volumen des Bezugswürfels als $6°56'40''$. Dieses Volumen ist $10'4''48'''$ mal in der erweiterten Ausgrabung enthalten.

Wir wollen uns nun vorstellen, dass die Kanten der erweiterten Ausgrabung durch die Kanten des Bezugswürfels gemessen werden. Wenn p angibt, wie oft die Länge ℓ von $50'$ NINDAN gemessen wird, und q, wie oft die Tiefe $d + 1$ KÙŠ von 10 KÙŠ (= 50′ NINDAN) gemessen wird, dann ist

$$p \cdot 50' + q \cdot 50' = \ell + w = 50',$$

und daher

$$p + q = 1;$$

weiter ist

$$r \cdot 10 = d + 1 = 12\ell + 1 = 12 \cdot p \cdot 50' + 1 = 10p + 1,$$

daher

$$r = p + \frac{1}{10} = p + 6';$$

und schließlich

$$p \cdot q \cdot r = 10'4''48'''.$$

Wir müssen also $10'4''48'''$ als das Produkt dreier Faktoren p, q und r ausdrücken, welche diesen Bedingungen genügen. Dies macht der Text in Zeile 12, wo die Faktoren als „die Gleichen" $36'$, $24'$ und $42'$ erscheinen. Danach findet Zeile 13 ℓ, w und d.

Die Faktorisierung scheint der Lehrer-Magier aus dem Ärmel geschüttelt zu haben, und vermutlich wurde sie tatsächlich so gefunden, ebenso wie die verschiedenen Quadratwurzeln und Quotienten. Weil die Lösung im Voraus bekannt ist, wäre das leicht. Aber man kann sie auch durch systematisches Nachdenken finden, beginnend mit einfachen Zahlen – man muss nur 10``4`48 (=$2^6 \cdot 3^4 \cdot 7$) als das Produkt von drei Zahlen P, Q und R ausdrücken, wo $P + Q = 60$ und $R = P + 6$ gilt[4] Wenn wir den allgemeinen Charakter der altbabylonischen Mathematik berücksichtigen, dann können wir sogar behaupten, dass der Text die Antwort zwangsläufig nur deshalb aus dem Ärmel schütteln darf, weil es zwar *möglich* (aber recht aufwendig) wäre, sie ohne Magie zu finden. Wir wollen zuerst annehmen, dass $P = 1$ ist. Wegen $P + Q = 60$ wird $Q = 59$ sein, was unmöglich ist. Die Annahmen $P = 2$ und $P = 3$ können analog ausgeschlossen werden. $P = 4$ gibt $R = 10$, was ebenfalls ausgeschlossen ist – 10``4`48 enthält keinen Faktor 5. $P = 5$ ist unmöglich; $P = 6$ gibt $Q = 54$ und $R = 12$, was

[4]Um ganze Zahlen zu haben führen wir hier $P = 60p$ = 1`$p$, $Q$ = 1`q, und R = 1`r ein. Dann ist PQR = 1```pqr = 10``4`48.

nicht sein kann, sowohl weil der Faktor 7 fehlt und weil eine Probe zeigt, dass das Produkt nicht den Bedingungen genügt. Der nächste Wert von P, der nicht zu unmöglichen Werten für Q oder R führt, ist 12, was aber aus denselben Gründen nicht sein kann. $P = 18$ ist unmöglich, weil das Produkt nur etwa halb so groß ist wie nötig. $P = 24$ und $P = 30$ funktionieren aus denselben Gründen wie bei $P = 6$ nicht. Endlich kommen wir bei $P = 36$, einem Wert der passt. Hätten wir Primfaktoren gezählt, wäre es noch leichter gewesen, aber es gibt keinerlei Hinweise darauf, dass die Babylonier diese Technik gekannt hätten.

Es muss aber betont werden, dass diese Methode nur funktioniert, weil eine einfache Lösung *existiert*. Dadurch unterscheidet sich dieses Problem wesentlich von denen zweiten Grades, wo eine gute Näherung dessen, was „gleich ist“, eine fast richtige Lösung geben würde (und die Babylonier wussten sehr gut, wie man solche Quadratwurzeln näherungsweise bestimmt, obwohl sie dies in ihren Algebra-Problemen nicht taten). Die Babylonier konnten also kubische Probleme im allgemeinen nicht so lösen, wie sie Probleme zweiten Grades lösen konnten – dazu muss man auf die italienischen Algebraiker des 16. Jahrhunderts n.Chr. warten.

Unser Text spricht von *drei* „Gleichen“, die nicht einmal gleich sind. Dieser Gebrauch stellt zweifellos eine Verallgemeinerung einer Idee dar, die von den Seiten eines Quadrats und eines Würfels herkommt. Es ist nichts Seltsames an einer solchen Verallgemeinerung – unser eigener Begriff der „Wurzel“ einer Gleichung kommt auf dieselbe Art aus der frühen arabischen Algebra, wo die grundlegenden Gleichungen mit Hilfe eines Geldbetrags und seiner Quadratwurzel formuliert wurden. Sobald dieser Ursprung vergessen war, wurde das Wort als Bezeichnung für den Wert einer Unbekannten verstanden, welche dieser Gleichung genügt.

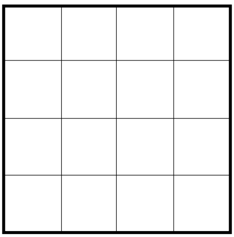
Andere Aufgaben von derselben Tafel sprechen von einem einzigen „Gleichen“; dies ist der Fall, wenn das Volumen der Ausgrabung, gemessen durch das Bezugsparallelepiped (nicht immer ein Würfel), als p^3 oder als $p^2 \cdot (p + 1)$ faktorisiert werden muss. Für diese beiden Funktionen existieren in der Tat Tafeln, und in diesen erscheint p exakt als „das Gleiche“. Die letztere Tabelle hatte den Namen „gleich, 1 hinzugefügt“ – siehe Seite 132.

Wie in der Algebra der Aufgaben zweiten Grades ist die Behandlung der Probleme dritten Grades analytisch – was wir eben betrachtet haben ist ein typischer Vertreter dieser Kategorie: Man nimmt an, dass eine Lösung existiert und zieht daraus Konsequenzen. Ähnlich ist jede Lösung mit dem falschen Ansatz analytisch – sie beginnt mit der Annahme einer Lösung.

Davon abgesehen gibt es nur ziemlich schwache Verbindungen zwischen Problemen zweiten und dritten Grades: die Terminologie für Operationen, die Benutzung von Tafeln, und die fundamentalen arithmetischen Operationen.

Andere Aufgaben auf derselben Tafel (alle drehen sich um quaderförmige „Ausgrabungen“) werden auf Probleme zweiten oder gar ersten Grades zurückgeführt. Dieser werden dann mit Techniken gelöst, die wir schon kennen, und nicht durch Faktorisierungen. Die Babylonier waren sich dessen bewusst, dass sie eine andere (und in ihren Augen bessere) Technik besaßen, und sie kannten den Unterschied zwischen Problemen, die mit ihren algebraischen Techniken gelöst werden können und solchen, die damit nicht angreifbar waren. Aber sie scheinen diesen Unterschied nicht als fundamental betrachtet zu haben – das mathematische Genre, das durch den Inhalt der Tafel definiert wird, ist eher „Ausgrabungsprobleme“, ebenso wie das Genre, das von BM 13901 definiert wird, „Probleme über Quadrate“ ist, obwohl eines der Probleme auf ein Problem über ein Rechteck zurückgeführt wird. Einmal mehr scheint die Unterscheidung zwischen „Algebra“ und „Quasi-Algebra“ zweitrangig zu sein, weniger wichtig als die Klassifizierung der Probleme nach den Objekten, die sie betrachten.

BM 15285 #24



1. 1 UŠ die Gegenseite
2. Im Innern 16 Gegenseiten
3. habe ich niedergelegt. Ihre Flächen, was?

Dieses kleine Problem stammt von einer Tafel, welches um die 40 Aufgaben über Unterteilungen eines Quadrats der Seitenlänge 1 UŠ = 1` NINDAN enthält. Die noch erhaltenen Fragmente der Tafel enthalten 31 Aufgaben, zu denen es Diagramme gibt, welche die tatsächlichen Unterteilungen darstellen (diese sind oft notwendig, um die bisweilen recht knappen Aufgabenstellungen verstehen zu können). Abb. 5.6 zeigt die Vorderseite des Hauptfragments (Aufgabe #24 findet sich auf der Rückseite).

Der obige Text erklärt den Lösungsweg nicht – dies ist bei keinem einzigen der Aufgaben auf dieser Tafel der Fall. Es ist aber offensichtlich, dass es hier keine algebraische Denkweisen gebraucht werden. Ebenso klar ist, dass die Technik zur

Berechnung der Koeffizienten in Aufgabe BM 13901 #10 (Seite 52) hier ebenfalls benutzt werden kann.

In Zeile 3 ist zu sehen, dass das Verb, das mit „niederlegen“ übersetzt ist, hier „zeichnen“ bedeuten könnte; siehe die Fußnote 3, Seite 52.

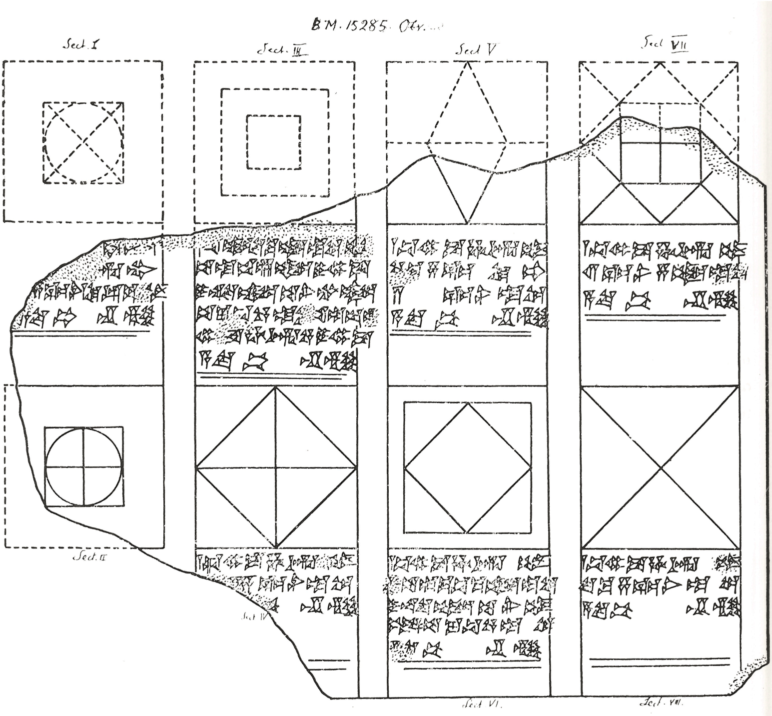


Abb. 5.6: Die Vorderseite des Hauptfragments der Tafel BM 15285. Nach C. J. Gadd, „Forms and Colours“. *Revue d’Assyriologie* **19** (1922), 149–159, hier S. 156.

6. Kapitel
Allgemeine Charakterisierung

Zeichnungen?

Alle Texte, wie wir oben diskutiert haben, waren mit geometrischen Figuren illustriert. Allerdings finden sich nur auf zwei Tafeln solche geometrischen Figuren, und in beiden Fällen illustrieren sie die Aussage der Aufgabe, nicht aber die Prozedur der Lösung.

Viele Aspekte der Lösungsprozeduren sind in der traditionellen arithmetischen Interpretation unerklärlich, haben aber eine natürliche Erklärung in der geometrischen Sichtweise. Es gibt daher gute Gründe anzunehmen, dass bei den Überlegungen der Babylonier *irgendeine* Art von Geometrie eine Rolle gespielt haben muss. Es ist allerdings nicht sehr plausibel, dass die Babylonier Zeichnungen genau wie die unsrigen benutzt haben. Im Gegenteil legen viele Texte nahe, dass sie sich mit groben strukturellen Diagrammen zufrieden gegeben haben; siehe etwa Seite 57 über den Maßstabswechsel in einer Richtung. Die Abwesenheit besonderer Namen für $L = 3\lambda$ und $W = 21\phi$ in TMS IX #3 (siehe Seite 65) legt ebenfalls nahe, dass keine neue Figur gezeichnet wurde, in welcher man diese hätte identifizieren können, während λ und ϕ als die Seiten der „Fläche 2“ identifiziert werden *konnten*.

Dies ist allerdings wenig überraschend. Wer sich mit altbabylonischen Techniken auskennt, braucht nur eine grobe Skizze, um den Überlegungen zu folgen; man braucht die Teilungen und Verschiebungen gar nicht ausführen: die Zeichnung des Rechtecks genügt bereits, um die verwendete Methode zu verstehen. Ebenso wie wir Rechnungen im Kopf machen und dabei nur ein oder zwei Zwischenergebnisse notieren, können wir uns eine „Kopfgeometrie“ aneignen, bei der wir höchstens eine grobe Skizze machen.

Uns ist eine erkleckliche Anzahl von Felderkarten bekannt, welche mesopotamische Schreiber angefertigt haben; der linke Teil von Abb. 6.1 zeigt eine von ihnen. Sie haben genau den Charakter von Strukturdiagrammen: ihr Zweck ist nicht die maßstabsgetreue Wiedergabe der einzelnen Längen – dies kann man sehen, wenn man die Karte mit der maßstabsgetreuen Zeichnung auf der rechten Seite vergleicht. In dieser Hinsicht ähneln sie Abb. 4.5, deren wirkliche Proportionen man in Abb. 4.6 sehen kann – siehe Seite 71 und Seite 73. Ebensowenig waren die Babylonier an einer korrekten Darstellung der Winkel interessiert, mit Ausnahme der „praktisch rechten Winkel“, die der Berechnung dienten und damit eine *strukturelle* Rolle spielten.

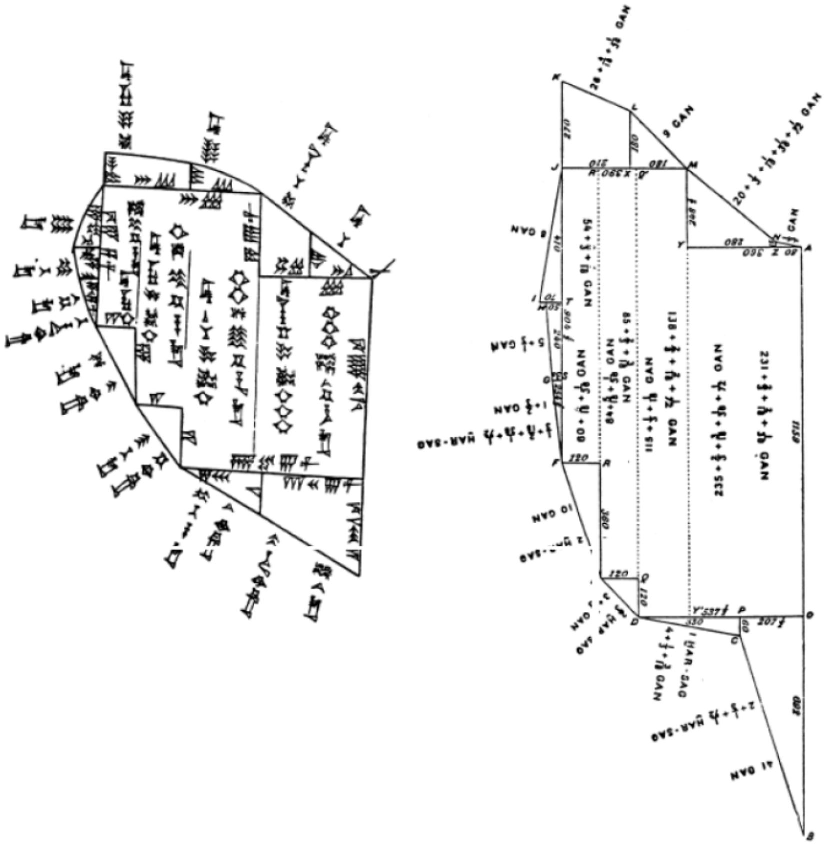


Abb. 6.1: Eine neu-sumerische Felderkarte (21. Jahrhundert v. Chr.), links wie auf der Keilschrifttafel, rechts im korrekten Maßstab nachgezeichnet. Nach F. Thureau-Dangin, “Un cadastre chaldéen”. *Revue d’Assyriologie* **4** (1897–98), 13–27.

Das Üben der „Kopf-Geometrie“ setzt den flüssigen Umgang mit konkreter Geometrie voraus; echte Zeichnungen irgendeiner Art müssen daher existiert haben. Allerdings kann man die Technik des cut-and-paste nicht leicht auf einer Tontafel ausführen. Der Staub-Abakus, den phönizische Rechner im ersten

Jahrtausend v. Chr. benutzt haben und den die Griechen von ihnen übernommen haben,[1] ist für diesen Zweck deutlich besser geeignet. Damit ist es leicht, einen Teil einer Figur wegzuwischen und ihn an einer andern Stelle wieder hinzuzeichnen. Ein Schulhof, der mit Sand bestreut ist (siehe Seite 37), konnte hier ebenfalls gute Dienste leisten.

Staub und Sand dürften auch bei den ersten Schritten des Lernens der Schrift hilfreich gewesen sein. Aus dieser Einführungsphase kennen wir Tafeln, welche den Schülern, die sie zum Lernen der Keilschriftsymbole kopieren mussten, als *Vorlage* dienten. Aus *der nächsten* Phase kennen wir ebenfalls Tontafeln, die von den Schülern geschrieben sind – aber die Arbeit der Schüler aus der ersten Phase hat keinerlei archäologische Spuren hinterlassen, was bedeutet, dass diese vermutlich auf Sand oder in den Staub geschrieben worden sind. Es gibt daher keinen Grund, sich darüber zu wundern, warum geometrische Zeichnungen beim Unterrichten von Algebra und Quasi-Algebra nicht gefunden worden sind.

Algebra?

Bis jetzt haben wir, aus Gründen der Bequemlichkeit und in Übereinstimmung mit der Mehrheit der Mathematikhistoriker, von einer altbabylonischen „Algebra“ gesprochen, ohne zu klären, welche Bedeutung man diesem Wort im babylonischen Kontext zuschreiben sollte, und ohne zu versuchen zu erklären, warum (oder ob) eine geometrische Technik wirklich als „Algebra“ betrachtet werden kann.

Wir haben inzwischen allerdings eine ganze Reihe von Beobachtungen gemacht, die uns helfen können, eine begründete Meinung zu bilden (und bisweilen anzudeuten, welche Rolle diese Beobachtungen in unserem Argument spielen werden).

Zuerst muss gesagt werden, dass die moderne Algebra, der sich die altbabylonische Technik vielleicht anpassen könnte, *eine Technik* ist, nämlich der Umgang mit Gleichungen. Nichts in den altbabylonischen Texten erlaubt uns anzunehmen, dass die Babylonier auch nur den Hauch einer algebraischen *Theorie* besessen haben, wie sie ab dem 16. Jahrhundert entwickelt wurde (betreffend den Zusammenhang zwischen Koeffizienten und den Wurzeln, usw.); wir können *a fortiori* ihr Vorgehen auch nicht mit dem gleichsetzen, was heutige Mathematiker Algebra nennen (Gruppentheorie und alles, was darauf aufbaut oder dieses Gebiet erweitert). Die heutige Algebra, an welche wir denken sollten, ist diejenige aus dem Schulunterricht, die in Gleichungen ausgedrückt wird.

[1] Das griechische Wort für den Abakus, αβαξ, hat phönizische Wurzeln und bedeutet ursprünglich „Staub“ und „wegfliegen“.

Wir haben oben gesehen (Seite 33), in welchem Sinne altbabylonische Aufgabenstellungen als *Gleichungen* verstanden werden können: sie geben das Ergebnis einer Kombination von (oft aber nicht immer geometrischen) Größen an, oder sie fordern, dass das Maß einer Kombination einer andern gleich ist, oder dass die erste die letztere um einen bestimmten Betrag übertrifft oder kleiner ist als diese. Das Prinzip unterscheidet sich nicht von der jeder angewandten Algebra, und daher auch nicht von den Gleichungen mit denen Ingenieure oder Wirtschaftswissenschaftler heute arbeiten. In diesem Sinn sind die altbabylonischen Aufgabenstellungen wirkliche Gleichungen.

Es gibt allerdings einen Unterschied. Ein heutiger Ingenieur *arbeitet mit* diesen Gleichungen: er schiebt die Größen von einer Seite auf die andere, multipliziert die Koeffizienten, er integriert Funktionen usw. – all diese Dinge existieren nur als Elemente der Gleichungen und haben keine andere Darstellung. Die Operationen der Babylonier dagegen wurden, wie wir gesehen haben, mit Hilfe einer anderen Darstellung realisiert, nämlich durch geometrische Größen[2].

Bis auf wenige Ausnahmen (von denen wir oben keine gesehen haben) sind altbabylonische Lösungen *analytisch*. Dies macht sie unserer modernen Algebra der Gleichungen ähnlich. Abgesehen davon sind die meisten ihrer Prozeduren „homomorphe" wenn nicht „isomorphe" Analogien unserer Algebra, oder können zumindest in der Sprache der modernen Algebra leicht erklärt werden. Diese gemeinsamen Charakteristika – Aufgabenstellungen in Form von Gleichungen, homomorphe Prozeduren – haben viele Mathematikhistoriker dazu verleitet (oder, wie manche Kritiker während der letzten 40 Jahre gesagt haben, *verführt*) von einer „babylonischen Algebra" zu sprechen. Es gibt aber einen weiteren Grund für diese Charakterisierung, ein Grund, der entscheidender ist, aber größtenteils unbemerkt geblieben ist.

Die heutige Algebra der Gleichungen besitzt eine neutrale „fundamentale Darstellung" (siehe Seite 19): abstrakte Zahlen. Diese neutrale Darstellung ist ein leerer Behälter, der alle Arten messbarer Größen aufnehmen kann: Abstände, Flächen, elektrische Ladungen und Ströme, Fruchtbarkeit von Populationen usw. In der griechischen geometrischen Analysis dagegen geht es nur um die vorhandenen geometrischen Größen, und diese stellen nichts anderes dar als das, was sie sind. In diesem Sinne ist die babylonische Technik näher an der modernen Gleichungsalgebra als die griechische. Wie wir gesehen haben, können Strecken bei den Babyloniern Flächen, Preise (oder besser inverse Preise), und in einem

[2] Lediglich einige Transformationen ersten Grades wie diejenigen auf TMS XVI #1 und TMS IX #3 können teilweise als Ausnahmen betrachtet werden; TMS XVI #1 erklärt in der Tat, wie Operationen direkt auf den Wörtern der Gleichung innerhalb der geometrischen Darstellung verstanden werden können. Hat man dies erst einmal verstanden, dann könnte TMS IX #3 vermutlich direkt auf der Ebene der Wörter operieren. Aber TMS XVI #1 ist keine Lösung einer Aufgabe, und in TMS IX #3 ist die Transformation ersten Grades den geometrischen Operationen untergeordnet.

anderen Zusammenhang auch die Anzahl von Arbeitern und Arbeitstagen etc. bedeuten. Wir könnten nun glauben (weil wir es gewohnt sind, die abstrakte geometrische Figur und die Zeichnung auf Papier zu identifizieren), dass Geometrie weniger neutral ist als abstrakte Zahlen - wir wissen sehr genau, wie man die abstrakte Zahl 3 von 3 Kieselsteinen unterscheidet, neigen aber dazu, ein gut gezeichnetes Dreieck für das Dreieck selbst zu halten. Aber selbst wenn wir bei dieser Verwechslung bleiben, müssen wir von einem *funktionalen Standpunkt* aus zugeben, dass die altbabylonische Geometrie der gemessenen Größen ebenfalls ein leerer Behälter ist.

Die heutige Algebra der Gleichungen ist also eine *Technik*, die Lösung zu finden mittels der *Vorstellung*, dass wir diese bereits gefunden haben (Analyse), gefolgt von der Manipulation unbekannter Größen, als ob diese bekannt wären – alles innerhalb der funktional leeren Darstellung des Bereichs der abstrakten Zahlen. Ersetzen wir *Zahlen* durch *messbare geometrische Größen*, dann können wir dasselbe über die altbabylonische Technik sagen – mit einer kleinen Einschränkung, auf die wir gleich zurückkommen werden. Wenn wir die moderne Technik als eine „Algebra“ verstehen, trotz der riesigen konzeptuellen Entfernung von der Gruppentheorie und ihren Nachkommen, dann erscheint es angemessen, auch die altbabylonische Technik, wie wir sie in den Kapiteln 2-4 angetroffen haben, unter demselben Stichwort zu verbuchen.

Dies bedeutet nicht, dass es keine Unterschiede gibt: es gibt sie, und zwar wichtige; aber diese sind nicht von der Art, wie man sie normalerweise benutzt, um „Algebra“ von anderen mathematischen Gebieten zu trennen.

Neben der Darstellung durch eine Geometrie der messbaren Größen ist der wichtigste Unterschied wohl der, dass die altbabylonische Algebra von zweitem (und höherem) Grad keinerlei praktische Anwendungen hatte – nicht weil dies prinzipiell unmöglich gewesen wäre, sondern weil kein praktisches Problem innerhalb des Horizonts eines altbabylonischen Schreibers die Anwendung höherer Algebra verlangte. Alle Probleme höheren Grades sind daher künstlich, und alle sind rückwärts aus einer bekannten Lösung konstruiert (dies gilt auch für viele lineare Probleme). Beispielsweise beginnt der Autor mit einem Quadrat der Seitenlänge $10'$ und findet dann, dass die Summe der vier Seiten und der Fläche gleich $41'40''$ ist. *Die Aufgabe*, die er daraus konstruiert, gibt dann diesen Wert und verlangt (in einer Formulierung, die noch von den Rechenmeistern des Mittelalters benutzt wurde, aber auch in TMS XVI und TMS VII) vorkommt), dass die Seiten und die Fläche „getrennt“ oder „zerstreut“ werden[3].

[3]Siehe TMS XVI #2 Zeile 16 und TMS VII #1 Zeile 4 (unten Seite 123 und 124); die beiden Ausdrücke scheinen synonym zu sein. Diese „Trennung“” oder „Zerstreuung“, die keine Subtraktion ist, ist die Umkehrung der Operation „anhäufen“.

Mit dieser Art von Algebra sind wir heute sehr vertraut. Sie erlaubt Lehrern und Lehrbuchautoren, Probleme für Schüler zu konstruieren, bei denen sie sicher sein können, das eine vernünftige Lösung existiert. Der Unterschied ist, dass *unsere* künstlichen Probleme den Schülern Techniken antrainieren sollen, die ihnen später in realitätsnahen Problemen nützlich sind.

Was wir nicht kennen ist die Offenheit, mit welcher gewisse altbabylonische Texte vom Wert der Größen sprechen, die im Prinzip als unbekannt gelten. Weil der Text allerdings klar zwischen *gegebenen* und *lediglich bekannten* Größen unterscheidet, wobei Letzteres nur zur Identifikation und der pädagogischen Erklärung benutzt wird, illustriert diese scheinbare abweichende Gewohnheit, dass man eine Sprache benötigt, in welcher man die Prozedur beschreiben kann – eine Alternative zu den ℓ, λ und L unserer Algebra und der „Strecke AB“ unserer Geometrie.

Weil die Texte „Handbücher für Lehrer“ sind, trotz der Anrede „Du“, die sich an Schüler richtet, können wir nicht ausschließen, dass der Lehrer beim mündlichen Vortrag der Aufgabe nicht mit dem Finger auf das Diagramm gezeigt und „diese Breite hier“ oder „diese Fläche dort“ gesagt hat. Wir können auch nicht behaupten, dass es so gelaufen ist – wir haben kein besseres Fenster auf die didaktische Praxis der altbabylonischen Mathematik als das, was uns TMS XVI #1 (Seite 31) bietet.

7. Kapitel
Der Hintergrund

Was wir über altbabylonische Algebra wissen – ihre Flexibilität, ihre Leistungsfähigkeit bei der Lösung ausgeklügelter aber für die Praxis irrelevanter Probleme, die Kompetenz der Schreiber, die sie angewendet haben – lässt das Rätsel ihrer Existenz unbeantwortet. Weil dieses Rätsel inzwischen fast 4000 Jahre alt ist, dürfen wir hoffen, durch Nachdenken über die Lage in der Zeit von König Hammurabi etwas über unser Zeitalter herauszufinden.

Die Schreiberschule

Die altbabylonische Mathematik diente nicht der Zerstreuung von reichen und hochintelligenten Liebhabern, wie das griechische Mathematiker waren oder zumindest sein wollten. Nach dem Format der Texte wurde sie in den Schreiberschulen gelehrt – kaum allen Schülern, nicht einmal denjenigen unter diesen, welche das volle Standardcurriculum absolvierten, aber doch zumindest einem Teil der zukünftigen Schreiber (oder nur den künftigen Lehrern der Schreiberschulen?).

Das Wort „Schreiber" könnte irreführend sein. Sicherlich konnten die Schreiber schreiben. Aber die Fähigkeit zu rechnen war genauso wichtig – ursprünglich ist das Schreiben als Hilfsmittel bei der Buchhaltung erfunden worden, und diese nachrangige Funktion in Bezug auf das Rechnen blieb sehr wichtig. Die modernen Kollegen der Schreiber sind Ingenieure, Buchhalter und Notare.

Es ist daher angebracht, nicht von „babylonischen Mathematikern" zu sprechen. Strenggenommen sollte man das, was man an den Schreiberschulen größtenteils unterrichtete, in erster Linie nicht als „Mathematik" sondern eher als *Rechnen* bezeichnen. Der Schreiber sollte befähigt werden, *die richtige Zahl zu finden*, sei es in seiner Funktion als Ingenieur oder als Buchhalter. Sogar Aufgaben, die keine echten praktische Probleme betrachten, drehen sich immer um messbare Größen, und sie fragen immer nach einer numerischen Lösung, wie wir gesehen haben. Vielleicht ist es angebracht, von der „Algebra" als „reinem Rechnen" anstatt (unangewandter und daher „reiner") Mathematik zu reden. Die oben auf Seite 9 gemachten Beobachtungen sollten also noch einmal durchdacht werden!

Dies ist einer der Gründe, warum viele der Aufgaben, die nicht wirklich in der Praxis verankert sind, dennoch vom Messen und Teilen eines Feldes sprechen, von der Herstellung von Ziegeln, der Konstruktion von Belagerungsrampen, Kauf und Verkauf, und vom Verleihen von Geld gegen Zinsen. Man kann viel über das tägliche Leben in Babylonien (wie es mit den Augen eines professionellen Schreibers ausgesehen hat) allein durch die Themen lernen, über die in diesen Problemen gesprochen wird, selbst wenn deren mathematische Substanz vollkommen künstlich ist.

Wenn wir wirklich altbabylonische „Mathematiker“ in einem annähernd modernen Sinn finden wollen, dann müssen wir diejenigen betrachten, welche diese Techniken *erschaffen* haben, und die entdeckt haben, wie man Aufgaben *konstruiert*, die schwierig sind, aber dennoch gelöst werden können. Betrachten wir etwa das Problem TMS XIX #2 (das nicht in diesem Buch enthalten ist): Finde die Seiten ℓ und w eines Rechtecks aus seiner Fläche und der Fläche eines anderen Rechtecks ▭$(d, ⧉(\ell))$ (also eines Rechtecks, dessen Länge die Diagonale des ersten Rechtecks und dessen Breite gleich dem Würfel mit Seitenlänge ℓ ist). Dies ist ein Problem achten Grades; ohne systematische theoretische Arbeit, vielleicht mit einer Aufgabe wie BM 13901 #12 als Ausgangspunkt, wäre es unmöglich gewesen zu erraten, dass diese Aufgabe (in unseren Worten) bi-biquadratisch ist und sich mit Hilfe einer Kaskade dreier quadratischer Gleichungen lösen lässt. Diese Art theoretischer Arbeit hat aber keine schriftlichen Spuren hinterlassen.

Der erste Zweck: Das Üben numerischen Rechnens

Wenn man einem der algebraischen Texte zu folgen versucht, insbesondere einem der eher komplizierten Exemplare, dann ist man geneigt, den Rechnungen zu trauen – „es ist zweifellos richtig, dass IGI $6°56'40''$ gleich $8'38''24'''$ ist, und wenn nicht, dann würde in der modernen Ausgabe des Textes eine Fußnote angebracht sein (bestimmte Schreibfehler sind oben tatsächlich korrigiert worden, somit sollten alle Berechnungen korrekt sein). Ein misstrauischer Leser dagegen wird ein gutes Training in sexagesimaler Arithmetik genossen haben.

Dies illustriert eine der Funktionen der Algebra im Curriculum: sie liefert einen Vorwand, um den Umgang mit schwierigen Zahlen zu trainieren. Weil das Ziel der Schule das Training von professioneller Routine war, war die intensive Pflege der sexagesimalen Arithmetik offensichtlich ein willkommener Nebeneffekt.

Diese Beobachtung kann auf unsere Zeit und auf den Unterricht quadratischer Gleichungen übertragen werden. Das Ziel beim Unterricht quadratischer Gleichungen war nie, beim Überspielen einer Langspielplatte oder einer CD auf eine Kassette nützlich zu sein. Aber die Reduktion komplizierter Gleichungen und die anschließende Lösung quadratischer Gleichungen ist nicht der schlechteste Vorwand, um Schüler mit der Manipulation symbolischer algebraischer Ausdrücke und dem Einsetzen numerischer Werte in eine Formel vertraut zu machen; es scheint schwierig zu sein, Alternativen mit einer überzeugenderen direkten Beziehung zur Praxis zu finden – und das allgemeine Verständnis, die fehlerfreie Manipulation algebraischer Formeln und das Einfügen numerischer Werte in Formeln *sind* notwendige Routinen in vielen Berufen.

Der zweite Zweck: Professioneller Stolz

Der Erwerb professioneller Fingerfertigkeit ist sicherlich ein gerechtfertigtes Ziel, selbst wenn es auf indirektem Weg erreicht wird. Dennoch war es nicht der einzige Zweck des Unterrichtens von anscheinend nutzloser Mathematik. Kulturelle oder ideologische Funktionen spielten ebenfalls eine Rolle, wie dies die „Edubba-Texte" (oben Seite 38) zeigen, Texte, welche der Herausbildung von professionellem Stolz künftiger Schreiber dienten.

Wir kennen eine Anzahl solcher Texte. Diese sprechen wenig von täglichen Routinen – der Umgang mit diesen war eine zu elementare Fähigkeit; der Stolz eines Schreibers, wenn er gerechtfertigt sein soll, musste auf etwas Gewichtigerem aufgebaut sein. Das Lesen und Schreiben der akkadischen Muttersprache in Silbenschrift zählte dabei nicht viel. Aber Sumerisch schreiben zu können, was nur andere Schreiber verstehen würden, war eine andere Preisklasse! Alle Logogramme zu kennen und zu üben, einschließlich ihrer okkulten und seltenen Bedeutungen, würde ebenfalls zählen.

Die Fläche eines rechteckigen Feldes aus seiner Länge und Breite zu berechnen war ebenfalls keine Aufgabe, die allzu respekteinflößend ist – jeder Stümper in diesem Beruf würde das können. Sogar die Bestimmung der Fläche eines Trapezes war zu leicht. Aber Länge und Breite aus ihrer Summe und der Fläche zu bestimmen, welche sie „enthalten", hatte schon mehr Niveau. Sie aus den Angaben wie denen auf AO 8862 #2, oder den alptraumhaften Informationen auf VAT 7532 zu berechnen – das würde einem das Gefühl geben, ein *richtiger* Schreiber zu sein, also jemand, der sich den Respekt von Nicht-Eingeweihten verdient hatte.

Wir haben keine Information darüber, ob die Kenntnis des Sumerischen und der Mathematik zur Auswahl der Schreiberlehrlinge benutzt wurde – dies ist eine der Funktionen solcher Fähigkeiten in heutigen Schulen: Weil die Schreiberschule keine öffentliche Schule mit gleichem Zugang für alle war, gab es kaum Bedarf daran, die „falschen" Schüler mit indirekten Methoden draußen zu halten. Allerdings haben tote Sprachen auch in der jüngeren Vergangenheit eine kulturelle Rolle gespielt, die über das Aufrechterhalten einer sozialen Barriere hinausging.

Seit der Renaissance war Latein jahrhundertelang ein Symbol einer gebildeten Elite und Teil des Selbstbewusstseins der europäischen administrativen und juristischen Institutionen; von diesem Gesichtspunkt aus wurde die mathematische Ausbildung von Ingenieuren von denen, welche die lateinische Kultur besaßen und ihre Normen akzeptiert hatten, eher als Beweis für kulturelle und moralische Minderwertigkeit angesehen. Seit dem 18. Jahrhundert waren jedoch mathematische Kompetenz und Fingerfertigkeit *über das Notwendige hinaus* wesentliche Komponenten der professionellen Identität von Ingenieuren, Architekten und Offizieren[1].

Sogar eine Analyse der kulturellen Funktion der „höheren“ altbabylonischen Mathematik kann uns also etwas über unsere Zeit lehren.

[1] Im 19. Jahrhundert machten diese drei Gruppen den Löwenanteil der Abonnenten des *Journal des mathématiques élémentaires* und ähnlicher Zeitschriften aus. Das *Ladies' Diary*, das von 1704 bis 1841 erschien und mathematisch sehr inhaltsreich war, hat ebenfalls auf eine soziale Gruppe gezielt, die zum größten Teil von Oxford-Cambridge und der altsprachlichen humanistischen Bildung ausgeschlossen waren; dies waren Kreise, zu denen nicht einmal vornehme Frauen Zugang hatten.

8. Kapitel
Ursprung und Erbe

Eine Möglichkeit, sozio-kulturelle Strukturen und Umstände zu erklären, argumentiert von ihrer Funktion her: Wenn die Schreiberschule so viele Mühen aufwendet, um fortgeschrittene Mathematik und sogar die sumerische Sprache zu unterrichten, und wenn es dies über Jahrhunderte hinweg getan hat, dann müssen diese Aktivitäten wichtige Funktionen gehabt haben – wenn nicht als direkt sichtbare Konsequenzen, dann doch als indirekte. Wir haben eben eine Erklärung dieser Art gesehen.

Eine andere Art der Erklärung – keine alternative, sondern eher die andere Seite derselben Medaille – gründet sich auf den historischen Ursprung:. Wer hatte die Idee, und wann? Oder, wenn es sich nicht um einen Einfall eines Moments handelte, wie hat sich das Phänomen entwickelt, und mit welchen früheren Strukturen und Bedingungen hat es begonnen? In unserem speziellen Fall: Wenn die Erfindung nicht in der Schreiberschule gemacht wurde, woher kam dann die Inspiration, und wie veränderte diese Aktivität vielleicht ihren Charakter, weil sie in eine neue Umgebung verfrachtet worden ist, wo sie neue Funktionen zu erfüllen hatte?

Während der letzten 40 Jahre haben sich unsere Kenntnisse über die mesopotamische Mathematik des dritten vorchristlichen Jahrtausends stark vermehrt, insbesondere was die Bestimmung rechtwinkliger oder fast rechtwinkliger Felder angeht. Wir können jetzt mit Zuversicht behaupten, dass wir deshalb keine Texte aus dem dritten Jahrtausend mit algebraischen Problemen gefunden haben, weil es *keine gegeben hat*.

Dies widerspricht der traditionellen Überzeugung, dass alles in Mesopotamien aus vor undenklichen Zeiten stammen muss. Sicher, wir sind im „Orient“, wo alles, wie wir wissen, ohne Alter und Entwicklung (und vor allem ohne Fortschritt) ist – zumindest ist dies im „Westen“ eine Meinung „ohne Alter und Entwicklung“.

Der Ursprung: Rätsel von Feldmessern

Die Algebra der altbabylonischen Schreiberschulen ist, ganz im Gegenteil, keine Fortsetzung einer jahrhunderte- oder gar jahrtausendelangen Tradition – im dritten Jahrtausend existierte nichts Vergleichbares. Dies ist eine unter vielen Charakteristika der neuen Kultur der Schreiber dieser Epoche. Im Prinzip könnte die Algebra in der Umgebung der Schulen entwickelt worden sein – dies war sicherlich für die Arbeit an zweisprachigen Texten und die Untersuchungen der sumerischen Grammatik unter einem akkadischen Blickwinkel der Fall. Ein solcher Ursprung würde auch zur Tatsache passen, dass das zentrale Vokabular für Feldmessung und Teile des Vokabulars in praktischen Rechnungen sumerischen Ursprungs ist oder zumindest in sumerischen Logogrammen geschrieben wurde („Länge“, „Breite“, IGI, „sind gleich bei“), während die Ausdrücke, welche die Algebra charakterisieren und die benutzt werden, um die *Probleme* zu formulieren, akkadisch sind.

Eine Erfindung innerhalb der Schreiberschulen stimmt aber wenig mit anderen Quellen überein. Insbesondere widerspricht eine solche der Art, wie Probleme und Techniken, die zur selben Familie gehören, in griechischen und mittelalterlichen Quellen auftauchen. Eine genaue Untersuchung aller parallelen Materialien enthüllt eine ganz andere Geschichte – das Material ist zu riesig, um hier eine vollständige Präsentation der Argumente geben zu können, aber ein Teil davon ist in die folgende Diskussion eingewoben.

Die Feldmesser im zentralen Irak (vielleicht auch aus einer größeren Region, aber dies ist eine Hypothese, was diese frühe Epoche angeht) besaßen eine Tradition geometrischer Rätsel. Wir kennen solche professionellen Rätsel aus anderen prämodernen Umgebungen von mathematischen Praktikern (Rechenmeister, Buchhalter, Architekten und selbstverständlich Feldmesser) , deren Ausbildung auf einer Lehre beruhte und nicht durch eine mehr oder weniger gelehrte Schule übernommen wurde. Als ein Beispiel zitieren wir das Problem der „Hundert Vögel“, das man in zahlreichen chinesischen, indischen, arabischen und europäischen Aufgabensammlungen aus dem Mittelalter findet:

> Jemand geht zum Markt und kauft 100 Vögel für 100 Dinare. Eine Gans kostet 3 Dinare, ein Huhn 2, und er bekommt 3 Spatzen für einen Dinar. Sag mir, wenn Du ein erfahrener Rechner bist, was er gekauft hat![1]

Es gibt viele Lösungen. 5 Gänse, 32 Hühner und 63 Spatzen; oder 10 Gänse, 24 Hühner und 66 Spatzen usw. Wenn man allerdings ein Rätsel beantwortet, muss man nicht alle Lösungen angeben und auch keinen Beweis führen (außer der numerischen Verifikation dass die Antwort den gestellten Bedingungen genügt)[2].

[1] Dies ist eine „Durchschnittsvariante der Aufgabe. Die Preise variieren ebenso wie die Vogelarten (manchmal handelt es sich auch andere Tiere). Fast immer geht es allerdings um 100 Tiere und 100 Geldeinheiten. Meist sind es drei Tierarten, von denen zwei mehr als einen Dinar kosten und die dritte weniger.

[2] Wer mag, kann versuchen die vollständige Lösung mit oder ohne negative Zahlen (die für verkaufen statt kaufen stehen würden) zu finden und zeigen, dass es eine unter den gegebenen Umständen

Wer *eine* richtige Antwort geben kann, hat sich als fähiger Rechner „auch nit on sonders Auffmercken der Unwissenden“ erwiesen, wie ein Handbuch zur praktischen Arithmetik[3] um 1540 sagt.

Die Lösung solcher Rätsel verlangt oft die Anwendung eines besonderen Tricks. Im vorliegenden Fall könnte man etwa bemerken, dass man jedesmal, wenn man eine Gans kauft, 3 Spatzen kaufen muss – das macht 4 Vögel für 4 Dinare – und 3 Spatzen für jedes Paar Hühner – das sind 5 Vögel für 5 Dinare.

Solche „Unterhaltungsaufgaben“ (wie man sie später genannt hat, nachdem man sie in eine mathematische Kultur eingebettet hat, die ihre Wurzeln in Schulen hatten, wo sie für mathematische Unterhaltung zuständig war) hatten eine doppelte Funktion in dem Milieu, aus dem sie stammten. Einerseits dienten sie der Ausbildung – auch in heutigen Schulen ist ein Löwe, der drei Mathematiklehrer pro Stunde frisst, eine willkommene Abwechslung von Kindern, die drei Süßigkeiten am Tag bekommen. Auf der anderen Seite (weil die besonderen Tricks selten in praktischen Rechnungen benutzt wurden) erlaubten sie den Lösern, sich wie „echte professionelle Rechner“ zu fühlen – dies ist eine Parallele zu dem, was wir oben über die Rolle des Sumerischen und der „fortgeschrittenen Mathematik“ für die babylonischen Schreiber gesagt haben.

Irgendwann zwischen 2200 und 1800 v. Chr. haben akkadische Feldmesser den Trick erfunden, der später „die akkadische Methode“ genannt wurde, nämlich die quadratische Ergänzung; um 1800 kursierten einigen wenige geometrische Rätsel über Quadrate, Rechtecke und Kreise, deren Lösungen auf diesem Trick basierten.

Eine Gemeinsamkeit dieser Rätsel war die Betrachtung nur solcher Elemente, die direkt in den Figuren auftauchten – etwa *die* Seite oder alle *vier* Seiten eines Quadrats, niemals aber „die 3-fache Fläche“ oder „$\frac{1}{3}$ der Fläche“. Man könnte sagen, dass die Aufgaben ohne Koeffizienten definiert waren, oder alternativ „mit natürlichen Koeffizienten“.

Steht ${}_4c$ für „die vier Seiten“ und $\square(c)$ für die Fläche eines Quadrats, d für die Diagonale und $\sqsubset\!\sqsupset(\ell, w)$ für die Fläche eines Rechtecks, dann scheint die Liste der Rätsel die folgenden Aufgaben umfasst zu haben:

vollständige Lösung ist. Dies wurde von dem arabischen Mathematiker Abū Kāmil um 900 n. Chr. gemacht. In der Einführung zu seiner Abhandlung darüber nutzte er die Gelegenheit, sich über Praktiker lustig zu machen, denen die theoretische Einsicht fehlte und die nur irgend eine Lösung angaben – und die daher die Frage als Rätsel und nicht als ein mathematisches *Problem* auffassten.

[3] Siehe den Abschnitt „Schimpfrechnung“ in Christoph Rudolffs *Künstliche rechnung mit der ziffer vnd mit den zalpfenningen*, Nürnberg 1540.

$$
\begin{aligned}
c + \square(c) &= 110 \\
{}_4c + \square(c) &= 140 \\
\square(c) - c &= 90 \\
\square(c) - {}_4c &= 60(?) \\
\ell + w = \alpha \quad &, \quad \sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) = \beta \\
\ell - w = \alpha \quad &, \quad \sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) = \beta \\
\ell + w = \alpha \quad &, \quad (\ell - w) + \sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) = \beta \\
\ell - w = \alpha \quad &, \quad (\ell + w) + \sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) = \beta; \\
d = \alpha \quad &, \quad \sqsubset\!\sqsupset(\ell, w) = \beta.
\end{aligned}
$$

Darüber hinaus gab es Probleme über zwei Quadrate (gegeben ist die Summe oder Differenz der Seiten zusammen mit der Summe oder Differenz der Flächen); ein Problem, in welchem die Summe des Umfangs, der Durchmesser und die Fläche eines Kreises gegeben ist, sowie *möglicherweise* die Aufgabe $d - c = 4$ über ein Quadrat, mit der Pseudo-Lösung $c = 10, d = 14$; bei zwei Aufgaben über Rechtecke, die schon vor 2200 v. Chr. bekannt gewesen zu sein scheinen, sind im einen die Fläche und die Breite, im andern die Fläche und die Länge gegeben. Dies scheint alles zu sein.[4]

Diese Rätsel scheinen die altbabylonischen Schreiberschulen übernommen zu haben, wo sie der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Algebra als einer eigenen Disziplin war. Die Schreiberschule übernahm die Tradition der Rätsel allerdings nicht unverändert. Ein Rätsel muss, damit es interessant wird, von auffälligen Größen (*der* Seite, *allen vier* Seiten usw.) sprechen; eine schulische Einrichtung dagegen neigt dazu, die Koeffizienten systematisch zu variieren – insbesondere eine Schule wie die der mesopotamischen Schreiber, die sich seit der Erfindung der Schrift im vierten Jahrtausend immer auf systematische Variationen gestützt hat.[5] In einem Rätsel beginnt man gewöhnlich mit natürlich vorhandenen Größen (etwa den vier Seiten eines Quadrats) und kommt erst dann zu den abgeleiteten Größen (hier die Fläche). In der Schule dagegen wird gewöhn-

[4] In altbabylonischen Texten gibt es eine geschlossene Gruppe, welche aus den vier Aufgaben über Rechtecke besteht, bei denen die Fläche zusammen mit der Länge, der Breite, oder ihrer Summe oder Differenz gegeben ist. Wir dürfen annehmen, dass der Trick der quadratischen Ergänzung zuerst erfunden wurde, um die Anzahl dieser Art von Problemen von zwei auf vier zu erhöhen.

[5] Wer eine Algebra der Gleichungen nur deswegen praktiziert, um Lösungen zu finden, hält vielleicht nicht viel von den Koeffizienten – sie sind schließlich nur lästige Dinge, die eliminiert werden sollen. Vieta und seine Generation haben aber die Entfaltung der *algebraischen Theorie* im 17ten Jahrhundert dadurch ermöglicht, dass sie den Gebrauch allgemeiner Symbole für die Koeffizienten einführten. Entsprechend haben die altbabylonischen Lehrer, als sie Koeffizienten eingeführt haben, die Entwicklung einer algebraischen Methode ermöglicht – ohne dass die Manipulation von Koeffizienten verfügbar und standardisiert ist, ist eine freie Darstellung unmöglich.

lich die Prozedur betont, und dann spricht man zuerst von der *Fläche*, die dann im Nachhinein eine „Projektion“ oder eine „Basis“ erhält.

Solche Überlegungen erklären, warum eine Aufgabensammlung über Quadrate wie BM 13901 von Problemen zu einem über zwei und dann drei Quadraten fortschreitet, und warum alle Aufgaben außer der archaisierenden #23, „die vier Seiten und die Fläche“, immer zuerst von Flächen sprechen, bevor die Seiten erwähnt werden. Aber die Transformation hört dort nicht auf. Zum einen verlangte die Einführung der Koeffizienten die Einführung einer neuen Technik, dem Wechsel des Maßstabs in einer und dann in zwei (wie in TMS IX #3) Richtungen; die kühne Variation der Addition von Volumina und Flächen führte zu einer weit radikaleren Neuerung, nämlich dem Gebrauch von Faktorisierungen. Die Erfindung dieser neuen Techniken machte sogar die Lösung von noch komplizierteren Problemen möglich.

Als Folge des Drills der systematischen Variation wurde die Lösung der fundamentalen Probleme allerdings eine Banalität, auf der sich kein professionelles Selbstbewusstsein aufbauen ließ: folgerichtig wurde die Arbeit an komplizierten Problemen nicht nur eine Möglichkeit, sondern geradezu eine kulturelle Notwendigkeit.

Man darf annehmen, dass die Orientierung des Schreiberberufs hin zu einer größeren Bandbreite von professionellen Verpflichtungen dazu geführt hat, dass man Probleme außerhalb der abstrakten Geometrie der Feldmessung erfunden hat, bei welchen die algebraischen Methoden eingesetzt werden konnten, und dass daher, obwohl „Forschung“ nicht das Ziel einer Schreiberschule gewesen ist, die Möglichkeiten der *Darstellung* untersucht wurden. Nach dieser Rekonstruktion war es also der Transfer zur Schule, welcher der Technik des cut-and-paste ermöglichte, zum Kern einer echten Algebra zu werden.

Andere Veränderungen waren weniger folgenreich, aber dennoch kaum zu übersehen. Die bevorzugte Seite eines Quadrats in Rätseln war die 10, und dies blieb bis ins sechzehnte Jahrhundert n. Chr. so. In der Schule war der bevorzugte Wert 30′, und wenn eine antiquierte Aufgabe 10 beibehielt, dann wurde sie als 10′ interpretiert.[6] Schließlich wurde, wie wir oben auf S. 38 gesehen haben, das hypothetische „jemand“ beim Stellen einer Frage durch das professorale „ich“ ersetzt.

BM 13901 #23 (Seite 82), hält an den „vier Seiten und der Fläche“ (in dieser Reihenfolge) und der Seitenlänge 10 fest, ändert aber die Größenordnung; es

[6]Um einzusehen, dass 10 (und 30) genau diese Rolle spielten, muss man zeigen, dass 10 nicht die übliche Wahl in anderen Situationen war, in denen ein Parameter frei gewählt wurde. Durch Vergleichen vieler Quellen findet man, dass 10 (oder 30 in Texten, die von der Schultradition abstammen) die bevorzugte Seitenlänge nicht nur von Quadraten war, sondern auch die anderer Polygone, genau wie 4, 7 und 11 die bevorzugten Zahlen in Aufgaben zu Vielfachen und Teilern waren, und zwar nur dort (siehe Fußnote 4, Seite 53.

handelt sich also um eine charakteristisches Fossil, das in Richtung der Rätseltradition zeigt. Sogar die Sprache ist archaisierend und bedient sich der Sprache von Feldmessern, die nicht in der Schreiberschule erzogen worden waren. Wenn wir den Platz der Aufgabe gegen Ende des Texts (#23 von 24 Problemen, wobei #24 das verwickeltste von allen ist), dann können wir es als das „letzte Problem vor Weihnachten“ ansehen.

Es scheint, als hätte die erste Entwicklung der algebraischen Disziplin in der Gegend von Eshnunna stattgefunden, das nördlich von Babylon liegt, und zwar während der ersten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts[7]. Aus dieser Gegend und dieser Zeit besitzen wir einige mathematische Texte, die ausnahmsweise regulär ausgegraben wurden und damit datiert werden können. Damals war Eshnunna ein kulturelles Zentrum des ganzen nördlich-zentralen Teils des heutigen Irak; Eshnunna etnwickelte auch die erste Gesetzgebung außerhalb des Südens Sumers. Der Text Db_2–146 (unten Seite 133) stammt von einer Grabungsstätte, die dem Königreich von Eshnunna angehört hat.

Etwa um 1761 wurde Eshnunna von Hammurabi erobert und zerstört. Wir wissen, dass Hammurabi die Idee einer Gesetzessammlung von dort erhielt und dürfen annehmen, dass er auch versklavte Gelehrte mitbrachte. Ob darunter auch Gelehrte waren, die sich mit dem Unterricht von Mathematik beschäftigten, können wir nur raten (die Schichten des zweiten Jahrtausends von Babylon liegen tief unter den Überresten der Stadt des ersten Jahrtausends), aber jedenfalls übernahm der ehemals sumerische Süden die neue mathematische Disziplin um etwa 1750 – die Tafel AO 8862 (Seite 66), bei der die Terminologie und das Format noch nicht festgelegt war, scheint ein frühes Beispiel aus dieser Zeit zu sein.

Aufgaben von verschiedenen Grabungsstätten in der Umgebung von Eshnunna drehen sich um viele der Themen, die aus späteren Zeiten bekannt sind – die frühe Rechtecks-Variante der Aufgabe vom „abgebrochenen Schilfrohr“, die wir auf Seite 76 erwähnt haben, stammt von dort. Erstaunlicherweise gibt es aber kein einziges Beispiel einer *Darstellung*. Andererseits enthält AO 8862 bereits ein Beispiel in welchem die Anzahl der Arbeiter, ihrer Arbeitstage und der von ihnen hergestellten Ziegel „angehäuft“ werden. Die Prozedur wird nicht erklärt, aber ganz offenbar müssen die Anzahl der Arbeiter und der Arbeitstage durch die beiden Seiten eines Rechtecks dargestellt werden – und die hergestellten Ziegel also durch die mit einer Konstanten (Ziegel pro Tag und Arbeiter) multiplizierten Fläche. Ein großer Teil der Texte aus Eshnunna beginnt mit „Wenn Dich jemand fragt […]“, eine Redewendung, die weder auf AO 8862 noch in irgendeinem späteren Text (außer bruchstückhaft auf dem archaisierenden Problem BM 13901 #23) zu finden ist.

[7]Eshnunna wurde 2075 von Ur III unterworfen, befreite sich aber bereits 2025 wieder.

Aus der Zeit wenig später haben wir eine Reihe von Texten, die, nach ihrer Orthographie zu beurteilen, im Süden geschrieben wurden. Einige Textgruppen genügen einem wohldefinierten Kanon, was Format und Terminologie (nicht dieselbe in allen Gruppen) angeht, was ein bewusstes Streben nach Regularität nahelegt (die VAT- und Str-Texte gehören alle hierher). Um 1720 herum trennte sich der ganze Süden jedoch vom altbabylonischen Reich, und danach wurde dort die Schreiberkultur auf ein Minimum reduziert; Mathematik scheint nicht überlebt zu haben. Ab dem späten 17. Jahrhundert haben wir eine nennenswerte Anzahl von Texten aus Sippar, etwas nördlich von Babylon (BM 85200+VAT 6599 ist einer von ihnen), und eine weitere Reihe von Texten aus Susa im westlichen Iran (die TMS-Texte), welche, das legt ihre Terminologie nahe, vom nördlichen, zuerst aus Eshnunna bekannten Typ abstammen. Und danach nichts mehr …

Das Erbe

Im Jahre 1595 beendete ein Überfall der Hethiter den schon schwachen altbabylonischen Staat und dessen soziales System. Nach dem Überfall übernahmen die Kassiten die Macht, ein Volksstamm, dessen Angehörige als Fremdarbeiter und Plünderer schon seit den Zeiten von Hammurabi in Babylon gelebt hatten. Dies setzte dem altbabylonischen Zeitalter und seiner besonderen Kultur ein abruptes Ende.

Die Schreiberschule verschwand. Für Jahrhunderte ging der Gebrauch der Schrift stark zurück, und sogar danach wurden gelehrte Schreiber nur innerhalb von „Schreiberfamilien“ unterrichtet (anscheinend wirkliche Familien, in denen der Beruf vom Vater an den Sohn tradiert worden war). Sogar höhere Mathematik verschwand. Der soziale Bedarf an praktischer Rechnung wurde geringer, verschwand aber nicht; aber der professionelle Stolz der gelehrten Schreiber basierte nun auf Zugehörigkeit zu einer verehrten Tradition. Der Schreiber verstand sich jetzt als jemand, der *zu schreiben verstand, sogar Literatur*, und nicht als Rechner. Ein Großteil der sozial notwendigen Rechnungen wurde wohl Spezialisten anvertraut, deren dürftige Ausbildung in Literatur sie nicht als „Schreiber“ qualifizierte (im ersten Jahrtausend ist eine solche Aufteilung ziemlich sicher).

Aus den 1200 Jahren, welche dem Zusammenbruch der altbabylonischen Kultur folgten, ist kein einziger Algebratext erhalten. Dies hat noch nicht viel zu bedeuten, weil nur sehr wenige auch nur ansatzweise mathematische Texte überlebt haben (einige Texte zur Buchhaltung, Spuren von Feldmessung, einige Tabellen von Reziproken und Quadraten). Aber *als* einige wenige von gelehrten Schreibern verfassten wirklich mathematische Texte nach 400 Jahren wieder auftraten, erlaubt uns die Terminologie das, was innerhalb der Umgebung der Schreiber weitergegeben wurde, von dem zu unterscheiden, was nochmals aus der Umgebung der „Laien“ übernommen worden war. Zur letzteren Kategorie gehört eine Handvoll von Problemen über Quadrate und Rechtecke. Sie enthalten keine Darstellung, keine Variation von Koeffizienten , nichts Anspruchsvolles wie die Aufgabe vom „abgebrochenen Schilfrohr“ oder dem Handel von Speiseöl, nur Aufgaben nahe an der Tradition der Rätsel; es ist kaum gerechtfertigt, hier von Beispielen für eine „Algebra“ zu reden.

Diese späten Texte informieren uns offensichtlich nicht, weder direkt noch indirekt, über die Umgebung in der die Rätsel weitergegeben worden waren, obwohl eine Fortsetzung der Tradition der Feldmesser die plausibelste Erklärung wäre. Quellen aus der klassischen Antike und dem islamischen Mittelalter machen zumindest klar, dass die Tradition, welche einst die altbabylonische Algebra inspiriert hatte, trotz des Verschwindens ihres anspruchsvolleren Nachwuchses überlebt hat.

Der beste Beleg dafür kommt von einem arabischen Handbuch der praktischen Geometrie, das etwa um das Jahr 800 n. Chr. herum geschrieben wurde (vielleicht später, aber mit einer Terminologie und in einer Tradition, die auf diesen Zeitraum hindeutet), und das uns in einer lateinischen Übersetzung[8] aus dem 12. Jahrhundert erhalten ist. Es enthält all die Probleme, welche wir oben der Rätseltradition zugeschrieben haben, bis auf diejenigen über zwei Quadrate und das Kreisproblem – insbesondere das Problem über „die vier Seiten und die Fläche“, in derselben Reihenfolge wie auf BM 13901 #23, und immer noch mit der Lösung 10 (nicht 10′). Es bewahrt auch den komplexen Wechsel zwischen grammatikalischen Personen, das hypothetische „jemand“, der die Fragen in den frühesten Schultexten stellt, die Ermahnung, etwas im Kopf zu behalten, und sogar die gelegentliche Begründung eines Schritts der Prozedur mittels des Zitats von Wörtern der Aussage als etwas, das „er“ gesagt hat. Aufgaben derselben Art tauchen in den darauffolgenden Jahrhunderten immer wieder auf – „die vier Seiten und die Fläche“ (anscheinend zum letzten Mal) in Luca Paciolis *Summa de Arithmetica* aus dem Jahre 1494, „die Seite und die Fläche“ eines Quadrats im *Libro de algebra en arithmetica y geometria* von Pedro Nuñez aus dem Jahre 1567 (in beiden Fällen in der traditionellen Reihenfolge der Rätsel, und in der *Summa* mit Lösung 10).

In der griechischen Mathematik sind „algebraische“ Probleme zweiten Grades selten, aber nicht ganz abwesend. Eine dieser Aufgaben ist besonders interessant: in einem der Teile der als *Geometrica* bekannten Textsammlung, die traditionell aber fälschlicherweise Heron zugeschrieben wird, tauchen „die vier Seiten und die Fläche“ wieder auf, mit dem Unterschied, dass aus den vier Seiten „der Umfang“ geworden ist. Hier ist die geometrische Beschreibung so genau, dass

[8] Das *Liber mensurationum* wird einem nicht identifizierten Abū Bakr, „der Heus genannt wird“, zugeschrieben, und wurde von Gerhard von Cremona übersetzt.

wir ihr sogar die Orientierung der Figur entnehmen können: das Rechteck, das die vier Seiten repräsentiert, wird *unten* hinzugefügt (siehe Abb. 8.1). Der Text spricht explizit vom Rechteck, das $4c$ repräsentiert, als „4 Fuß“.

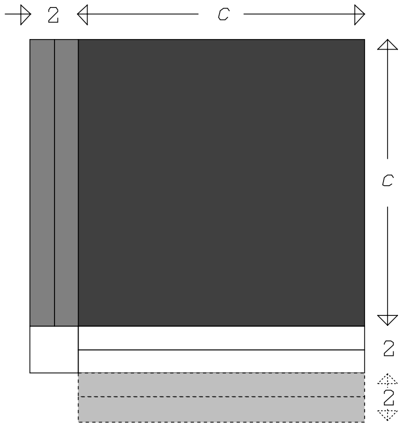


Abb. 8.1: „Die Fläche zum Umfang hinzugefügt“ der *Geometrica*.

Seit der Entdeckung der babylonischen Algebra wurde oft behauptet, dass eine Komponente der theoretischen Geometrie der Griechen, nämlich Prop. II.1-II.10 der Euklidischen *Elemente*, eine Übersetzung der Ergebnisse der babylonischen Algebra in die Sprache der Geometrie sei. Diese Idee ist nicht unproblematisch. Euklid löst beispielsweise keine Aufgaben, sondern beweist Konstruktionen und Sätze. Andererseits scheint die geometrische Interpretation der altbabylonischen Technik für diese Annahme zu sprechen.

Wenn wir aber die zehn Propositionen II.1–10 der *Elemente* mit der Liste der ursprünglichen Rätsel vergleichen, dann machen wir eine unerwartete Entdeckung: alle zehn Propositionen können direkt mit der Liste verbunden werden. Sie zeigen, dass die *naiven Methoden der Rätseltradition durch die strengsten theoretischen Standards der Zeit Euklids begründet werden können*. Auf der anderen Seite steht *nichts* bei Euklid, das mit den Erfindungen der altbabylonischen Schule verknüpft werden kann. Deren Algebra hat sich als Sackgasse erwiesen – nicht *trotz*, sondern eher wegen ihres hohen Niveaus, die ihr Überleben nur im ganz besonderen Umfeld der altbabylonischen Schule erlaubte.

Die außerordentliche Bedeutung der *Elemente* in der Geschichte der Mathematik steht außer Zweifel. Nichtsdestotrotz geht der wichtigste Einfluss der Feldmessertradition in der modernen Mathematik auf deren Einwirkung auf die mittelalterliche arabische Algebra zurück.

Auch die arabische Algebra scheint Elemente der Rätseltradition übernommen zu haben. Wir wir oben erwähnt haben (Seite 98), handeln deren fundamentale Gleichungen von Geldbeträgen („Besitz“) und deren Quadratwurzeln. Sie wurden nach Regeln ohne Beweis gelöst, wie etwa das folgende über „ein Besitz und zehn seiner Wurzeln sind 39 Dinaren gleich“:

> Du halbierst die Wurzeln, welche in dieser Frage 5 sind. Dann multiplizierst Du diese mit sich selbst, was 25 ergibt; addiere sie zu 39, und es ergibt sich 64. Du sollst daraus die Quadratwurzel ziehen, welche 8 ist. Dann ziehe dies von der halben Wurzel ab, nämlich von 5. Dann bleibt 3 übrig, was die Wurzel des Besitzes ist. Und der Besitz ist 9.

Bereits der Autor der ersten bekannten Abhandlung über Algebra (die wahrscheinlich erste *Abhandlung* über dieses Thema[9]) – al-Khwārizmī, der in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts n. Chr. gelebt hat – war nicht mit Regeln zufrieden, die nicht auf Überlegungen oder Beweisen beruhten. Er übernahm daher die geometrischen Beweise der Tradition der Feldmesser, welche den Abbildungen 3.1, 3.3, 4.1 und vor allem der charakteristischen Konfiguration in Abb. 4.12 entsprechen. Später betrachteten Mathematiker wie Fibonacci, Luca Pacioli und Cardano diese Beweise als den wesentlichen Kern der Algebra, während ihnen die von al-Karajī, as-Samaw’al und ihren Nachfolgern erschaffene polynomiale Algebra (eine weitere großartige Sackgasse) unbekannt blieb. Auf diesem Weg eroberte die alte Feldmessertradition die Disziplin von innen; das Wort *census*, die lateinische Übersetzung von „Besitz“, wurde so zum Wort für „Quadrat“. Dies geschah in Wechselwirkung mit Buch II von Euklids *Elementen*, das ebenfalls, wie wir gesehen haben, in einem gewissen Sinn in der Tradition der Feldmesser steht.

Obwohl also die Algebra der Keilschrifttafeln eine Sackgasse war – glorreich, aber dennoch eine Sackgasse – waren es die Prinzipien, welche sie von den ungelehrten Praktikern geborgt hatten, nicht. Ohne diese Inspiration ist es schwierig zu sehen, wie die moderne Mathematik hätte entstehen können. Oder wie man von Gott gesagt hat: „Würde er nicht existieren, müsste man ihn erfinden“.

[9] Das Zitat stammt aus dieser Abhandlung und ist in „konformer Übersetzung“ aus der Lateinischen Version des 12. Jahrhunderts (der beste Zeuge für den Originaltext) wiedergegeben.

9. Kapitel
Eine Moral

Eine Moral? Was hat Moral mit Mathematik und ihrer Geschichte zu tun? Zum einen ist die Moral etwa einer Fabel nicht dasselbe wie die Moral in der Sittenlehre. Die Moral einer Fabel enthüllt sich beim Nachdenken nach dem Lesen: „Was können wir daraus lernen?“ In diesem Sinn haben nicht nur Fabeln, sondern auch Texte, die Geschichte erzählen, eine Moral – spätestens seit der Zeit von Herodot und den hebräischen Schreibern, welche von den Ereignissen der Zeiten von Saulus und David erzählten (oder die Fabeln um diese Ereignisse).

In diesem Sinn haben auch die Geschichte und die Geschichten der Mathematik eine Moral. Die erste Interpretation der altbabylonischen Algebra hatte die implizite Botschaft, dass *sie* dieselbe Art Mathematik betrieben wie *wir*. Ihnen fehlte lediglich der wundervolle algebraische symbolische Kalkül, der uns erlaubt hat, viel weiter zu gehen; und sie hatten die negativen Zahlen noch nicht „entdeckt“ (was in manchen Sekundärquellen in die Überzeugung transformiert wurde, sie hätten sie entdeckt). *Sie* waren zwar nicht so weit gekommen wie *wir*, aber sie waren *auf demselben Weg* – der einzige Weg, der Weg zu uns. Dies ging mit einem leicht abgeleiteten Korollar einher: die Tatsache, dass unser Weg der einzige ist, garantiert, dass das, was wir machen, mit Fortschritt synonym ist, und dass alle anderen – andere Zivilisationen und Schüler, die noch nicht verstehen – lernen müssen, ihm zu folgen.

Ein weiteres Korollar, vielleicht nicht ganz so naheliegend, aber auch nicht zu weit hergeholt, ist dies: was für Mathematik gilt, gilt auch für andere Aspekte der Zivilisation: *wir* sind der fleischgewordene und wahre Fortschritt.

Diese Botschaft verschwindet mit der neuen Interpretation. Altbabylonische Mathematik hat sicherlich viele Ähnlichkeiten mit der heutigen „Weltmathematik“ – wahrscheinlich mehr als jede andere fremde mathematische Kultur (wir bauen so direkt auf die altgriechische und die mittelalterliche arabische Mathematik auf, dass wir sie kaum als „fremd“ betrachten dürfen). Die Unterschiede sind aber unübersehbar, sowohl was die Methoden betrifft, als auch was Ziele und Denkweisen angeht. Was wir von der neuen Interpretation lernen können ist, dass *Mathematik auf verschiedene Arten gedacht werden kann* und dass man immer auf die anderen (die andere Epoche, welche Historiker untersuchen, oder den Partner des Lehrers, also den Schüler) hören sollte, bevor man beschließt, was dieser andere gedacht haben muss und denken sollte. Wenn Mathematik auf verschieden Arten gedacht werden kann, dann gibt es keine Garantie dafür, dass unsere in jeder Hinsicht *die* bestmögliche ist – nicht einmal für uns, und umso weniger in unpersönlicher und supra-historischer Allgemeinheit. Wir können aber durch Zuhören zu einem besseren Verständnis unserer eigenen Vorgehens- und Denkweise kommen, und können besser darüber sinnieren, ob unsere eine der fruchtbareren Arten ist – vielleicht sogar darüber, *welche* Früchte sie verspricht.

Der Fortschritt, den man in der Geschichte der Mathematik findet, ist keine Autobahn in nur eine Richtung. In einem Bild, das der Mathematikhistoriker Moritz Cantor 1875 formuliert hat, muss man ihn mit einer Flusslandschaft mit vielen Strömungen vergleichen – Strömungen, welche sich nach Windungen und Verzweigungen wieder vereinigen und dazu neigen, in die gleiche Richtung in denselben Ozean zu fließen. *Wenn* Fortschritt in der Geschichte der Zivilisationen existiert, dann wird er immer von derselben Art sein.

Probleme für die Leser

Die Aufgaben, die wir in Kap. 2-5 präsentiert haben, waren so unterschiedlich, dass es notwendig war, jede mit einem ausführlichen Kommentar zu versehen. Um den Lesern, die das möchten, die Untersuchung altbabylonischer Texte zu ermöglichen, ohne dabei fest bei der Hand gehalten zu werden, enthält dieser Anhang die Übersetzung einiger Aufgaben, nur von den absolut notwendigen Erklärungen begleitet. Einige sind Gegenstücke zu Aufgaben, die oben präsentiert wurden und von denselben Tafeln stammen.

TMS XVI #2

13. Das 4tel der Breite zu dem, was die Länge über die Breite geht, hinzufügen,
14. 15′. Du, 15′ auf 4 erhöhe, 1 siehst Du, was ist es?
15. 4 und 1 setze.
16. 15′ zerstreue. 10′, was darüber hinausgeht, und 5′, das Hinzugefügte, setze. 20′, die Breite,
17. auf 10′, was darüber hinausgeht, füge hinzu, 30′ die Länge, und 20′, zum Herausreißen, setze. 5′ auf 4 erhöhe,
18. 20′ siehst Du. 20′, die Breite, auf 4 erhöhe, 1°20′ siehst Du.
19. 30′, die Länge, auf 4 erhöhe, 2 siehst Du. 20′, die Breite,
20. aus 1°20′ reiße heraus, 1 siehst Du. 1
21. aus 2, der Länge, reiße heraus, 1 siehst Du, was ist es?
22. Aus 4, vom Viertel, 1 reiße heraus, 3 siehst Du. IGI 4 spalte ab, 15′ siehst Du.
23. 15′ auf 3 erhöhe, 45′ siehst Du, so viel wie Breiten, setze. Setze zum Herausreißen.
24. 1 so viel wie Längen setze. [...] 1 nimm, auf 1 Länge
25. erhöhe, 30′ siehst Du. 20′ die Breite, 20′ auf 45′, (so viel wie (es gibt) von) Breiten, erhöhe,
26. 15′ siehst Du, 15′ zu 15′ füge hinzu, 30′ siehst Du, 30 die Länge.

Kommentar: siehe #1 derselben Tafel, Seite 31.

TMS VII #1

1. Das Viertel der Breite zur Länge habe ich hinzugefügt, dessen 7⟨tel⟩ zu 10 bin ich gegangen,
2. so viel wie der Haufen von Länge und ⟨Breite⟩. Du, 4 setze; 7 setze;
3. 10 setze; 5′ zu 7 erhöhe, 35′ siehst Du.
4. 30′ und 5′ trenne. 5′, den Schritt, auf 10 erhöhe,
5. 50′ siehst Du. 30′ und 20′, setze. 5′, den Schritt, auf 4, vom Viertel der Breite,
6. erhöhe: 20′ siehst Du, 20′, die Breite. 30′ auf 4, vom Viertel
7. erhöhe, 2 siehst Du. 2 setze, Längen. 20′ aus 20′ reiße heraus,
8. und aus 2, 30′ reiße heraus, 1°30′ siehst Du.
9. Aus 4, vom Viertel, 1 reiße heraus, 3 {…} siehst Du.
10. IGI 3 spalte ab, 20′ siehst Du. 20′ auf 1°30′ erhöhe:
11. 30′ siehst Du, 30′ die Länge. 30′ aus 50′ reiße heraus 20′ siehst Du, 20′ die Breite.
12. Kehre um. 7 auf 4, vom Viertel, erhöhe, 28 siehst Du.
13. 10 aus 28 reiße heraus, 18 siehst Du. IGI 3 spalte ab,
14. 20′ siehst Du. 20′ auf 18 erhöhe, 6 siehst Du, 6 (für) die Länge.
15. 6 aus 10 reiße heraus, 4 (für) die Breite. 5′ auf 6 erhöhe,
16. 30′ die Länge. 5′ auf 4 erhöhe, 20′ siehst Du, 20′ die ⟨Breite⟩.

Kommentar: siehe #2 derselben Tafel, Seite 39.

VAT 8389 #1

Vs. I

1. Von 1 BÙR 4 GUR Getreide habe ich (als Pachtzins) genommen,
2. von 1 zweiten BÙR 3 GUR Getreide habe ich genommen.
3. Getreide über Getreide, 8ˋ20 ging es darüber hinaus.
4. Meine Felder habe ich angehäuft: 30ˋ.
5. Meine Felder was?
6. 30ˋ, das BÙR, setze. 20ˋ, das Getreide, das er genommen hat, setze.
7. 30ˋ, das zweite BÙR, setze
8. 15ˋ, das Getreide, das er genommen hat,
9. 8ˋ20 welches das Getreide über das Getreide hinausging,
10. und 30ˋ der Haufen der Flächen der Felder, setze:
11. 30ˋ der Haufen der Flächen der Felder
12. brich entzwei: 15ˋ.
13. 15ˋ und 15ˋ bis zweimal setze:

14. IGI 30‵, vom BÙR, spalte ab: 2″.
15. 2″ auf 20‵, das Getreide, das er genommen hat,
16. erhöhe, 40′ das falsche Getreide; auf 15‵ welches bis zwei Mal
16a. Du gesetzt hast,
17. erhöhe, 10‵ möge Dein Kopf halten!
18. IGI 30, vom zweiten BÙR, spalte ab, 2″.
19. 2″ auf 15‵, das Getreide, das er genommen hat,
20. erhöhe, 30′ das falsche Getreide; auf 15 welches bis zwei Mal
20a. Du gesetzt hast, erhöhe, 7‵30.
21. 10‵ welches Dein Kopf hält,
22. über 7‵30 was geht es hinaus? 2‵30 geht es darüber hinaus.
23. 2‵30 welches es darüber hinausgeht, aus 8‵20
24. welches das Getreide über das Getreide hinausgeht,

Vs. II

1. reiße heraus: 5‵50 hinterlässt Du.
2. 5‵50, welche Du hinterlassen hast,
3. möge Dein Kopf halten!
4. 40′, die Änderung, und 30′, die Änderung
5. häufe an: 1°10′. Das IGI kenne ich nicht.
6. Was zu 1°10′ muss ich setzen,
7. das mir 5‵50, was Dein Kopf hält, gibt?
8. 5‵ setze. 5‵ auf 1°10 erhöhe.
9. 5‵50 gibt es Dir.
10. 5‵ welche Du gesetzt hast, aus15‵ welche bis zwei Mal
11. Du gesetzt hast, aus eins reiße heraus,
12. zu eins füge hinzu:
13. Das erste ist 20‵, das zweite ist 10‵.
14. 20‵ die Fläche des ersten Felds, 10‵ die Fläche des zweiten Felds.
15. Wenn 20‵ die Fläche des ersten Felds,
16. 10‵ die Fläche des zweiten Felds, ihr Getreide was?
17. IGI 30‵, vom BÙR, spalte ab: 2″.
18. 2″ auf 20‵, das Getreide, das er genommen hat,
19. erhöhe, 40′. Auf 20‵, die Fläche des ersten Felds,
20. erhöhe, 13‵20 das Getreide von 20‵, die Fläche des zweiten Felds.
21. IGI 30‵, vom zweiten BÙR, spalte ab: 2″.
22. 2″ auf 15‵, das Getreide, das er genommen hat, erhöhe, 30′.
23. 30′ auf 10‵, die Fläche des zweiten Felds
24. erhöhe, 5 das Getreide der Fläche des zweiten Felds.
25. 13‵30 das Getreide der ¿Fläche? des ersten Felds

26. über 5 das Getreide ¿der Fläche? des zweiten Felds
27. was geht es darüber hinaus? 8`20 geht es darüber hinaus.

Diese Aufgabe stammt von einer von zwei Zwillingstafeln, die insgesamt zehn Probleme über die Pacht enthält, die für zwei Felder bezahlt werden. Auf einem Feld ist die Pacht 4 GUR Getreide pro BÙR, auf dem anderen 3 GUR pro BÙR. Die vorliegende Aufgabe informiert uns auch darüber, dass die Gesamtfläche 30` (SAR = 1 BÙR) ist, und dass die Differenz zwischen der Pacht der beiden Felder 8`20 (SÌLA) beträgt. Die andern Aufgaben geben beispielsweise die beiden Flächen, oder die Differenz der beiden Flächen zusammen mit der gesamten Pacht.

Wie auf Seite 20 erklärt sind das BÙR und das GUR Einheiten des täglichen Lebens. Um im Sexagesimalsystem rechnen zu können, müssen wir sie in die Standard-Einheiten SAR und SÌLA (1 BÙR = 30` SAR, 1 GUR = 5` SÌLA) umwandeln; wie wir sehen, ist der Unterschied zwischen den beiden Pachten bereits in SÌLA angegeben, und die Gesamtfläche in SAR.

Heutige Leser mögen es seltsam finden, dass die beiden Pachten pro BÙR, die in Zeilen I.1-2 in GUR (pro BÙR) angegeben sind, in den Zeilen I.6-7 ohne Multiplikation in SÌLA umgerechnet sind; im Allgemeinen überspringt der Text, wie wir sehen werden, keine Zwischenschritte. Die Erklärung ist, dass die Umrechnung mit Hilfe einer „metrologischen Tabelle“ (wahrscheinlich eine auswendig gelernte Tafel) gemacht worden ist. Eben weil solche Umrechnungen so oft gemacht werden mussten, hatte der Schreiber Tabellen, die nicht nur die Umrechnungsfaktoren angaben, sondern auch deren Vielfache. Die Babylonier besaßen allerdings keine Tabellen für zusammengesetzte Umrechnungen, und daher benötigt man für die letzte Umrechnung in SÌLA pro SAR eine Rechnung.

Heutige Leser dürften sich ebenfalls darüber wundern, dass der Text nicht ein, sondern zwei Mal den Wert eines BÙR in SÌLA und dessen IGI angibt. Einmal mehr ist der Grund dafür der, dass der Text eine altbabylonische Rechentechnik beschreibt: Der Rechner schreibt auf einer kleinen Hilfstafel die drei Zahlen 20 (20` SÌLA pro BÙR), 30 (30`` SAR pro BÙR) und 2 (2″, IGI 30`) – und danach, mittels einer Multiplikationstabelle das Produkt 40 (20`·2″ = 40′ SÌLA pro SAR).

Eine kleine Erklärung erscheint angebracht, um das Verständnis des Verfahrens zu erleichtern. Der Text bestimmt zuerst, wie groß die Differenz zwischen den beiden Pachten wäre, wenn die beiden Felder die gleiche Fläche hätten, also jedes 15` SAR. Dieser Unterschied ist nicht groß genug: er beträgt 2`30 SÌLA, 5`50 SÌLA zu wenig – und folglich muss das erste Feld vergrößert werden. Jedes Mal, wenn ein SAR vom zweiten zum ersten Feld dazugegeben wird, wächst die Differenz um 40′+30′ SÌLA (die beiden „Änderungen“ von II.4[1]); die Anzahl der SAR, die man dazugeben muss, wird dann durch eine Division bestimmt.

[1] Die Tafel ist an dieser Stelle beschädigt, aber die Spuren der vorhandenen Zeichens könnten von dem Wort *takkirtum* stammen, das „Wechsel“ oder „Änderung“ bedeutet, aber nicht in anderen mathe-

Am Schluss finden wir eine numerische Verifikation. Solche Verifikationen sind in den altbabylonischen Texten nicht selten, auch wenn ihr Auftreten nicht eine allgemeine Norm ist.

VAT 8390 #1

Vs. I

1. Länge und Breite habe ich enthalten lassen: 10ˋ die Fläche.
2. Die Länge zu sich selbst habe ich enthalten lassen:
3. eine Fläche habe ich gebaut.
4. So viel wie die Länge über die Breite hinausging
5. habe ich enthalten lassen, bis 9 habe ich wiederholt:
6. so viel wie jene Fläche welche die Länge mit sich selbst
7. enthalten lassen worden ist.
8. Die Länge und die Breite was?
9. 10ˋ die Fläche setze,
10. und 9 (bis zu) was er wiederholt hat, setze:
11. Die Gleichseite von 9 bis zu der er wiederholt hat, was? 3.
12. 3 zur Länge setze,
13. 3 zur Breite setze.
14. Weil er „so viel wie die Länge über die Breite hinausging,
15. habe ich halten lassen,” gesagt hat,
16. 1 aus 3, welche Du zur Breite gesetzt hast,
17. reiße heraus: 2 hinterlässt Du.
18. 2 welche Du hinterlassen hast, zur Breite setze.
19. 3 welche Du zur Länge gesetzt hast,
20. auf 2 welche Du ⟨zur⟩ Breite gesetzt hast, erhöhe: 6.
21. IGI 6 spalte ab: 10′.
22. 10′ auf 10ˋ die Fläche erhöhe, 1ˋ40.
23. Die Gleichseite von 1ˋ40 was? 10.

Vs. II

1. 10 zu 3, welche Du zu der Länge gesetzt hast,
2. erhöhe; 30 die Länge.
3. 10 zu 2 welche Du zur Breite gesetzt hast,
4. erhöhe, 20 die Breite.
5. Wenn 30 die Länge, 20 die Breite,
6. die Fläche was?

---

matischen Texten auftaucht. Jedenfalls berührt dieser philologische Zweifel nicht die Interpretation des mathematischen Verfahrens.

7. 30 die Länge zu 20 die Breite erhöhe, 10‵ die Fläche.
8. 30 die Länge zusammen mit 30 lasse enthalten: 15‵.
9. 30 die Länge über 20 die Breite, was geht sie hinaus? 10 geht sie hinaus.
10. 10 zusammen mit 10 lasse enthalten: 1‵40.
11. 1‵40 bis 9 wiederhole: 15‵ die Fläche.
12. 15‵ die Fläche, so viel wie 15‵ die Fläche welche die Länge
13. mit sich selbst enthalten lassen worden ist.

Das folgende Diagramm (Abb. 1) dient zur Unterstützung der Interpretation Der Text erklärt sich dann fast von selbst, insbesondere wenn man sich an BM 13901 #10 (Seite 52) und BM 15285 #24 (Seite 99) erinnert.

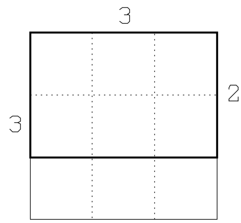


Abb. 1: Die Geometrie von VAT 8390 #1.

Man sollte die Benutzung der multiplikativen Operationen „enthalten lassen“, „erhöhen“ und „wiederholen“ beachten. Dass „enthalten lassen“ tatsächlich eine *Konstruktion* beschreibt wird in I.3 betont, wie wir dies bereits in AO 8862 #2 (Seite 66) gesehen haben. Das „Erhöhen“ in I. 20 und II.7 ist besonders interessant: hier wird die Fläche von Rechtecken bestimmt, aber da diese bereits vorliegen, gibt es keinen Grund, sie zu konstruieren. Daher wird die Fläche nur *berechnet*.

VAT 8520 #1

Vs.

1. Das 13tel vom Haufen des *igûm* und des *igibûm*
2. bis 6 habe ich wiederholt, vom Innern des *igûm*
3. habe ich es abgerissen: 30′ habe ich hinterlassen. 1 die Fläche. Das *igûm* und das *igibûm* was?
4. Weil „das Dreizehntel des Haufens von *igûm* und *igibûm*
5. bis 6 habe ich wiederholt, und vom Innern des *igûm*
6. habe ich herausgerissen: 30′ habe ich hinterlassen,“ er gesagt hat,

7. 13, vom Dreizehntel, setze; 6 bis zu welchem er wiederholt hat, setze;
8. 1, die Fläche, setze; und 30′ was er hinterlassen hat, setze.
9. Aus 13, vom Dreizehntel, 6 bis zu welchem er wiederholt hat,
10. reiße heraus. 7 hinterlässt Du.
11. 7 die Du hinterlässt und 6 bis zu welchem Du wiederholt hast,
12. behalte im Kopf!
13. 7 zu 6 erhöhe, 42 zu 1, der Fläche, erhöhe: 42.
14. 42 behalte im Kopf!
15. 13, vom Dreizehntel, auf 30′ was er hinterlassen hat,
16. erhöhe, 6°30′ brich entzwei: 3°15′.
17. 3°15′ zusammen mit 3°15′ lasse enthalten: 10°33′45″.
18. Zu 10°33′45″, 42, welches du im Kopf behalten hast,
19. füge hinzu, 52°33′45″.
20. Das Gleiche von 52°33′45″ was? 7°15′.
21. 7°15′ und 7°15′, dessen Gegenseite, lege nieder:
22. 3°15′, was Du enthalten lassen hast, vom einen reiße heraus, dem anderen füge hinzu:
23. Das erste ist 10°30, das andere 4.
24. Was muss ich zu 7, was Du im Kopf behalten hast, setzen,
25. das mir 10°30′ gibt? 1°30′ setze. 1°30′ zu 7 erhöhe,
26. 10°30′ gibt es Dir. 1°30′ das du gesetzt hast, ist das *igûm*.
27. IGI 6, das Dein Kopf hält, spalte ab, 10′.
28. 10′ zu 4 erhöhe, 40′ ist das *igibûm*.
29. Weil 1°30′ das *igûm* ist, 40′ das *igibûm*, die Fläche ist was?
30. 1°30′, das *igûm*, zu 40′, dem *igibûm*, erhöhe, 1 ist die Fläche.
31. 1°30, das *igûm*, und 40′, das *igibûm*, häufe an: 2°10′.

Rs.

1. Das Dreizehntel von 2°10′ was? 10′.
2. 10′ bis 6 wiederhole: 1, von 1°30,
3. dem *igûm*, reiße heraus: 30′ hinterlässt Du.

Wie YBC 6967 (Seite 52) dreht sich diese Aufgabe um ein Paar von tabellierten Reziproken. Beide Texte sprechen von deren Produkt in Übereinstimmung mit der geometrischen Darstellung als „der Fläche“. Es gibt aber einen Unterschied: dieses Mal ist das Produkt 1, nicht 1\` wie in YBC 6967.

Was die mathematische Struktur und Lösung angeht, vergleiche man mit TMS IX #3 (Seite 63).

Erklärung des Übersetzers: Sind x und $y = \frac{1}{x}$ die beiden Reziproken, gilt also $xy = 1$, dann lautet die zweite Bedingung $x - 6 \cdot \frac{1}{13}(x+y) = 0;30$. Multiplikation mit 13 verwandelt diese in $13x - 6(x+y) = 6;30$, also $7x - 6y = 6;30$.

Str 368

Vs.

1. Ich habe ein Schilfrohr genommen, sein Maß kenne ich nicht.
2. 1 KÙŠ habe ich abgeschnitten. 1 Sechziger (Schritte entlang) der Länge bin ich gegangen.
3. Mit dem, was ich abgeschnitten habe, habe ich es vergrößert.
4. 30 (Schritte) damit bin ich (entlang) der Breite gegangen.
5. 6‵15 ist die Fläche. Der Kopf (ursprüngliche Länge) des Schilfrohrs was?
6. Du, bei Deinem Vorgehen
7. 1‵ und 30 setze. (Für) das Schilfrohr, das Du nicht kennst,
8. 1 setze, auf 1 Sechziger, das Du gegangen bist,
9. erhöhe: 1‵ ist die falsche Länge.
10. 30 auf diese 1 erhöhe, 30 ist die falsche Breite.
11. 30, die falsche Breite, auf 1‵, die falsche Länge,
12. erhöhe, 30‵ die falsche Fläche.
13. 30‵ auf 6‵15, die wahre Fläche,

Rs.

1. erhöhe: 3‷7‶30‵ gibt es Dir.
2. 5′ welche Du abgeschnitten hast, auf die falsche Länge erhöhe,
3. 5 gibt es Dir. 5 auf die falsche Breite erhöhe,
4. 2‵30 gibt es Dir. $\frac{1}{2}$ von 2‵30 brich ab, 1‵15
5. 1‵15 stelle gegenüber, 1‶33‵45
6. zu 3‷7‶30‵ füge hinzu, 3‷9‶3‵45.
7. Was ist gleich? 13‵45 ist gleich.
8. 1‵15 welches Du gegenüber gestellt hast, zum Innern füge hinzu,
9. 15‵ gibt es Dir. IGI 30‵, die falsche Fläche, spalte ab, 2″.
10. 2″ auf 15‵ erhöhe, 30′ ist der Kopf des Schilfrohrs.

Dies ist die Rechtecksversion des „abgebrochenen Schilfrohrs“ (siehe Seite 76), ähnlich zu VAT 7532. In dieser Variante ist das Feld rechteckig, und das Schilfrohr bricht nur einmal ab.

YBC 6504 #1

Vs.

1. So viel wie Länge über Breite hinausgeht, habe ich gegenüber gestellt, vom Innern der Fläche
2. habe ich es herausgerissen: 8′20″. Länge über Breite, 10′ geht sie hinaus.

3. Bei Deinem Verfahren, 10′ lasse enthalten:
4. 1′40″ zu 8′20″ füge hinzu: 10′ setzt Du.
5. Die Hälfte von 10′ brich ab: 5′ setzt Du.
6. 5′ lasse enthalten: 25″ setzt Du.
7. 25″, die Fläche, zu 10′ füge hinzu: 10′25″ setzt Du.
8. Bei 10′25″, 25′ ist gleich. 5′ zu 25′ füge hinzu:
9. 30′, die Länge, setzt Du. 5′ aus 25′ reiße heraus:
10. 20′, die Breite, setzt Du.

Diese Aufgabe dreht sich um dasselbe verstümmelte Rechteck wie #4 derselben Tafel (siehe Seite 87): Tatsächlich repräsentieren die vier Probleme der Tafel eine interessante Variante der geschlossenen Gruppe, bei welcher die „Fläche“ eines Rechtecks zusammen mit der Länge, der Breite, der Summe der Seiten oder ihrer Differenz gegeben ist (siehe Fußnote 4, Seite 114). Auf der vorliegenden Tafel ist die „Fläche“ überall durch dasselbe verstümmelte Rechteck ersetzt.

Bei dieser ersten Aufgabe kennen wir die Seite des Quadrats, das „herausgerissen“ worden ist. Man kann sie daher leicht auf den Typ reduzieren, den wir von YBC 6967 (Seite 52) her kennen. Beim Verfolgen der Operationen sollte man im Hinterkopf behalten, dass die Zahl 10′ in zwei verschiedenen Rollen auftritt.

Hier geht das „Hinzufügen“ dem „Herausreißen“ ausnahmsweise voraus. Die Tafel scheint aus derselben frühen Phase und Textgruppe zu stammen wie AO 8862, und es teilt diese Besonderheit mit drei Texten aus Eshnunna (die also zu einer noch früheren Phase gehören). Es scheint tatsächlich so zu sein, dass die Schule verantwortlich für die Forderung ist, dass Operationen immer eine konkrete Bedeutung haben sollten, ebenso wie sie verantwortlich für die Ächtung von breiten Linien ist (siehe S. 68, Fußnote 2) – diese Forderung ist kein Beleg für „einen primitiven Intellekt, der noch nicht zur Abstraktion bereits ist“, wie man bisweilen angenommen hat, sondern für einen kritischen Geist, der über die Rechtfertigung der gemachten Schritte nachdenkt.

YBC 6504 #3

Rs.

1. So viel wie Länge über ⟨Breite⟩ hinausgeht, gegenübergestellt, aus dem Inneren der Fläche habe ich herausgerissen,
2. 8′20″. 30′ die Länge, seine Breite, was?
3. 30′ gegenübergestellt: 15′ setzt Du.
4. 8′20″ aus dem Innern von 15′ reißt Du heraus, 6′40″ setzt Du.
5. Die Hälfte von 30′ brichst Du:
6. 15′ gegenübergestellt: 3′45″ setzt Du.

7. 3′45″ zu 6′40″ fügst Du hinzu: 10′25″ setzt Du.
8. Bei 10′25″, 25′ ist gleich. 15′ aus 25′ reißt Du heraus:
9. 10′ setzt Du. 10′ aus 30′ reißt Du heraus:
10. 20′, die Breite, setzt Du.

Dies ist das dritte Problem von derselben Tafel. Es benutzt einen Trick, der sowohl elegant ist, als auch weitab jeder Routine liegt (siehe Abb. 2): Elimination des verstümmelten Rechtecks vom Quadrat $\square(\ell)$ über der Länge lässt einen Rest, der in ein Quadrat $\square(\ell - w)$ und ein Rechteck $\sqsubset\!\sqsupset(\ell - w, 30')$ zerlegt werden kann. Diese beiden können, wie im Diagramm gezeigt, in ein Gnomon verwandelt werden. Wir können den Prozess als „Wechsel der Variablen" betrachten – das Problem dreht sich nun um ein Quadrat $\square(\ell - w)$ und 30′ seiner Seite, und seine Lösung folgt der Standardprozedur für solche Fälle.

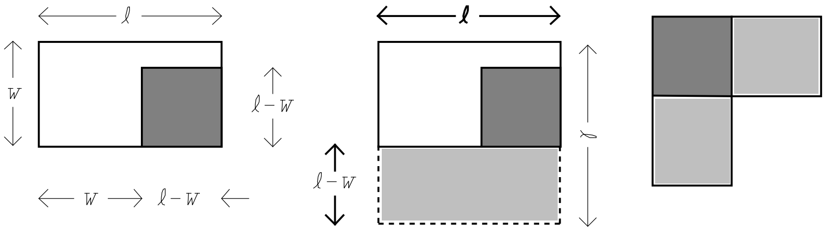


Abb. 2: Die Geometrie hinter YBC 6504 #3, in leicht veränderten Proportionen.

BM 85200+VAT 6599 #23

Rs. I

19. Eine Ausgrabung. So viel wie ich gegenüber gestellt habe, und 1 KÙŠ, darüber hinausgehend, das ist die Tiefe. 1°45′ Erde habe ich herausgerissen.
20. Du, 5′, was darüber hinausgeht, auf 1, die Umrechnung, erhöhe, 5′ siehst Du; auf 12 erhöhe, 1 siehst Du.
21. 5′ stelle sich selbst gegenüber, 25″ siehst Du. 25″ auf 1 erhöhe, 25″ siehst Du. IGI 25 spalte ab,
22. 2ˋ24 siehst Du. 2ˋ24 auf 1°45′ erhöhe, 4ˋ12 siehst Du.
23. Von „gleich, 1 hinzugefügt" 6 ¿1$^{?}$ ist/sind gleich. 6 auf 5′ erhöhe, 30′ siehst Du, steht sich gegenüber. 6 (fehlerhaft für 7) die Tiefe.
24. Das Verfahren.

Dieses Problem stammt von derselben Tafel wie das „Ausgrabungsproblem", BM 85200+VAT 6599 #6 das wir oben (Seite 95) besprochen haben, und dessen Lösung denselben Prinzipien folgt. Jetzt ist der „Grund“ ein Quadrat, und die Tiefe ist 1 KÙŠ größer als die Seite. Als „Vergleichskörper“ wird ein Würfel der Kantenlänge 1 KÙŠ gewählt, was die Benutzung einer Tabelle von Zahlen der Form $n^2 \cdot (n+1)$ erlaubt, welche „gleich, 1 hinzugefügt“ genannt werden. Solche Tabellen sind gefunden worden.

$\mathbf{Db_2}$–146

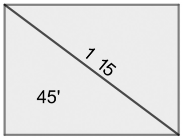
Vs.

1. Wenn Dich jemand über eine Diagonale (eines Rechtecks) fragt
2. so: 1°15 die Diagonale, 45′ die Fläche,
3. Länge und Breite entsprechend was? Du, bei Deiner Lösung,
4. 1°15′, Deine Diagonale, deren Gegenseite lege nieder,
5. lasse sie enthalten: 1°33′45″ kommt heraus.
6. 1°33′45″ ¿möge Deine$^?$ Hand ¿halten$^?$
7. 45′ Deine Fläche zu Zwei bringe: 1°30′ kommt heraus.
8. Von 1°33′45″ schneide ab: {…} 3′45″ der Rest.
9. Das Gleiche von 3′45″ nimm: 15′ kommt heraus. Dessen halber Teil
10. 7′30″ kommt heraus, auf 7′30″ erhöhe: 56″15‴ kommt heraus
11. 56″15‴ Deine Hand. 45′ Deine Fläche über Deiner Hand;
12. 45′56″15‴ kommt heraus. Das Gleiche von 45′56″15‴ nimm:
13. 52′30″ kommt heraus, 52′30″ dessen Gegenseite lege nieder;
14. 7′30″ das Du enthalten lassen hast, zu Eins
15. füge hinzu, von Eins
16. schneide ab. 1 Deine Länge, 45 die Breite. Wenn 1 die Länge,
17. 45 die Breite, die Fläche und die Diagonale entsprechend was?
18. Du, in Deinem Verfahren, lass die Länge enthalten;
19. 1 kommt heraus …behalte es im Kopf.

Rs.

20. … : 45′, die Breite, lass enthalten:
21. 33′45″ kommt heraus. Zu Deiner Länge füge hinzu:
22. 1°33′45″ kommt heraus. Das Gleiche von 1°33′45″ nimm:
23. 1°15′ kommt heraus. 1°15′ Deine Diagonale. Deine Länge
24. auf die Breite erhöhe, 45′ Deine Fläche.
25. So ist das Verfahren.

Dies ist einer der Texte aus der Gegend von Eshnunna, und er gehört daher zur frühesten Phase (und er benutzt, wie wir sehen, die Phrase „füge zum einen hinzu, schneide vom anderen ab“ und respektiert so die „Konkretheitsnorm“ nicht). Er kann relativ genau auf ca. 1775 v.Chr. datiert werden.



Das Problem ist eines der Rätsel welche die altbabylonische Schule von den akkadischen Feldmessern übernommen hat (siehe Seite 112 und 113); es taucht in einem hebräischen Handbuch aus dem Jahre 1116 n.Chr. wieder auf, wo es 1900 Jahre später auf genau dieselbe Art gelöst wird. Im Text stellen wir einige Hinweise auf diesen Ursprung fest, etwa die einführende Passage „Wenn Dich jemand nach einer Diagonale (eines Rechtecks) fragt" und der Verweis auf das Quadrat über der Seite in Zeile 21 einfach durch „Deine Länge"; beide Merkmale klingen auch in in BM 13901 #23 an.

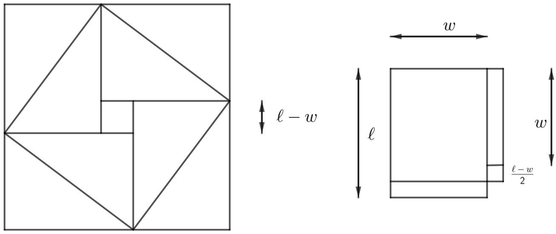


Abb. 3: Die Geometrie von Db_2-146.

In den Zeilen 1-9 wird der Unterschied zwischen der Länge und der Breite des Rechtecks bestimmt; die Methode ist im oberen Teil von Abb. 3 dargestellt. Danach werden die Seiten aus dieser Differenz und der Fläche nach der Prozedur bestimmt, die wir bereits sehr gut kennen, etwa von YBC 6967 (siehe Seite 52), und welche dem unteren Diagramm in der Abbildung entspricht. (Die Benutzung des „Erhöhens" in Zeile 10 der Rückseite zeigt jedoch, dass die Prozedur von dem bereits existierenden oberen Diagramm unterstützt wird.)

Die „Hand" in Zeilen 6 und 11 ist ein Verweis auf das Rechenbrett, auf dem der Rechner seine Additionen und Subtraktionen ausgeführt hat. Der „halbe Teil" in Zeile 9 (*muttatum*) ist ein Synonym für das „Halbe".

Am Schluss haben wir eine Probe mit einer unmissverständlichen Spur der „pythagoreischen Regel" in einer abstrakten Formulierung (*die Länge lasse enthalten*, ohne die übliche Identifizierung mit ihrem numerischen Wert).

Transliterationen

Für Leser, welche zumindest mit den Grundlagen der babylonischen Sprache vertraut sind. bietet dieser Anhang Transliterationen der meisten Texte aus den Kapiteln 2-5 und aus Anhang A, zusammen mit einer Liste der darin vorkommenden Wörter, begleitet von deren Standardübersetzungen, die in den deutschen Versionen der Texte benutzt werden (vgl. die Erklärungen auf S. 28). Alle Transliterationen stammen aus Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, New York: Springer, 2002. Die philologischen Bemerkungen wurden ausgelassen. Die gegenwärtigen Standardübersetzungen bauen, bis auf wenige Ausnahmen, auf dieselben wie diejenigen dieses Buchs auf.

Vokabular und Standardübersetzungen

A.RÁ: Schritte von
A.ŠÀ (~*eqlum*): Fläche
alākum (~RÁ): gehen
amārum: sehen
AN(.TA/NA) (~*elûm*): obere
ana (~.RA): zu, auf
annikī'am: hier
aššum: weil
atta (ina epēšika): Du (bei Deiner Lösung)
BAL: Umrechnung
bāmtum: Halbe
BÁN: BÁN
bandûm: bandûm
banûm: bauen
bêrum: trennen
BÙR: BÙR
DAḪ (~*waṣābum*): hinzufügen
DAL (~*pirkum*): Querlinie
DIRIG (~*watartum*): das darüber Hinausgehende
DIRIG, UGU … (~*eli* … *watārum*): darüber hinausgehen

DU$_7$.DU$_7$: gegenüber stellen
DU$_8$ (~*paṭārum*): abspalten
eṣēpum (~TAB): wiederholen
elēnu: übergehend
elûm: herauskommen (als Ergebnis)
EN.NAM (~*minûm*): was
epēšum (~KÌD): vorgehen; Verfahren
ezebum (~TAG$_4$): hinterlassen
GABA(.RI) (~*meḫrum*): Gegenstück
GAM (~*šuplum*): Tiefe
GAR (~*šakānum*): setzen
GAR.GAR (~*kamārum*): anhäufen/Haufen
GARIM (~*tawirtum*): Feld
GAZ (~*ḫepûm*): brechen
GI (~*qanûm*): Schilfrohr
GI.NA (~*kīnum*): wahr
GÍN (~*šiqlum*): Schekel
GU$_7$(.GU$_7$) (~*šutakūlum*): enthalten lassen
GUR: GUR
ḫarāṣum: abschneiden
ḫaṣābum (~KUD): abbrechen
ḫepûm (~GAZ): brechen
ḪI.A: verschiedene (Dinge)
ÍB.SI$_8$ (Substantiv): das Gleiche
Q.E *c* ÍB.SI$_8$: bei *Q*, *c* ist gleich
ÍB.TAG$_4$ (~*šapiltum*): Rest
IGI (~*igûm*): *igûm*
IGI *n*: IGI *n*
IGI.BI (~*igibûm*): *igibûm*
igibûm (~IGI.BI): *igibûm*
igûm (~IGI): *igûm*
ÍL (~*našûm*): erhöhen
imtaḫḫar (<*maḫārum*): steht sich gegenüber
ina (~.TA): von, aus
inūma: wie
ištēn …*ištēn*: eins …eins
ištēn …*šanûm*: das erste …das zweite
ištu: heraus von
(*n*-)KAM: das *n*te (einer Folge)
itti (~KI): zusammen mit

kamārum (~GAR.GAR, UL.GAR): anhäufen
KI (~*qaqqarum*): Grund
kī maṣi: entsprechend wozu
KI(.TA) (~*šaplûm*): untere
KI.GUB.GUB: Basis
kīma: so viel wie (es gibt) von
kīam: also
kimrātum (<*kamārum*): die angehäuften Dinge, der Haufen
kīnum (~GI.NA): wahr
KUD: abbrechen
kullum: halten
kumurrûm (<*kamārum*; ~GAR.GAR): Haufen
KÙŠ (~*ammatum*): KÙŠ
la (~NU): nicht
lapātum: einschreiben
leqûm: nehmen
libbum: innen
LUL (~*sarrum*): falsch
-*ma*: „:“
ma.na (~*manûm*): Mine
maḫārum: gegenüberstehen
makāsum: sammeln (Pacht usw.)
mala: so viel wie
manātum: Beitrag
maṭûm: klein sein, kleiner werden
meḫrum (<*maḫārum*; ~GABA(.RI)): Gegenstück
mindatum: Maß *mīnûm* (~EN.NAM): was
mišlum (~ŠU.RI.A): halb
mitḫartum (<*maḫārum*; ~LAGAB; ~ÍB.SI$_8$): Gegenseite
muttarittum: Herabsteigende
muttatum: halber Teil
nadānum (~SUM): geben
nadûm: niederlegen
nakmartum (<*kamārum*): Haufen
nasāḫum (~ZI): herausreißen
nāsḫum (<*nasāḫum*): das Herauszureißende
našûm (~ÍL): erhöhen
nēmelum: Gewinn
nēpešum (<*epēšum*): Verfahren
NIGIN (~*šutakūlum*): enthalten lassen

NIM (~*našûm*): erhöhen
NINDAN: NINDAN
NU (~*la*, *ul(a)*): nicht
paṭārum (~DU$_8$): abspalten
PI: PI
qabûm (~DUG$_4$): sagen
qanûm (~GI): Schilfrohr
qaqqarum (~KI): Grund
qātum: Hand
ramānišu: sich selbst
rēška likīl: möge Dein Kopf behalten!
rēšum (~SAĜ): Kopf
SAĜ (~*rēšum*): Kopf
SAĜ.DÙ (~*santakkum*): Dreieck
SAĜ.KI.GUD: Trapez
SAĜ(.KI): Breite
SAḪAR (~*eperum*): Erde
saḫārum: umkehren
sapāḫum: zerstreuen
SAR (~*mūšarum*): SAR
sarrum (~LUL): falsch
SÌLA (~*qa*): SÌLA
SUM (~*nadānum*): geben
ṣiliptum: Diagonale
ša: welches / das von
šakānum (~ĜAR): setzen
šâlum: fragen
ŠÁM: kaufen
šanûm: zweites
šapiltum (~ÍB.TAG$_4$):Rest
ŠE (~*še'um*): Getreide
še'um (~ŠE): Getreide
šiqlum (~GÍN): Schekel
ŠU.RI.A (~*mišlum*): halb
šulmum: Ganzheit
šumma: wenn
šumum: Name
šūšum: Sechzig
šutakūlum (<*kullum*; ~GU$_7$): enthalten lassen
šutamḫurum (<*maḫārum*): sich gegenüber stellen

šūtbum: weggehen machen (<*tebûm*)
TA.ÀM: jedes
TAB (~*eṣēpum*): wiederholen
TAG_4 (~*ezēbum*): hinterlassen
takīltum (<*kullum*): das enthalten Gelassene
takkirtum (<*nakārum*): Änderung
tammar (<*amārum*; ~IGI.DU_8/PA(D)): Du siehst
târum (~NIĜÍN): umkehren
tawirtum (~GARIM): Feld
TÚL.SAĜ: Ausgrabung
u: und
UL.GAR (~*kamārum*): anhäufen, der Haufen
ul(a) (~NU): nicht
UŠ: Länge
waṣābum (~DAḪ): hinzufügen
wabālum: bringen
wāṣbum (<*waṣābum*): das Hinzuzufügende
wāṣītum: Projektion
watārum (~DIRIG): darüber hinausgehen
wuṣubbûm (<*waṣābum*): das Hinzugefügte
ZA.E (KÌD.DA/TA.ZU.DÈ) (~*atta* …): Du (bei Deinem Vorgehen)
ZI (~*nasāḫum*): herausreißen

AO 8862 #2

I

30. u š s a g̃ u š *ù* s a g̃
31. *uš-ta-ki-il*$_5$*-ma* a. š à^{lam} *ab-ni*
32. *a-sà-ḫi-ir mi-ši-il*$_5$ u š
33. *ù ša-lu-uš-ti* s a g̃
34. *a-na li-bi* a. š à*-ia*
35. [*ú*-]*-ṣi-ib-ma* 15
36. [*a-t*]*u-úr* u š *ù* s a g̃
37. [*ak*-]*mu-ur-ma* 7

II

1. u š *ù* s a g̃ *mi-nu-um*
2. *at-ta i-na e-pe-ši-i-ka*
3. [2 *n*]*a-al-p*[*a*]*-at-ti mi-iš-li-im*
4. [*ù*] 3 *na-al-pa-ti*

5. [*ša-*]*lu-uš-ti ta-l*[*a*]*-pa-at-ma*
6. i g i 2-b i 30 *ta-pa-ṭar-ma*
7. 30 a. r á 7 3,30 *a-na* 7
8. *ki-im-ra-tim* u š *ù* s a g̃
9. *ub-ba-al-ma*
10. 3,30 *i-na* 15 *ki-i*[*m*]*-ra-ti-i-a*
11. *ḫu-ru-uṣ*$_4$*-ma*
12. 11,30 *ša-pi-il*$_5$*-tum*
13. *l*[*a*] *wa-t*[*ar*] 2 *ù* 3 *uš-ta-kal-ma*
14. 3 a. r á 2 6
15. i g i 6 g̃ á l 10 *i-na-di-kum*
16. 10 *i-na* 7 *ki-im-ra-ti-i-ka*
17. u š *ù* s a g̃ *a-na-sà-aḫ-ma*
18. 6,50 *ša-pi-il*$_5$*-tum*
19. *ba-a-š*[*u*] *ša* 6,50 *e-ḫe-pe-e-ma*
20. 3,25 *i-na-di-ku*
21. 3,25 *a-di ši-ni-šu*
22. *ta-la-pa-at-ma* 3,25 a. r á 3,25
23. 11,40,[25] *i-na li-bi*
24. 11,30 *a-na-sà-aḫ-ma*
25. 10,25 *ša-pi-il*$_5$*-tum* ⟨10,25.e 25 í b. s i$_8$⟩
26. *a-na* 3,25 *iš-te-en*
27. 25 *tu-ṣa-am-ma* 3,50
28. *ù ša i-na ki-im-ra-at*
29. u š *ù* s a g̃ *a*[*s*]*-sà-aḫ-ma*
30. *a-na* 3,50 *tu-ṣa-am-ma*
31. 4 u š *i-na* 3,25 *ša-ni-im*
32. 25 *a-na-sà-aḫ-ma* 3 s a g̃

32a. 7 *ki-im-ra-tu-ú*

32b. 4 u š

12 a. š à

3 s a g̃

BM 13901 #1, #2, #10, #12, #14 und #23

Vs. I #1

1. a. š à$^{l[am]}$ *ù mi-it-ḫar-ti ak-m*[*ur-m*]*a* 45.e 1 *wa-ṣi-tam*
2. *ta-ša-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ḫe-pe* [3]0 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*
3. 15 *a-na* 45 *tu-ṣa-ab-ma* 1-[e] 1 í b. s i$_8$ 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu*

4. *lìb-ba* 1 *ta-na-sà-aḫ-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

#2

5. *mi-it-ḫar-ti lìb-bi* a. š à [*a*]*s-sú-uḫ-ma* 14,30.e 1 *wa-ṣi-tam*
6. *ta-ša-ka-an ba-ma-at* 1 *te-ḫe-pe* 30 *ù* 30 *tu-uš-ta-kal*
7. 15 *a*-[*na* 14,30 *tu-ṣa*-]*ab-ma* 14,30,15.e 29,30 í b. s i$_8$
8. 30 *ša tu-uš-ta-ki-lu a-na* 29,30 *tu-ṣa-ab-ma* 30 *mi-it-ḫar-tum*

Vs. II #10

11. a. š à *ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia ak-mur-ma* 21,15
12. *mi-it-ḫar-tum a-na mi-it-ḫar-tim si-bi-a-tim im-ṭi*
13. 7 *ù* 6 *ta-la-pa-at* 7 *ù* 7 *tu-uš-ta-kal* 49
14. 6 *ù* 6 *tu-uš-ta-kal* 36 *ù* 49 *ta-ka-mar-ma*
15. 1,25 i g i 1,25 *ú-la ip-pa-ṭa-ar mi-nam a-na* 1,25
16. *lu-uš-ku-un ša* 21,15 *i-na-di-nam* 15.e 30 í b. s i$_8$
17. 30 *a-na* 7 *ta-na-ši-ma* 3,30 *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*
18. 30 *a-na* 6 *ta-na-ši-ma* 3 *mi-it-ḫar-tum ša-ni-tum*

#12

27. a. š à *ši-ta mi-it-ḫa*⟨*-ra*⟩*-ti-ia ak-mur-ma* 21,40
28. *mi-it-ḫa-ra-ti-ia uš-ta-ki-il*$_5$*-ma* 10
29. *ba-ma-at* 21,40 *te-ḫe-pe-ma* 10,50 *ù* 10,50 *tu-uš-ta-kal*
30. 1,57,21{+ 25}, 40.e 10 *ù* 10 *tu-uš-ta-kal* 1,40
31. *lìb-bi* 1,57,21{+ 25},40 *ta-na-sà-aḫ-ma* 17,21{+ 25}, 40.e 4,10 í b. s i$_8$
32. 4,10 *a-na* 10,50 *iš-te-en tu-ṣa-ab-ma* 15.e 30 í b. s i$_8$
33. 30 *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*
34. 4,10 *lìb-bi* 10,50 *ša-ni-im ta-na-sà-aḫ-ma* 6,40.e 20 í b. s i$_8$
35. 20 *mi-it-ḫar-tum ša-ni-tum*

#14

44. a- š à *ši-ta mi-it-ḫa-ra-ti-ia ak-mur-ma* [25,]25
45. *mi-it-ḫar-tum ši-ni-pa-at mi-it-ḫar-tim* [*ù* 5 n i n d] a n
46. 1 *ù* 40 *ù* 5 [*e-le-nu* 4]0 *ta-la-pa-at*
47. 5 *ù* 5 [*tu-uš-ta-kal* 25 *lìb-bi* 25,25 *ta-na-sà-aḫ-ma*]

Rs. I

1. [25 *ta-la-pa-at* 1 *ù* 1 *tu-uš-ta-kal* 1 40 *ù* 40 *tu-uš-ta-kal*]
2. [26,40 *a-na* 1 *tu-ṣa-ab-ma* 1,26,40 *a-na* 25 *ta-na-ši-ma*]
3. [36,6,40 *ta-la-pa-at* 5 *a-na* 4]0 *t*[*a-na-ši-ma* 3,20]
4. [*ù* 3,20 *tu-uš-ta-kal* 11,6,40] *a-na* 3[6,]6,40 [*tu-ṣa-ab-ma*]

5. [36,17,46,40.e 46,40 í b. s i_8 3,]20 *ša tu-uš-ta-ki*[*-lu*]
6. [*lìb-bi* 46,40 *ta-na-sà-aḫ-*]*ma* 43,20 *ta-la-pa-a*[*t*]
7. [i g i 1,26,40 *ú-la ip-pa-ṭ*]*a-ar mi-nam a-na* 1,2[6,4]0
8. [*lu-uš-ku-un ša* 43,20 *i-n*]*a-di-nam* 30 *ba-an-da-šu*
9. [30 *a-na* 1 *ta-na-ši-ma* 30] *mi-it-ḫar-tum iš-ti-a-at*
10. [30 *a-na* 40 *ta-na-ši-ma* 20] *ù* 5 *tu-ṣa-ab-ma*
11. [25 *mi-it-ḫar-t*]*um ša-ni-tum*

Rs. II #23

11. a. š à^{lam} *p*[*a*]*-a*[*-at er-bé-et-tam ù a. š*] à^{lam} *ak-mur-ma* 41,40
12. 4 *pa-a-at er*[*-bé-e*]*t-tam t*[*a-la-p*]*a-at* i g i 4 g̃ á l. b i 15
13. 15 *a-na* 41,40 [*ta-n*]*a-ši-ma* 10,25 *ta-la-pa-at*
14. 1 *wa-ṣi-tam tu-ṣa-ab-ma* 1,10,25.e 1,5 í b. s i_8
15. 1 *wa-ṣi-tam ša tu-iṣ-bu ta-na-sà-aḫ-ma* 5 *a-na ši-na*
16. *te-ṣi-ip-ma* 10 n i n d a n *im-ta-ḫa-ar*

BM 15285 #24

1. [1 UŠ *mi-i*]*t-ḫa-ar-tum*
2. *lìb-ba* 16 *mi-it-ḫa-ra-tim*
3. *ad-di* a. š à. b i e n. n a m

BM 85200+VAT 6599 #6 und #23

Vs. I #6

9. t ú l. s a g̃ *ma-la* u š GAM*-ma* 1 s a ḫ a r. ḫ i. a b a. z i KI^{ri} *ù* s a ḫ a r. ḫ i. a UL.GAR 1,10 u š *ù* s a g̃ 50 u š s a g̃ e n ⟨.n a m⟩
10. z a.e 50 *a-na* 1 b a l *i-ši* 50 *ta-mar* 50 *a-na* 12 *i-ši* 10 *ta-mar*
11. 50 *šu-tam* ⟨*-ḫir*⟩ 41,40 *ta-mar a-na* 10 *i-ši* 6,56,40 *ta-mar* i g i-*šu* d u_8.*a* 8,38,24 *ta*⟨*-mar*⟩
12. *a-na* 1,10 *i-ši* 10,4,48 *ta-mar* 36 24 42 í b. s i_8
13. 36 *a-na* 50 *i-ši* 30 u š 24 *a-na* 50 *i-ši* 20 s a g̃ 36 *a-na* 10 6 GAM
14. [*n*]*e-pé-šum*

Rs. I #23

19. t ú l. s a g̃ *ma-la uš-tam-ḫir ù* 1 k ù š d i r i g GAM*-ma* 1,45 s a ḫ a r. ḫ i. a [b a]. z i
20. z a. e 5 d i r i g *a-na* 1 b a l *i-ši* 5 *ta-mar a-na* 12 *i-š*[*i* 1] *ta-mar*
21. 5 *šu-tam*⟨*-ḫir*⟩ 25 *ta-mar* 25 *a-na* 1 *i-ši* 25 *ta-mar* i g i [25 d u_8. a]

22. 2,24 *ta-mar* 2,24 *a-na* 1,45 *i-ši* 4,12 [*ta-mar*]
23. *i-na* í b. s i$_8$ 1 d a ḫ. ḫ a 6 ¿1$^?$ í b. s [i$_8$] [6 *a-na* 5] *i-*[*ši* 30] *ta*⟨*-mar*⟩ *im*⟨*-ta-ḫar*⟩ 6^{sic} GAM
24. *ne-pé-š*[*um*]

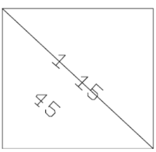
Db$_2$–146

Vs.

1. *šum-ma ṣí-li-ip-ta-a-am i-ša-lu-ka*
2. *um-ma šu-ú-ma* 1,15 *ṣí-li-ip-tum* 45 a. š à
3. *ši-di ù* s a g̃. k i *ki ma-a-ṣí at-ta i-na e-pé-ši-ka*
4. 1,15 *ṣí-li-ip-ta-ka me-ḫe-er-šu i-di-i-ma*
5. *šu-ta-ki-il-šu-nu-ti-i-ma* 1,33,45 *i-li*
6. 1,33,45 š u KU.U¿.ZU/BA$^?$
7. 45 a. š à*-ka a-na ši-na e-bi-il-ma* 1,30 *i-li*
8. *i-na* 1,33,45 *ḫu-ru-úṣ-ma* {1,3}3,45$^{(sic)}$ *ša-pí-il-tum*
9. i b. s í 3,45 *le-qe-e-ma* 15 *i-li mu-ta-su*
10. 7,30 *i-li a-na* 7,30 *i-ši-i-ma* 56,15 *i-li.*
11. 56,15 š u*-ka* 45 a. š à*-ka e-li* š u*-ka*
12. 45,56,15 *i-li* i b. s i 45,56,15 *le-qe-ma*
13. 52,30 *i-li* 52,30 *me-ḫe-er-šu i-di-i-ma*
14. 7,30 *ša tu-uš-ta-ki-lu a-na iš-te-en*
15. *ṣí-ib-ma i-na iš-te-en*
16. *ḫu-ru-úṣ* 1 u š*-ka* 45 s a g̃. k i *šum-ma* 1 u š
17. 45 s a g̃. k i a. š à *ù ṣí-li-ip-ti ki ma-ṣí*
18. [*at-ta i-na e-p*]*é-ši-ka ši-da šu-ta-ki-il-ma*
19. [1 *i-li* ...] *re-eš-ka li-ki-il*

Rs.

20. [...]*-ma* 45 s a g̃. k i *šu-ta-ki-il-ma*
21. 33,45 *i-li a-na ši-di-ka ṣí-ib-ma*
22. 1,33,45 *i-li* i b. s i 1,33,45 *le-*[*qe*]*-ma*
23. 1,15 *i-li* 1,15 *ṣí-li-ip-[ta]-ka* u š*-ka*
24. *a-na* s a g̃. k i *i-ši* 45 a. š à*-ka*
25. *ki-a-am ne-pé-šum*



TMS VII #1 und #2

#1

1. 4^{-at} s a g̃ *a-na* u š d a ḫ $7^{-\langle ti\rangle}$*-šu a-na* 10 [*al-li-ik*]
2. *ki-ma* UL.GAR u š *ù* ⟨s a g̃⟩ z a. e 4 g̃ a r 7 [g̃ a r]
3. 10 g̃ a r 5 *a-rà*[1] 7 *i-ší* 35 *ta-mar*
4. 30 *ù* 5 *be-e-er* 5 a. r á *a-na* 10 *i-ší*
5. 50 *ta-mar* 30 *ù* 20 g̃ a r 5 a. r á *a-na* 4 *re-*⟨*ba-ti*⟩ s a g̃
6. *i-ší-ma* 20 *ta-mar* 20 s a g̃ 30 *a-na* 4 *re-ba-*⟨*-ti*⟩
7. *i-ší* 2 *ta-mar* 2 g̃ a r u š 20 *i-na* 20 z i
8. *ù i-na* 2 30 z i 1,30 *ta-mar*
9. *i-na* 4 *re-ba-ti* 1 z i 3{,20} *ta-mar*
10. i g i 3 *pu-ṭú-*⟨*úr*⟩ 20 *ta-mar* 20 *a-na* 1,30 *i-ší-ma*
11. 30 *ta-mar* 30 u š 30 *i-na* 50 z i 20 *ta-mar* 20 s a g̃
12. *tu-úr* 7 *a-na* 4 *re-ba-*⟨*ti*⟩ *i-ší* 28 *ta-mar*
13. 10 *i-na* 28 z i 18 *ta-mar* i g i 3 *pu-*⟨*ṭú-úr*⟩
14. 20 *ta-*⟨*mar*⟩ 20 *a-na* 18 *i-ší* 6 *ta-mar* 6 u š
15. 6 *i-na* 10 z i 4 s a g̃ 5 *a-na* 6 [*i-š*]*í*
16. 30 u š 5 *a-na* 4 *i-ší* 20 *ta-*⟨*mar*⟩ 20 ⟨s a g̃⟩

#2

17. 4^{-at} s a g̃ *a-na* u š d a ḫ 7^{-ti}[*-šu*]
18. *a-di* 11 *al-li-ik* u g u [UL.GAR]
19. u š *ù* s a g̃ 5 d i r i g z a. e [4 g̃ a r]
20. 7 g̃ a r 11 g̃ a r *ù* 5 d i r i g [g̃ a r]
21. 5 *a-na* 7 *i-ší* 3[5 *ta-mar*]
22. 30 *ù* 5 g̃ a r 5 *a-na* 1[1 *i-ší* 55 *ta-mar*]
23. 30 20 *ù* 5 z i g̃ a r 5 [*a-n*]*a* 4
24. *i-ši* 20 *ta-*⟨*mar*⟩ 20 s a g̃ 30 *a-na* 4 *i-ší-ma*
25. 2 *ta-mar* 2 u š 20 *i-na* 20 z i
26. 30 *i-na* 2 z i 1,30 g̃ a r *ù* 5 *a-*[*na* ...]
27. 7 *a-na* 4 *re-*⟨*ba-ti*⟩ *i-ší-ma* 28 *ta-mar*
28. 11 UL.GAR *i-na* 28 z i 17 *ta-mar*
29. *i-na* 4 *re-*⟨*ba-ti*⟩ 1 z i 3 [*ta*]*-mar*
30. i g i 3 *pu-ṭú-*⟨*úr*⟩ 20 *ta-*⟨*mar*⟩ 20 [*a-na*] 17 *i-*⟨*ší*⟩
31. 5,40 *ta-*⟨*mar*⟩ 5,40 [u] š 20 *a-na* 5 d i r i g *i-ší*
32. 1,40 *ta-*⟨*mar*⟩ 1,40 *wa-ṣí-ib* u š 5,40 u š
33. *i-na* 11 UL.GAR z i 5,20 *ta-mar*

[1] Die Korrektur der publizierten Transliteration verdanke ich Christine Proust, die diese Tafel untersucht hat.

34. 1,40 *a-na* 5 d i r i g d a ḫ 6,40 *ta-mar*
35. 6,40 *n*[*a*]-*sí-iḫ* s a g̃ 5 a. r á
36. *a-na* 5,40 u š *i-ší* 28,20 *ta-mar*
37. 1,40 *wa-ṣí-ib* u š *a-na* 28,20 [d a ḫ]
38. 30 *ta-mar* 30 u š 5 *a*-[*na* 5,20]
39. *i-ši-ma* 26,40 *t*[*a-mar* 6,40]
40. *na-sí-iḫ* s a g̃ *i-na* [26,40 z i]
41. 20 *ta-mar* 20 s a [g̃]

TMS VIII #1

1. [a. š à 10 4-*at* s a g̃ *a-na* s a g̃ d a ḫ] *a-na* 3 *a-li*-[*ik* ¿... ... ...$^?$ u g u]
2. [u š 5 d i r] i g̃ z a. e [4 *r*]*e-ba-ti ki-ma* s a g̃ g̃ a r *re-b*[*a-at* 4 *le-qé* 1 *ta-mar*]
3. [1 *a-na*] 3 *a-li-ik* 3 *ta-mar* 4 *re-ba-at* s a g̃ *a-na* 3 d [a ḫ 7 *ta-mar*]
4. [7] *ki-ma* u š g̃ a r 5 d i r i g *a-na na-sí-iḫ* u š g̃ a r 7 u š *a-na* 4 [¿s a g̃$^?$ *i-ší*]
5. 28 *ta-mar* 28 a. š à 28 *a-na* 10 a. š à *i-ší* 4,40 *ta-mar*
6. [5] *na-sí-iḫ* u š *a-na* 4 s a g̃ *i-ší* 20 *ta-mar* $\frac{1}{2}$ *ḫe-pe* 10 *ta-mar* 10 NIGIN
7. [1,40] *ta-mar* 1,40 *a-na* 4,40 d a ḫ 4,41,40 *ta-mar mi-na* í b. s i 2,10 *ta-ma*[*r*]
8. [10 ¿s]i$_8$. s i$_8$$^?$ *a-na* 2,10 d a ḫ 2,20 *ta-mar mi-na a-na* 28 a. š à g̃ a r *šà* 2,20 *i-na*-[*di-n*]*a*
9. [5 g̃ a r] 5 *a-na* 7 *i-ší* 35 *ta-mar* 5 *na-sí-iḫ* u š *i-na* 35 z i
10. [30 *ta*-]*mar* 30 u š 5 u š *a-na* 4 s a g̃ *i-ší* 20 *ta-mar* 20 {u š} ⟨s a g̃⟩

TMS IX #1, #2 und #3

#1

1. a. š à *ù* 1 u š UL.GAR 4[0¿30 u š$^?$ 20 s a g̃]
2. *i-nu-ma* 1 u š *a-na* 10 [a. š à d a ḫ]
3. *ú-ul* 1 KI.GUB.GUB *a-na* 20 [s a g̃ d a ḫ]
4. *ú-ul* 1,20 *a-na* s a g̃ *šà* 40 *it*-[*ti* u š ¿NIGIN g̃ a r$^?$]
5. *ú-ul* 1,20 *it*-⟨*ti*⟩ 30 u š NIG[IN] 40 *šum*-[*šu*]
6. *aš-šum ki-a-am a-na* 20 s a g̃ *šà qa-bu-ku*
7. 1 d a ḫ-*ma* 1,20 *ta-mar iš-tu an-ni-ki-a-am*
8. *ta-šà-al* 40 a. š à 1,20 s a g̃ u š *mi-nu*
9. [30 u š *k*]*i-a-am ne-pé-šum*

#2

10. [1 *a-na* u š d a ḫ] 1 *a-na* s a g̃ d a ḫ *aš-šum* 1 *a-na* u š d a ḫ
11. [1 *a-na* s a g̃ d] a ḫ 1 *ù* 1 NIGIN 1 *ta-mar*
12. [1 *a-na* UL.GAR u š] s a g̃ *ù* a. š à d a ḫ 2 *ta-mar*
13. [*a-na* 20 s a g̃ 1 d a] ḫ 1,20 *a-na* 30 u š 1 d a ḫ 1,30
14. [¿*aš-šum*? a. š] à *šà* 1,20 s a g̃ *šà* 1,30 u š
15. [¿u š *it-ti*? s a] g̃ *šu-ta-ku-lu mi-nu šum-šu*
16. 2 a. š à
17. *ki-a-am ak-ka-du-ú*

#3

19. a. š à u š *ù* s a g̃ UL.GAR 1 a. š à 3 u š 4 s a g̃ UL.GAR
20. [17]-*ti-šu a-na* s a g̃ d a ḫ 30
21. [z a.] e 30 *a-na* 17 *a-li-ik-ma* 8,30 [*t*]*a-mar*
22. [*a-na* 17 s a g̃] 4 s a g̃ d a ḫ-*ma* 21 *ta-mar*
23. [21 *ki*-]*ma* s a g̃ g̃ a r 3 *šà-la-aš-ti* u š
24. [3 *ki*]-*ma* u š g̃ a r 8,30 *mi-nu šum-šu*
25. [3] u š *ù* 2[1 s a] g̃ UL.GAR
26. 8,30 *ta-mar*
27. [3] u š *ù* 21 s a g̃ UL.[GAR]
28. [*aš-šum* 1 *a-na*] u š d a ḫ [*ù* 1 *a*]-*na* s a g̃ d a ḫ NIGIN-*ma*
29. 1 *a-na* UL.GAR a. š à u š *ù* s a g̃ d a ḫ 2 *ta-mar*
30. [2 a.] š à *aš-šum* u š *ù* s a g̃ *šà* 2 a. š à
31. [1,30 u š *it*]-*ti* 1,20 s a g̃ *šu-ta-ku-lu*
32. [1 *wu-ṣú*-]*bi* u š *ù* 1 *wu-ṣú-bi* s a g̃
33. [NIGIN ¿1 *ta-mar*? 1 *ù* 1 ¿...?] ḫ i. a UL.GAR 2 *ta-mar*
34. [3 ... 21 ... *ù* 8,30 UL.GAR] 32,30 *ta-mar*
35. [*ki-a*]-*am ta-šà-al*
36. [...].TI s a g̃ *a-na* 21 UL.GAR-*ma*
37. [...] *a-na* 3 u š *i-ší*
38. [1,3 *ta-mar* 1,3 *a*]-*na* 2 a. š à *i-ši-ma*
39. [2,6 *ta-mar* ¿2,6 a. š à?] 32,30 UL.GAR *ḫe-pé* 16,15 *ta-*⟨*mar*⟩
40. {1[6,15 *ta-*]*mar*} 16,15 g a b a g̃ a r NIGIN
41. 4,[24,]3,45 *ta-mar* 2,6 [¿erasure?]
42. *i-na* 4,[2]4,3,45 z i 2,18,3,45 *ta-mar*
43. *mi-na* í b. s i 11,45 í b. s i 11,45 *a-na* 16,15 d a ḫ
44. 28 *ta-mar i-na* 2-k a m z i 4,30 *ta-mar*
45. i g i 3-*ti* u š *pu-ṭúr* 20 *ta-mar* 20 *a-na* 4,[30]
46. {20 *a-na* 4,30} *i-ši-ma* 1,30 *ta-mar*
47. 1,30 u š *šà* 2 a. š [à *mi-na*] *a-na* 21 s a g̃ [*lu-uš-ku-un*]
48. *šà* 28 *i-na-di*[*-na* 1,20 g̃] a r 1,20 s a g̃

49. *šà* 2 a. š à *tu-úr* 1 *i-na* 1,[30 z i]
50. 30 *ta-mar* 1 *i-na* 1,20 z [i]
51. 20 *ta-mar*

TMS XIII

1. 2(g u r) 2(p i) 5 b á n ì. g̃ i š š á m *i-na* š á m 1 g í n k ù. b a b b ar
2. 4 s i l à t a. à m ì. g̃ i š *ak-ší-iṭ-ma*
3. $\frac{2}{3}$ *ma-na* {20 š e} k ù. b a b b a r *ne-me-la a-mu-úr ki ma-ṣí*
4. *a-šà-am ù ki ma-ṣí ap-šu-úr*
5. z a. e 4 s i l à ì. g̃ i š g̃ a r *ù* 40 *ma-na ne-me-la* g̃ a r
6. i g i 40 *pu-ṭúr* 1,30 *ta-mar* 1,30 *a-na* 4 *i-ší* 6 *ta-mar*
7. 6 *a-na* 12,50 ì. g̃ i š *i-ší-ma* 1,17 *ta-mar*
8. $\frac{1}{2}$ 4 *ḫi-pi* 2 *ta-mar* 2 NIGIN 4 *ta-mar*
9. 4 *a-na* 1,17 d a ḫ 1,21 *ta-mar mi-na* í b. s i 9 í b. s i
10. 9 g a b a g̃ a r $\frac{1}{2}$ 4 *šà ta-ak-ší-ṭú ḫi-pi* 2 *ta-mar*
11. 2 *a-na* 9 1-k a m d a ḫ 11 *ta-mar i-na* 9 2-k a m z i
12. 7 *ta-mar* 11 s i l à t a. à m *ta-šà-am* 7 s i l à *ta-ap-šu-úr*
13. k ù. b a b b a r *ki ma-ṣí mi-na a-na* 11 [¿s i l à? *lu-uš-ku*]-*un*
14. *šà* 12,50 ì. g̃ i š *i-na-ad-di-na* 1,[10 g̃ a r 1 *m*]*a-na* 10 g í n k [ù. b a b b a r]
15. *i-na* 7 s i l à t a. à m *šà ta-pa-aš*-[*šà-ru* ì. g̃ i š]
16. *šà* 40 k ù. b a b b a r *ki ma-ṣí* 40 *a-na* 7 [*i-ší*]
17. 4,40 *ta-mar* 4,40 í. g̃ i š

TMS XVI #1

1. [4-at s a g̃ *i-na*] u š *ù* s a g̃ z i 45 z a. e 45
2. [*a-na* 4 *i-ší* 3 *ta*]-*mar* 3 *mi-nu šu-ma* 4 *ù* 1 g̃ a r
3. [50 *ù*] 5 z i [g̃ a r] 5 *a-na* 4 *i-ší* 1 s a g̃ 20 *a-na* 4 *i-ší*
4. 1,20 *ta*-⟨*mar*⟩ 4 s a g̃ 30 *a-na* 4 *i-ší* 2 *ta*-⟨*mar*⟩ 4 u š 20 1 s a g̃ z i
5. *i-na* 1,20 4 s a g̃ z i 1 *ta-mar* 2 u š *ù* 1 3 s a g̃ UL.GAR 3 *ta-mar*
6. i g i 4 *pu*-[*ṭú-ú*]*r* 15 *ta-mar* 15 *a-na* 2 u š *i-ší* [3]0 *ta*-⟨*mar*⟩ 30 u š
7. 15 *a-na* 1 *i-ší* [1]5 *ma-na-at* s a g̃ 30 *ù* 15 *ki-il*
8. *aš-šum* 4-*at* s a g̃ *na-sà-ḫu qa-bu-ku i-na* 4 1 z i 3 *ta-mar*
9. i g i 4 *pu*-⟨*ṭú-úr*⟩ 15 *ta-mar* 15 *a-na* 3 *i-ší* 45 *ta*-⟨*mar*⟩ 45 *ki-ma* [s a g̃]
10. 1 *ki-ma* u š g̃ a r 20 g i. n a s a g̃ *le-qé* 20 *a-na* 1 *i-ší* 20 *ta-mar*
11. 20 *a-na* 45 *i-ší* 15 *ta-mar* 15 *i-na* $^{30}{}_{15}$ [z i]
12. 30 *ta-mar* 30 u š

VAT 7532

Vs.

1. sag̃.ki.gud gi kid gi *e[l-qé-ma i-na š]u-u[l]-m[i]-šu*
2. 1 *šu-ši* uš *al-li-i[k* igi 6 g̃á]l
3. *iḫ-ḫa-aṣ-ba-an-ni-ma* 1,12 *a-na* u[š] *ú-r[i]-id-di*
4. *a-tu-úr* igi 3 g̃ál *ù* $\frac{1}{3}$ kùš *iḫ[-ḫa-aṣ-ba-a]n-ni-ma*
5. 3 *šu-ši* sag̃ an.na *al-li-[ik]*
6. *ša iḫ-ḫa-aṣ-ba-an-ni ú-te-er-šum-[m]a*
7. 36 sag̃ *al-li-ik* 1(bùr)$^{\text{iku}}$ a.šà sag̃ gi en.nam
8. za.e kìd.da.zu.dè gi *ša la ti-du-ú*
9. 1 ḫé.g̃ar igi 6 g̃ál-*šu ḫu-ṣú-ub-ma* 50 *te-zi-ib*
10. igi 50 du$_8$-*ma* 1,12 *a-na* 1 *šu-ši* nim-*ma*
11. 1,12 *a-na* ⟨1,12⟩ daḫ-*ma* 2,24 uš lul in.sum.
12. gi *ša la ti-du-ú* 1 ḫé.g̃ar igi 3 g̃ál-*šu ḫu-ṣú-ub*
13. 40 *a-na* 3 *šu-ši ša* sag̃ an.na nim-*ma*
14. 2 in.sum 2 *ù* 36 sag̃ ki.ta g̃ar.g̃ar
15. 2,36 *a-na* 2,24 uš lul nim 6,14,24 a.šà lul
16. a.šà *a-na* 2 ^{e}tab 1 *a-na* 6,14,24 [n]im
17. 6,14,24 in.sum *ù* $\frac{1}{3}$ kùš *ša iḫ-ḫ[a-aṣ]-bu*
18. *a-na* 3 *šu-ši* nim-*ma* 5 *a-na* 2,24 uš lul
19. [n]im-*ma* 12 $\frac{1}{2}$ 12 gaz 6 du$_7$.du$_7$

Rs.

1. 36 *a-na* 6,14,24 daḫ-*ma* 6,15 in.sum
2. 6,15.e 2,30 íb.si$_8$ 6 *ša te-zi-bu*
3. *a-na* 2,30 daḫ 2,36 in.sum igi 6,14,24
4. a.šà lul nu.du$_8$ *mi-nam a-na* 6,14,24
5. ḫé.g̃ar *ša* 2,36 in.sum 25 ḫé.g̃ar
6. *aš-šum* igi 6 g̃ál *re-ša-am iḫ-ḫa-aṣ-bu*
7. 6 *lu-pu-ut-ma* 1 *šu-ut-bi* 5 *te-zi-ib*
8. ⟨igi 5 du$_8$-*ma* 12 *a-na* 25 nim 5 in.sum⟩ 5 *a-na* 25 daḫ-*ma* $\frac{1}{2}$ nindan sag̃ gi in.sum

VAT 8389 #1

Vs. I

1. *i-na* bùr$^{\text{iku}}$ 4 še.gur *am-ku-us*
2. *i-na* bùr$^{\text{iku}}$ *ša-ni[-im]* 3 še.gur *am-[ku-us]*

3. *še-um* u g u *še-im* 8,20 *i-ter*
4. g a r i m[ia] g̃ a r. g̃ a r-*ma* 30
5. g a r i m[ú-a] e n. n a m
6. 30 *bu-ra-am* g̃ a r. r a 20 *še-am ša im-ku-sú* g̃ a r. r a
7. 30 *bu-r*[*a-a*]*m ša-ni-am* g̃ a r. r a
8. [1]5 *š*[*e-am š*]*a im-ku-sú*
9. [8],20 [*š*]*a še-um* u g u *še-im i-te-ru* g̃ a r. r a
10. *ù* 30 *ku-mur-ri* a. š à g a r i m. m e š g̃ a r. r a-*ma*
11. 30 *ku-mur-ri* a. š à g a r i m. m e š
12. *a-na ši-na ḫe-pé-ma* 15
13. 15 *ù* 15 *a-di si-ni-šu* g̃ a r. r a-*ma*
14. i g i 30 *bu-ri-i*[*m p*]*u-ṭur-ma* 2
15. 2 *a-na* 20 š [e *š*]*a im-ku-su*
16. í l 40 *še-um* l [u l] *a-na* 15 [*š*]*a a-d*[*i*] *ši-ni-šu*
16a. *ta-aš-ku-nu*
17. í l 10 *re-eš-ka* [*l*]*i-ki-il*
18. i g i 30 *bu-ri-im ša-ni-i*[*m*] *pu-ṭur-ma* 2
19. 2 *a-na* 15 *še-im ša im-ku-sú*
20. í l 30 *še-um* l u l *a-na* 15 *ša a-di ši-ni-šu*
20a. *ta-aš-ku-nu* í l 7,30
21. 10 *ša re-eš-ka ú-ka-lu*
22. u g u 7,30 *mi-nam i-ter* 2,30 *i-ter*
23. 2,30 *ša i-te-ru i-na* 8,20
24. *ša še-um* u g u *še-im i-te-ru*

Vs. II

1. *ú-sú-uḫ-ma* 5,50 *te-zi-ib*
2. 5,50 *ša te-zi-bu*
3. *re-eš-ka li-ki-il*
4. 40 *ta-ki-i*[*r-tam*] *ù* 30 [*ta-ki-ir*]-*tam*
5. g̃ a r. g̃ a r-*ma* 1,10 *i-gi-a-a*[*m ú-ul i-de*]
6. *mi-nam a-na* 1,10 *lu-uš-ku*-[*un*]
7. *ša* 5,50 *ša re-eš-ka ú-ka-lu i-na-di-nam*
8. 5 g̃ a r. r a 5 *a-na* 1,10 í l
9. 5,50 [*i*]*t-ta-di*[*-k*]*um*
10. 5 *ša* [*ta-aš*]-*ku-nu i-na* 15 *ša* [*a-di*] *ši-ni-šu*
11. *ta-aš-ku-nu i-na i*[*š*]-*te-en ú-sú-uḫ*
12. *a-na iš-te-en ṣí-im-ma*
13. *iš-te-en* 20 *ša-nu-um* 10
14. 20 a. š à g a r i m *iš-te-at* 10 a. š à g a r i m *ša-ni-tim*

15. *šum-ma* 20 a. š à g a r i m *iš-te-at*
16. 10 a. š à g a r i m *ša-ni-tim še-ú-ši-n*[*a*] e n. n a m
17. i g i 30 *bu-ri-im pu-ṭur-ma* 2
18. 2 *a-na* 20 *še-im ša im-ku-s*[*ú*]
19. í l 40 *a-na* 20 a. š à g a r i m *i*[*š-te-at*]
20. í l 13,20 *še-um ša* 20 [a. š à g a r i m]
21. i g i 30 *bu-ri-im ša-ni*[*-im pu-ṭur-m*]*a* 2
22. 2 *a-na* 15 *še*[*-im ša im-ku-sú* í] l 30
23. 30 *a-na* 10 a [.š à g a r i m *ša-ni-tim*]
24. í l [5] *še*-[*u*]*m* [*ša* 10 a. š à g a r i m *ša-ni-tim*]
25. 13,20 [*še-um* ¿*ša*/a. š à$^{?}$ g a r i m *iš-te-at*]
26. u g u [5] *še*[*-im* ¿*ša*/a. š à$^{?}$ g a r i m *ša-ni-tim*]
27. *mi-nam i-ter* [8,20 *i-ter*]

VAT 8390 #1

Vs. I

1. [u š *ù* s a g̃] *uš-ta-ki-il-ma* 10 a. š à
2. [u š *a*]*-na ra-ma-ni-šu uš-ta-ki-il-ma*
3. [a. š à] *ab-ni*
4. [*ma*]*-la* u š u g u s a g̃ *i-te-ru*
5. *uš-ta-ki-il a-na* 9 *e-ṣi-im-ma*
6. *ki-ma* a. š à*-ma ša* u š *i-na ra-ma-ni-šu*
7. *uš-t*[*a*]*-ki-lu*
8. u š *ù* s a g̃ e n. n a m
9. 10 a. š à g̃ a r. r a
10. *ù* 9 *ša i-ṣi-pu* g̃ a r. r a*-ma*
11. í b. s i$_8$ 9 *ša i-ṣi-pu* e n. n a m 3
12. 3 *a-na* u š g̃ a r. r a
13. 3 *a-n*[*a* s] a g̃ g̃ a r. r a
14. *aš-šum ma*-[*la* u š] u g u s a g̃ *i-te-ru*
15. *uš-ta-k*[*i-il*] *iq-bu-ú*
16. 1 *i-na* [3 *ša a-n*]*a* s a g̃ *ta-aš-ku-nu*
17. *ú*-[*sú-uḫ-m*]*a* 2 *te-zi-ib*
18. 2 *ša t*[*e-z*]*i-bu a-na* s a g̃ g̃ a r. r a
19. 3 *ša a-na* u š *ta-aš-ku-nu*
20. *a-na* 2 *ša* ⟨*a-na*⟩ s a g̃ *ta-aš-ku-nu* í l 6
21. i g i 6 *pu-ṭur-ma* 10
22. 10 *a-na* 10 a. š à í l 1,40
23. í b. s i$_8$ 1,40 e n. n a m 10

Vs. II

1. 10 *a-na* 3 *š*[*a a-na* u š *ta-aš-ku-nu*]
2. í l 30 u š
3. 10 *a-na* 2 *ša a-na* s a g̃ *ta-aš*[*ku-nu*]
4. í l 20 s a g̃
5. *šum-ma* 30 u š 20 s a g̃
6. a. š à e n. n a m
7. 30 u š *a-na* 20 s a g̃ í l 10 a. s à
8. 30 u š *it-ti* 30 *šu-ta-ki-il-ma* 15
9. 30 u š u g u 20 s a g̃ *mi-nam i-ter* 10 *i-ter*
10. 10 *it-ti* [10 *šu*]-*ta-ki-il-ma* 1,40
11. 1,40 *a-na* 9 *e-ṣi-im-ma* 15 a. š à
12. 15 a. š à *ki-ma* 15 a. š à *ša* u š
13. *i-na ra-ma-ni-šu uš-ta-ki-la*

VAT 8512

Vs.

1. [¿s a g̃. d ú 30 s a g̃ *i-na li-ib-bi ši-it-ta*? *t*]*a-wi-ra-tum*
2. [¿...? a. š à a n. t a u g u a. š à] ki. t a 7 *i-tir*
3. *m*[*u-tar-ri-tum* k i. t a u g u *mu-tar-ri-tim*] a n. t a 20 *i-tir*
4. *mu-tar-ri-d*[*a*]-[*tum ù pi-i-i*]*r-kum mi-nu-*[*u*]*m*
5. *ù* a. š [a] *ši-it*[*-ta ta-wi*]*-ra-tum mi-nu-u*[*m*]
6. *at-ta* 30 s a g̃ g̃ a r. r a 7 *ša* a. š à a n. t a u g u a. š à k i. t a *i-te-ru* g̃ a r. r a
7. *ù* 20 *ša mu-tar-ri-t*[*um* k] i. t a u g u *mu-tar-ri-tim* a n. t a *i-te-ru* g̃ [a r. r] a
8. i g i 20 *ša mu-tar-ri-tum* k i. t a u g u *mu-tar-ri-tim* a n. t a *i-te-ru*
9. *pu-ṭur-ma* 3 *a-na* 7 *ša* a. š à a n. t a u g u a. š à k i. t a *i-te-ru*
10. í l 21 *re-eš-ka li-ki-il*
11. 21 *a-na* 30 s a g̃ *ṣi-ib-ma* 51
12. *it-ti* 51 *šu-ta-ki-il-ma* 43,21
13. 21 *ša re-eš-ka ú-ka-lu it-ti* 21
14. *šu-ta-ki-il-ma* 7,21 *a-na* 43,21 *ṣi-ib-ma* 50,42
15. 50,42 *a-na ši-na ḫe-pé-ma* 25,21
16. í b. s i_8 25,21 *mi-nu-um* 39
17. *i-na* 39 21 *ta-ki-il-tam ú-sú-uḫ-ma* 18
18. 18 *ša te-zi-bu pi-ir-kum*
19. *ma šum-ma* 18 *pi-ir-kum*
20. *mu-tar-ri-da-tum ù* a. š à *ši-i*[*t-ta ta-wi-ra-tim mi-nu-um*]

21. *at-ta* 21 *ša a-na r*[*a-ma-ni-šu tu-uš-ta-ki-lu i-na* 51]
22. *ú-sú-uḫ-ma* 30 *te-z*[*i-ib* 30 *ša te-zi-bu*]
23. *a-na ši-na ḫe-pé-ma* 1[5 *a-na* 30 *ša te-zi-bu* í l]
24. 7,30 *re-eš*[*-ka li-ki-il*]

Kante

1. 18 *pi-i*[*r-kam it-ti* 18 *šu-ta-ki-il-ma*]
2. 5,24 [*i-na* 7,30 *ša re-eš-ka ú-ka-lu*]
3. *ú-sú-*[*u*]*ḫ-ma* 2,6 *te-*[*zi-ib*]

Rs.

1. *mi-nam a-na* 2,6 *lu-uš*[*-ku-un*]
2. *ša* 7 *ša* a. š à [a n. t a u g u] a. š à k i. t a *i-*[*te-ru*] *i-na-di-nam*
3. 3,20 g̃ a r. r a 3,20 *a-na* 2,6 í l 7 *it-ta-di-kum*
4. 30 s a g̃ u g u 18 *pi-ir-ki mi-nam i-tir* 12 *i-tir*
5. 12 *a-na* 3,20 *ša ta-aš-ku-nu i-ši* 40
6. 40 *mu-tar-ri-tum* a n. t a
7. *ma šum-ma* 40 *mu-tar-ri-tum* a n. t a
8. a. š à a n. t a *mi-nu-um at-ta* 30 s a g̃
9. 18 *pi-ir-kam ku-mur-ma* 48 *a-na ši-na ḫe-pé-ma* 24
10. 24 *a-na* 40 *mu-tar-ri-tim* a n. t a í l 16
11. 16 a. š à a n. t a *ma šum-ma* 16 a. š à a n. t a
12. *mu-tar-ri-tum* k i. t a *mi-nu-um ù* a. š à k i. t a *mi-nu-um*
13. *at-ta* 40 *mu-tar-ri-tam* a n. t a *a-na* 20 *ša mu-tar-ri-tum* k i. t a u g u *mu-tar-ri-tim* a n. t a *i-te-ru*
14. *ṣi-ib-ma* 1 *mu-tar-ri-tum* k i. t a
15. 1[8] *pi-ir-kam a-na ši-na ḫe-pé-ma* 9
16. *a-na* 1 *mu-tar-ri-tim* k i. t a í l 9
17. 9 a. š à k i. t a

YBC 6504

Vs. #1

1. [*ma-l*]*a* u š u g u s a g̃ sɪ í b. s [i_8 *i-na lìb-ba* a. š à]
2. [b a. z] i-*ma* 8,20 u š u g u s a g̃ [10 sɪ]
3. [*i-na*] *e-pe-ši-k*[*a*] 10 *tu-uš-t*[*a-kal-ma*]
4. 1,[40] *a-na* 8,20 b í. d [a ḫ-*ma* 10] i [n. g̃ a] r
5. š u. r i. a 10 *te-ḫe-ep-p*[*e-m*]*a* 5 i n. g̃ a r
6. 5 *tu-uš-ta-kal-ma* 25 i n. g̃ a r
7. 25 a. š à *a-na* 10 b í. d a ḫ-*ma* 10,25 i n. g̃ a r

8. 10,25.e 25 í b. s i$_8$ 5 *a-na* 25 b [í. d] a ḫ-*ma*
9. 30 u š i n. g̃ a r 5 *i-na* 25 b a. z i-*ma*
10. 20 s a g̃ i n. g̃ a r

#2

11. *ma-la* u š u g u s a g̃ SI í b. s i$_8$ *i-na lìb-ba* a. š à b a. z i-*ma*
12. 8,20 u š *ù* s a g̃ g̃ a r. g̃ a r-*ma* 50 *i-na e-pe-ši*[-*ka*]
13. 50 *tu-uš-ta-kal-ma* 41,40 i n. g̃ a r
14. [41.40 *a-na*] 8,20 b í. d a ḫ-*ma* 50 i n. g̃ [a r]
15. i g i [5 g̃ á] 1 *ta-pa-ṭar-m*[*a* 1]2 i n[. g̃ ar]
16. 12 *a-na* 50 *ta-na-aš-ši*[-*ma* 1]0 i n. [g̃ a r]
17. [š u. r i]. a 50 *te-ḫe-ep-pe-ma* [2]5 i n. [g̃ a r]
18. 25 *tu-uš-ta-kal*[-*ma* 10,2]5 i n. g̃ a r
19. 10 *i-na* 10,2[5 b a. z i-*m*]*a* 25 i n. [g̃ a r]
20. 25.e 5 í [b. s i$_8$] 5 *a-na* 25 b í [.d a ḫ-*ma*]
21. 30 u š i n. g̃ a r
22. 5 *i-na* 25 b a. z i-*ma*
23. 20 s a g̃ i n. g̃ a r

Rs. #3

1. [*ma-*]*la* u š u g u ⟨s a g̃⟩ SI d u$_7$. d u$_7$ *i-na lìb-ba* a. š à b a. z i
2. 8,20 30 u š s a g̃. b i e n. n a m
3. 30 d u$_7$. d u$_7$-*ma* 15 i n. g̃ a r
4. 8,20 *i-na lìb-ba* 15 b a. z i-*ma* 6,40 i n. g̃ a r
5. š u. r i. a 30 *te-ḫe-ep-pe-ma* 15 i n. g̃ a r
6. 15 d u$_7$. d u$_7$-*ma* 3,45 i n. g̃ a r
7. 3,45 *a-na* 6,40 b í- d a ḫ-*ma* 10,25 i n [.g̃ ar]
8. 10,25.e 25 í b. s i$_8$ 15 *i-na* 25 b a. z i-[*ma*]
9. 10 i n. g̃ a r 10 *i-na* 30 b a. z i-*ma*
10. 2[0 s a] g̃ i n. g̃ a r

#4

11. *ma-la* u š u [g] ù s a g̃ SI d u$_7$. d u$_7$ *i-na* a. š à b a. z [i$^{¿}$-*ma*$^{?}$]
12. 8,20 20 s a g̃ u š. b i e n. n a m
13. 20 d u$_7$. d u$_7$-*ma* 6,40 i n. g̃ ar
14. 6,[40 *a*]-*na* 8,20 b í. d a ḫ-*ma* 15 i n. g̃ a r
15. 15.e 30 í b. s i$_8$ 30 u š i n. g̃ a r

YBC 6967

Vs.

1. [i g i. b] i *e-li* i g i 7 *i-ter*
2. [i g i] *ù* i g i. b i *mi-nu-um*
3. *a*[*t-t*]*a* 7 *ša* i g i. b i
4. u g u i g i *i-te-ru*
5. *a-na ši-na ḫe-pé-ma* 3,30
6. 3,30 *it-ti* 3,30
7. *šu-ta-ki-il-ma* 12,15
8. *a-na* 12,15 *ša i-li-kum*
9. [1 a. š a^{l}]$^{a\text{-}am}$ *ṣí-ib-ma* 1,12,15
10. [í b. s i$_{8}$ 1],12,15 *mi-nu-um* 8,30
11. [8,30 *ù*] 8,30 *me-ḫe-er-šu i-di-ma*

Rs.

1. 3,30 *ta-ki-il-tam*
2. *i-na iš-te-en ú-su-uḫ*
3. *a-na iš-te-en ṣí-ib*
4. *iš-te-en* 12 *ša-nu-um* 5
5. 12 i g i. b i 5 *i-gu-um*

Bibliographische Hinweise

Der größte Teil der altbabylonischen Texte wurde auf Deutsch in

> Otto Neugebauer, *Mathematische Keilschrift-Texte, I-III*, Berlin, Julius-Springer, 1935, 1935, 1937. Wiederabdruck Berlin, Springer, 1973

und die meisten auf Französisch in

> François Thureau-Dangin, *Textes mathématiques babyloniens*, Leiden, Brill 1938

veröffentlicht.

Die Texte BM 13901, AO 8862, VAT 7532, YBC 6504, VAT 8512, VAT 8520, BM 85200+VAT 6599, BM 15285, VAT 8389, VAT 8390 und Str 368 sind in beiden Quellen enthalten[1]. Neugebauers Ausgabe ist ausführlich kommentiert, diejenige von Thureau-Dangin (diese sollte erschwinglich sein) enthält nur eine allgemeine Einführung.

Weitere Texte findet man (mit englischer Übersetzung) in

> Otto Neugebauer & Abraham Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven, Connecticut: American Oriental Society, 1945.

Der Text YBC 6967 stammt aus dieser Quelle.

Alle Texte aus Susa (TMS) stammen aus

> Evert M. Bruins & Marguerite Rutten, *Textes mathématiques de Suse*. Paris: Paul Geuthner, 1961.

Der Text Db_2–146 stammt aus dem Artikel

> Taha Baqir, "Tell Dhiba'i: New Mathematical Texts." *Sumer* **18** (1962), 11–14, pl. 1–3.

[1] Beide Werke enthalten allerdings nur das Hauptfragment von BM 15285. Eine neue Herausgabe, die auf den drei heute bekannten Fragmenten basiert, findet man in Eleanor Robson, *Mesopotamian Mathematics 2100–1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*. Oxford: Clarendon Press, 1999.

Die Ausgaben von Neugebauer und Thureau-Dangin sind solide und verlässlich, und dasselbe gilt für deren Kommentare. Bei der Benutzung von Neugebauers *Mathematische Keilschrift-Texte* sollte man daran denken, die in Band II und III enthaltenen Korrekturen zu berücksichtigen – in einer bahnbrechenden Arbeit lässt es sich nicht vermeiden, Hypothesen zu formulieren und Interpretationen vorzuschlagen, die später zu modifizieren sind. Selbstverständlich basieren die Kommentare auf der rein arithmetischen Interpretation der algebraischen Texte, welche auf Neugebauer und Thureau-Dangin zurückgehen.

Die Ausgabe der Texte aus Susa ist weit weniger verlässlich. Zu oft, und im schlimmsten Sinne des Wortes, sind die französische Übersetzung und der mathematische Kommentar Früchte der Einbildung. Sogar die Übersetzung der Logogramme in die akkadische Silbenschrift sind manchmal irreführend; das Logogramm für „hinzufügen" wird etwa durch das akkadische Wort für „anhäufen" beschrieben. Alles muss direkt an der Kopie der Keilschrifttafel kontrolliert werden.[2]

Die Grundlage für das meiste, was im vorliegenden Buch gegenüber den originalen Ausgaben neu ist – die geometrische Interpretation, das Verhältnis zwischen der Schule und der Tradition der Schreiber, und die historische Entwicklung – wird dargestellt in

> Jens Høyrup, *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer, 2002.

Dieser Band enthält fast alle der hier präsentierten Texte zusammen mit einer interlinearen englischen Übersetzung, philologischen Kommentaren und einer genauen Angabe aller Wiederherstellungen beschädigter Zeichen (nur TMS XVI #2, Str 368 und VAT 8520 #1 sind dort nicht enthalten). Große Auszüge finden sich derzeit auf Google Books.

[2] Mit anderen Worten ist die Ausgabe fast nutzlos für Nicht-Spezialisten, sogar für Mathematikhistoriker, welche die altbabylonische Tradition nicht sehr gut verstehen. Einige Werke der Geschichte der Mathematik enthalten fürchterliche Fehler, die direkt auf den Kommentar von Evert Bruins zurückgehen.

Index

S

T

U