

**Fakultät für Physik und Astronomie
Universität Heidelberg**

Bachelorarbeit in Physik
eingereicht von

Nils Vincent Bock

geboren in Berlin (Deutschland)

2022

**Theoretische Modellierung einer Penning-Falle zur
Nutzung sympathetischer Laserkühlung und
Charakterisierung einer dafür vorgesehenen
Präzisionsspannungsquelle**

Diese Bachelorarbeit wurde durchgeführt von Nils Vincent Bock am
Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg
unter der Aufsicht von
Prof. Dr. Klaus Blaum

Abstract

In this thesis, theoretical calculations of a Penning trap are performed, which verify the practical realisation of sympathetic laser cooling and serve as a basis for the implementation in the helium-3 experiment at the Max Planck Institute for Nuclear Physics.

The aim of this experiment is an accurate determination of the g -factor of helium-3. For this, a strongly cooled helium-3 nucleus must be present, which is to be realised with sympathetic laser cooling. Sympathetic laser cooling is based on the Coulomb interaction between two charged particles, which exchange energy via the interaction, comparable to a coupled oscillator. The aim is to transfer energy from the ion to be analyzed to the optically active ion, which can be laser cooled. This allows energy to be dissipated from the system of the two ions, which is equivalent to cooling. To achieve the strongest possible interaction of the ions, a small distance between the ions is necessary. For this purpose, a model of a coupled Penning trap with a common endcap, which is significantly shortened, is created. The calculations of the optimal parameters of this coupled Penning trap, which ensure stable storage with additional alignment of the axial frequencies of the ions, are presented in this thesis. The optimal parameters remain within the range of what can be realised experimentally.

Furthermore, a precision voltage source of the *UM*-series from *Stahl-Electronics* is checked for its suitability for the helium-3 experiment. This voltage source is necessary to precisely adjust the voltages at the electrodes of the coupled Penning trap. Specifically, the temperature dependence and the noise behavior of the output voltage are analyzed.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden theoretische Berechnungen einer Penning-Falle durchgeführt, welche die praktische Umsetzung der sympathetischen Laserkühlung überprüfen und als Grundlage zur Implementierung in das Helium-3 Experiment am Max-Planck-Institut für Kernphysik dienen.

Das Ziel dieses Experiments ist eine genaue Bestimmung des g -Faktors von Helium-3. Dafür muss ein stark gekühlter Helium-3 Atomkern vorliegen, was mit der sympathetischen Laserkühlung umgesetzt werden soll. Die sympathetische Laserkühlung basiert auf der Coulomb-Wechselwirkung zwischen zwei geladenen Teilchen, welche über die Wechselwirkung Energie austauschen, vergleichbar mit einem gekoppelten Oszillator. Das Ziel ist die Energieübertragung von dem zu analysierenden Ion auf das optisch aktive Ion, welches lasergekühlt werden kann. Dadurch kann Energie aus dem System der beiden Ionen abgeführt werden, was einer Kühlung gleichkommt. Um eine möglichst starke Wechselwirkung der Ionen zu erzielen, ist ein geringer Abstand der Ionen notwendig. Dazu wird ein Modell einer gekoppelten Penning-Falle mit einer gemeinsamen Endkappe, welche deutlich verkürzt ist, erstellt. Die Berechnungen der optimalen Parameter dieser gekoppelten Penning-Falle, welche eine stabile Speicherung bei zusätzlicher Angleichung der Axialfrequenzen der Ionen sicherstellt, werden in dieser Arbeit vorgestellt. Die optimalen Parameter bleiben dabei im Bereich des experimentell Umsetzbaren.

Weiterhin wird eine Präzisionsspannungsquelle der *UM*-Serie von *Stahl-Electronics* auf ihre Eignung für das Helium-3 Experiment überprüft. Diese ist notwendig um die Spannungen an den Elektroden der gekoppelten Penning-Falle präzise einstellen zu können. Konkret wird die Temperaturabhängigkeit und das Rauschverhalten der ausgegebenen Spannung analysiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen zur Penning-Falle	3
2.1	Die ideale Penning-Falle	3
2.1.1	Berechnung der Axialfrequenz ω_z	6
2.1.2	Berechnung der Magnetronfrequenz ω_- und modifizierten Zyklotronfrequenz ω_+	7
2.1.3	Energie der Eigenmoden	8
2.2	Die reale Penning-Falle	9
2.2.1	Elektrisches Potential einer zylindrischen Penning-Falle	9
2.2.2	Reihenentwicklung des elektrischen Potentials	12
2.2.3	Störungen	13
2.3	Bestimmung des g -Faktors	17
2.4	Sympathetische Laserkühlung	20
2.5	Die gekoppelte Penning-Falle	25
3	Theoretische Modellierung einer Penning-Falle zur Nutzung sympathetischer Laserkühlung	27
3.1	Vorbereitung	27
3.2	Optimierung der gekoppelten Penning-Falle	31
3.2.1	Durchführung eines Optimierungsschrittes	31
3.2.2	Überprüfung der Optimierung	33
3.2.3	Anmerkungen zur Optimierung	33
3.3	Minimierung der Austauschzeit τ_{ex}	34
3.3.1	Minimierung der Austauschzeit durch Verkürzung der gemeinsamen Endkappe	35

3.3.2	Minimierung der Austauschzeit durch Verkleinerung des Fallenradius	39
3.3.3	Anmerkung zur Minimierung der Austauschzeit	41
3.4	Kühlpotential der modellierten gekoppelten Penning-Falle . .	42
3.5	Fazit	43
4	Charakterisierung einer Präzisionsspannungsquelle	44
4.1	Theoretische Grundlagen	44
4.2	Vermessung der Präzisionsspannungsquelle	45
4.3	Auswertung der Messdaten	47
4.4	Fazit	48
5	Abschließendes Fazit	49
	Anhang	50
A	Herleitung der Bewegungsgleichung für ein Ion in einer Penning- Falle	50
B	Separation der Laplace-Gleichung	51
C	Lösung der Duffing'schen Differentialgleichung	52
D	Herleitung des Hamiltonoperators für Coulomb-Wechselwirkung	54
E	Zusammenhang zwischen dem Fallenradius a und der Elektro- denlänge l_i	55
	Abbildungsverzeichnis	58
	Tabellenverzeichnis	59
	Literaturverzeichnis	63

Kapitel 1

Einleitung

Diese Arbeit liefert ein Modell einer Penning-Falle mit welcher die sympathetische Laserkühlung eines ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkerns (Helium-3) realisiert werden kann. Dieses Modell wurde für das Helium-3 Experiment am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg (MPIK) entwickelt und dient als Grundlage zu Implementierung in das Experiment.

Das Helium-3 Experiment am MPIK hat das Ziel den Kern- g -Faktor von ${}^3\text{He}^{2+}$ mit einer relativen Präzision von 10^{-9} [1] zu bestimmen. Damit liefert das Experiment die erste Hochpräzisionsmessung des g -Faktors von ${}^3\text{He}^{2+}$. Die Ergebnisse können für eine unabhängige Kalibrierung mit hoher Genauigkeit von Helium-3 NMR-Proben verwendet werden [2], was wiederum in Muon $g-2$ Experimenten am AGS des Brookhaven National Laboratory oder am J-PARC Anwendung finden kann [3] [4].

Für die Bestimmung des g -Faktors von ${}^3\text{He}^{2+}$ wird das Verhältnis der Larmorfrequenz ω_L und der freien Zyklotronfrequenz ω_c genutzt:

$$\frac{\omega_L}{\omega_c} = \frac{g}{4} \cdot \frac{m_{\text{He}}}{m_{\text{P}}} . \quad (1)$$

Die Massen des Protons m_{P} und von ${}^3\text{He}^{2+}$ m_{He} sind sehr genau bekannt [5] [6]. Die freie Zyklotronfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$ wird über die Frequenzen der drei Eigenbewegungen des Ions in der Penning-Falle bestimmt. Zur Detektion dieser drei Frequenzen werden die induzierten Bildströme an den Elektroden der Penning-Falle gemessen. Diese Methode erlaubt eine relative Präzision in der Bestimmung der freien Zyklotronfrequenz von 10^{-10} oder besser [7].

Die Larmorfrequenz wird über die Umkehr des Spins von ${}^3\text{He}^{2+}$ bestimmt. Der Spin des festgesetzten Ions in der Penning-Falle richtet sich nach dem

homogenen Magnetfeld aus. Wird nun ein magnetisches Wechselfeld mit einer bestimmten Frequenz eingebracht, gibt es eine gewisse Wahrscheinlichkeit für eine Umkehr des Spins, also einen Spinflip. Über die Variation der Frequenz ergibt sich eine Resonanzkurve, an deren Maximum der Spinflip bei dieser Frequenz am wahrscheinlichsten auftritt. Die Frequenz am Maximum der Resonanzkurve ist die Larmorfrequenz. Dabei stellt sich die Detektion eines einzelnen Spinflips als problematisch heraus.

Ein Spinflip kann über einen Sprung in der Axialfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$ detektiert werden. Allerdings ist das Rauschen dieser Frequenz zu stark, als das mit einer genügend hohen Sicherheit ein Spinflip detektiert oder ausgeschlossen werden kann. Diese Unsicherheit schlägt sich auf die Aussagekraft der Resonanzkurve nieder und bewirkt letztendlich eine zu ungenaue Bestimmung der Larmorfrequenz. Um das Problem in den Griff zu bekommen, wird eine Kühlung der axialen Bewegung auf 0.1 K oder niedriger benötigt. Das würde das Rauschen der Axialfrequenz so weit reduzieren, dass ein Spinflip mit einer fast 90 prozentigen Zuverlässigkeit detektiert werden kann [8].

Die Kühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ auf 0.1 K gestaltet sich jedoch schwierig. Üblicherweise bietet sich eine direkte Laserkühlung an. Das ist in diesem Fall jedoch nicht möglich, da das Ion nicht optisch aktiv ist. Daher wird die Implementierung einer indirekten Laserkühlung, die sogenannte sympathetische Laserkühlung, angestrebt. Dabei soll ein direkt laserkühlbares ${}^9\text{Be}^+$ -Ion über die Coulomb-Wechselwirkung an den ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkern gekoppelt werden. Dieses System zweier Ionen tauscht stetig Energie aus, was eine Kühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ mit sich bringt, wenn das ${}^9\text{Be}^+$ ständig lasergekühlt wird.

Diese Arbeit liefert ein geeignetes Modell einer Penning-Falle, die eine ausreichend starke Kopplung der beiden Ionen ermöglicht, um die sympathetische Laserkühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ experimentell umzusetzen. Lässt sich dieses Modell in das Helium-3 Experiment am MPIK implementieren, wird eine deutlich genauere Bestimmung der Larmorfrequenz möglich.

Weiterhin wird eine Präzisionsspannungsquelle der *UM*-Serie von *Stahl-Electronics* auf Eignung für das Helium-3 Experiment am MPIK überprüft. Eine solche Präzisionsspannungsquelle ist notwendig um die anliegenden Spannungen an den einzelnen Elektroden der Penning-Falle mit einer Genauigkeit von 10^{-7} V einstellen zu können. Konkret wird die Temperaturabhängigkeit und das Rauschverhalten der ausgegebenen Spannung der Präzisionsspannungsquelle analysiert.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen zur Penning-Falle

In diesem Kapitel werden die Grundlagen einer Penning-Falle als auch speziellere Sachverhalte thematisiert, welche den Ausgangspunkt der Modellierung einer Penning-Falle zur Umsetzung sympathetischer Laserkühlung bilden.

2.1 Die ideale Penning-Falle

Eine Penning-Falle hat das Ziel geladene Teilchen in der Schwebe zu halten. Laut dem *Earnshaw-Theorem* [9] reicht dafür ein elektrostatisches Feld alleine nicht aus. Es wird entweder ein dynamisches elektrisches Feld oder ein elektrostatisches Feld überlagert mit einem statischen Magnetfeld benötigt. Die Penning-Falle macht sich den zweiten Fall zunutze, indem ein elektrostatisches Quadrupolfeld mit einem homogenen Magnetfeld überlagert wird. In Abbildung 1 ist eine solche Feldkonfiguration zu sehen.

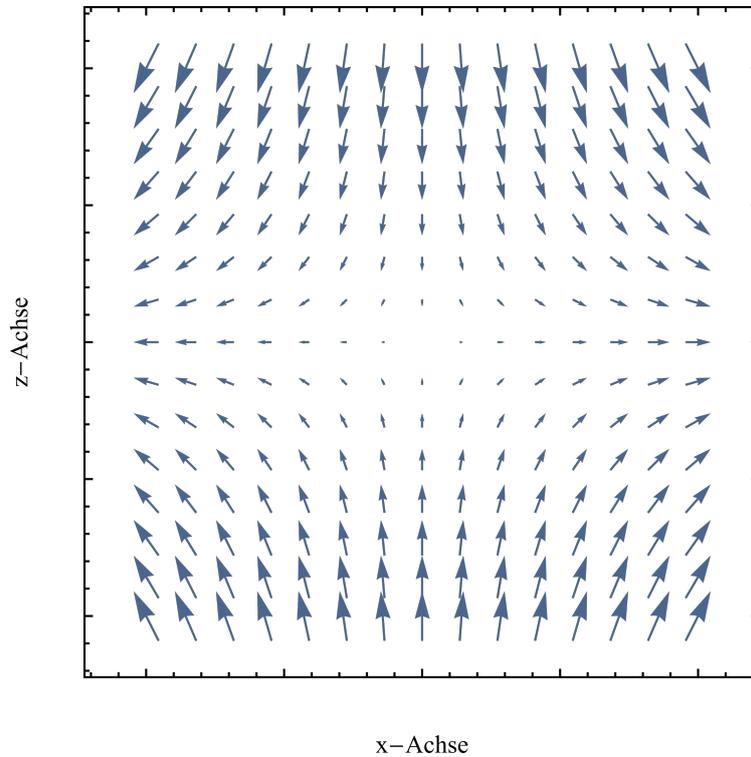


Abbildung 1: Benötigte Feldkonfiguration in einer Penning-Falle, um ein Ion im dreidimensionalen Raum festzusetzen. Zu sehen ist ein elektrostatisches Quadrupolfeld in der x - z -Ebene (blaues Vektorfeld), welches von einem homogenen Magnetfeld überlagert wird, das in z -Richtung zeigt. Der Übersicht wegen wurde das homogene Magnetfeld nicht eingezeichnet.

Dadurch können alle drei Raumrichtungen der Bewegung eines Ions beschränkt werden. Durch das homogene Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_z$ wird das bewegte Ion auf eine gekrümmte Bahn gezwungen. B_0 gibt die Magnetfeldstärke und \vec{e}_z die Magnetfeldrichtung an. Die dabei wirkende Kraft ist die Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) . \quad (2)$$

Dabei ist q die elektrische Ladung und \vec{v} die Geschwindigkeit des Ions. Die der Lorentzkraft entgegengerichtete Kraft ist die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_Z = m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) , \quad (3)$$

welche aus der gekrümmten Bahn resultiert. Dabei ist m die Masse und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit des Ions. Stellt sich zwischen diesen beiden Kräften ein Gleichgewicht ein, so folgt eine stabile Kreisbahn, die freie Zyklotronbewegung. Für diese Bewegung lässt sich die freie Zyklotronfrequenz berechnen, indem die beiden Kräfte gleichgesetzt werden und die Gleichung nach der Kreisfrequenz ω umgestellt wird:

$$\omega_c = \frac{q}{m} \cdot B_0 . \quad (4)$$

Zu beachten ist, dass sich die Kreuzprodukte aus Gleichung (2) und Gleichung (3) in normale Produkte umwandeln, da \vec{v} sowohl senkrecht zu \vec{B} als auch zu $\vec{\omega}$ steht.

Durch das homogene Magnetfeld ist das Ion nun in zwei Raumrichtungen (x - und y -Richtung) beschränkt. Das Ion kann sich allerdings noch immer in z -Richtung, also entlang des homogenen Magnetfeldes, frei bewegen. Um diese Raumrichtung ebenfalls zu beschränken, wird ein elektrisches Quadrupolfeld angelegt. Bewegt sich das Ion nun in positive z -Richtung, so wird es durch die Feldlinien parallel zum homogenen Magnetfeld in negative z -Richtung abgelenkt und umgekehrt. Dadurch stellt sich eine Schwingung des Ions in z -Richtung ein, womit es in alle drei Raumrichtungen beschränkt und somit festgesetzt ist. Diese Axialbewegung in z -Richtung erfolgt mit einer bestimmten Frequenz, genannt Axialfrequenz ω_z .

Da das elektrische Quadrupolfeld noch Feldlinien senkrecht zum homogenen Magnetfeld aufweist, stellt sich noch eine weitere Bewegung des Ions ein. Diese erfolgt in einer weiteren Kreisbahn in der x - y -Ebene, welche für den idealen Fall deutlich größer ist als der Radius der Kreisbahn für die freie Zyklotronbewegung. Diese sogenannte Magnetronbewegung erfolgt ebenfalls mit einer bestimmten Frequenz, genannt Magnetronfrequenz ω_- . Zusätzlich bewirken die senkrechten Komponenten des elektrischen Quadrupolfeldes eine Verlangsamung der freien Zyklotronbewegung. Die verlangsamte freie Zyklotronbewegung heißt modifizierte Zyklotronbewegung, welche mit der sogenannten modifizierten Zyklotronfrequenz ω_+ beschrieben wird.

Die resultierende Bewegung des Ions ergibt sich also aus der Überlagerung der Axialbewegung in z -Richtung und der Magnetron- und modifizierten Zyklotronbewegung in der x - y -Ebene. Diese drei Bewegungen werden Eigenbewegungen oder Eigenmoden genannt und ihre zugehörigen Frequenzen werden

entsprechend als Eigenfrequenzen bezeichnet. Einen hilfreichen Überblick bietet Abbildung 2.

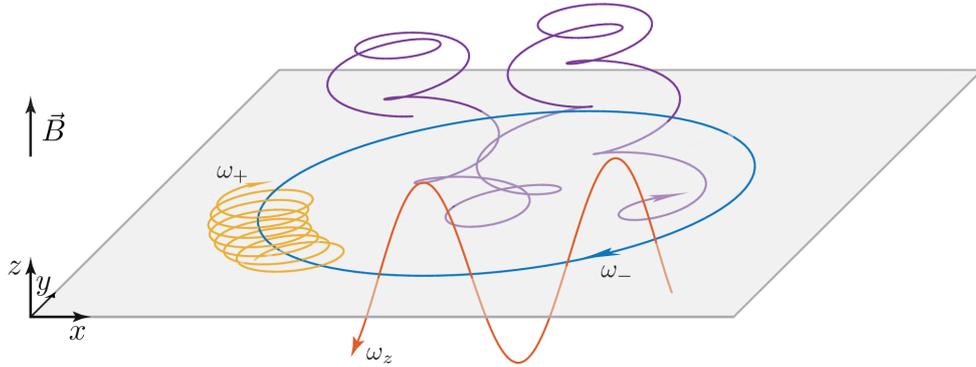


Abbildung 2: Skizze der überlagerten Bewegungen eines Ions in einer Penning-Falle. Zu sehen sind die Axial-, Magnetron- und modifizierte Zyklotronbewegung mit ihren Frequenzen ω_z , ω_- und ω_+ . Die kombinierte Bewegung entsteht aus der Überlagerung dieser drei Bewegungen des Ions und ist durch die violette Trajektorie dargestellt. Entnommen aus [10].

Um die Frequenzen dieser drei Bewegungen zu berechnen, muss die Bewegungsgleichung des Ions in dieser Feldkonfiguration gelöst werden (Herleitung der Bewegungsgleichung in Anhang A):

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \left[U_0 C_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (5)$$

U_0 steht dabei für die angelegte Spannung an der Ringelektrode (siehe Abbildung 3) und C_2 ist ein spezifischer Koeffizient der von der Geometrie der Penning-Falle abhängt. Genauer es zu C_2 folgt in Unterabschnitt 2.2.2.

2.1.1 Berechnung der Axialfrequenz ω_z

Da die Axialbewegung nur in z -Richtung erfolgt, wird für die Berechnung der Axialfrequenz lediglich die z -Komponente der Bewegungsgleichung betrachtet:

$$\ddot{z} = -\frac{q}{m} 2U_0 C_2 \cdot z. \quad (6)$$

Wird diese Differentialgleichung mit der eines ungedämpften harmonischen Oszillators verglichen

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0, \quad (7)$$

kann durch einen einfachen Koeffizientenvergleich die Resonanzfrequenz bestimmt werden, welche in diesem Fall die Axialfrequenz ist:

$$\omega_z^2 = \frac{q}{m} \cdot 2U_0C_2 \quad (8)$$

$$\implies \omega_z = \sqrt{\frac{q}{m} \cdot 2U_0C_2}. \quad (9)$$

2.1.2 Berechnung der Magnetronfrequenz ω_- und modifizierten Zyklotronfrequenz ω_+

Zur Berechnung der Magnetron- und modifizierten Zyklotronfrequenz werden lediglich die x - und y -Komponente der Bewegungsgleichung betrachtet, da sich die Bewegungen der beiden Frequenzen nur in der x - y -Ebene abspielen:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \left[U_0C_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B_0 \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} \right]. \quad (10)$$

Wird die Axialfrequenz (Gleichung (9)) und die freie Zyklotronfrequenz (Gleichung (4)) eingesetzt, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \omega_c \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Die Variablen x und y sind gekoppelt, da sie jeweils in der Gleichung der anderen Variablen vorkommen. Um diese Kopplung zu umgehen, wird eine komplexe Variable eingeführt $u = x + iy$, durch welche sich eine eindimensionale Differentialgleichung ergibt:

$$\ddot{u} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \cdot u - i\omega_c \cdot \dot{u}. \quad (12)$$

Die Substitution lässt sich nachvollziehen, wenn der Real- bzw. Imaginärteil von Gleichung (12) gebildet wird. Dieser ergibt die x - bzw. y -Komponente der Gleichung (11). Mit Hilfe des komplexen Exponentialansatzes kann eine quadratische Gleichung generiert werden, deren Lösungen die Magnetronfrequenz

ω_- und die modifizierte Zyklotronfrequenz ω_+ sind:

$$\omega_- = \frac{1}{2} \left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right), \quad (13)$$

$$\omega_+ = \frac{1}{2} \left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right). \quad (14)$$

Durch die Berechnung der einzelnen Frequenzen kann die Bewegung eines Ions in einer Penning-Falle nun genau bestimmt und nachvollzogen werden.

2.1.3 Energie der Eigenmoden

Die drei Eigenmoden eines Ions in einer Penning-Falle besitzen unterschiedliche Energien, welche sich aus der potentiellen und kinetischen Energie der jeweiligen Bewegung zusammensetzen.

- Energie der Magnetronbewegung [11]:

$$E_- = \frac{1}{2} m \omega_-^2 \hat{\rho}_-^2 - \frac{1}{4} m \omega_z^2 \hat{\rho}_-^2, \quad (15)$$

wobei $\hat{\rho}_-$ die Amplitude der Magnetronbewegung angibt.

- Energie der Axialbewegung [11]:

$$E_z = \frac{1}{2} m \omega_z^2 \hat{z}^2, \quad (16)$$

wobei \hat{z} die Amplitude der Axialbewegung angibt.

- Energie der modifizierten Zyklotronbewegung [11]:

$$E_+ = \frac{1}{2} m \omega_+^2 \hat{\rho}_+^2 - \frac{1}{4} m \omega_z^2 \hat{\rho}_+^2, \quad (17)$$

wobei $\hat{\rho}_+$ die Amplitude der modifizierten Zyklotronbewegung angibt.

Die durchschnittliche Gesamtenergie einer Mode lässt sich zu der jeweiligen effektiven Temperatur in Beziehung setzen [11]:

$$\langle E_- \rangle = k_B T_- \quad \langle E_z \rangle = k_B T_z \quad \langle E_+ \rangle = k_B T_+, \quad (18)$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist und T_i die jeweilige Temperatur der Eigenmode.

2.2 Die reale Penning-Falle

Die Umsetzung der Feldkonfiguration einer Penning-Falle erfolgt durch eine Reihe von ringförmigen Elektroden, die übereinander zu einem Zylinder gestapelt werden, was die Namensgebung *zylindrische Penning-Falle* erklärt. Zwischen den Elektroden werden Isolationsringe aus Saphir, sogenannte Saphirringe, eingebracht. Die für die Speicherung relevanten Elektroden sind die Ringelektrode, die beiden Korrektorelektroden und die beiden Endkappen, zu sehen in Abbildung 3. Werden unterschiedliche Spannungen an diese Elektroden angelegt, kann ein elektrostatisches Quadrupolfeld realisiert werden. Das homogene Magnetfeld wird durch eine supraleitende, zylindrische NbTi-Drahtspule erzeugt, in welcher sich die Penning-Falle befindet.

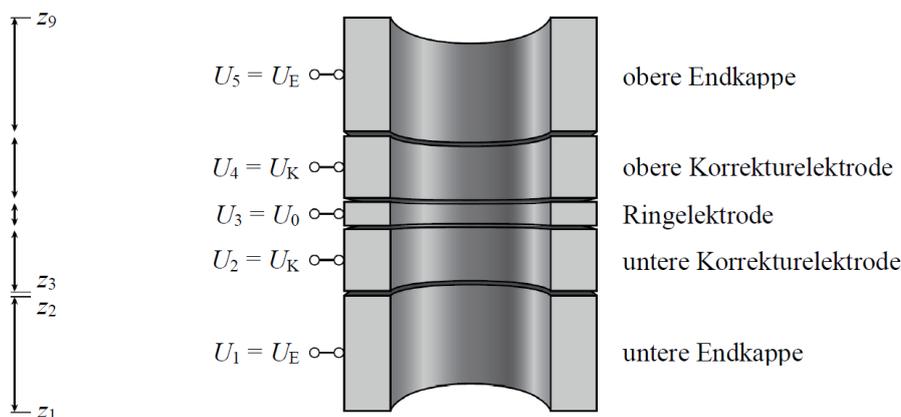


Abbildung 3: Skizze einer zylindrischen Penning-Falle mit fünf Elektroden. Zu sehen sind die gestapelten Elektroden, welche durch Saphirringe getrennt werden. An jede Elektrode wird eine eigene Spannung angelegt. Die Skizze definiert die in Gleichung (29) verwendeten Variablen z_i . Entnommen und angepasst aus [11].

2.2.1 Elektrisches Potential einer zylindrischen Penning-Falle

Um das elektrische Potential einer zylindrischen Penning-Falle mit ihren einzelnen Elektroden, die an unterschiedlichen Spannungen anliegen, analytisch herzuleiten, wird die Laplace-Gleichung benötigt

$$\Delta\Phi = 0, \quad (19)$$

wobei Φ das elektrische Potential der zylindrischen Penning-Falle ist. Durch

die Geometrie der Penning-Falle empfiehlt sich die Nutzung von Zylinderkoordinaten, in welchen sich die Darstellung des Laplace-Operators Δ verändert, was zu folgender Laplace-Gleichung führt:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (20)$$

Da keine Winkelabhängigkeit besteht, vereinfacht sich die Laplace-Gleichung und es bietet sich ein Separationsansatz zur Lösung dieser an. Dabei werden die von ρ und z abhängigen Teile des Potentials getrennt:

$$\Phi(\rho, z) = R(\rho) \cdot Z(z), \quad (21)$$

in die Laplace-Gleichung eingesetzt und umgeformt zu

$$\frac{1}{R(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (22)$$

Durch die Einführung einer Separationskonstante k (siehe Anhang B), lässt sich die Laplace-Gleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen aufteilen, die nur noch von ρ bzw. z abhängig sind:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) - k^2 \cdot R(\rho) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k^2 \cdot Z(z) = 0. \quad (24)$$

Die Lösungen dieser beiden Differentialgleichungen sind in der Literatur zu finden [12]. Gleichung (23) ist eine Bessel'sche Differentialgleichung, welche sich durch die modifizierte Besselfunktion erster Gattung und nullter Ordnung I_0 lösen lässt zu

$$R(\rho) = A_1(k) \cdot I_0(k\rho). \quad (25)$$

Die Lösung für Gleichung (24) lässt sich nach dem Vorbild eines harmonischen Oszillators bestimmen und lautet

$$Z(z) = A_2(k) \cdot \sin(kz). \quad (26)$$

A_1 und A_2 sind einfache Vorfaktoren, welche die Amplituden ihrer jeweiligen Funktion beeinflussen. Das gesamte Potential ergibt sich dann aus der

Zusammenführung der beiden Lösungen:

$$\Phi(\rho, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) I_0(k\rho) \sin(kz) dk . \quad (27)$$

Für die Amplitude gilt $A(k) = A_1(k) \cdot A_2(k)$. Das Integral kann als Summe geschrieben werden, wenn das Potential an den Enden der Penning-Falle verschwindet [13]:

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A(k_n) I_0(k_n \rho) \sin(k_n z) , \quad (28)$$

wobei $k_n = \frac{n\pi}{\Lambda}$ mit der gesamten Falllänge Λ gilt. Die Koeffizienten $A(k_n)$ werden durch die Dirichlet-Randbedingungen definiert und können durch Integration berechnet werden [14]. Daraus ergibt sich schließlich das elektrische Potential einer zylindrischen Penning-Falle mit p gestapelten Elektroden:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z) = & \frac{2}{\Lambda} \cdot \frac{I_0(k_n \rho)}{I_0(k_n a)} \sin(k_n z) \\ & \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{U_1 \cos(k_n z_0) - U_p \cos(k_n \Lambda)}{k_n} \right. \\ & \left. + \sum_{i=2}^p \frac{U_i - U_{i-1}}{k_n^2 \cdot d} (\sin(k_n z_{2i-2}) - \sin(k_n z_{2i-3})) \right] . \end{aligned} \quad (29)$$

Die Spannungen U_1 bis U_p , sowie die z -Koordinaten z_0 bis z_{2p-2} , ergeben sich aus Abbildung 3. a ist der innere Radius der Penning-Falle und d ist der Abstand der einzelnen Elektroden, der zwischen allen Elektroden identisch ist. Wird das elektrische Potential Φ graphisch dargestellt, ergibt sich Abbildung 4.

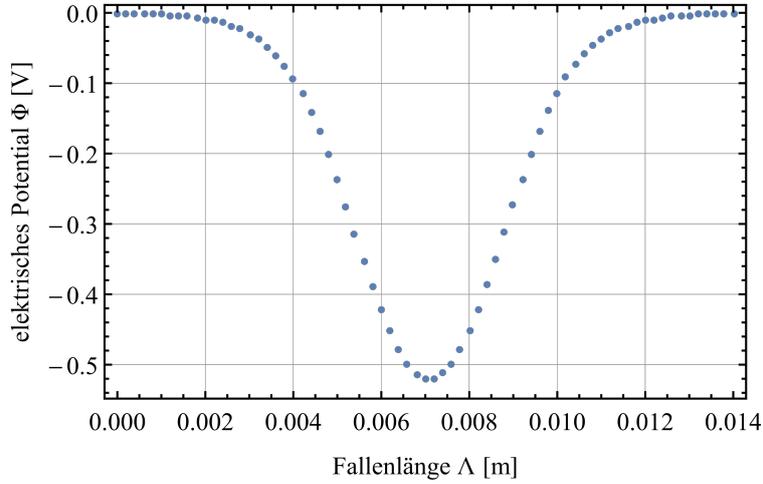


Abbildung 4: Elektrisches Potential entlang der Symmetrieachse einer zylindrischen Penning-Falle mit fünf Elektroden. Es liegen folgende Spannungen an den Elektroden an: $U_0 = -1\text{V}$, $U_K = -0.5\text{V}$ und $U_E = 0\text{V}$. Die Endkappen sind geerdet.

Um das elektrische Potential zu beeinflussen, bietet es sich an die Spannungen an den Korrektorelektroden und der Ringelektrode zu modifizieren. Das Verhältnis dieser beiden Größen wird *Tuning Ratio* genannt

$$TR = \frac{U_K}{U_0} \quad (30)$$

und ist eine wichtige Größe bei der Optimierung des elektrischen Potentials von Penning-Fallen [15].

2.2.2 Reihenentwicklung des elektrischen Potentials

Um eine zylindrische Penning-Falle sinnvoll zu modellieren, empfiehlt es sich eine Taylor-Entwicklung des elektrischen Potentials Φ zu betrachten. Die Taylor-Entwicklung wird auf der Symmetrieachse betrachtet, also gilt $\rho = 0$. Für das Taylor-Polynom zweiter Ordnung muss sich das bekannte Potential eines Quadrupolfeldes ergeben [15]:

$$\Phi(\rho, z) = U_0 C_2 \cdot \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right). \quad (31)$$

Wird auch hier wieder $\rho = 0$ gesetzt und dann ein Koeffizientenvergleich zwischen dem bekannten Potential eines Quadrupolfeldes und dem Taylor-

Polynom zweiter Ordnung durchgeführt, fällt auf, dass die Taylor-Entwicklung noch um den Vorfaktor U_0 ergänzt werden muss. Die komplette Taylor-Entwicklung für das Potential ergibt sich dann wie folgt:

$$\Phi(0, z) = U_0 \sum_{j=0}^m \frac{\Phi^{(j)}(0)}{j!} z^j = U_0 \sum_{j=0}^m C_j z^j . \quad (32)$$

C_j sind die Taylor-Koeffizienten der Entwicklung. Der Entwicklungspunkt a_0 wird gleich null gesetzt. Die Taylor-Koeffizienten C_j spielen eine wichtige Rolle für die Modellierung einer Penning-Falle. Für ein sinnvolles Design einer Penning-Falle ist es notwendig, dass diese *"kompensiert"* und *"orthogonal"* ist. *"Kompensiert"* bedeutet, dass die ersten beiden Taylor-Koeffizienten höherer, gerader Ordnung (C_4 und C_6) gleichzeitig auf null eingestellt werden können [15]. *"Orthogonal"* bedeutet, dass C_2 und somit die Axialfrequenz ω_z des Ions unabhängig von den Spannungen an den Korrektorelektroden U_K sind [14].

Für eine Penning-Falle deren elektrisches Potential spiegelsymmetrisch ist, können die ungeraden Taylor-Polynome vernachlässigt werden, da sich die ungeraden Taylor-Koeffizienten aus Symmetriegründen aufheben. Das Taylor-Polynom nullter Ordnung hat keine z -Abhängigkeit und bewirkt daher lediglich eine Verschiebung des Potentials. Die Bewegung des Ions wird davon nicht beeinflusst, weshalb der Taylor-Koeffizient nullter Ordnung C_0 ebenfalls vernachlässigt werden kann.

2.2.3 Störungen

Bei einer realen zylindrischen Penning-Falle können verschiedene Störungen des elektrischen oder magnetischen Feldes auftreten. Diese haben Einfluss auf die verschiedenen Bewegungen des Ions in der Penning-Falle. Für die Modellierung einer Penning-Falle zur Nutzung sympathetischer Kühlung sind vorrangig die Störungen welche die Axialfrequenz ω_z betreffen interessant. Daher werden in diesem Kapitel ausschließlich diese Störungen besprochen. Weitere Störungen können in der Literatur [16] oder [15] nachgelesen werden.

Axialfrequenzshift durch die Koeffizienten C_4 und C_6

Die wohl relevanteste Störungsquelle der Axialfrequenz ω_z ist der Axialfrequenzshift $\Delta\omega_z$ durch die Koeffizienten C_4 und C_6 , welcher aus einer

Abweichung des harmonischen elektrischen Potentials durch Anharmonizitäten folgt. Um diesen Axialfrequenzshift zu berechnen, muss die Bewegungsgleichung der z -Komponente erneut gelöst werden. Allerdings wird das elektrische Potential durch anharmonische Terme erweitert. Das bedeutet, dass das harmonische elektrische Potential in Gleichung (31) durch eine Taylor-Entwicklung dargestellt wird (siehe Gleichung (32)). Zu beachten ist, dass wieder die Symmetrieachse betrachtet wird ($\rho = 0$) und die Taylor-Entwicklung nur bis zur sechsten Ordnung für gerade Taylor-Polynome betrachtet wird:

$$\Phi(0, z) = U_0 \sum_{j=1}^3 C_{2j} z^{2j} . \quad (33)$$

Das Taylor-Polynom nullter Ordnung und ungerade Taylor-Polynome können vernachlässigt werden (siehe Unterabschnitt 2.2.2). Höhere Ordnungen können ebenfalls vernachlässigt werden, da sie einen immer geringeren Einfluss auf das elektrische Potential haben. Die Taylor-Polynome vierter und sechster Ordnung bilden in diesem Fall die anharmonischen Terme des elektrischen Potentials. Nach

$$\vec{F}_{\text{el.}} = m\ddot{\vec{r}} = -q\nabla\Phi \quad (34)$$

lässt sich die Bewegungsgleichung durch das elektrische Potential berechnen, was der gesamten Bewegungsgleichung für die z -Komponente entspricht, da diese nicht von dem Magnetfeld abhängig ist (siehe Gleichung (75)). Für die z -Komponente vereinfacht sich der Nabla-Operator ∇ zu einer partiellen Ableitung nach z und \vec{r} zu z . Um nun den Axialfrequenzshift zu berechnen, wird für das elektrische Potential Φ in Gleichung (34) die Taylor-Entwicklung aus Gleichung (33) eingesetzt:

$$m\ddot{z} = -q \frac{\partial}{\partial z} U_0 \sum_{j=1}^3 C_{2j} z^{2j} . \quad (35)$$

Ausgeschrieben ergibt sich die Differentialgleichung zu

$$\ddot{z} + \frac{q}{m} 2U_0 C_2 \cdot z + \frac{q}{m} 4U_0 C_4 \cdot z^3 + \frac{q}{m} 6U_0 C_6 \cdot z^5 = 0 , \quad (36)$$

wodurch sich schnell erkennen lässt, dass es sich um eine Duffing'sche Differentialgleichung der Form

$$\ddot{z} + \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 = 0 \quad (37)$$

handelt, welche eine ungedämpfte und ungetriebene Duffing-Oszillation beschreibt. Die Lösung dieser Differentialgleichung findet sich im Anhang C. Aus der Lösung ergibt sich der Axialfrequenzshift $\Delta\omega_z$ durch die Koeffizienten C_4 und C_6 :

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{3}{4} \left(\frac{C_4}{C_2^2} + \frac{5}{4} \frac{C_6}{C_2^3} \frac{E_z}{qU_0} \right) \frac{E_z}{qU_0}. \quad (38)$$

Die Energie der axialen Bewegung E_z berechnet sich dabei nach Gleichung (18).

Axialfrequenzshift durch *Cross Terms*

Werden höhere Ordnungen und auch ungerade Koeffizienten in der Taylor-Entwicklung des elektrischen Potentials betrachtet, können Axialfrequenzshifts $\Delta\omega_z$ auch aus ungeraden Koeffizienten und Kombinationen von Koeffizienten, sogenannte *Cross Terms*, entstehen. Da das elektrische Potential der modellierten Penning-Falle nicht spiegelsymmetrisch ist (siehe Abbildung 9), müssen die Axialfrequenzshifts durch diese Koeffizienten überprüft werden. Die Herleitung der Gleichungen zur Berechnung des Axialfrequenzshifts aus verschiedenen Koeffizienten wird sehr ausführlich in der Dissertation von Dr. Jochen Ketter [16] thematisiert. Für die Berechnung des Axialfrequenzshifts durch *Cross Terms* wurden folgende Zusammenhänge verwendet:

- Axialfrequenzshift durch *Cross Terms* mit einem geraden und einem ungeraden Koeffizienten:

$$\Delta\omega_z = \omega_z \cdot \frac{2D_n \delta^n \cdot 2D_m \delta^m}{D_2^2} \frac{\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(2\frac{n}{2}\right)!}{2^{2\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}!\right)^2} \frac{\hat{z}^{2\left(\frac{n}{2} + \frac{m-1}{2}\right) - 3}}{\delta^{2\left(\frac{n}{2} + \frac{m-1}{2}\right) - 3}}. \quad (39)$$

Dabei stellt $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl dar und steht für die geraden Koeffizienten und $m \in \mathbb{N}$ stellt eine ungerade Zahl dar und steht für die ungeraden Koeffizienten.

- Axialfrequenzshift durch *Cross Terms* mit zwei ungeraden Koeffizienten:

$$\Delta\omega_z = \omega_z \cdot \frac{2D_n\delta^n \cdot 2D_m\delta^m}{D_2^2} \frac{\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}}{\left(\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)!\right)^2} \cdot \frac{\left(2\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right) + 1\right)! \hat{z}^{2\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)-2}}{2^{2\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)+1} \delta^{2\left(\frac{n-1}{2} + \frac{m-1}{2}\right)-2}}. \quad (40)$$

Dabei stellen $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Zahl dar und stehen für die ungeraden Koeffizienten.

- Axialfrequenzshift durch *Cross Terms* mit zwei geraden Koeffizienten:
Diese Axialfrequenzshifts wurden nicht berücksichtigt, da die Modellierung der Falle nach den geraden Koeffizienten erfolgt. Die *Cross Terms* der geraden Koeffizienten werden daher nur vernachlässigbar kleine Axialfrequenzshifts mit sich bringen.

Die Koeffizienten D_j berechnen sich aus den jeweiligen Koeffizienten C_j :

$$D_j = C_j \cdot 2\delta^j \quad (41)$$

und δ berechnet sich aus dem Koeffizienten C_2 und dem Koeffizienten D_2 , welcher auf eins festgesetzt wird:

$$\delta = \sqrt{\frac{D_2}{2 \cdot C_2}} = \sqrt{\frac{1}{2 \cdot C_2}}. \quad (42)$$

Die Amplitude der Axialbewegung \hat{z} lässt sich nach Gleichung (16) mit Gleichung (18) berechnen.

Axialfrequenzshift durch die Magnetronbewegung

Weiterhin gibt es einen Axialfrequenzshift durch die Amplitude der Magnetronbewegung, wenn diese im Vergleich zu der Axialbewegung groß ausfällt. Dieser Axialfrequenzshift durch den Koeffizienten E_3 berechnet sich durch [17]

$$\Delta\omega_z = \omega_z \cdot \frac{9}{8} \frac{E_3^2}{E_2^2 \delta_0^2 \hat{\rho}_-^2}, \quad (43)$$

wobei sich die Koeffizienten in diesem Fall durch

$$E_j = C_j \cdot 2\delta_0^j \quad (44)$$

berechnen lassen. E_2 ist in diesem Fall auf 0.5 festgesetzt [17]. Damit lässt sich δ_0 berechnen:

$$\delta_0 = \sqrt{\frac{1}{4 \cdot C_2}}. \quad (45)$$

Die Amplitude der Magnetronbewegung berechnet sich aus der Energie der Magnetronbewegung (siehe Gleichung (15) und Gleichung (18)). Die Temperatur der Magnetronbewegung berechnet sich nach

$$T_- = \frac{\omega_-}{\omega_z} \cdot T_z. \quad (46)$$

Die Magnetronfrequenz berechnet sich durch Gleichung (13).

2.3 Bestimmung des g -Faktors

Der g -Faktor ist eine dimensionslose Größe, welche das Verhältnis des magnetischen Moments $\vec{\mu}$ und des Spins \vec{s} eines Ions angibt:

$$\vec{\mu}_s = g \frac{q}{2m} \vec{s}. \quad (47)$$

Die experimentelle Bestimmung des g -Faktors kann mit Hilfe einer Penning-Falle durchgeführt werden. Dabei wird das Verhältnis der Larmorfrequenz ω_L zur freien Zyklotronfrequenz ω_c genutzt [8]:

$$\frac{\omega_L}{\omega_c} = \mu \left(\frac{q\hbar}{2m} \right)^{-1}. \quad (48)$$

Das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum wird durch \hbar angegeben. Da im Helium-3 Experiment der Kern- g -Faktor von ${}^3\text{He}^{2+}$ bestimmt werden soll, muss die entsprechende Masse m_{He} und Ladung $q_{\text{He}} = 2e$ eingesetzt werden. Weiterhin muss das korrekte Magnetron μ eingesetzt werden:

$$\mu_{\text{He}} = \frac{g_{\text{He}}}{2} \mu_N, \quad (49)$$

wobei μ_N das Kernmagnetron angibt:

$$\mu_N = \frac{e}{2m_P} \hbar. \quad (50)$$

Werden diese beiden Gleichungen in Gleichung (48) eingesetzt, ergibt sich

die Gleichung (1) aus der Einleitung.

Der g -Faktor lässt sich also über die Larmorfrequenz und die freie Zyklotronfrequenz berechnen. Diese beiden Frequenzen eines Ions können bestimmt werden, wenn das Ion in einer Penning-Falle festgesetzt werden kann. Dabei wird die freie Zyklotronfrequenz über die Axial-, Magnetron- und reduzierte Zyklotronfrequenz berechnet [18]

$$\omega_c = \sqrt{\omega_+^2 + \omega_-^2 + \omega_z^2}. \quad (51)$$

Die Larmorfrequenz wird über die Umkehr des Spins des festgesetzten Ions gemessen. Der Spin des Ions in der Penning-Falle richtet sich nach dem homogenen Magnetfeld aus. Wird nun ein magnetisches Wechselfeld mit einer bestimmten Frequenz ω_{SF} eingebracht, gibt es eine gewisse Wahrscheinlichkeit für eine Umkehr des Spins, also einen Spinflip. Durch die Variation der Frequenz ω_{SF} ergibt sich eine Resonanzkurve, deren Maximum aussagt, dass der Spinflip an dieser Stelle mit der höchsten Wahrscheinlichkeit auftritt. Die Frequenz am Maximum der Resonanzkurve ist die Larmorfrequenz (siehe Abbildung 5).

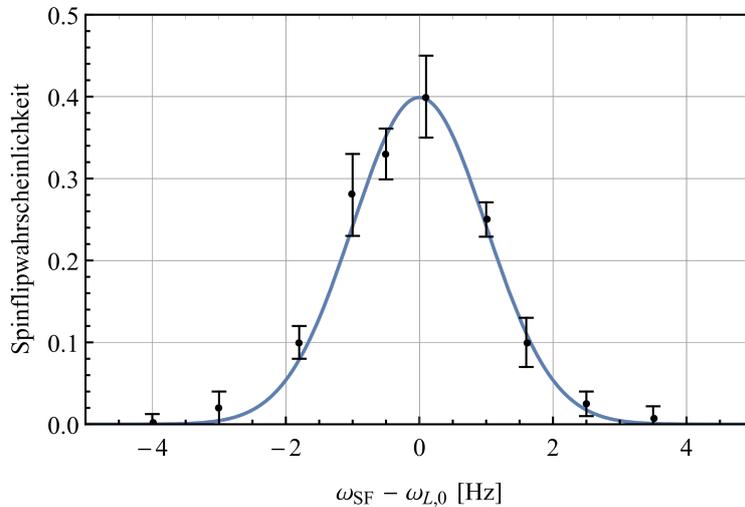


Abbildung 5: Zu sehen ist eine simulierte Resonanzkurve, welche die Wahrscheinlichkeit eines Spinflips der entsprechenden Frequenz ω_{SF} zuordnet. Die erwartete Larmorfrequenz $\omega_{L,0}$ wurde von der Frequenz ω_{SF} abgezogen. Liegt das Maximum der Resonanzkurve bei 0 Hz, gilt $\omega_{L,0} = \omega_L$.

Um einen Spinflip nachzuweisen, wird der kontinuierlichen Stern-Gerlach-

Effekt [19] verwendet. Hierbei werden radiale magnetische Momente $\vec{\mu}$ über eine magnetische Inhomogenität an die axiale Mode gekoppelt. Das Resultat ist, dass ein Spinflip zu einem Sprung der axialen Frequenz führt. Problematisch bei der Messung des Spinflips sind die Fluktuationen der Axialfrequenz. Diese können zu einem so großen Rauschen führen, dass der Sprung in der Axialfrequenz, welcher zu einem Spinflip gehört, nicht mehr eindeutig identifiziert werden kann. Die Größe des Rauschens wird dabei maßgeblich von der Energie der modifizierten Zyklotronbewegung und dem mit ihr assoziierten magnetischen Moment, welches neben dem Spin auch an die axiale Mode koppelt, beeinflusst [20]. Um dieses Rauschen zu minimieren, muss die Energie der modifizierten Zyklotronbewegung minimiert werden. Das wird durch Kühlung erreicht. Dabei reicht eine Temperatur von 4K, welche durch die Kühlung mit flüssigem Helium erreicht wird, nicht aus. Um eine hohe Sicherheit bei der Bestimmung eines Spinflips zu haben, wird eine Temperatur von ungefähr 0.1K benötigt (siehe Abbildung 6).

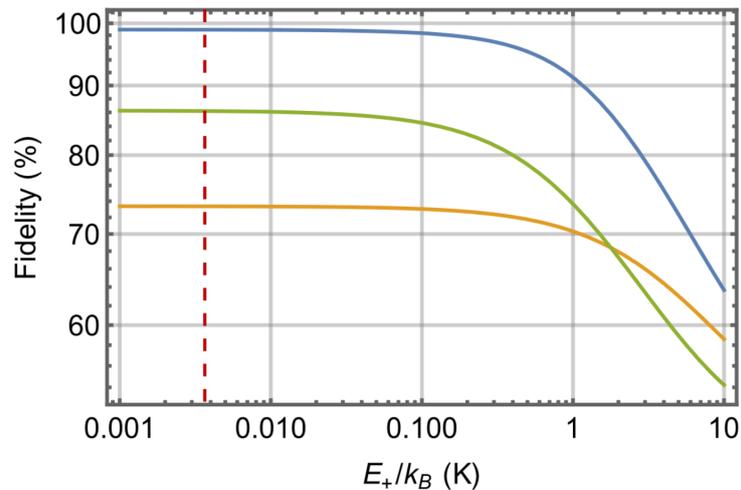


Abbildung 6: Abgebildet ist die Detektionszuverlässigkeit eines Spinflips in Abhängigkeit von der Energie der modifizierten Zyklotronbewegung. Relevant ist nur die grüne Kurve, da diese das aktuelle Experiment zur Messung des g -Faktors von Helium-3 repräsentiert. Es ist deutlich zu sehen, dass die Detektionszuverlässigkeit mit sinkender Energie, also auch sinkender Temperatur, beträchtlich zunimmt. Entnommen aus [8].

Liegt eine Temperatur von 0.1 K vor, kann ein Spinflip mit einer hohen Sicherheit bestimmt werden, was die Genauigkeit der Bestimmung der Lar-

morfrequenz verbessert. Die Kühlung, welche notwendig für eine genaue Messung der Larmorfrequenz ist, kann durch sympathetische Laserkühlung umgesetzt werden. Das wird im nächsten Kapitel beschrieben.

2.4 Sympathetische Laserkühlung

Die Laserkühlung eines Ions erfolgt über die Impulsübertragung durch Photonen. Dabei wird ein Laser, also ein Photonenstrahl, in entgegengesetzter Bewegungsrichtung auf das zu kühlende Ion gerichtet. Das Ion absorbiert ein Photon und wird angeregt. Bei der Absorption überträgt sich der Impuls des Photons, welcher entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung des Ions gerichtet ist. Dadurch verlangsamt sich das Ion, was einer Kühlung gleichkommt. Beim spontanen Zerfall des angeregten Zustandes zurück in den Grundzustand, wird ein Photon emittiert. Dieses Photon wird in eine rein zufällige Richtung emittiert, wodurch auch der Impuls der Emission ungerichtet ist. Das bedeutet, dass das Ion über eine Vielzahl an Wiederholungen von Absorption und Emission durch die Impulsübertragungen an Bewegungsenergie verliert, was einer Kühlung entspricht.

Voraussetzung für die Laserkühlung ist, dass das zu kühlende Ion optisch angeregt werden kann und dass dieser optische Übergang reversibel ist. Das heißt, dass beim Zerfall des angeregten Zustand wieder der ursprüngliche Grundzustand erreicht wird.

Allerdings gibt es auch Ionen, die diese Voraussetzungen nicht erfüllen und daher nicht direkt durch einen Laser gekühlt werden können. Um solche Ionen dennoch kühlen zu können, bietet sich die sympathetische Laserkühlung an. Dabei werden zwei geladene Ionen sehr nah aneinander gebracht, sodass sie über die Coulomb-Wechselwirkung koppeln (siehe Abbildung 7).

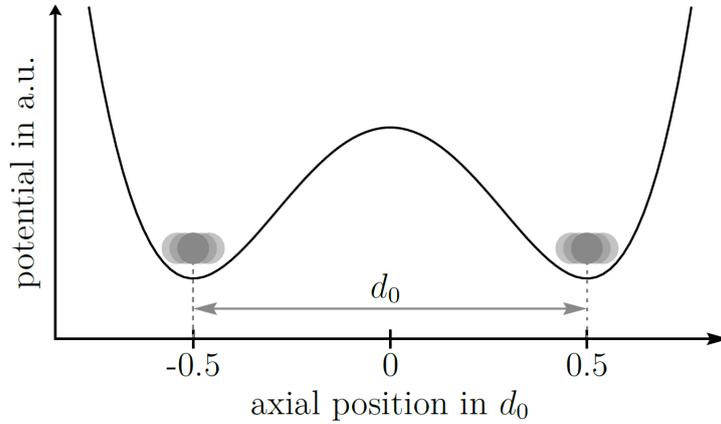


Abbildung 7: Schema eines gekoppelten Oszillators aus zwei Ionen, welche in einem Potential festgesetzt sind. Zu sehen sind zwei oszillierende Ionen, welche so nah aneinander sind, dass sie über die Coulomb-Wechselwirkung miteinander koppeln. Die Kopplung bewirkt einen ständigen Energieaustausch zwischen den beiden Ionen. Entnommen aus [21].

Das heißt, dass sich ihre Bewegungen gegenseitig beeinflussen und ständig Energie zwischen den beiden Ionen ausgetauscht wird. Um die sympathetische Laserkühlung umzusetzen, wird das nicht laserkühlbare Ion mit einem laserkühlbaren Ion gekoppelt. Das laserkühlbare Ion wird dann, wie oben beschrieben, durch einen Laser gekühlt, was zu einer Energieabnahme des Systems der beiden gekoppelten Ionen und letztendlich auch zu einer Energieabnahme des nicht laserkühlbaren Ions führt. Das nicht laserkühlbare Ion wird also indirekt lasergekühlt. Das System der beiden gekoppelten Ionen entspricht einem gekoppelten Oszillator. Um das Prinzip zu verdeutlichen, bietet es sich an, den gekoppelten Oszillator genauer zu betrachten.

Klassische Betrachtung des gekoppelten Oszillators

Das System des klassischen gekoppelten Oszillators ist in Abbildung 8 zu sehen. Die Bewegungsgleichungen für dieses System lauten [21]

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= -k_1 z_1 + \kappa(z_2 - z_1) \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -k_2 z_2 - \kappa(z_2 - z_1), \end{aligned} \tag{52}$$

wobei m_i , k_i und κ in Abbildung 8 definiert sind. z_1 und z_2 sind die Auslen-

kungen der Ionen aus der Ruhelage. Werden die Eigenfrequenzen der beiden Ionen ohne Kopplung eingeführt $\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i}$, lassen sich die Bewegungsgleichungen umformulieren zu

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 - \frac{\kappa}{m_1}(z_2 - z_1) &= 0 \\ \ddot{z}_2 + \omega_2^2 z_2 + \frac{\kappa}{m_2}(z_2 - z_1) &= 0.\end{aligned}\tag{53}$$

Dieses System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen lässt sich durch den Exponentialansatz $z_i = A_i \cdot e^{\lambda t}$ zu einem linearen Gleichungssystem umformen:

$$\begin{aligned}\lambda^2 A_1 + \omega_1^2 A_1 - \frac{\kappa}{m_1}(A_2 - A_1) &= 0 \\ \lambda^2 A_2 + \omega_2^2 A_2 + \frac{\kappa}{m_2}(A_2 - A_1) &= 0,\end{aligned}\tag{54}$$

welches durch die Koeffizientenmatrix M dargestellt werden kann:

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 + \omega_1^2 + \frac{\kappa}{m_1} & -\frac{\kappa}{m_1} \\ -\frac{\kappa}{m_2} & \lambda^2 + \omega_2^2 + \frac{\kappa}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\tag{55}$$

Für ungestörte Eigenfrequenzen der einzelnen Ionen $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ ergeben sich, durch die Berechnung der Eigenwerte λ_i von M , die Eigenfrequenzen des Systems $\tilde{\omega}_i$:

$$\lambda_1^2 = \tilde{\omega}_1^2 = \omega_0^2 \quad \lambda_2^2 = \tilde{\omega}_2^2 = \omega_0^2 + \frac{\kappa}{m_1} + \frac{\kappa}{m_2}.\tag{56}$$

Die Differenz der beiden Eigenfrequenzen des Systems $\tilde{\omega}_2 - \tilde{\omega}_1$ gibt die Frequenz an, mit welcher die Ionen Energie austauschen.

Für den speziellen Fall der sympathetische Kühlung, in dem die Ionen per Coulomb-Wechselwirkung gekoppelt sind, ist κ deutlich kleiner als k_i . Die geringe Kopplung bedeutet, dass die Ionen nur Energie austauschen, wenn die Eigenfrequenzen ω_i gleich sind. Dabei entsprechen diese Eigenfrequenzen den jeweiligen Axialfrequenzen ω_z der Ionen.

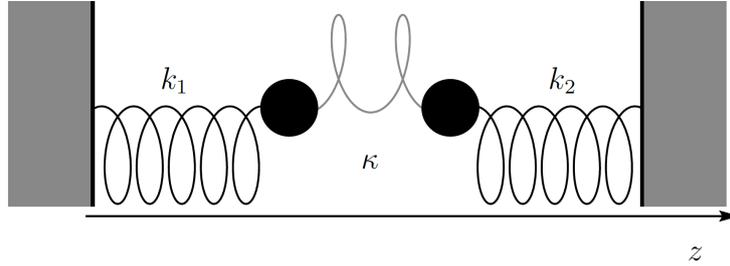


Abbildung 8: Schema eines klassischen gekoppelten Oszillators. Die Massen m_1 und m_2 sind durch eine Feder mit der Federkonstanten κ gekoppelt. Die Kopplung der jeweiligen Ionen an den Bezugsrahmen erfolgt durch eine stärkere Feder mit der Federkonstanten k_1 bzw. k_2 . Entnommen aus [21].

Quantenmechanische Betrachtung des gekoppelten Oszillators

Für die quantenmechanische Betrachtung des gekoppelten Oszillators wird zunächst der Hamiltonoperator für das gesamte System aufgestellt:

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 - \hat{H}_{\text{ww}} . \quad (57)$$

\hat{H}_i steht für den Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators und \hat{H}_{ww} für den Hamiltonoperator der Wechselwirkung zwischen den beiden harmonischen Oszillatoren. Der Hamiltonoperator eines harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + V_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega_i^2\hat{z}_i^2 . \quad (58)$$

Der Hamiltonoperator der Wechselwirkung leitet sich für den Fall der Coulomb-Wechselwirkung aus dem Coulomb-Potential her (siehe Anhang D):

$$\hat{H}_{\text{ww}} = \frac{q_1q_2}{2\pi\epsilon_0d_0^3}\hat{z}_1\hat{z}_2 , \quad (59)$$

wobei ϵ_0 die elektrische Feldkonstante ist und d_0 den Abstand der beiden Ionen des gekoppelten Oszillators darstellt. Wird der Ortsoperatoren \hat{z}_i bzw. Impulsoperatoren \hat{p}_i durch die Standarddefinition des Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperators dargestellt:

$$\begin{aligned}
\hat{a}_i &= \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2\hbar}} \left(\hat{z}_i + \frac{i}{m_i \omega_i} \hat{p}_i \right) \\
\hat{a}_i^\dagger &= \sqrt{\frac{m_i \omega_i}{2\hbar}} \left(\hat{z}_i - \frac{i}{m_i \omega_i} \hat{p}_i \right),
\end{aligned} \tag{60}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\hat{z}_i &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m_i \omega_i}} (\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger) \\
\hat{p}_i &= i \sqrt{\frac{\hbar m_i \omega_i}{2}} (\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i).
\end{aligned} \tag{61}$$

Werden diese Operatordarstellungen für die Orts- bzw. Impulsoperatoren im Hamiltonoperator des gesamten Systems eingesetzt, ergibt sich die Darstellung des Hamiltonoperators in Abhängigkeit der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \hbar \omega_1 \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right) \\
&\quad - \hbar \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d_0^3 \sqrt{m_1 m_2} \sqrt{\omega_1 \omega_2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger).
\end{aligned} \tag{62}$$

Über diese Gleichung wird die Austauschfrequenz Ω_{ex} definiert

$$\Omega_{\text{ex}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 d_0^3 \sqrt{m_1 m_2} \sqrt{\omega_1 \omega_2}}, \tag{63}$$

welche angibt, mit welcher Frequenz die Energie zwischen den beiden Ionen ausgetauscht wird. Die Austauschfrequenz hängt von dem Abstand der Ionen ab ($\Omega_{\text{ex}} \propto \frac{1}{d_0^3}$). Die Eigenfrequenzen der Ionen entsprechen den jeweiligen Axialfrequenzen und müssen, wie in Abschnitt 2.4 beschrieben, möglichst identisch sein.

Aus der Austauschfrequenz lässt sich schließlich noch die Austauschzeit über

$$\tau_{\text{ex}} = \frac{\pi}{2\Omega_{\text{ex}}} \tag{64}$$

berechnen, welche die Zeit angibt, mit der die Energie von einem Ion zum anderen Ion wechselt. Das Ziel für eine sinnvolle sympathetische Kühlung ist eine möglichst geringe Austauschzeit.

2.5 Die gekoppelte Penning-Falle

In den vorherigen Kapiteln wurde bereits behandelt, dass eine Penning-Falle der Festsetzung von Ionen dient. Um die sympathetische Kühlung sinnvoll umsetzen zu können, müssen zwei Ionen festgesetzt und in unmittelbarer Nähe zueinander gelagert werden. Diese räumliche Nähe ist relevant, da die Coulomb-Wechselwirkung sonst zu schwach wird. Um diese räumliche Nähe umzusetzen, bietet sich eine gekoppelte Penning-Falle an. Bei dieser Art der Penning-Falle werden die Elektroden zweier einfacher Penning-Fallen nebeneinander gestapelt, wobei jede Elektrode durch einen Saphirring von der jeweils nächsten Elektrode isoliert ist. Dabei setzt die eine Penning-Falle das zu kühlende Ion und die andere Penning-Falle das laserkühlbare Ion fest. Um den Abstand zwischen den beiden Ionen in einer gekoppelten Penning-Falle noch kleiner zu machen, bietet es sich an, die beiden aneinanderliegenden Endkappen der einfachen Penning-Fallen zu einer gemeinsamen Endkappe zusammenzufassen. Hier ist zu erwähnen, dass die gekoppelte Penning-Falle so konzipiert wird, dass die Ionen über die direkte Coulomb-Wechselwirkung aneinander koppeln und nicht über die Bildladungen auf der gemeinsamen Endkappe, wie es zum Beispiel in der Dissertation von Dr. Matthew Bohman thematisiert wird [22].

Sollten in einer solchen gekoppelten Penning-Falle zwei unterschiedliche Ionen festgesetzt werden, was bei einer sympathetischen Kühlung immer der Fall ist, muss beachtet werden, dass das elektrische Potential nicht mehr spiegelsymmetrisch ist (siehe Abbildung 9). Das folgt aus dem Einfluss der Elektrodenspannungen, welche in den beiden einfachen Penning-Fallen unterschiedlich stark eingestellt werden müssen um unterschiedliche Ionen festsetzen zu können. Genau dieser Einfluss der Elektrodenspannungen aufeinander ohne eine vorliegende Symmetrie, macht die Bestimmung eines geeigneten elektrischen Potentials kompliziert. Im folgenden Kapitel wird genau diese Bestimmung eines geeigneten Potentials besprochen und ein Modell für eine gekoppelte Penning-Falle, die sympathetische Kühlung realisiert, aufgestellt.

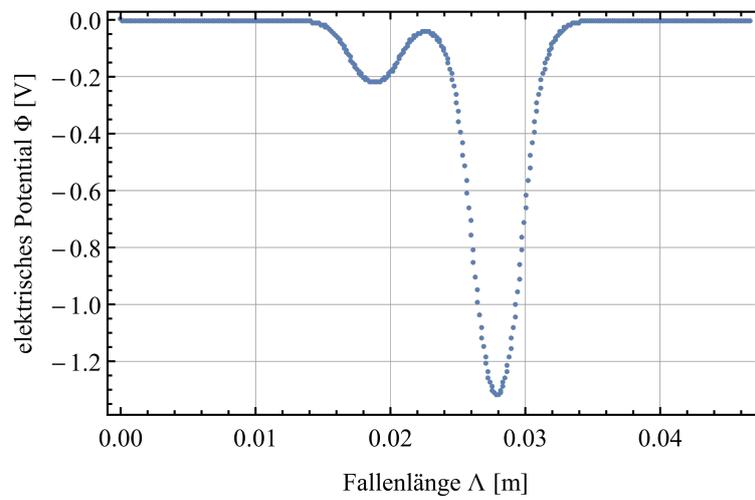


Abbildung 9: Elektrisches Potential entlang der Symmetrieachse einer gekoppelten Penning-Falle. Die Spannungen an den Korrektur- und Ringelectroden sind negativ und die Endkappen sind geerdet.

Kapitel 3

Theoretische Modellierung einer Penning-Falle zur Nutzung sympathetischer Laserkühlung

In diesem Kapitel wird eine gekoppelte Penning-Falle modelliert, welche die Nutzung von sympathetischer Laserkühlung ermöglicht. Dabei wird berücksichtigt, dass die einzelnen Parameter des Modells im Bereich des experimentell Umsetzbaren bleiben. Um die sympathetische Laserkühlung nutzbar zu machen, benötigen die beiden Ionen die gleiche Axialfrequenz und eine möglichst hohe Austauschfrequenz Ω_{ex} , um eine starke Kopplung zu erreichen. Nach diesen beiden Parametern wird das Modell der gekoppelten Penning-Falle optimiert. Eine hohe Austauschfrequenz bedeutet eine geringe Austauschzeit τ_{ex} (siehe Gleichung (64)), was durch einen geringen Abstand der Ionen erreicht wird. Bevor die eigentliche Optimierung besprochen wird, werden zunächst einige grundlegende Kenngrößen festgelegt.

3.1 Vorbereitung

Das Modell einer gekoppelten Penning-Falle wird für die sympathetische Laserkühlung eines ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkerns durch ein ${}^9\text{Be}^+$ -Ion erstellt. Für die Berechnungen werden also die entsprechenden Massen und Ladungen verwendet. Für eine ausreichend starke Kopplung der beiden Ionen, müssen

diese eine möglichst identische Axialfrequenz aufweisen. Diese wird auf $\nu_z = \nu_{z,\text{He}} = \nu_{z,\text{Be}} = 300 \text{ kHz}$ festgelegt.

Geometrie der gekoppelten Penning-Falle

Die Anordnung der Elektroden erfolgt nach Abbildung 10. In der linken Penning-Falle wird der ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkern festgesetzt und in der rechten das ${}^9\text{Be}^+$ -Ion. Dabei fällt auf, dass eine gemeinsame Endkappe verwendet wird und an jedem Ende der Penning-Falle eine Masseelektrode verbaut ist, welche geerdet sind. Zusätzlich sind zwei Kompensationselektroden verbaut (Elektrode 2 und 12).

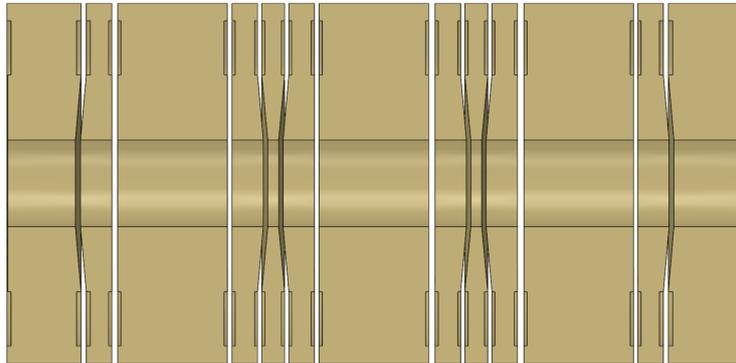


Abbildung 10: Technische Zeichnung des Modells der gekoppelten Penning-Falle zur Umsetzung von sympathetischer Laserkühlung. Die Elektroden sind von links nach rechts durchnummeriert. Die Bezeichnungen der Elektroden finden sich in Tabelle 1 wieder. Links von der gemeinsamen Endkappe wird ${}^3\text{He}^{2+}$ festgesetzt und rechts ${}^9\text{Be}^+$.

Die Idee dahinter ist, dass an der linken Kompensationselektrode der gleiche Spannungsbetrag anliegt wie an den Korrektorelektroden der Be-Falle und an der rechten Kompensationselektrode der gleiche Spannungsbetrag anliegt wie an den Korrektorelektroden der He-Falle. Die Polung der Spannung ist allerdings unterschiedlich. An den Elektroden der He- bzw. Be-Falle liegen immer negative Spannungen an, während die beiden Kompensationselektroden eine positive Spannung tragen. Das soll den Einfluss der Elektroden der He-Falle auf die Elektroden der Be-Falle und umgekehrt minimieren, sodass die elektrischen Potentiale der einzelnen Fallen nicht zu sehr verzerrt werden. Der resultierende Potentialverlauf ist in Abbildung 11 zu sehen.

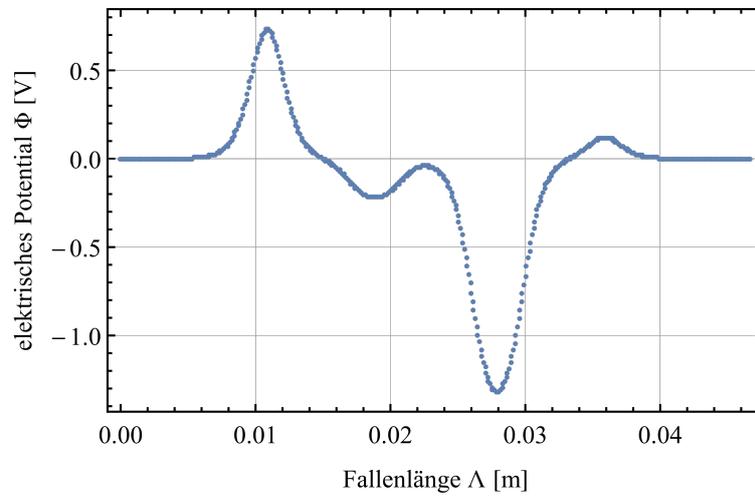


Abbildung 11: Potentialverlauf der gekoppelten Penning-Falle mit Kompensationselektroden. Die Kompensationselektroden sind entgegengesetzt gepolt zu den restlichen Elektroden der gekoppelten Penning-Falle.

Die Abmessungen der einzelnen Elektroden sind in Tabelle 1 aufgelistet. Dabei wurden, als Ausgangspunkt für die folgenden Berechnungen, die Abmessungen der bereits bestehenden Penning-Falle des Helium-3 Experiments am MPIK verwendet [1].

Elektrode Nr.	Elektrode	Elektrodenlänge / mm
1	Masseelektrode	10
2	Kompensationselektrode	1.46
3	Endkappe	5.12
4	Korrekturolektrode	1.46
5	Ringlektrode	0.47
6	Korrekturolektrode	1.46
7	gemeinsame Endkappe	5.12
8	Korrekturolektrode	1.46
9	Ringlektrode	0.47
10	Korrekturolektrode	1.46
11	Endkappe	5.12
12	Kompensationselektrode	1.46
13	Masseelektrode	10

Tabelle 1: Abmessungen der einzelnen Elektroden der gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 2.0$ mm.

Festlegung der Spannungswerte

Um sinnvolle Spannungswerte für die einzelnen Elektroden zu Beginn festzulegen, wird eine einfache Penning-Falle mit fünf Elektroden betrachtet (siehe Abbildung 3). Diese wird, wie in Abschnitt 3.2.1 näher beschrieben, für ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ separat optimiert, was zu den sinnvollen Anfangswerten der Elektrodenspannungen führt:

$$U_{0,\text{He}} = -0.2860176\text{V} \quad U_{\text{K},\text{He}} = -0.2537542\text{V} \quad (65)$$

$$U_{0,\text{Be}} = -1.7099179\text{V} \quad U_{\text{K},\text{Be}} = -1.5170351\text{V}, \quad (66)$$

wobei U_0 die Spannung an der Ringlektrode und U_{K} die Spannungen an den Korrekturolektroden der He- bzw. Be-Falle angeben.

Sinnvolle Spannungswerte sollen dabei Werte sein, die bereits nahe an den optimalen Spannungswerten liegen, damit die Optimierung der gekoppelten Penning-Falle weniger Iterationsschritte benötigt.

3.2 Optimierung der gekoppelten Penning-Falle

In diesem Kapitel wird eine gekoppelte Penning-Falle mit der Elektrodenanordnung aus Abbildung 10 so optimiert, dass die Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ möglichst gleich sind und der Fallenkoeffizient C_4 minimal wird. Im Anschluss werden die Axialfrequenzshifts durch verschiedene Störfaktoren überprüft.

Die Optimierung erfolgt fallenweise, das heißt, dass zuerst die Spannungswerte der He-Falle optimiert werden, während die Spannungswerte der Be-Falle konstant gelassen werden. Danach werden die Spannungswerte der Be-Falle optimiert, während die bereits einmal optimierten Spannungswerte der He-Falle konstant bleiben. Dieser Ablauf wird als ein Optimierungsschritt angesehen. Es werden so viele Optimierungsschritte durchgeführt, bis die Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ übereinstimmen und gleichzeitig Axialfrequenzshifts durch verschiedene Störfaktoren vernachlässigbar sind. Für den ersten Optimierungsschritt werden die Spannungen aus Gleichung (65) bzw. Gleichung (66) verwendet. Für jeden weiteren Optimierungsschritt werden die ermittelten Spannungen aus dem vorangegangenen Optimierungsschritt verwendet.

3.2.1 Durchführung eines Optimierungsschrittes

Die Optimierung der He-Falle wird zuerst betrachtet und dient dann als Referenz für die Optimierung der Be-Falle. Die Berechnungen wurden mit *Wolfram Mathematica* durchgeführt.

Optimierung der He-Falle

Bei der Optimierung der He-Falle werden die Spannungen an den Elektroden der He-Falle so optimiert, dass die Axialfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$ möglichst nahe an den idealen Wert von $\nu_{z,\text{He}} = 300$ kHz kommt. Die Optimierung beginnt mit der Taylor-Entwicklung des elektrischen Potentials der zylindrischen gekoppelten Penning-Falle aus Gleichung (29).

Das elektrische Potential wird dabei wieder nur auf der Symmetrieachse betrachtet ($\rho = 0$). Die unendliche Reihe in Gleichung (29) wird nur bis $n = 1000$ ausgewertet, da alle höheren Ordnungen vernachlässigt werden können. Das elektrische Potential der gekoppelten Falle wird mit den gegebenen Werten der Abmessungen und Spannungen der Elektroden aus Tabelle 1

bzw. Gleichung (66) berechnet. Die Spannungen der Elektroden der He-Falle sollen optimiert werden und sind daher durch die beliebigen Variablen α für die Spannungen der Korrektorelektroden und β für die Spannung der Ringelektrode angegeben. Für den Spannungswert an der Kompensations-elektrode der Be-Falle (Elektrode 12) wird die Variable $-\alpha$ eingesetzt. Alle verbleibenden Elektroden sind geerdet (0 V).

Für die Taylor-Entwicklung des elektrischen Potentials der gekoppelten Penning-Falle muss beachtet werden, dass die Taylor-Entwicklung um das lokale Potentialminimum für ${}^3\text{He}^{2+}$ erfolgt. Während die Bestimmung des Potentialminimums für eine einfache Penning-Falle relativ einfach ist, ist es für eine gekoppelte Penning-Falle etwas schwieriger. Über die Geometrie der gekoppelten Penning-Falle kann das Minimum nicht mehr bestimmt werden, da das elektrische Potential nicht mehr spiegelsymmetrisch ist. Analytisch ist die Berechnung ebenfalls nicht möglich. Lediglich numerisch lässt sich das lokale Potentialminimum der gekoppelten Penning-Falle bestimmen.

Wird nun die Taylor-Entwicklung des elektrischen Potentials betrachtet, können die Taylor-Koeffizienten als lineare Gleichungen in Abhängigkeit von α und β angegeben werden. Diese Taylor-Koeffizienten stellen die Fallenkoeffizienten C_j dar, wobei zu beachten ist, dass diese noch mit der Ringspannung U_0 multipliziert sind (siehe Gleichung (32)), was jedoch für diese Berechnung außer acht gelassen werden kann. Für die Optimierung sind lediglich die Fallenkoeffizienten C_2 und C_4 relevant, welche durch die Taylor-Entwicklung in Abhängigkeit von den Spannungen der Ring- und Korrektorelektroden (β und α) der He-Falle angegeben sind. Der benötigte Wert für C_2 kann über

$$C_2 = 2\pi^2 \nu_z^2 \frac{m}{q} \quad (67)$$

berechnet werden. Diese Gleichung folgt aus Gleichung (9), wobei die Ringspannung U_0 nicht berücksichtigt werden muss. Zur Berechnung des Fallenkoeffizienten C_2 wird die benötigte Axialfrequenz von $\nu_{z,\text{He}} = 300$ kHz eingesetzt. Da der Fallenkoeffizient C_4 verschwinden soll, wird dieser gleich null gesetzt.

Damit liegen also zwei Gleichungen für zwei zu berechnende Variablen vor. Das Ergebnis sind die Spannungen an der Ringelektrode bzw. den Korrektorelektroden der He-Falle, welche für die angestrebte Axialfrequenz von $\nu_{z,\text{He}} = 300$ kHz und $C_4 = 0$ sorgen.

Optimierung der Be-Falle

Bei der Optimierung der Be-Falle werden die Spannungen an den Elektroden der Be-Falle so optimiert, dass die Axialfrequenz von ${}^9\text{Be}^+$ möglichst nahe an den idealen Wert von $\nu_{z,\text{Be}} = 300$ kHz kommt und $C_4 = 0$ wird. Die Optimierung der Be-Falle erfolgt analog zur Optimierung der He-Falle (siehe Abschnitt 3.2.1).

3.2.2 Überprüfung der Optimierung

Liegt eine optimierte gekoppelte Penning-Falle vor, verbleibt noch die Überprüfung der Axialfrequenzshifts von ${}^3\text{He}^{2+}$ bzw. ${}^9\text{Be}^+$ durch die verschiedenen Störfaktoren aus Unterabschnitt 2.2.3.

Die Berechnung des Axialfrequenzshifts $\Delta\nu_z$ von ${}^3\text{He}^{2+}$ bzw. ${}^9\text{Be}^+$ durch die jeweiligen Fallenkoeffizienten C_4 und C_6 erfolgt nach Gleichung (38), durch die jeweiligen *Cross Terms* nach Gleichung (39) und Gleichung (40) und durch die jeweilige Magnetronbewegung nach Gleichung (43). Die Axialfrequenzshifts sind vernachlässigbar, wenn sie kleiner als 1 Hz sind. Sollte das nicht der Fall sein, empfiehlt sich ein weiterer Optimierungsschritt der gekoppelten Penning-Falle.

3.2.3 Anmerkungen zur Optimierung

Neben der fallenweisen Optimierung der gekoppelten Penning-Falle, wurde auch die elektrodenweise Optimierung untersucht. Dabei werden erst die Spannungen der Ringelektroden der He- und Be-Falle optimiert und dann die Spannungen der Korrektorelektroden der beiden Fallen. Bei diesem Optimierungsverfahren konnte eine Angleichung der Axialfrequenzen der beiden Ionen erzielt werden, jedoch wurde mit jedem Optimierungsschritt sowohl der Fallenkoeffizient C_4 als auch C_6 größer. Das heißt die Axialfrequenzshifts durch die beiden Fallenkoeffizienten wurden immer größer.

Weiterhin wurde eine fallenweise Optimierung betrachtet, bei der das *Tuning Ratio* konstant gehalten wird. Der dabei festgelegte Wert für das *Tuning Ratio* ist der Wert für eine einfache optimierte Penning-Falle (siehe Abschnitt 3.1). Die Optimierungsschritte vereinfachen sich dadurch, allerdings entstehen auch bei dieser Methode Probleme mit den Axialfrequenzshifts von ${}^3\text{He}^{2+}$ bzw. ${}^9\text{Be}^+$.

Die Grenze der sinnvollen Optimierung einer gekoppelten Penning-Falle ist die Einstellgenauigkeit der verwendeten Spannungsquelle für die Elektroden. Je mehr Optimierungsschritte benötigt werden, desto kleiner werden die Anpassungen der Spannungen an den Elektroden. Irgendwann findet die Optimierung der Spannungen bei einer so kleinen Größenordnung statt, dass diese im Experiment nicht mehr durch die verwendete Spannungsquelle einstellbar ist. Die kleinste auflösbare Schrittweite bei der verwendeten Spannungsquelle zur Einstellung der Elektrodenspannungen beträgt 10^{-7} V. Kleiner eingestellte Spannungswerte fluktuieren zu stark aufgrund des Rauschverhaltens der Spannungsquelle (siehe Kapitel 4).

Für die Optimierung der gekoppelten Penning-Falle werden für C_2 und C_4 bestimmte Werte vorgegeben. Daraus ergeben sich neue Spannungen für die Ring- und Korrektorelektroden. Werden C_2 und C_4 direkt nach der Optimierung nochmal durch eine Taylor-Entwicklung mit den neuen Spannungen bestimmt, liegen nicht die in der Optimierung vorgegebenen Werte für C_2 und C_4 vor. Das liegt daran, dass sich durch die neuen Spannungswerte das Potential verändert hat und nun ein neues Minimum bestimmt werden müsste. Im Verlauf der einzelnen Optimierungsschritte zeigt sich trotzdem deutlich, dass sich C_2 und C_4 immer weiter den vorgegebenen Werten annähern (siehe Abbildung 13).

3.3 Minimierung der Austauschzeit τ_{ex} .

In diesem Kapitel wird die Austauschzeit τ_{ex} zwischen ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ minimiert und die gekoppelte Penning-Falle dann optimiert. Die Minimierung der Austauschzeit ist relevant für die Umsetzung der sympathetischen Laserkühlung. Dauert der Austausch der Energie der beiden Ionen zu lange, können keine stabilen Versuchsparameter garantiert werden.

Nach Gleichung (63) und Gleichung (64) folgt, dass die Austauschzeit zwischen ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ durch die Verkürzung des Abstandes der beiden Ionen d_0 minimiert werden kann. Die Verkürzung des Abstandes kann über die Verkürzung der Elektroden der gekoppelten Penning-Falle erfolgen oder durch die Verkleinerung des gesamten Fallenradius. Bei der Verkürzung der Elektroden wird hier nur die Verkürzung der gemeinsamen Endkappe untersucht.

3.3.1 Minimierung der Austauschzeit durch Verkürzung der gemeinsamen Endkappe

Die gemeinsame Endkappe der gekoppelten Penning-Falle wird auf eine Länge von $l_{\text{gEK}} = 1.8$ mm verkürzt. Die Abmessungen der restlichen Elektroden bleibt wie in Tabelle 1 bestehen. Nach fünf Optimierungsschritten weichen die Axialfrequenzen für ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ nur wenige mHz voneinander ab. Der letzte und feinste Optimierungsschritt benötigt dabei eine Einstellgenauigkeit der Spannungsquelle von $3 \cdot 10^{-7}$ V an der Ringelektrode der He-Falle. Die aus der Optimierung resultierenden Spannungswerte an den Elektroden sind in Tabelle 2 angegeben.

Elektrode Nr.	Elektrode	angelegte Spannung / V
1	Masseelektrode	0
2	Kompensationselektrode	+ 1.5454924
3	Endkappe	0
4	Korrekturlektrode	- 0.4103091
5	Ringelektrode	- 0.3935163
6	Korrekturlektrode	- 0.4103091
7	gemeinsame Endkappe	0
8	Korrekturlektrode	- 1.5454924
9	Ringelektrode	- 1.7324425
10	Korrekturlektrode	- 1.5454924
11	Endkappe	0
12	Kompensationselektrode	+ 0.4103091
13	Masseelektrode	0

Tabelle 2: Spannungswerte an den einzelnen Elektroden der optimierten gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 2$ mm und eine Elektrodenlänge der gemeinsamen Endkappe von $l_{\text{gEK}} = 1.8$ mm.

Durch die Verkürzung der gemeinsamen Endkappe auf $l_{\text{gEK}} = 1.8$ mm liegt die Austauschzeit zwischen ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ bei $\tau_{\text{ex.}} = 9.15$ s.

Der Axialfrequenzshift durch C_4 und C_6 für ${}^3\text{He}^{2+}$ liegt bei $\Delta\nu_{z,\text{He}} = 1.53$ Hz. Alle anderen Axialfrequenzshifts für ${}^3\text{He}^{2+}$ als auch für ${}^9\text{Be}^+$ sind gegenüber diesem zu vernachlässigen. Weiterhin ist die Differenz der Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ deutlich kleiner als deren Austauschfrequenz

$\Omega_{\text{ex.}}$, was eine starke resonante Kopplung der beiden Ionen bedeutet.

Sowohl die Länge der Elektroden, als auch die daran angelegten Spannungen sind noch im Bereich des experimentell Umsetzbaren. Damit ist das theoretische Modell einer gekoppelten Penning-Falle aufgestellt, welche die Nutzung der sympathetischen Kühlung zwischen ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ möglich macht. Um die Entwicklung der wichtigsten Parameter der gekoppelten Penning-Falle im Verlauf der einzelnen Optimierungsschritte besser nachvollziehen zu können, sind diese in Abbildung 12, Abbildung 13, Abbildung 14 und Abbildung 15 dargestellt.

Außerdem ist die Austauschzeit für drei Modelle der gekoppelten Penning-Falle mit unterschiedlichen Längen der gemeinsamen Endkappe l_{gEK} in Abbildung 16 zu sehen.

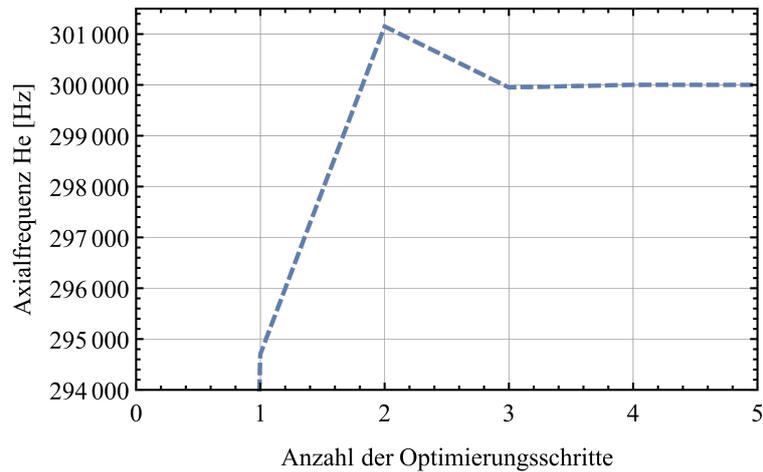


Abbildung 12: Verlauf der Axialfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$ über die einzelnen Optimierungsschritte. Es ist deutlich zu erkennen, dass der tatsächliche Wert sich immer weiter dem vorgegebenen Idealwert von $\nu_{z,\text{He}} = 300 \text{ kHz}$ annähert. Die Axialfrequenz vor dem ersten Optimierungsschritt liegt bei $\nu_{z,\text{He}} = 208976 \text{ Hz}$ und ist aufgrund der gewählten Skalierung nicht zu sehen.

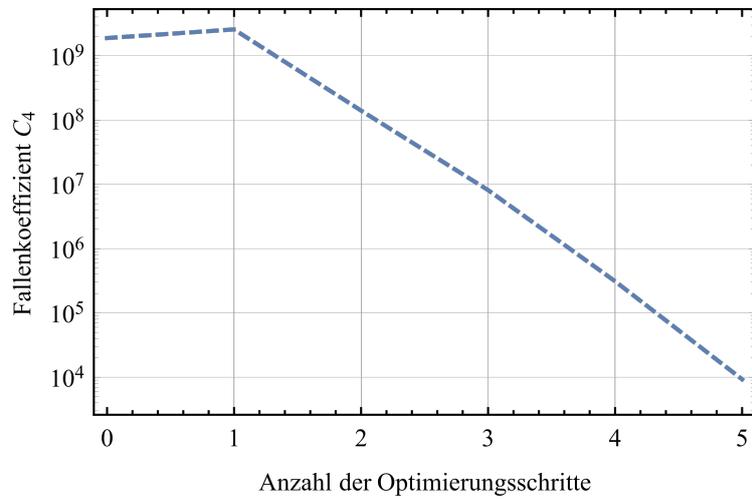


Abbildung 13: Verlauf des Fallenkoeffizienten C_4 von ${}^3\text{He}^{2+}$ über die einzelnen Optimierungsschritte. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Wert für C_4 mit jedem Optimierungsschritt immer weiter abnimmt. Nach dem 5. Optimierungsschritt liegt der Fallenkoeffizient bei $C_4 = 9293$.

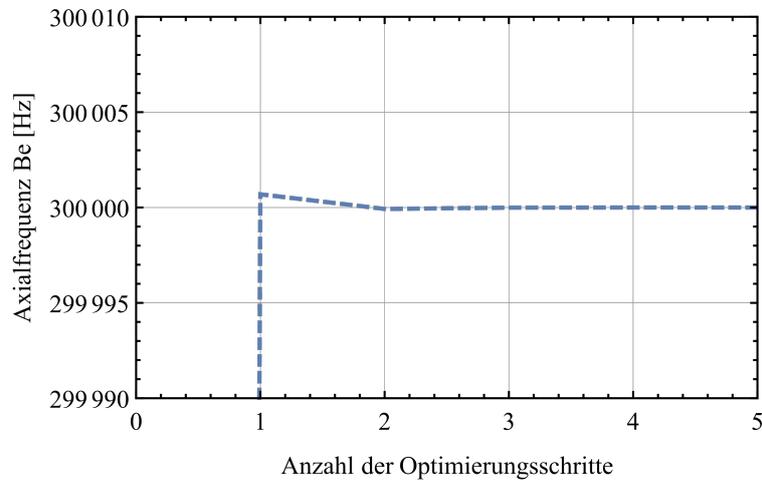


Abbildung 14: Verlauf der Axialfrequenz von ${}^9\text{Be}^+$ über die einzelnen Optimierungsschritte. Es ist deutlich zu erkennen, dass der tatsächliche Wert sich immer weiter dem vorgegebenen Idealwert von $\nu_{z,\text{Be}} = 300 \text{ kHz}$ annähert. Die Axialfrequenz vor dem ersten Optimierungsschritt liegt bei $\nu_{z,\text{Be}} = 298729 \text{ Hz}$ und ist aufgrund der gewählten Skalierung nicht zu sehen.

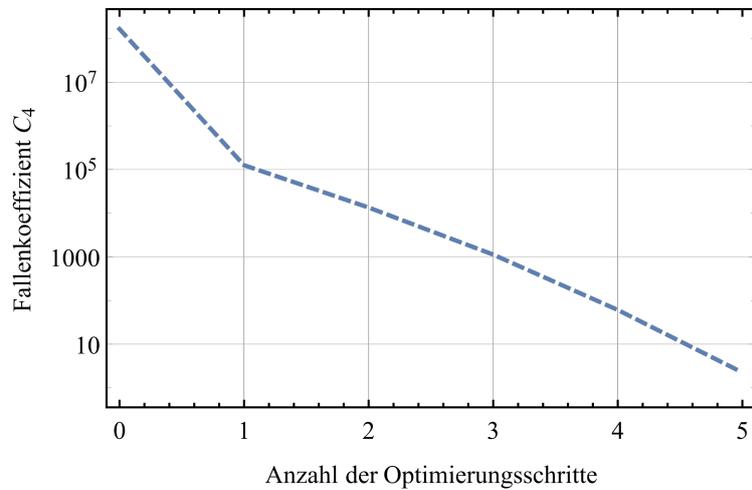


Abbildung 15: Verlauf des Fallenkoeffizienten C_4 von ${}^9\text{Be}^+$ über die einzelnen Optimierungsschritte. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Wert für C_4 mit jedem Optimierungsschritt immer weiter abnimmt. Nach dem 5. Optimierungsschritt liegt der Fallenkoeffizient bei $C_4 = 2$.

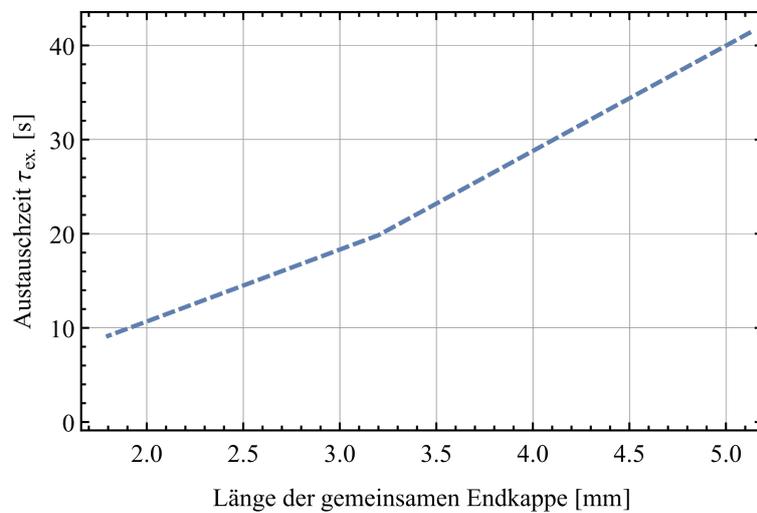


Abbildung 16: Verlauf der Austauschzeit für drei verschiedene Modelle der gekoppelten Penning-Falle. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Austauschzeit für eine kleinere Länge der gemeinsamen Endkappe immer kürzer wird. Der Fallenradius für alle drei Fallen ist identisch $a = 2.0$ mm.

3.3.2 Minimierung der Austauschzeit durch Verkleinerung des Fallenradius

Wird der Radius der Elektroden einer Penning-Falle bei konstantem *Tuning Ratio* verkleinert, verkürzen sich auch die einzelnen Elektroden. Dadurch wird der Abstand der aneinander gekoppelten Ionen in der gekoppelten Penning-Falle kleiner und die Austauschzeit wird ebenfalls kleiner. Die Erklärung des Zusammenhangs zwischen dem Fallenradius und der Elektrodenlänge ist im Anhang E zu finden.

Die Abmessung der verkleinerten gekoppelten Penning-Falle ist in Tabelle 3 aufgelistet. Die Optimierung der verkleinerten gekoppelten Penning-Falle erfolgt in acht Schritten. Der letzte und feinste Optimierungsschritt benötigt dabei eine Einstellgenauigkeit der Spannungsquelle von $2 \cdot 10^{-7}$ V an der Ringelektrode der He-Falle. Die resultierenden Spannungen an den Elektroden sind ebenfalls in Tabelle 3 angegeben.

Elektrode Nr.	Elektrodenlänge / mm	angelegte Spannung / V
1	10	0
2	1.21326	+ 1.4196384
3	4.25472	0
4	1.21326	- 0.4211646
5	0.6016	- 0.3397742
6	1.21326	- 0.4211646
7	1.8	0
8	1.21326	- 1.4196384
9	0.6016	- 1.4707299
10	1.21326	- 1.4196384
11	4.25472	0
12	1.21326	+ 0.4211646
13	10	0

Tabelle 3: Abmessungen und Spannungswerte der einzelnen Elektroden der verkleinerten, optimierten gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 1.8$ mm.

Durch die Verkleinerung des Fallenradius auf 1.8 mm liegt die Austauschzeit zwischen ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ bei $\tau_{\text{ex.}} = 7.28$ s.

Sowohl die Länge der Elektroden, als auch die daran angelegten Span-

nungen sind noch im Bereich des experimentell Umsetzbaren. Die Differenz der Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ ist deutlich kleiner als die Austauschfrequenz Ω_{ex} der beiden Ionen.

Die Axialfrequenzshifts liegen im geforderten vernachlässigbaren Bereich, mit Ausnahme des Axialfrequenzshifts von ${}^3\text{He}^{2+}$ durch C_4 und C_6 . Dieser ist $\Delta\nu_{z,\text{He}} = 3.35$ Hz, womit er mehr als doppelt so hoch ist, wie bei der gekoppelten Penning-Falle mit dem Fallenradius $a = 2.0$ mm (siehe Unterabschnitt 3.3.1). Dieser hohe Wert kann dazu führen, dass die Axialfrequenz weniger genau an dem Zielwert von $\nu_{z,\text{He}} = 300$ kHz liegt, was wiederum bedeutet, dass die Differenz der Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ größer ist als die Austauschfrequenz Ω_{ex} der beiden Ionen. Dadurch wird die resonante Kopplung der beiden Ionen schwächer, der Energieaustausch erfolgt langsamer und die Austauschzeit τ_{ex} wird länger.

Um die beiden Modelle der gekoppelten Penning-Falle aus Unterabschnitt 3.3.1 und Unterabschnitt 3.3.2 besser vergleichen zu können, sind alle relevanten Parameter nach der Minimierung der Austauschzeit und nach der Optimierung der Axialfrequenzen in Tabelle 4 zusammengetragen.

	gekoppelte Penning-Falle mit	
	$a = 1.8$ mm	$a = 2$ mm
l_{gEK}	1.8 mm	1.8 mm
τ_{ex}	7.28 s	9.15 s
$\nu_{z,\text{He}}$	300000.0013 Hz	299999.9560 Hz
$\nu_{z,\text{Be}}$	300000.0000 Hz	300000.0000 Hz
$\nu_{z,\text{He}} - \nu_{z,\text{Be}}$	0.0013 Hz	0.0440 Hz
Ω_{ex}	0.2158 Hz	0.1716 Hz
$\Delta\nu_{z,\text{He},C_4,C_6}$	3.3486 Hz	1.5320 Hz
Anzahl Optimierungsschritte	8	5
$\Delta U_{\text{He, Ring}}$	$2 \cdot 10^{-7}$ V	$3 \cdot 10^{-7}$ V

Tabelle 4: Vergleich der Fallenparameter der optimierten gekoppelten Penning-Fallen für die Fallenradien $a = 1.8$ mm und $a = 2.0$ mm. Die Länge der gemeinsamen Endkappe l_{gEK} ist identisch. $\Delta\nu_{z,\text{He},C_4,C_6}$ gibt den Axialfrequenzshift für ${}^3\text{He}^{2+}$ durch C_4 und C_6 an und $\Delta U_{\text{He, Ring}}$ gibt die maximal benötigte Einstellgenauigkeit der Spannungsquelle an, welche für beide Fallenmodelle an der Ringelektrode der He-Falle erforderlich sind.

3.3.3 Anmerkung zur Minimierung der Austauschzeit

Bei der Minimierung der Austauschzeit stößt der Algorithmus zur Angleichung der Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ aus Abschnitt 3.2.1 an seine Grenzen, wenn die gemeinsame Endkappe der gekoppelten Penning-Falle zu kurz wird. Dann lassen sich die Potentialminima von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ nicht mehr trennen und es kann kein lokales Minimum für ${}^3\text{He}^{2+}$ bestimmt werden (siehe Abbildung 17).

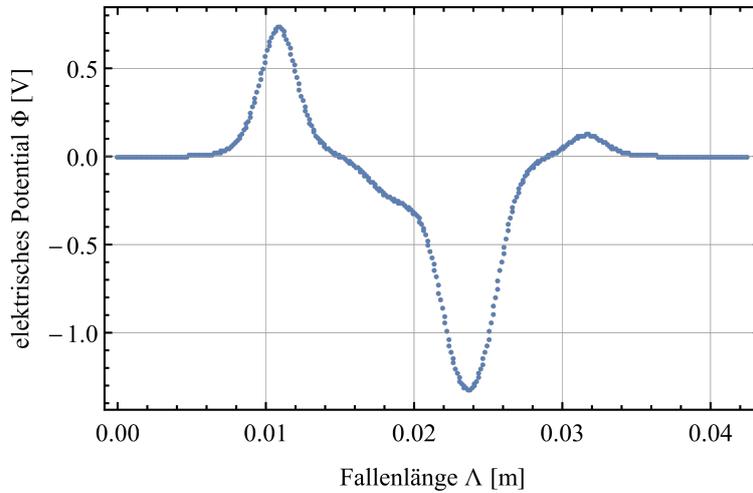


Abbildung 17: Potentialverlauf der gekoppelten Penning-Falle für eine zu kurze gemeinsame Endkappe $l_{\text{gEK}} = 0.9$ mm. Das Potentialminimum für ${}^3\text{He}^{2+}$ ist kaum noch zu erkennen.

Bei einem solchen Potential würde eine Optimierung keinen Sinn ergeben, da das Potentialminimum nicht tief genug ist, um ein Ion festzusetzen.

Eine weitere Minimierung der Austauschzeit durch die Verkleinerung des Fallenradius a ist mit dem Algorithmus noch möglich, solange die Potentialminima von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ noch deutlich genug voneinander getrennt sind. Allerdings ist das nicht sinnvoll, da die benötigte Einstellgenauigkeit der Spannungsquelle unter den experimentell umsetzbaren Bereich von 10^{-7} V tritt. Das heißt die Spannungen an den Elektroden können nicht genau genug eingestellt werden, um die Axialfrequenzen von ${}^3\text{He}^{2+}$ und ${}^9\text{Be}^+$ anzugleichen.

3.4 Kühlpotential der modellierten gekoppelten Penning-Falle

Das Ziel der Modellierung einer gekoppelten Penning-Falle wie in Abschnitt 3.3 ist die experimentelle Umsetzung der sympathetischen Laserkühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ durch ${}^9\text{Be}^+$. Wie in Abschnitt 2.3 beschrieben, ist das Ziel den ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkern auf ungefähr 0.1 K abzukühlen.

Um die erreichbare Temperatur von ${}^3\text{He}^{2+}$ zu bestimmen, muss zunächst berücksichtigt werden, dass diese nicht nur von der Kopplung zum ${}^9\text{Be}^+$ abhängt, sondern auch von der Kopplung zum Nachweis der Axialfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$. Dieser Nachweis erfolgt über einen RLC-Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz ν_{RLC} ¹.

Das heißt ${}^3\text{He}^{2+}$ ist an ${}^9\text{Be}^+$ und an den RLC-Schwingkreis gekoppelt. Beide können als Wärmebäder betrachtet werden, wobei ${}^9\text{Be}^+$ eine Temperatur von $T_{\text{Be}} \approx 0.5$ mK hat [23] und der RLC-Schwingkreis eine Temperatur von $T_{\text{RLC}} = 4$ K aufweist, was aus der Temperatur des ihn umgebenden flüssigen Heliums folgt, mit welchem gekühlt wird. Die Kopplung an ${}^9\text{Be}^+$ erfolgt über die Austauschzeit τ_{ex} und die Kopplung an den RLC-Schwingkreis erfolgt über die Nachweis-Kopplungszeit τ_{RLC} .

Da eine möglichst geringe Temperatur von ${}^3\text{He}^{2+}$ erzielt werden soll, muss die Kopplung zu ${}^9\text{Be}^+$ möglichst stark ausfallen und die Kopplung zum RLC-Schwingkreis möglichst schwach. Die möglichst starke Kopplung an ${}^9\text{Be}^+$ ist durch die minimierte Austauschzeit gegeben (siehe Abschnitt 3.3). Die möglichst schwache Kopplung an den RLC-Schwingkreis wird durch die Verschiebung der Resonanzfrequenz ν_{RLC} um ca. 30 kHz erreicht. Dadurch wird die Nachweis-Kopplungszeit τ_{RLC} maximiert, während die Austauschzeit τ_{ex} minimal bleibt.

Die wechselwirkenden Ionen zusammen mit den dissipativen und diffusiven Anteilen der Wärmebäder können durch ein System von Langevin-Gleichungen beschrieben werden. Die Lösung des Differentialgleichungssystems ergibt die Temperatur des ${}^3\text{He}^{2+}$. Mit diesem Prinzip und den Parametern der gekoppelten Penning-Falle aus Unterabschnitt 3.3.1 folgt aus Berechnungen nach Stefan Dickopf eine Temperatur für ${}^3\text{He}^{2+}$ von $T_{\text{He}} \approx 0.1$ K [24].

¹Alles zum Nachweis und zur Kopplung lässt sich in der Dissertation von Dr. Matthew Bohmann nachlesen [22].

3.5 Fazit

Durch eine gekoppelte Penning-Falle mit einer verkürzten gemeinsamen Endkappe ist es theoretisch möglich einen ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkern über sympathetische Laserkühlung auf ungefähr 0.1 K abzukühlen. Das Modell dazu, mit den entsprechenden Parametern der gekoppelten Penning-Falle, wird im Abschnitt 3.3 hergeleitet. Aus der berechneten Temperatur des optimierten Modells der gekoppelten Penning-Falle von 0.1 K folgt nach Abbildung 6 eine Detektionszuverlässigkeit des Spinflips von 85 %. Die Detektionszuverlässigkeit wurde dadurch um 25 Prozentpunkte erhöht. Da während der gesamten Berechnung des Modells die experimentelle Umsetzbarkeit der gekoppelten Penning-Falle zur Nutzung sympathetischer Laserkühlung berücksichtigt wurde, kann im nächsten Schritt die experimentelle Umsetzung erfolgen.

Eine signifikante Verbesserung der Austauschzeit durch die Verkürzung der gemeinsamen Endkappe ist nicht mehr möglich, da das Potentialminimum für ${}^3\text{He}^{2+}$ sonst zu flach wird und der ${}^3\text{He}^{2+}$ -Atomkern nicht mehr festgesetzt werden kann. Das heißt die Kühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ auf ungefähr 0.1 K stellt nach diesem Modell die größte realisierbare Abkühlung dar.

Kapitel 4

Charakterisierung einer Präzisionsspannungsquelle

In diesem Kapitel wird das Rauschverhalten einer Präzisionsspannungsquelle, welche für das Helium-3 Experiment vorgesehen ist, untersucht. Die untersuchte Präzisionsspannungsquelle ist aus der Serie *UM 1-14 LN-SW* von *Stahl-Electronics*. Diese soll zur Einstellung der Spannungen an den Elektroden der gekoppelten Penning-Falle im Helium-3 Experiment genutzt werden. Durch die notwendige Optimierung der gekoppelten Penning-Falle wird eine Spannungsquelle mit einer Einstellgenauigkeit von mindestens 10^{-7} V benötigt (siehe Abschnitt 3.2).

4.1 Theoretische Grundlagen

Eine Spannungsquelle gibt die geforderte Spannung immer mit einer gewissen Ungenauigkeit aus. Je nachdem wie präzise die Spannungsquelle ist, fällt diese Ungenauigkeit kleiner oder größer aus. Werden die ausgegebenen Spannungswerte einer Spannungsquelle über einen Zeitraum hinweg beobachtet, lässt sich ein ungerichtetes Rauschen der ausgegebenen Spannung erkennen.

Um das Rauschen einer Spannungsquelle zu charakterisieren wird die Allan-Abweichung (*Allan deviation*) genutzt. Die Allan-Abweichung berechnet sich durch

$$\sigma_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\langle (U_{n+1} - U_n)^2 \rangle}, \quad (68)$$

wobei t die Zeit ist über welche der Durchschnitt berechnet wird. U_{n+1} und U_n sind nacheinander gemessene Spannungswerte.

Wird ein bestimmter Spannungswert U von einer Spannungsquelle ausgegeben, so gibt die Allan-Abweichung den Fehler des angelegten Spannungswertes ΔU in dem Zeitraum t an. Man kann auch sagen, dass die Allan-Abweichung die Stabilität des ausgegebenen Spannungswertes der Spannungsquelle angibt.

4.2 Vermessung der Präzisionsspannungsquelle

Die Untersuchung des Rauschverhaltens der UM erfolgt bei einer konstanten Temperatur für drei verschiedene Spannungen. Um die optimale Temperatur für diese Messung zu bestimmen, wird jedoch zunächst die Abhängigkeit der ausgegebenen Spannung der UM von der Temperatur betrachtet.

Für alle Messungen war die UM in einer eigens angefertigten Kupferbox mit 6 mm dicken Wänden gelagert, welche wiederum in einen Temperaturschrank¹ gestellt wurde. Die Spannungen wurden mit einem Nanovoltmeter² gemessen.

Temperaturabhängigkeit der Präzisionsspannungsquelle

Um die Temperaturabhängigkeit der von der UM ausgegebenen Spannung zu untersuchen, wurde eine konstante Spannung von -0.5 V angelegt und die Temperatur im Temperaturschrank alle vier Stunden um 0.5 °C erhöht. Dabei wurde ein Temperaturbereich von 20 °C bis 25 °C abgefahren. Zu Beginn wurde die Temperatur von 20 °C für 12 Stunden gehalten, um eine Thermalisierung der UM und der Kupferbox zu gewährleisten. Die resultierenden Messdaten sind in Abbildung 18 dargestellt.

¹Modell: ClimeEvent C/340/40/3 Firma: Vötsch Industrietechnik GmbH

²FLUKE 8508A Reference Multimeter

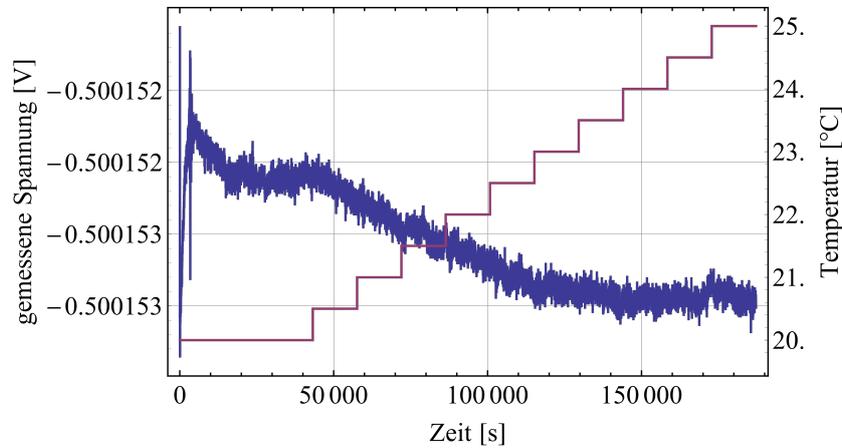


Abbildung 18: Temperaturabhängigkeit der Präzisionsspannungsquelle für $U = -0.5 \text{ V}$. Vor dem ersten Temperaturschritt sind die Messdaten nicht brauchbar, da keine ausreichende Thermalisierung stattgefunden hat. Danach ist ein linearer Zusammenhang zwischen der Temperatur und der ausgegebenen Spannung zu erkennen. Zwischen $24 \text{ }^\circ\text{C}$ und $25 \text{ }^\circ\text{C}$ wird dieser Zusammenhang konstant.

Für die folgende Messung zur Bestimmung des Rauschverhaltens der UM wird die Temperatur auf $25 \text{ }^\circ\text{C}$ festgesetzt, da bei dieser Temperatur eine geringe Temperaturabhängigkeit der ausgegebenen Spannung festgestellt wurde.

Messung des Rauschverhaltens

Für diese Messung wird der Temperaturschrank auf eine konstante Temperatur von $25 \text{ }^\circ\text{C}$ eingestellt. Das Rauschen wird für die Spannungen $U_a = -0.5 \text{ V}$, $U_b = -1 \text{ V}$ und $U_c = -1.9 \text{ V}$ bestimmt. Vor Beginn der Messungen wurde die konstante Temperatur für vier Stunden gehalten, um eine Thermalisierung der UM und der Kupferbox zu gewährleisten. Jede Spannung wurde über einen Zeitraum von einer Stunde gemessen. Die gemessenen Daten werden im Abschnitt 4.3 ausgewertet.

4.3 Auswertung der Messdaten

Wie in Abschnitt 4.1 beschrieben, wird das Rauschverhalten der Präzisionsspannungsquelle über die Allan-Abweichung bestimmt. Alle 26 s wird ein Spannungswert von dem Nanovoltmeter aufgenommen. Die erste Allan-Abweichung kann also erst für einen Zeitraum von 52 s bestimmt werden, da mindestens zwei Spannungswerte zur Berechnung notwendig sind. Die zweite Allan-Abweichung kann nach 78 s bestimmt werden, dann schon für drei Spannungswerte. Je mehr Zeit vergeht, desto mehr Messwerte können in der Allan-Abweichung berücksichtigt werden. Werden alle Allan-Abweichungen über den Zeitraum der Messung aufgetragen, ergibt sich ein Diagramm, welches die Stabilität der ausgegebenen Spannung der *UM* zeigt (siehe Abbildung 19). Die Berechnungen und das Diagramm wurden mit *Python* durchgeführt bzw. erstellt.

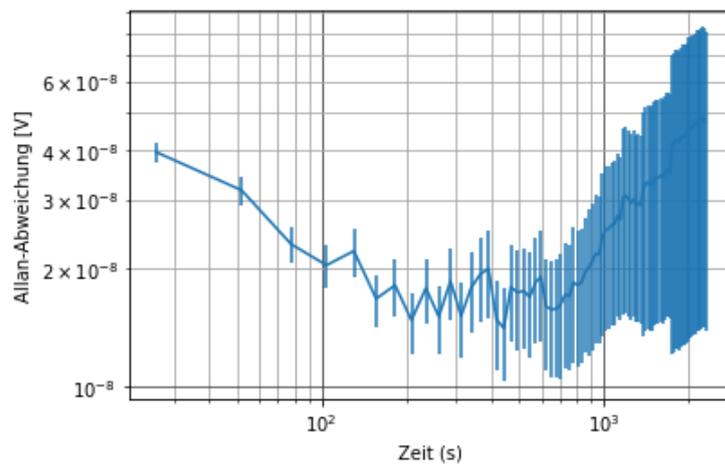


Abbildung 19: Allan-Abweichung für $U_a = -0.5$ V. Nach 100 s liegt das Rauschen bei 22 nV.

Der Zeitraum für die Detektion eines Spinflips am Helium-3 Experiment dauert ca. 100 s. Daher ist die Allan-Abweichung für den Zeitraum bis 100 s relevant. In Abbildung 19 ist diese beim vierten Wert der Allan-Abweichung erreicht, welcher bei 22 nV für eine ausgegebene Spannung von $U_a = -0.5$ V liegt. Für die beiden weiteren Spannungen $U_b = -1$ V und $U_c = -1.9$ V wurde die Allan-Abweichung nach 100 s analog bestimmt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5 zusammengetragen.

Spannung der <i>UM</i> [V]	Bereich der Spannungsstabilität nach 100 s [nV]
−0.5	±22
−1.0	±33
−1.9	±36

Tabelle 5: Rauschverhalten der Präzisionsspannungsquelle *UM 1-14 LN-SW* bei 25 °C für verschiedene Spannungen.

4.4 Fazit

Für die Präzisionsspannungsquelle *UM 1-14 LN-SW* gibt *Stahl-Electronics* eine Rauschstabilität im Bereich von ± 150 nV an [25]. Dieser Wert gilt für die *secondary channel* bei einer Spannung von 1.0 V über einen Zeitraum von 60 s.

Der experimentell bestimmte Bereich für die Rauschstabilität liegt bei ± 33 nV für die *secondary channel* bei einer ausgegebenen Spannung von 1.0 V über einen Zeitraum von 100 s. Der Bereich der Rauschstabilität ist deutlich kleiner als der von *Stahl-Electronics* angegebene Wert, allerdings wurde die Messung auch bei einer konstanten Temperatur durchgeführt, was ohne Temperaturschrank kaum umsetzbar ist.

Für das Helium-3 Experiment wird eine Präzisionsspannungsquelle benötigt, die Spannungen im Bereich von 10^{-7} V präzise ausgeben kann. Die gemessene Rauschstabilität der Präzisionsspannungsquelle *UM 1-14 LN-SW* liegt im Bereich von $\pm 0.36 \cdot 10^{-7}$ V bei einer ausgegebenen Spannung von bis zu 1.9 V über einen Zeitraum von 100 s. Damit ist die Eignung der Präzisionsspannungsquelle *UM 1-14 LN-SW* für das Helium-3 Experiment festgestellt.

Kapitel 5

Abschließendes Fazit

Das Ziel dieser Arbeit war es ein Modell einer Penning-Falle zu erstellen, mit welchem die sympathetische Laserkühlung für ${}^3\text{He}^{2+}$ durch ${}^9\text{Be}^+$ experimentell umsetzbar ist. Die Kopplung der beiden Ionen sollte dabei direkt über die Coulomb-Wechselwirkung geschehen. Ein solches Modell wird in Kapitel 3 erstellt. Dabei werden zwei zylindrische Penning-Fallen zu einer gekoppelten Penning-Falle zusammengesetzt und mit einer gemeinsamen Endkappe versehen. Die Länge der Endkappe wird auf $l_{\text{gEK}} = 1.8$ mm verkürzt, um eine ausreichend starke Coulomb-Wechselwirkung zwischen den beiden Ionen zu erreichen. Durch den Optimierungsalgorithmus aus Abschnitt 3.2 werden die Axialfrequenzen der beiden Ionen angeglichen, um eine resonante Kopplung zu erzielen. Dadurch wird eine sympathetische Laserkühlung von ${}^3\text{He}^{2+}$ bis auf 0.1 K möglich. Die Detektionszuverlässigkeit des Spinflips kann so um 25 Prozentpunkte auf insgesamt 85 % erhöht und die Lamorfrequenz genauer bestimmt werden. Der g -Faktor von ${}^3\text{He}^{2+}$ kann dadurch präziser berechnet werden. Die Parameter des resultierenden Modells der gekoppelten Penning-Falle liegen im Bereich des experimentell umsetzbaren. Damit ist es im Rahmen dieser Arbeit gelungen, ein Modell zu entwickeln, welches in das Helium-3 Experiment am MPIK implementiert werden kann.

Die Charakterisierung des Rauschverhaltens der Präzisionsspannungsquelle hat eine Spannungsstabilität von $\pm 0.36 \cdot 10^{-7}$ V für eine ausgegebene Spannung von 1.9 V ergeben über einen Zeitraum von 100 s. Die benötigte Einstellgenauigkeit der ausgegebenen Spannung für das Helium-3 Experiment liegt bei 10^{-7} V. Damit hat sich die Präzisionsspannungsquelle *UM 1-14 LN-SW* von *Stahl-Electronics* als geeignet erwiesen.

Anhang

A Herleitung der Bewegungsgleichung für ein Ion in einer Penning-Falle

Als grundlegender Ansatz dient die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (69)$$

wobei m für die Masse des Ions, \vec{a} für die Beschleunigung und \vec{F} für die wirkende Kraft auf das Ion steht. Die wirkende Kraft ist die Lorentz-Kraft mit einem elektrischen Feld:

$$\vec{F} = \vec{F}_L = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (70)$$

q und \vec{v} stehen für die Ladung bzw. die Geschwindigkeit des Ions. \vec{E} und \vec{B} stehen für das elektrische bzw. magnetische Feld. Das Magnetfeld ist homogen, lässt sich also durch

$$\vec{B} = B_0 \vec{e}_z \quad (71)$$

ausdrücken, wobei B_0 die Feldstärke und \vec{e}_z die Feldrichtung angibt. Das elektrische Feld ist ein Quadrupolfeld mit dem Potential in Zylinderkoordinaten [15]

$$\Phi(\rho, z) = U_0 C_2 \cdot \left(z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right). \quad (72)$$

U_0 gibt die Spannung der Ringelektrode an und C_2 ist ein spezifischer Fallkoeffizient. Genauer zu C_2 findet sich im Unterabschnitt 2.2.2. Aus dem Potential lässt sich das elektrische Vektorfeld berechnen mit

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi. \quad (73)$$

Daraus folgt das elektrische Quadrupolfeld in kartesischen Koordinaten (siehe Abbildung 1):

$$\vec{E} = U_0 C_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Wird nun das magnetische und elektrische Feld in den Newtonschen Ansatz eingesetzt und das Kreuzprodukt aufgelöst, ergibt sich folgende vektorwertige Bewegungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \left[U_0 C_2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2z \end{pmatrix} + B_0 \cdot \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \quad (75)$$

Diese Bewegungsgleichung beschreibt die Trajektorie eines Ions mit der Masse m und der Ladung q in einer Penning-Falle mit der Ringspannung U_0 , dem spezifischen Fallenkoeffizienten C_2 und der Magnetfeldstärke B_0 .

B Separation der Laplace-Gleichung

Um das elektrische Potential einer zylindrischen Penning-Falle zu bestimmen, bietet sich die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten als Ansatz an Gleichung (20). Um diese zu lösen wird das Potential durch einen Separationsansatz Gleichung (21) dargestellt und in die Laplace-Gleichung eingesetzt (siehe Unterabschnitt 2.2.1):

$$Z(z) \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) + R(\rho) \cdot \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = 0. \quad (76)$$

Durch die Einführung einer Separationskonstanten k , kann die Laplace-Gleichung in zwei von ρ bzw. z abhängige, gewöhnliche Differentialgleichung umgewandelt werden:

$$\frac{1}{R(\rho)} \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) = k^2 \quad (77)$$

und

$$\frac{1}{Z(z)} \cdot \frac{\partial^2(Z(z))}{\partial z^2} = -k^2. \quad (78)$$

Werden die Separationskonstanten für die entsprechenden Terme in die Gleichung (76) eingesetzt, so ergibt sich wieder Null. Aus Gleichung (77) und Gleichung (78) ergeben sich folgende gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) - k^2 \cdot R(\rho) = 0 \quad (79)$$

und

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot Z(z) = 0. \quad (80)$$

C Lösung der Duffing'schen Differentialgleichung

Die Duffing'sche Differentialgleichung

$$\ddot{z} + \alpha z + \beta z^3 + \gamma z^5 = 0 \quad (81)$$

ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und ist nicht exakt lösbar. Allerdings gibt es einige Ansätze um sie näherungsweise zu lösen. Einer dieser Ansätze ist der Fourierreihenansatz

$$z(t) = A \cos(kt) + B \sin(kt), \quad (82)$$

wobei A und B die Amplituden der trigonometrischen Funktionen angeben. k und t ergeben sich aus der Definition einer Fourierreihe, dienen aber lediglich als Variablen. Da die zu lösende Duffing'sche Differentialgleichung keine Dämpfung aufweist, es also keinen Term für \dot{z} gibt, tritt keine Phasenverschiebung zwischen Anregung und Antwort auf. Das heißt, dass der Fourierreihenansatz lediglich durch den \cos -Term dargestellt werden kann:

$$z(t) = A \cos(kt). \quad (83)$$

Wird dieser Ansatz in die zu lösende Differentialgleichung aus Abschnitt 2.2.3 eingesetzt:

$$\ddot{z} + \frac{q}{m} 2U_0 C_2 \cdot z + \frac{q}{m} 4U_0 C_4 \cdot z^3 + \frac{q}{m} 6U_0 C_6 \cdot z^5 = 0 \quad (84)$$

und verwendet das Additionstheorem für ungerade Potenzen des \cos [26], so ergibt sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} -k^2 \cdot A \cos(kt) + \alpha \cdot A \cos(kt) + \beta \cdot A^3 \frac{1}{4} (3 \cos(kt) + \cos(3kt)) \\ + \gamma \cdot A^5 \frac{1}{16} (10 \cos(kt) + 5 \cos(3kt) + \cos(5kt)) = 0. \end{aligned} \quad (85)$$

Die Vorfaktoren α , β und γ entsprechen den Vorfaktoren vor den z -Variablen mit unterschiedlichen Potenzen in Gleichung (84). Die Näherung der Lösung erfolgt durch die Vernachlässigung der \cos -Terme bei welchen das Argument größer als kt ist. Daraufhin lässt sich die \cos -Funktion gänzlich aus der Gleichung kürzen und es ergibt sich eine quadratische Gleichung für k :

$$-k^2 \cdot A + \alpha \cdot A + \frac{3}{4} \beta \cdot A^3 + \frac{10}{16} \gamma \cdot A^5 = 0. \quad (86)$$

Wird diese quadratische Gleichung für k gelöst und setzt α , β und γ wieder ein, ergibt sich

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{m} (8U_0 C_2 + 12A^2 U_0 C_4 + 15A^4 U_0 C_6)}. \quad (87)$$

Die negative Lösung der quadratischen Gleichung wird verworfen, da sie keine sinnvolle physikalische Interpretation zulässt. Für die Amplitude A wird die Amplitude der Axialbewegung \hat{z} eingesetzt, welche sich aus der Energie der Axialbewegung E_z berechnen lässt (siehe Unterabschnitt 2.1.3):

$$E_z = k_B \cdot T_z = \frac{1}{2} m \cdot \omega_z^2 \cdot \hat{z}^2. \quad (88)$$

Wird die Gleichung (87) mit Hilfe der Gleichung (9) weiter umgeformt, kürzt sich die Masse m komplett heraus und es ergibt sich

$$k = \omega_z \sqrt{1 + \frac{3}{2} \frac{C_4}{C_2^2} \frac{E_z}{qU_0} + \frac{15}{8} \frac{C_6}{C_2^3} \frac{E_z^2}{q^2 U_0^2}}. \quad (89)$$

Wird k nach der Energie der Axialbewegung E_z um den Entwicklungspunkt null durch eine Taylor-Entwicklung dargestellt, ergibt sich für die Ordnungen null bis zwei

$$k = \omega_z + \frac{3}{4} \frac{C_4}{C_2^2} \frac{E_z}{qU_0} \cdot \omega_z + \left(\frac{15}{16} \frac{C_6}{C_2^3} \frac{E_z^2}{q^2 U_0^2} - \frac{9}{32} \frac{C_4^2}{C_2^4} \frac{E_z^2}{q^2 U_0^2} \right) \cdot \omega_z + \dots \quad (90)$$

Sowohl für C_4 , als auch für C_6 wird nur der Term berücksichtigt, in dem der jeweilige Koeffizient zuerst auftaucht. Alle anderen Terme werden verworfen und es folgt

$$k \approx \omega_z \left(1 + \frac{3}{4} \frac{C_4}{C_2^2} \frac{E_z}{qU_0} + \frac{15}{16} \frac{C_6}{C_2^3} \frac{E_z^2}{q^2 U_0^2} \right). \quad (91)$$

Der Axialfrequenzshift $\Delta\omega_z$ durch C_4 und C_6 ergibt sich aus den beiden Termen in denen die jeweiligen Koeffizienten enthalten sind:

$$\frac{\Delta\omega_z}{\omega_z} = \frac{3}{4} \left(\frac{C_4}{C_2^2} + \frac{5}{4} \frac{C_6}{C_2^3} \frac{E_z}{qU_0} \right) \frac{E_z}{qU_0}. \quad (92)$$

D Herleitung des Hamiltonoperators für Coulomb-Wechselwirkung

Werden zwei Ionen mit den Ladungen q_i und den Massen m_i betrachtet, welche entsprechend Abbildung 7 in einem Potential festgesetzt sind, ergibt sich das folgende Coulomb-Potential

$$V_{\text{ww}}(z_1, z_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|z_2 - z_1|}. \quad (93)$$

Durch die Einführung von relativen Koordinaten $\tilde{z}_i = z_i - z_{0,i}$, wobei $z_{0,i}$ die Ruhepositionen der Ionen sind und $z_{0,2} > z_{0,1}$ gilt, ergibt sich

$$V_{\text{ww}}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(z_{0,2} + \tilde{z}_2) - (z_{0,1} + \tilde{z}_1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_0 - (\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2)}. \quad (94)$$

d_0 gibt den Abstand der Ruhelagen der beiden Ionen an. Wird dieses Potential um den Entwicklungspunkt null nach den relativen Koordinaten bis zur zweiten Ordnung durch eine Taylor-Entwicklung dargestellt, ergibt sich

$$V_{\text{ww}}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_0} \left(1 + \frac{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_2}{d_0} + \frac{\tilde{z}_1^2}{d_0^2} + \frac{\tilde{z}_2^2}{d_0^2} - \frac{2\tilde{z}_1 \tilde{z}_2}{d_0^2} \right). \quad (95)$$

Für die Kopplung der beiden Ionen ist lediglich der letzte Term relevant, was zu folgendem Potential der Coulomb-Wechselwirkung führt:

$$V_{\text{ww}}(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 d_0^3} \tilde{z}_1 \tilde{z}_2. \quad (96)$$

E Zusammenhang zwischen dem Fallenradius a und der Elektrodenlänge l_i

Zunächst wird eine Gleichung zur Berechnung der Fallkoeffizienten C_j analytisch hergeleitet. Dazu wird die Reihenentwicklung des elektrischen Potentials einer Penning-Falle nach Gleichung (32) betrachtet. Durch einen Koeffizientenvergleich für C_j , ergibt sich folgende Gleichung für die Fallkoeffizienten:

$$C_j = \frac{\Phi^{(j)}(z_e)}{j!}, \quad (97)$$

wobei der Entwicklungspunkt mit z_e variabel gehalten wurde. Für Φ wird das elektrische Potential einer zylindrischen Penning-Falle mit p gestapelten Elektroden aus Gleichung (29) eingesetzt:

$$C_j = \frac{1}{j!} \frac{2}{\Lambda} \frac{1}{I_0(k_n a)} \left. \frac{d^j \sin(k_n z)}{dz^j} \right|_{z=z_e} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n, \quad (98)$$

wobei nur die Symmetrieachse betrachtet wird ($\rho = 0$) und α_n für den Term in eckigen Klammern aus Gleichung (29) steht. Die j -te Ableitung des Sinus nach z kann durch eine Phasenverschiebung umgeschrieben werden zu

$$\left. \frac{d^j \sin(k_n z)}{dz^j} \right|_{z=z_e} = \sin\left(k_n z_e + \frac{\pi}{2} \cdot j\right). \quad (99)$$

Für die Fallkoeffizienten C_j ergibt sich schließlich

$$C_j = \frac{1}{j!} \frac{2}{\Lambda} \frac{1}{I_0(k_n a)} \cdot \sin\left(k_n z_e + \frac{\pi}{2} \cdot j\right) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n. \quad (100)$$

Wird die analytisch hergeleitete Gleichung zur Berechnung der Fallkoeffizienten C_j für eine einfache Penning-Falle mit fünf Elektroden ($p = 5$) betrachtet, muss α_n geringfügig verändert werden zu

$$\alpha_n = \frac{U_1 \cos(k_n z_0) - U_5 \cos(k_n \Lambda)}{k_n} + \sum_{i=2}^5 \frac{U_i - U_{i-1}}{k_n^2 \cdot d} (\sin(k_n z_{2i-2}) - \sin(k_n z_{2i-3})). \quad (101)$$

Um die Fallenkoeffizienten C_j der einfachen Penning-Falle einzustellen, können die Spannungen an den Korrektorelektroden und der Ringelektrode, die Länge der Elektroden l_i und der Fallenradius a variiert werden. Das Verhältnis der Spannungen der Korrektorelektroden und der Ringelektrode ergibt das *Tuning Ratio* aus Gleichung (30). Die Länge der Elektroden l_i ergibt sich aus der Differenz der entsprechenden z-Koordinaten (siehe Abbildung 3).

Liegt bereits eine einfache Penning-Falle vor, die sowohl *"kompensiert"* als auch *"orthogonal"* ist, kann die Gleichung (100) dazu verwendet werden, die Elektrodenlänge l_i in Abhängigkeit des Fallenradius a zu bringen. Dazu werden die Fallenkoeffizienten und das *Tuning Ratio* der *"kompensierten"* und *"orthogonalen"* Penning-Falle konstant gehalten. Wird nun der Fallenradius variiert, verändern sich auch die Längen der Elektroden. Dieses Prinzip wird für die Verkleinerung des Fallenradius in Unterabschnitt 3.3.2 verwendet.

Abbildungsverzeichnis

1	Feldkonfiguration in einer idealen Penning-Falle	4
2	Bewegung eines Ions in einer Penning-Falle	6
3	Skizze einer zylindrischen Penning-Falle mit fünf Elektroden .	9
4	Elektrisches Potential entlang der Symmetrieachse einer zylindrischen Penning-Falle	12
5	Resonanzkurve zur Bestimmung der Larmorfrequenz	18
6	Detektionszuverlässigkeit eines Spinflips in Abhängigkeit der Energie der modifizierten Zyklotronbewegung	19
7	Schema eines gekoppelten Oszillators aus zwei Ionen	21
8	Schema eines klassischen gekoppelten Oszillators	23
9	Elektrisches Potential entlang der Symmetrieachse einer gekoppelten Penning-Falle	26
10	Technische Zeichnung des Modells der gekoppelten Penning-Falle zur Umsetzung von sympathetischer Laserkühlung . . .	28
11	Potentialverlauf der gekoppelten Penning-Falle mit Kompensationselektroden	29
12	Verlauf der Axialfrequenz von ${}^3\text{He}^{2+}$ über die einzelnen Optimierungsschritte	36
13	Verlauf des Fallenkoeffizienten C_4 von ${}^3\text{He}^{2+}$ über die einzelnen Optimierungsschritte	37
14	Verlauf der Axialfrequenz von ${}^9\text{Be}^+$ über die einzelnen Optimierungsschritte	37
15	Verlauf des Fallenkoeffizienten ${}^9\text{Be}^+$ über die einzelnen Optimierungsschritte	38
16	Verlauf der Austauschzeit für drei verschiedene Modelle der gekoppelten Penning-Falle	38

17	Potentialverlauf der gekoppelten Penning-Falle für zu kurze gemeinsame Endkappe	41
18	Temperaturabhängigkeit der Präzisionsspannungsquelle für $U = -0.5 \text{ V}$	46
19	Allan-Abweichung für $U_a = -0.5 \text{ V}$	47

Tabellenverzeichnis

1	Abmessungen der einzelnen Elektroden der gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 2.0$ mm	30
2	Spannungswerte an den einzelnen Elektroden der optimierten gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 2$ mm und eine Elektrodenlänge der gemeinsamen Endkappe von $l_{gEK} = 1.8$ mm	35
3	Abmessungen und Spannungswerte der einzelnen Elektroden der verkleinerten, optimierten gekoppelten Penning-Falle für einen Fallenradius von $a = 1.8$ mm	39
4	Vergleich der Fallenparameter der optimierten gekoppelten Penning-Fallen für die Fallenradien $a = 1.8$ mm und $a = 2.0$ mm	40
5	Rauschverhalten der Präzissionsspannungsquelle <i>UM 1-14 LN-SW</i> bei 25°C	48

Literatur

- [1] A. Mooser u. a. “A New Experiment for the Measurement of the g-Factors of ${}^3\text{He}^+$ and ${}^3\text{He}^{2+}$ ”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 1138 (Nov. 2018). Publisher: IOP Publishing, S. 012004. ISSN: 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/1138/1/012004. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1138/1/012004> (besucht am 02.02.2022).
- [2] Anna Nikiel u. a. “Ultrasensitive ${}^3\text{He}$ magnetometer for measurements of high magnetic fields”. In: *The European Physical Journal D* 68.11 (3. Nov. 2014), S. 330. ISSN: 1434-6079. DOI: 10.1140/epjd/e2014-50401-3. URL: <https://doi.org/10.1140/epjd/e2014-50401-3> (besucht am 11.03.2022).
- [3] Muon (g-2) Collaboration u. a. “Measurement of the Negative Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.7 ppm”. In: *Physical Review Letters* 92.16 (23. Apr. 2004). Publisher: American Physical Society, S. 161802. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.161802. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.161802> (besucht am 11.03.2022).
- [4] Hiromi Iinuma and. “New approach to the Muon g-2 and EDM experiment at J-PARC”. In: *Journal of Physics: Conference Series* 295 (Mai 2011). Publisher: IOP Publishing, S. 012032. ISSN: 1742-6596. DOI: 10.1088/1742-6596/295/1/012032. URL: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/295/1/012032> (besucht am 11.03.2022).
- [5] F. Heiße u. a. “High-Precision Measurement of the Proton’s Atomic Mass”. In: *Physical Review Letters* 119.3 (18. Juli 2017). Publisher: American Physical Society, S. 033001. DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.

033001. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.033001> (besucht am 24.02.2022).
- [6] E. G. Myers u. a. “Atomic Masses of Tritium and Helium-3”. In: *Physical Review Letters* 114.1 (7. Jan. 2015). Publisher: American Physical Society, S. 013003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.013003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.013003> (besucht am 24.02.2022).
- [7] Sven Sturm u. a. “Phase-Sensitive Cyclotron Frequency Measurements at Ultralow Energies”. In: *Physical Review Letters* 107.14 (28. Sep. 2011). Publisher: American Physical Society, S. 143003. DOI: 10.1103/PhysRevLett.107.143003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.143003> (besucht am 24.02.2022).
- [8] Antonia Schneider u. a. “A Novel Penning-Trap Design for the High-Precision Measurement of the $3\text{He}2$ + Nuclear Magnetic Moment”. In: *Annalen der Physik* 531.5 (2019), S. 1800485. ISSN: 1521-3889. DOI: 10.1002/andp.201800485. URL: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/andp.201800485> (besucht am 02.02.2022).
- [9] S. Earnshaw. “On the Nature of the Molecular Forces which Regulate the Constitution of the Luminiferous Ether”. In: *undefined* (). URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/On-the-Nature-of-the-Molecular-Forces-which-the-of-Earnshaw/720781b669a779cb0496041e72dad2d1fc79904> (besucht am 07.02.2022).
- [10] “F47 - Cyclotron frequency in a Penning trap”. In: (). URL: <https://www.physi.uni-heidelberg.de/Einrichtungen/FP/anleitungen/F47.pdf>.
- [11] Georg Schneider. “300 ppt Measurement of the Proton g-Factor”. Diss. Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2018. DOI: 10.25358/OPENSOURCE-4441. URL: <https://opscience.ub.uni-mainz.de/handle/20.500.12030/4443> (besucht am 08.02.2022).
- [12] John David Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. Publication Title: Klassische Elektrodynamik. De Gruyter, 13. Dez. 2013. ISBN: 978-3-11-033447-0. URL: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110334470/html> (besucht am 07.02.2022).

- [13] Christian-Eric Roux. *High-resolution mass spectrometry: The trap design and detection system of Pentatrap and new Q -values for neutrino studies*. 30. Apr. 2012. DOI: 10.11588/heidok.00014006. URL: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/14006/> (besucht am 08.02.2022).
- [14] Florian Köhler. “Bound-Electron g -Factor Measurements for the Determination of the Electron Mass and Isotope Shifts in Highly Charged Ions”. Diss. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 22. Juli 2015. DOI: 10.17617/2.2235539. URL: https://pure.mpg.de/pubman/faces/ViewItemOverviewPage.jsp?itemId=item_2235539 (besucht am 08.02.2022).
- [15] Stefan Ulmer. *First Observation of Spin Flips with a single Proton stored in a cryogenic Penning trap*. 2011. DOI: 10.11588/heidok.00012306. URL: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/12306/> (besucht am 09.02.2022).
- [16] Georg Jochen Ketter. *Theoretical treatment of miscellaneous frequency-shifts in Penning traps with classical perturbation theory*. 2015. DOI: 10.11588/heidok.00018227. URL: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/18227/> (besucht am 15.02.2022).
- [17] Sascha Rau. *High-precision measurement of the deuteron’s atomic mass*. Place: Heidelberg. 2020. DOI: 10.11588/heidok.00029010. URL: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/29010/> (besucht am 16.02.2022).
- [18] Lowell S. Brown und Gerald Gabrielse. “Precision spectroscopy of a charged particle in an imperfect Penning trap”. In: *Physical Review A* 25.4 (1. Apr. 1982). Publisher: American Physical Society, S. 2423–2425. DOI: 10.1103/PhysRevA.25.2423. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.25.2423> (besucht am 17.02.2022).
- [19] H. Dehmelt. “New continuous Stern-Gerlach effect and a hint of “the” elementary particle”. In: *Zeitschrift für Physik D Atoms, Molecules and Clusters* 10.2 (1. Juni 1988), S. 127–134. ISSN: 1431-5866. DOI: 10.1007/BF01384846. URL: <https://doi.org/10.1007/BF01384846> (besucht am 11.03.2022).

- [20] Andreas Mooser. “Der g-Faktor des Protons”. Diss. Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2014. DOI: 10.25358/OPENSOURCE-4250. URL: <https://openscience.ub.uni-mainz.de/handle/20.500.12030/4252> (besucht am 28.02.2022).
- [21] Malte Niemann. “Design and commissioning of an experiment for sympathetic cooling and coupling of ions in a cryogenic Penning trap”. doctoralThesis. Hannover : Institutionelles Repositorium der Leibniz Universität Hannover, 2019. DOI: 10.15488/5329. URL: <https://www.repo.uni-hannover.de/handle/123456789/5376> (besucht am 16.02.2022).
- [22] Matthew Bohman. *Sympathetic Cooling of a Proton with Resonant Image Current Coupling*. ISSN: 0002-9319 Place: Heidelberg. 2021. URL: <https://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/29319/> (besucht am 16.02.2022).
- [23] M. Bohman u. a. “Sympathetic Cooling of Protons and Antiprotons with a Common Endcap Penning Trap”. In: *Journal of Modern Optics* 65.5 (30. März 2018), S. 568–576. ISSN: 0950-0340, 1362-3044. DOI: 10.1080/09500340.2017.1404656. arXiv: 1709.00433. URL: <http://arxiv.org/abs/1709.00433> (besucht am 07.03.2022).
- [24] Stefan Dickopf. “Stefan Dickopf Dissertation - wird noch eingereicht”. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.
- [25] Stahl-Electronics. “User Manual - UM-Series”. In: (). URL: https://www.stahl-electronics.com/bilder/Manual_UM_LN_SW_V2021.pdf.
- [26] Eberhard Zeidler. “Wichtige Formeln, Graphische Darstellungen und Tabellen”. In: *Springer-Taschenbuch der Mathematik: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler Herausgegeben von E. Zeidler*. Hrsg. von Eberhard Zeidler. Wiesbaden: Springer Fachmedien, 2013, S. 3–213. ISBN: 978-3-8348-2359-5. DOI: 10.1007/978-3-8348-2359-5_1. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2359-5_1 (besucht am 14.02.2022).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während der Anfertigung dieser Bachelorarbeit unterstützt und motiviert haben.

Zuerst gebührt mein Dank Prof. Dr. Klaus Blaum, der meine Bachelorarbeit betreut und begutachtet hat. Für die Möglichkeit meine Bachelorarbeit am Max-Planck-Institut für Kernphysik in Heidelberg anfertigen zu können, bin ich sehr dankbar. Weiterhin möchte ich mich bei Dr. Robert Moshhammer, ebenfalls für die Begutachtung, bedanken.

Für die hilfreichen Anregungen und die konstruktive Kritik bei der Erstellung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bei Dr. Andreas Mooser, sowie seinem Team rund um das Helium-3 Experiment, Stefan Dickopf, Marius Müller und Annabelle Kaiser, bedanken.

Auch bedanken möchte ich mich bei Menno Door, Daniel Lange und Jost Herkenhoff für Ihre wertvollen Ratschläge und sachdienlichen Anmerkungen.

Ein ganz besonderer Dank geht an meine Partnerin Sophia und unsere gemeinsamen Kinder Constantin und Vincent. Ihr seid mein Glück. Ich freue mich auf unsere Zukunft. Abschließend möchte ich noch meiner Mutter Astrid für Ihre anhaltende Unterstützung und nicht enden wollende Geduld danken.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

A handwritten signature in blue ink that reads "Bock". The letters are cursive and connected.

Nils Vincent Bock
Heidelberg, den 14. März 2022