

Meteorologisches Institut  
- BIBLIOTHEK -  
2000 Hamburg 13 • Bundesstraße 55

ANNALEN DER METEOROLOGIE

(Neue Folge)

Nr. 15

# Deutsche Meteorologen-Tagung 1980

Offenbach am Main 1980

Selbstverlag des Deutschen Wetterdienstes

INVERSE MODELLIERUNG VON MEERESOBERFLÄCHENTEMPERATUR-  
ANOMALIEN DES NORDPAZIFIKS

K. Herterich

Max-Planck-Institut für Meteorologie, Hamburg

Kurzfassung: Die Technik der Inversen Modellierung wird am Beispiel von NORPAX-Daten der Variation der Meeresoberflächentemperaturen des Nord-Pazifik demonstriert. Dabei testen wir die Modellvorstellung, daß der Ozean schnell veränderliche Wärmeflüsse aus der Atmosphäre aufintegriert und so langsam veränderliche Schwankungen der Meeresoberflächentemperaturen auftreten. Der statistische Modelltest zeigt, daß diese Modellvorstellung mit den Daten verträglich ist. Insbesondere läßt sich die atmosphärische Anregung als weißes Rauschen behandeln. Die im Modell auftretenden Parameter wie u.a. die Advektion und Diffusion stellen sich auf eine Größenordnung ein, die in guter Übereinstimmung mit anderen Beobachtungen ist.

1 EINLEITUNG

Den Meeresoberflächentemperaturen, die generell zu den Polen hin abnehmen und von den Meeresströmungen beeinflusst werden sind unregelmäßig verteilte Anomalien überlagert mit Abweichungen vom Jahresgang bis zu einigen Grad Celsius. Da das Wetter mit von den Meeresoberflächentemperaturen abhängt sind auch Meteorologen an der Klärung der Ursachen der Anomalien und an ihrer Vorhersage interessiert.

Eine Modellvorstellung für die Entstehung der Anomalien ist, daß atmosphärische Wärmeflüsse in den Ozean, mit Zeitskalen von Tagen, vom Ozean aufintegriert werden und so Schwankungen der Meeresoberflächentemperaturen mit Zeitskalen von Monaten und länger auftreten (Frankignoul und Hasselmann, 1977). Da die Zeitskala der atmosphärischen Wärmeflüsse klein ist gegen die Zeitskala der Schwankungen der Meeresoberflächentemperaturen selbst, wird die atmosphärische Anregung als stochastisch, vereinfacht sogar als weißes Rauschen behandelt.

Als zu modellierende Daten existieren z.B. NORPAX-Daten der Monatsmittel der Meeresoberflächentemperaturen der Jahre 1947 bis 1975 für ein 5° x 5° Gitter des Nord-Pazifik (siehe Abb. 1). Reynolds (1977) hat diese Daten bereits benutzt, um die zugehörigen Autospektren der einzelnen Gitterpunkte zu modellieren. Er erreichte gute Modellanpassung im Inneren des Nord-Pazifik dagegen schlechtere Anpassung in Küstennähe und in Gebieten mit stärkeren Meeresströmungen. Da sich der Effekt der Meeresströmungen gerade in den Kreuzspektren ausdrückt, sollen hier neben dem Autospektrum eines Zentralpunktes auch die Kreuzspektren mit den 8 nächsten Nachbarn modelliert werden.

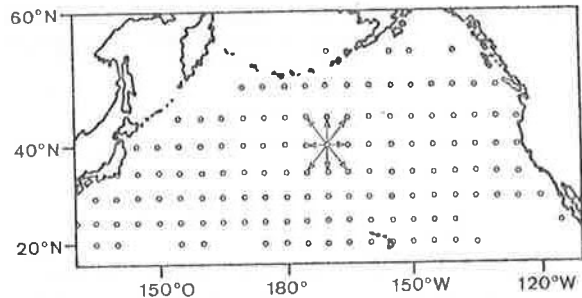


Abb. 1: Lage der Meßpunkte der NORPAX-Daten im Nord-Pazifik. Bildmitte: Zentralpunkt mit 8 nächsten Nachbarn

2 MODELL

2.1 Modellgleichungen

Um die Kreuzspektren  $F_{ik}(\omega_\ell)$  der Daten zu modellieren, benötigt man ein Modell, aus dem die zugehörigen Modell-Kreuzspektren  $F_{ik}(\omega_\ell)$  abgeleitet werden können. Hier bezeichnen i und k die Gitterpunkte deren Kreuzspektrum gebildet werden soll und  $\omega_\ell$  eine diskrete Frequenz. Wir nehmen an, daß die zeitliche Änderung der Temperatur der Meeresoberfläche einer Transportgleichung genügt:

$$\frac{\partial}{\partial t} T' + \underline{v} \cdot \nabla T' - D \nabla^2 T' = -\lambda T' + n' \quad (1)$$

Hier ist  $T' = T - T_0$  die Abweichung der Temperatur vom mittleren Jahresgang  $T_0$ ,  $\underline{v}$  die Advektion

und D der Diffusionskoeffizient. Der Term  $-\lambda T'$  beschreibt die Rückwirkung des Ozeans auf die Atmosphäre und  $n'$  ist proportional zum rasch fluktuierenden atmosphärischen Wärmefluß in den Ozean. Durch zeitliche und räumliche Diskretisierung und anschließender Fourier-Transformation von (1) erhält man:

$$\frac{e^{i\omega_1 \Delta t} - 1}{\Delta t} T_i(\omega_1) + \underline{v}_i \cdot \nabla T_i(\omega_1) - D_i \nabla^2 T_i(\omega_1) \quad (2)$$

$$= -\lambda_i T_i(\omega_1) + n_i(\omega_1)$$

Der Zeitabstand  $\Delta t$  in der Zeitserie ist 1 Monat. Der Index  $i$  bezeichnet einen bestimmten Punkt im Meßgitter. Für die Ableitungen von  $T_i$  werden zentrale Differenzen benützt. Der Ausdruck  $\partial T_i / \partial x$  geht dann über in  $(T_{i+1} - T_{i-1}) / 2\Delta x$  wobei  $T_{i+1}$  und  $T_{i-1}$  die entsprechenden Werte von  $T$  der nächsten Nachbarn zu  $T_i$  in  $x$ -Richtung sind. Der Gitterabstand  $\Delta x$  beträgt  $5^\circ$ .

Gleichung (2) gilt für jeden Gitterpunkt  $i$ . Sind  $\underline{T}_i, \underline{n}_i$  die Vektoren mit den Werten von  $T_i$  bzw.  $n_i$  als Komponenten kann (2) in Matrix-Form gebracht werden:

$$C \underline{T}_i = \underline{n}_i \quad (3)$$

Die Elemente der Matrix C werden aus den in (2) auftretenden Koeffizienten  $\underline{v}, D, \lambda$  gebildet und hängen dazu von der Nummerierung im Meßgitter ab. Gleichung (3) kann nach  $\underline{T}_i$  aufgelöst,

$$\underline{T}_i = C^{-1} \underline{n}_i \quad (4)$$

und die Kreuzspektralmatrix  $\hat{F}$  des Modells berechnet werden:

$$\hat{F} := \langle \underline{T}_i \underline{T}_i^+ \rangle = C^{-1} \langle \underline{n}_i \underline{n}_i^+ \rangle (C^{-1})^+ \quad (5)$$

In Gleichung (5) bedeuten die spitzen Klammern den Erwartungswert und das Zeichen (+) die Operation: transportiert und konjugiert-komplex.

Die Kreuzspektralmatrix  $\hat{F}$  ist eine Funktion der Frequenz  $\omega$  und hängt zusätzlich von den Parametern  $\underline{v}, D, \lambda$  und  $\hat{N} = \langle \underline{n}_i \underline{n}_i^+ \rangle$ , der Kreuzspektralmatrix der atmosphärischen Anregung ab. Durch eine bestimmte Wahl der Parameter läßt sich damit eine optimale Anpassung der Modellspektren  $\hat{F}$  an die Spektren  $F$  der Daten erreichen.

### 2.2 Modelltest

Zur Vereinfachung der weiteren Darstellung bilden wir die Kreuzspektralmatrix  $F$  auf einen Vektor  $\underline{f}$  ab, der als Komponenten die Elemente von  $F$  enthält (analog für  $\hat{F}$ ). Mit  $\underline{x} = \underline{f} - \hat{\underline{f}}$  der Differenz zwischen dem Datenvektor  $\underline{f}$  und dem entsprechenden Modellvektor  $\hat{\underline{f}}$ , kann ein "Abstand"  $\epsilon$  zwischen den Daten und dem Modell definiert werden:

$$\epsilon = \underline{x}^+ M \underline{x} \quad (6)$$

Die Matrix M muß positiv definit sein, damit immer  $\epsilon \geq 0$ . Anpassung des Modells an die Daten bedeutet dann, die Parameter in (5) so zu wählen, daß  $\epsilon$  minimal wird.

Im Modell wurde angenommen, daß die atmosphärische Anregung  $n$  ein stochastischer Prozess ist. Damit wird auch  $\epsilon$  eine stochastische Größe. Falls die Daten eine Gaußsche Verteilung haben, ist  $\epsilon$   $\chi^2$ -verteilt. Setzt man für die Matrix M in Gleichung (6) die Inverse der Kovarianzmatrix der Daten  $\langle \delta F \delta F^+ \rangle^{-1}$  ein, ergibt sich für den Erwartungswert des Minimums von  $\epsilon$ :

$$\langle \epsilon_{\min} \rangle = m - q \quad (7)$$

wobei  $m$  die Zahl der angepaßten Datenpunkte und  $q$  die Zahl der benötigten Parameter ist. Wird nun bei einem Anpassungsversuch  $\epsilon_{\min} \gg \langle \epsilon_{\min} \rangle$  muß man wohl schließen, daß die Abweichungen zwischen den Daten und dem Modell größer sind, als man es von der Statistik der Daten her erwartet hätte. Solch ein Modell würde man dann als ungeeignet für die Beschreibung der Daten ablehnen.

### 3 ERGEBNISSE

Abb. 2 zeigt anschaulich, daß in der Tat die Annahme eines weißen Rauschens für die atmosphärische Anregung mit der Statistik der Daten und den übrigen Modellannahmen verträglich ist. Weißes Rauschen bedeutet in unserem Modell, daß die Kreuzspektralmatrix der atmosphärischen Anregung  $\hat{N}$  unabhängig von der Frequenz  $\omega$  ist und der Imaginärteil von  $\hat{N}$  verschwindet. Um diese Modellannahme mit "Daten" direkt vergleichen zu können wurde in Gleichung (5) statt  $\hat{F}$  das Spektrum der Daten  $F$  eingesetzt und dann nach den neuen "Daten"  $N$  aufgelöst.

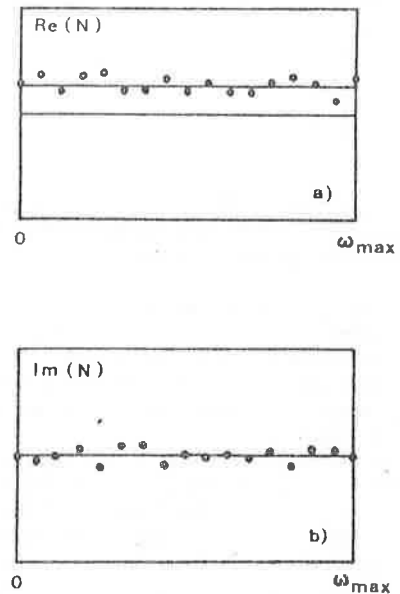


Abb. 2: Vergleich von Daten (o) und Modell (-) für ein typisches Kreuzspektrum der atmosphärischen Anregung N (relative Einheiten).  
a) Realteil von N  
b) Imaginärteil von N

Durch die Modellanpassung erhalten die Parameter  $n$ ,  $\lambda$  und  $D$  ganz bestimmte Werte. Ist das Modell akzeptiert, würde man erwarten, daß auch die Werte der Parameter, entsprechend ihrer physikalischen Bedeutung in das allgemeine Bild passen, das man vom System Ozean-Atmosphäre hat. In Abb. 3 ist als Beispiel die räumliche Verteilung des Parameters, der das Autospektrum der atmosphärischen Anregung  $N$  beschreibt und in Abb. 4 die Modelladvektion  $v$  dargestellt.  $N$  ist entsprechend der Hoch- und Tiefdrucktätigkeit in mittleren Breiten am stärksten und nimmt von Westen nach Osten ab. Die Modelladvektion  $v$  stimmt in etwa mit der bekannten großräumigen Zirkulation der Meeresoberflächenströmung überein.

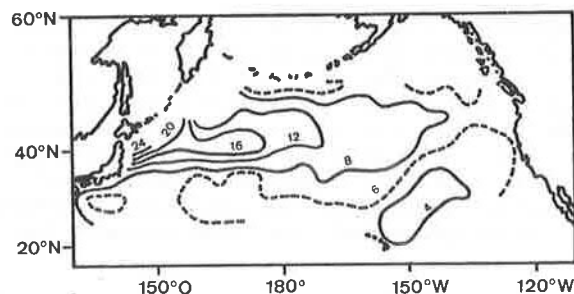


Abb. 3: Geographische Verteilung des Autospektrums der atmosphärischen Anregung des Modells (relative Einheiten).

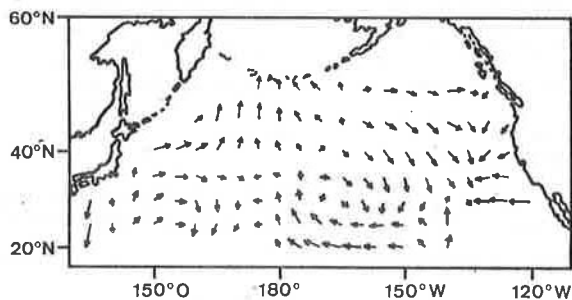


Abb. 4: Geographische Verteilung der Modelladvektion (geglättet).

Der absolute Betrag von  $v$  liegt im Bereich von 1 bis 10 cm/sec. Der Modellparameter  $\lambda$  entspricht einer Relaxationszeit der Temperatur-Anomalien von 2 bis 6 Monaten. Der (isotrope) Diffusionskoeffizient  $D$  stellt sich auf die Größenordnung  $10^8$  cm<sup>2</sup>/sec ein.

#### 4 ZUSAMMENFASSUNG

Die hier am Beispiel der Modellierung von Meeresoberflächentemperatur-Anomalien beschriebene Inversmethode hat im wesentlichen zwei Aspekte.

Der eine Aspekt betrifft die Frage: Welches Modell ist am besten geeignet, bestimmte Daten zu beschreiben? Wenn die Modellklasse festliegt (hier die Klasse der Modelle die einer Transportgleichung genügen), bleibt noch offen, wieviel Parameter das Modell enthalten soll. Der Modelltest wird schlecht ausfallen, wenn die Zahl der Parameter zu klein ist um auch nur grob den Daten folgen zu können. Der Mo-

delltest fällt ebenfalls schlecht aus, wenn das Modell bei zu vielen Parametern auch die statistischen Fehler der Daten nachbildet. Man möchte also aus einer Hierarchie von Modellen mit wachsender Zahl von Parametern das Modell identifizieren, das möglichst viel physikalische Details beschreiben kann und trotzdem noch den Modelltest besteht. Diese Aufgabe wird durch die Inversmethode gelöst.

Der zweite Aspekt betrifft die Werte der Parameter selbst, wie sie sich bei der Anpassung an die Daten einstellen. Ist das Modell mit den Daten verträglich können die Werte der Parameter wertvolle Information über die mit ihnen verbundenen physikalischen Größen geben. Z.B. stellt hier der Parameter der Modelladvektion eine Geschwindigkeit des Wärmetransports dar, gemittelt über die Länge der Zeitserien (27 Jahre) und integriert über die Tiefe der ozeanischen Deckschicht. Man könnte also, ausgehend von den Meeresoberflächentemperaturen, die relativ einfach gemessen werden können und mit der Hilfe eines Modells eine andere Größe bestimmen, die einer direkten Messung weniger gut zugänglich ist.

#### 5 LITERATURHINWEISE

- FRANKIGNOUL, C. und HASSELMANN, K. (1977):  
Stochastic climate models, Part 2.  
Application to sea surface temperature anomalies and thermocline variability.  
Tellus 29, 289-305.
- REYNOLDS, R.W. (1978):  
Sea surface temperature anomalies in the North Pacific Ocean.  
Tellus 30, 97-103.