DOI: 10.1002/piuz.200801165

Schleifen-Quantengravitation

Auf der Suche nach dem Heiligen Gral

THOMAS THIEMANN

Die Theorie einer Quantengravitation soll die Quantentheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie in Einklang bringen. Doch die Suche nach ihr ist seit fast siebzig Jahren ein ungelöstes Problem, gewissermaßen der „heilige Gral" der Grundlagenphysik. Ein guter Kandidat ist die Schleifen-Quantengravitation (Loop Quantum Gravity), die sich in den letzten zwanzig Jahren vielversprechend entwickelt hat.

In der Natur kennen wir vier Kräfte: die elektromagnetische, die schwache, die starke und die Gravitationskraft. Obwohl im Alltag so vertraut, ist die Gravitation die physikalisch am schlechtesten verstandene Kraft. Im Gegensatz zu den anderen Kräften wehrt sie sich dagegen, quantisiert zu werden. Die Quantisierung der anderen Kräfte resultiert in der Quantenelektrodynamik, Quantenflavourdynamik und Quantenchromodynamik. Jede dieser Theorien, beschrieben im Standardmodell der Materie, wurde an großen Beschleunigeranlagen präzise vermessen und experimentell extrem gut bestätigt.

Dies lässt keinen Zweifel daran, dass die Quantentheorie diese Kräfte korrekt beschreibt. Was ist aber so anders an der Gravitation, dass sie sich dagegen sträubt, quantisiert zu werden? Muss man dies überhaupt tun? Die Antwort auf beide Fragen findet man, wenn man sich eine Grundeigenschaft der klassischen Beschreibung der Gravitation, also Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie, vergegenwärtigt. Nach ihr ist die Gravitation keine Kraft im üblichen Sinne. Sie ist vielmehr gleichbedeutend mit den geometrischen Eigenschaften der Raumzeit. Hierbei ist die Geometrie oder Metrik g eines Raumes bekannt, wenn man alle raumzeitlichen Abstände zwischen Punkten kennt.

INTERNET

Animationen zu Spin-Netzwerken und zum Tetraeder-Farbkomplex

www.einstein-online.info/de/vertiefung/Spinnetzwerke/index.html

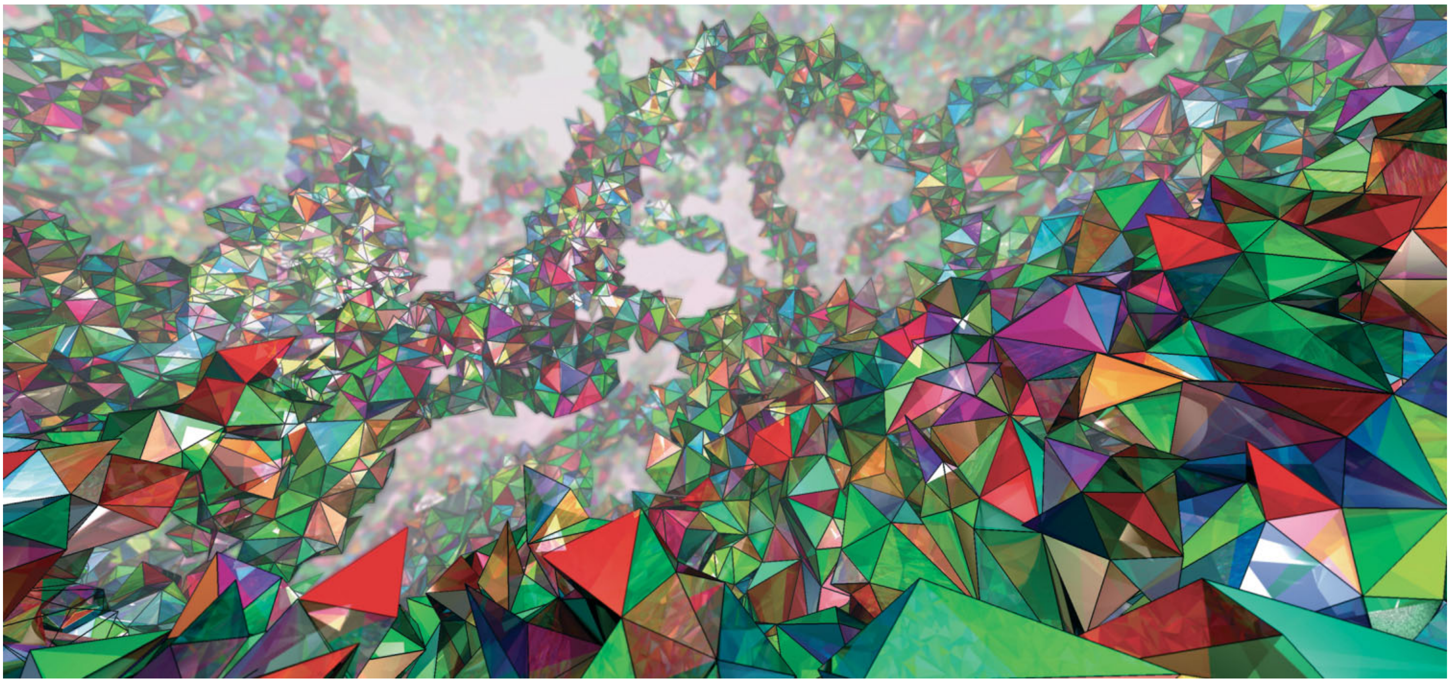
Ein Planet umrundet einen Stern nicht, weil Austauschteilchen (hypothetische Gravitonen) zwischen beiden eine Kraft vermitteln. Das so intuitive Bild der Austauschteilchen ist grundlegend für Quantentheorien. Beispielsweise vermitteln in der Quantenelektrodynamik virtuelle Photonen die Coulomb-Kraft zwischen elektrisch geladenen Teilchen. Auf die Gravitation ist dieses Bild jedoch nicht anwendbar. Der Planet umrundet den Stern anstatt auf einer geraden Linie zu fliegen, weil der Stern die Geometrie der Raumzeit krümmt.

Diese Krümmung kann man nicht sehen, aber messen. Dazu könnte man vom Zentrum des Sterns r Einheiten irgendeines Maßstabes radial nach außen gehen, dann in eine geschlossene Kreisbahn um dieses Zentrum einschwenken und diese mit u Einheiten ausmessen. Man würde feststellen, dass die Beziehung $u = 2\pi r$ der Euklidischen Geometrie verletzt ist, vielmehr gälte $u < 2\pi r$. Also ist der tatsächliche Abstand r zum Zentrum des Sterns größer als in der Euklidischen Geometrie. Die Äquatorialebene des Sterns ist also nicht wirklich flach, sondern verhält sich wie eine Kuhle, in der der Stern liegt (Abbildung 1).

Damit ergibt sich folgendes Bild von der Gravitation: Ist Materie vorhanden, dann verkrümmt sich dort die Geometrie. Dies führt dazu, dass Materie von der geradlinigen Bewegung abgelenkt wird. Wir deuten das als Beschleunigung. Tatsächlich bewegen sich Körper jedoch immer noch auf den „geradesten" Linien zwischen zwei Punkten – Geometer nennen diese kürzesten Verbindungskurven zwischen zwei Punkten Geodäten. Allerdings sehen diese in einer gekrümmten Geometrie anders aus als in der flachen Euklidischen Geometrie. Quantitativ ergeben sich hieraus Einsteins Feldgleichungen (siehe auch „Einsteins Feldgleichungen", S. 118). Sie beschreiben den Zusammenhang zwischen der Geometrie auf der einen und der Materieenergiedichte auf der anderen Seite.

Unabhängigkeit vom Hintergrund

Eine grundlegende Eigenschaft der Allgemeinen Relativitätstheorie ist es also, dass die Geometrie nicht vorgegeben ist. Sie muss dynamisch, im Gleichklang mit der vorhandenen Materie, aus den Einsteinschen Gleichungen bestimmt werden. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist somit eine *hintergrundunabhängige* Theorie: In ihr gibt es keine ausgezeichnete (Minkowski-)Metrik – oder Hintergrunds-



Die Schleifen-Quantengravitation konstruiert den Raum auf der Planck-Skala aus Dreiecken, die sich zu Polyedern (hier Tetraedern) gruppieren. Jedes Dreieck trägt eine Quantenzahl, die hier durch die Farben rot (niedrige Zahl) bis violett (hohe Zahl) symbolisiert wird. Mit jedem Planck-Zeitschritt werden Dreiecke der niedrigsten Quantenzahl erzeugt und vernichtet; alle anderen ändern ihre Quantenzahl. Wo keine Dreiecke sind, ist buchstäblich nichts, dort gibt es weder Raum noch Zeit. Der hier gezeigte Tetraeder-Farbkomplex ist „dual" zu einem Spin-Netzwerk mit vier Kanten pro Eckpunkt (s.a. Abbildung 4). *(© MPI für Gravitationsphysik, Grafik: MildeMarketing Wissenschaftskommunikation, Exozet.)*

metrik – g_0. Vielmehr ist die Metrik selbst eine dynamische Variable.

An diesem Prinzip der Hintergrundunabhängigkeit scheiterten alle bisherigen Versuche, eine gültige Theorie der Quantengravitation zu formulieren. Quantenfeldtheorien sind nämlich allesamt *hintergrundabhängige* Theorien. Die Axiome der Quantentheorie, also der Anwendung der Quantentheorie auf die Materie(felder), wie das im Standardmodell geschieht, verlangen in der Tat zwingend, dass man einen Hintergrund g_0 vorgibt. Eine gegebene klassische Feldtheorie wie Maxwells Theorie des Elektromagnetismus wird quantisiert, indem man eine Algebra der Feldoperatoren angibt und diese dann auf einem Hilbert-Raum realisiert. Das verlangt jedoch die Kenntnis darüber, wann Punkte raumartig getrennt sind (Näheres siehe „Die Quantisierung von Feldtheorien" auf **www.phiuz.de** unter „Downloads/Zusatzmaterial zu den Heften"). Solche raumartig getrennten Punkte können insbesondere untereinander kein Lichtsignal mehr austauschen. Für sie gibt es nämlich keine Kurve mehr, die sie im Minkowski-Raum verbindet und deren Tangente überall „zeitartig" oder „lichtartig" ist – also innerhalb des erlaubten Lichtkegels liegt, der sich zwischen Vergangenheit und Zukunft aufspannt.

Die bloße Formulierung dieses für die heutigen Quantenfeldtheorien fundamentalen Axioms nutzt die Kenntnis von g_0 offenbar entscheidend aus: Ansonsten könnte man raumartig getrennt gar nicht definieren. Nimmt man also der Quantenfeldtheorie den Hintergrund g_0, dann bricht ihr axiomatisches Gebäude zusammen. Folglich muss eine Theorie der Quantengravitation das Begriffsgebäude der Quantenfeldtheorie radikal verallgemeinern. Wir benötigen eine Quantentheorie von Geometrie und Materie auf einem Raum *ohne* zugehörige Hintergrundsmetrik g_0.

Dieses fundamentale Prinzip der Hintergrundunabhängigkeit kann man sich wie eine Theaterbühne vorstellen (Abbildung 2). Normalerweise ist sie unbeweglich, starr und bildet die Arena, auf der die Schauspieler agieren. Analog entspricht bei hintergrundabhängigen Theorien die Hintergrundsgeometrie g_0 der Bühne, die Materie den Schauspielern und ihre Interaktion der Wechselwirkung (Kräfteaustausch) zwischen den Materiefeldern. Die Ausbreitung der Felder unter Beachtung der Lichtkegel-Struktur der bekannten Geometrie g_0 hat ihr Analogon in der Bewegung der Schauspieler auf der Bühne.

Dieses Bild würde sich in einer Theorie der Quantengravitation, die vom Hintergrund unabhängig ist, drastisch ändern: Die Bühne selbst wird ebenfalls dynamisch, sie reiht sich ebenbürtig unter die Schauspieler ein. Der Unterschied zwischen Schauspielern und Bühne verschwindet, sie beeinflussen sich gegenseitig. Die Regeln dafür diktieren die Einstein-Gleichungen.

Notwendigkeit der Quantengravitation

Die Gravitation ist also in das Begriffsgebäude der Quantentheorie so schwer einzubauen, weil die Quantengravitation eine hintergrundunabhängige Quantenfeldtheorie sein

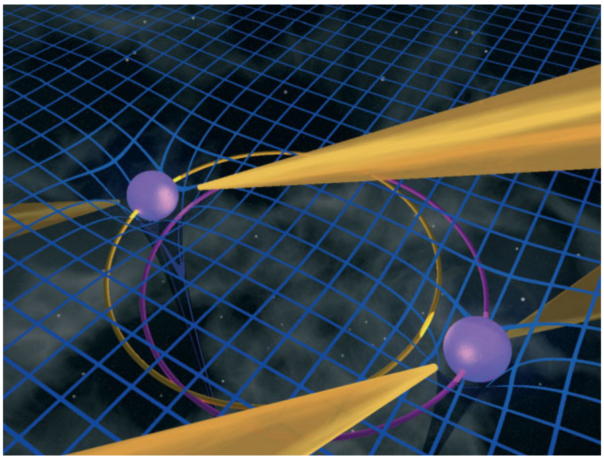


Abb. 1 ***Hintergrundunabhängige Theorie. Materie und Geometrie beeinflussen einander und schaffen eine dynamische Raumzeit. Dargestellt ist ein Doppelpulsarsystem.*** *(Grafik: Ismaël Cognard, CNRS Orleans.)*

muss. Die uns bekannten Quantenfeldtheorien sind dagegen alle vom Hintergrund abhängig und verletzen so ein Grundprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie. Als Rettung versuchte man, das Gravitationsfeld $h := g - g_0$ in „Gravitonen" zu qantisieren. Dazu entwickelte man die Einstein-Gleichungen störungstheoretisch um g_0 und konstruierte eine Quantenfeldtheorie des Feldes h auf dem Hintergrund g_0. Allerdings verletzt dieser störungstheoretische Ansatz selbst schon das Prinzip der Hintergrundunabhängigkeit. Das Resultat war eine „nicht-renormierbare Theorie", in der unendlich viele Parameter experimentell zu fixieren sind und die folglich keine Vorhersagekraft besitzt – kurz: ein physikalisches Desaster.

Diese Situation würden die String- oder M-Theorie entscheidend verbessern, glaubte man bis vor kurzem. Sie ist keine Quantenfeldtheorie im üblichen Sinne, aber trotzdem vom Hintergrund abhängig. Nun hat sich jedoch herausgestellt, dass die Stringtheorie bei weitem nicht eindeutig ist: Es gibt mindestens 10^{500} Varianten davon – wenn nicht gar unendlich viele. Diese Uneindeutigkeit ist – zumindest zum Teil – auf die Hintergrundabhängigkeit zurückzuführen. Diese Situation gilt es zu verbessern, falls dieser Ansatz zu einer erfolgreichen Vereinigung der Quantentheorie mit der Gravitation führen soll.

EINSTEINS FELDGLEICHUNGEN

Der Metriktensor $g_{\mu\nu}$; μ, ν = 0,1,2,3 mit Inversem $g^{\mu\nu}$ eines Raumes (Mannigfaltigkeit) M bestimmt den sogenannten Riemann-Krümmungstensor $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}\, g^{\rho\sigma}$ und den Ricci-Skalar $R = R_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}$. Damit lauten die Einsteinschen Feldgleichungen

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}}_{\text{(Geometrie)}} = \underbrace{8\pi G T_{\mu\nu}}_{\text{(Materie)}},$$

wobei $T_{\mu\nu}$ der Energie-Impulstensor der Materie und G die Newtonsche Gravitationskonstante ist.

Ein anderer, denkbarer Ausweg bestünde darin, die Gravitation einfach nicht zu quantisieren. Dies führt jedoch zu einer Inkonsistenz: Die rechte Seite der Einstein-Gleichungen (Materie, siehe „Einsteins Feldgleichungen") wäre dann quantisiert, die linke Seite (Geometrie) jedoch nicht. Mathematisch hätte man es rechts mit Operatoren zu tun, links mit klassischen Feldern. Das ist genauso unsinnig wie die Gleichung 0 = 1. Die Heisenbergsche Unschärferelation gibt der Quantentheorie Fluktuationen der Materie-Quantenfelder (Vakuumfluktuationen) zwingend vor, und diese geben ihren $\hbar$-Fingerabdruck über die Einstein-Gleichungen an die Geometrie weiter. Folglich brauchen wir echte Quanten-Einstein-Gleichungen, also eine wirklich quantisierte Raumzeit.

Es gibt auch noch andere Gründe für die Notwendigkeit einer Theorie der Quantengravitation. Die Allgemeine Relativitätstheorie und die Quantentheorie enthalten jeweils gravierende Inkonsistenzen. Bei der Allgemeinen Relativitätstheorie sind das die – formal – unendlich hohen Materiekonzentrationen als „Anfangsbedingung" des Urknalls oder im Zentrum Schwarzer Löcher. In solchen astrophysikalisch oder kosmologisch relevanten Situationen divergieren die klassischen Einstein-Gleichungen. Sie ergeben offenbar keinen physikalischen Sinn mehr. Für sinnlose mathematische Ausdrücke ist aber in einer fundamentalen Theorie kein Platz. Man könnte sich vorstellen, dass hier die Quantentheorie zu Hilfe kommt, so wie diese einst die Stabilität der Atome „retten" konnte. Schließlich müssten nach der klassischen Maxwell-Theorie die Elektronen auf einer Spiralbahn in den Atomkern stürzen, weil sie wegen der beschleunigten Bewegung um den Kern permanent Energie abstrahlen. Die Rettung brachten erst die stabilen, diskreten Quantenzustände. Wie wäre es also, wenn eine Quantengeometrie auch nur diskrete statt kontinuierliche Abstände erlauben würde?

Die Inkonsistenz der Quantentheorie zeigt sich ebenfalls im Grenzfall Schwarzer Löcher, allerdings sehr kleiner Minilöcher. In einer konventionellen Quantenfeldtheorie, die also eine Minkowski-Metrik g_0 als Bühne braucht, sind an den Streuprozessen der Elementarteilchenphysik virtuelle Teilchen beteiligt. Solche Teilchen erfüllen nicht notwendigerweise die Massenschalenbedingung $E^2 = P^2c^2 + M^2c^4$ (E ist die Energie, P der Impuls und M die Ruhemasse des Teilchens), wobei E und P unbeschränkt groß sein dürfen. Es ist leicht einzusehen, dass das Auftreten dieser virtuellen Teilchen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie unverträglich ist. Dazu gehen wir der Einfachheit halber in ein Inertialsystem, in dem für große Energien $E \approx Pc$ gilt, die Ruheenergie also vernachlässigbar ist. Ein solches Energiepaket hat eine De-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda \approx \hbar\, c/E.$$

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie kollabiert aber dieses Teilchen zu einem Schwarzen Miniloch, sobald

$$\lambda < R_S \approx G\, E/c^4,$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist und R_S der Schwarzschild-Radius. Das entspricht etwa dem Radius der Kreisbahn eines Photons um einen Körper mit Masse E/c^2, innerhalb dessen Licht nicht mehr entkommen kann. Bei Minilöchern passiert das bei der Planck-Länge $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$ cm. Diese Minilöcher zerfallen dann in der Planck-Zeit $\tau_P = \ell_P/c = 10^{-43}$ s in leichtere Elementarteilchen. Dafür sorgt ein berühmter Effekt, der nach Stephen Hawking benannt ist. Doch solche fundamentalen Prozesse bleiben in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie unberücksichtigt, weil sie die Gravitation nicht einbezieht.

Gedankenexperimente dieser Art legen den Schluss nahe, dass es physikalisch unmöglich ist, Raumzeitabstände unterhalb ℓ_P aufzulösen. Die Geometrie der Quantenraumzeit könnte folglich eine Art diskrete, granulare, diskontinuierliche Struktur haben, die erst auf der Planck-Skala sichtbar wird. Existiert eine solche Struktur, dann bleibt sie uns bei den bisher experimentell erreichbaren Energien von etwa 10^3 GeV völlig verborgen, denn die Planck-Energie liegt bei etwa 10^{19} GeV. Mit der heutigen Technologie müsste ein Beschleuniger die Abmessungen der Milchstraße haben, um in diesen Bereich vorzudringen.

Klassische Grundlagen der Schleifen-Quantengravitation

Für eine erfolgreiche Theorie der Quantengravitation ist also die Hintergrundunabhängigkeit eine notwendige Bedingung, folglich muss sie auch nichtstörungstheoretisch formuliert werden. Einen möglichen Ansatz dazu bietet das Verfahren der kanonischen Quantisierung (Näheres siehe „Die Quantisierung von Feldtheorien" auf **www.phiuz.de**). Dabei entscheidet die Wahl der kanonischen Variablen über den Erfolg. Eine ungeschickte Wahl führt nämlich zu komplizierten Vertauschungsrelationen und verhindert die praktische Durchführbarkeit des Quantisierungsprogramms.

Überraschenderweise stellte sich heraus, dass nicht Metriken und zugehörige kanonisch konjugierte Impulse – wie wir sie im Studium in der klassischen Mechanik im Lagrange- und Hamilton-Formalismus zum ersten Mal kennenlernen – die geeigneten Variablen für eine Quantisierung der Gravitation sind. Es sind vielmehr Größen, die sich auch bei den anderen Kräften großer Beliebtheit erfreuen, und den elektrischen und magnetischen Feldern des Elektromagnetismus ähneln. Hierbei kodiert das „gravitative elektrische Feld" die raumartigen Distanzen, während für die zeitartigen Abstände das „gravitative magnetische Feld" verantwortlich ist. Damit ist ein Schritt in Richtung einer Vereinheitlichung aller Kräfte getan: Alle vier Kräfte lassen sich im kanonischen Formalismus durch sogenannte Eichtheorie-Variablen beschreiben. Im Studium lernt man anhand der Maxwell-Theorie erstmals Eichtheorie-Variablen kennen, als elektrisches Feld E und magnetisches Feld B. B beschreibt man auch gerne durch ein zugehöriges Vektorpotential A, aus dem man B durch (äußere) Differentiation erhält. Nicht alle Größen einer Eichtheorie sind observabel, also messbar. Das gilt nur für solche, die unter der zugehörigen Eichtransformation invariant sind. Bei der Gravitation gibt es zwei Typen von Eichtransformationen, erstens die allgemeinen Koordinatentransformationen und zweitens sogenannte Yang-Mills-Eichtransformationen. Letztere involvieren gewisse Transformationen des Vektorpotentials, sie sind uns bereits aus der Maxwell-Theorie vertraut.

Die Maxwell-Theorie zählt zu den sogenannten Abelschen Eichtheorien, während nichtabelsche Eichtheorien (Yang-Mills-Theorien) auf die schwache und die starke Wechselwirkung angewendet werden. Die Abelsche Maxwell-Theorie unterscheidet sich von den nichtabelschen Eichtheorien allein darin, dass elektrische und magnetische Felder matrixwertig sind. Sie nehmen also Werte in einer Lie-Algebra an. Ein wichtiges mathematisches Werkzeug zur Beschreibung der Eichtheorien und ihrer Symmetrieeigenschaften sind unitäre Gruppen. Dabei bezeichnet allgemein das Symbol $U(N)$ für „unitäre Gruppe" oder $SU(N)$ für „spezielle unitäre Gruppe" jeweils eine Gruppe von unitären (unimodularen) $N \times N$-Matrizen.

Die Quantenelektrodynamik ist danach eine $U(1)$-Eichtheorie und die Quantenchromodynamik eine $SU(3)$-Eichtheorie. Die Gravitation und die Quantenflavourdynamik lassen sich dagegen durch eine $SU(2)$-Eichtheorie beschreiben.

Ein weiterer Unterschied zwischen den Materiekräften und der Gravitation besteht natürlich darin, dass die Dynamik

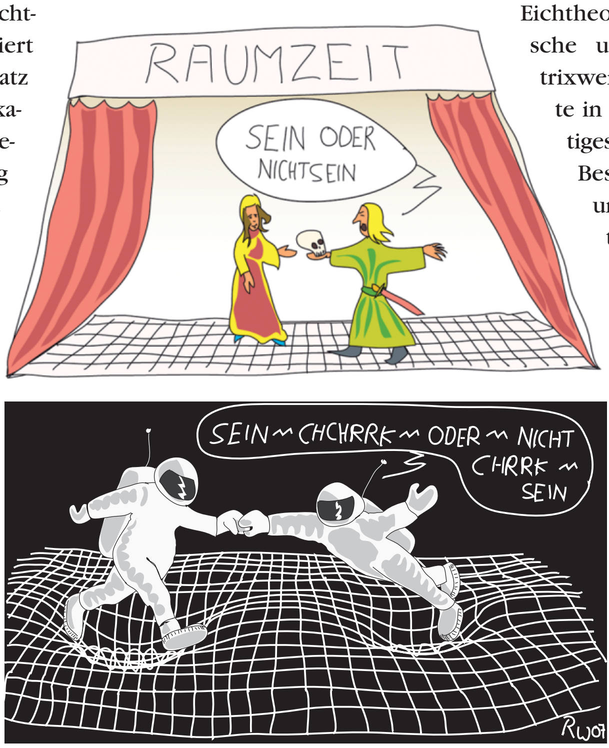
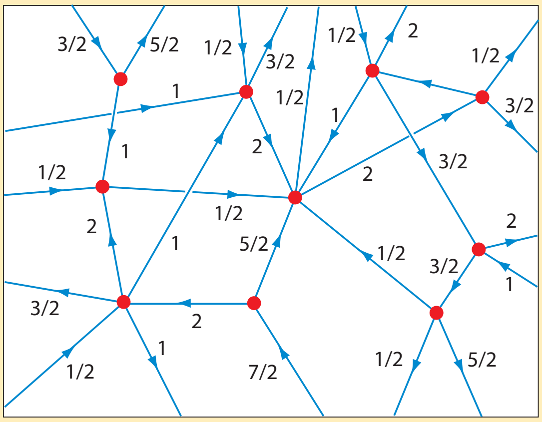


Abb. 2 ***Oben: Die Quantentheorie ist hintergrundabhängig. Sie benötigt eine von außen vorgegebene Raumzeit als Bühne, auf der sie die Materie wie Schauspieler agieren lässt. Unten: Die Allgemeine Relativitätstheorie ist hintergrundunabhängig, denn sie erschafft sich selbst die Raumzeit als dynamische Größe.*** *(Cartoon: Roland Wengenmayr [1].)*

ABB. 3 | VOM GRAPH ZUM SPIN-NETZWERK



Allgemein bestehen mathematische Graphen aus Linien (Kanten), die an ihren Endpunkten durch Knoten verbunden sind. Die Pfeile machen sie zu „gerichteten" Graphen. Hinzufügen von Spin-Quantenzahlen (und anderer Eigenschaften) macht das Netzwerk zum Spin-Netzwerk, das den Quantenzustand des Raumes zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt.

grundsätzlich anders ist. Mathematisch gesehen, werden die Materiekräfte auf dem Minkowski-Raum durch eine Yang-Mills-Hamilton-Funktion beschrieben. Die Hamilton- Funktion – oder Energiefunktion – mit ihren kanonisch konjugierten Orts- und Impulsvariablen lernen wir im Studium in der klassischen Mechanik kennen. Diese lässt sich als ein Polynom vierten Grades aus den elektrischen und magnetischen Feldern schreiben. Dabei hängt sie – was wichtig ist – explizit von der Minkowski-Hintergrundmetrik ab.

Im Gegensatz dazu ist die Hamilton-Funktion der Gravitation exakt gleich null. Dafür gibt es jedoch eine unendliche Anzahl von Zwangsbedingungen, die allesamt hochgradig nichtpolynomiale Ausdrücke in den elektrischen und magnetischen Feldern sind und von keiner Hintergrundmetrik abhängen. Dass die Gravitation keine Hamilton-Funktion besitzt, ist zunächst überraschend. Sie ergibt sich aber aus dem Tatbestand, dass die Hamilton-Funktion Zeittranslationen erzeugt. In der Gravitation herrscht jedoch Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen: Daher sind Zeittranslationen als Eichtransformationen anzusehen, die tatsächlich die observablen physikalischen Eigenschaften des betrachteten Systems nicht verändern. Folglich muss der zugehörige Erzeugungsoperator verschwinden, er ist somit eine Zwangsbedingung statt einer Energiefunktion.

Da also Zeittranslationen Eichtransformationen sind, sind Observable zeitunabhängig, in der Gravitation scheint „nichts zu passieren". Dies ist eine Facette des „Problems der Zeit". Man kann diesen offenbaren Widerspruch aber sehr einfach wie folgt lösen. Wir gehen dazu von zwei Größen S („System") und T („Uhr") aus, die jede für sich nicht observabel ist – nur ihr gegenseitiger Bezug aufeinander, die relationale Observable F. Nun betrachten wir deren Zeittranslationen $t \rightarrow S(t), T(t)$. Dann bestimmen wir zu einem gegebenen Parameter τ den Zeitpunkt t, zu dem unsere „Uhr" T den Wert τ annimmt. Wertet man das „System" S zu diesem Zeitpunkt aus, so erhalten wir die Observable $F(\tau)$, die sich nun in der physikalischen Zeit τ nicht trivial ändert. Genau auf diese Weise misst man in der Physik Evolution, nämlich als relationale Änderung von Größen.

Schleifen-Quantengravitation

Wir sind jetzt in der Lage, das Programm der kanonischen Quantisierung für die Allgemeine Relativitätstheorie durchzuführen. Da in einer Quantenfeldtheorie die Fluktuationen der Felder $E(x), A(x)$ an den Punkten x singulär werden, arbeitet man lieber mit Größen, die denselben Informationsgehalt haben, aber mathematisch wohldefiniert sind. Diese sind aus der Gitter-Eichtheorie wohlbekannt (siehe auch Physik in unserer Zeit **2004**, *35*(5), 227): Es handelt sich um (nichtabelsche) elektrische und magnetische Flüsse, also das Integral der elektrischen und magnetischen Felder über zweidimensionale Flächen.

Mit dem Satz von Stokes lässt sich der magnetische Fluss auch als Integral des Potentials über den eindimensionalen geschlossenen Rand der Fläche (engl. Loop) schreiben. Daher kommt der Name Loop Quantum Gravity. Genauer gesagt betrachtet man das (pfadgeordnete) Exponential des Vektorpotentials entlang eines geschlossenen Pfades (Loop). In einer Abelschen Eichtheorie ist dies dasselbe wie das Exponential des magnetischen Flusses durch eine beliebige Fläche, die der Loop umrandet. In nichtabelschen Theorien ist das etwas komplizierter. Jedenfalls nehmen diese sogenannten Holonomien Werte in der zugehörigen Eichgruppe an: Sie sind Matrizen, und ihre Spur ist eine Invariante unter Yang-Mills-Eichtransformationen.

Diese magnetischen Holonomien und elektrischen Flüsse dienen nun als Ausgangspunkt des kanonischen Quantisierungsprogramms. In der Quantenfeldtheorie ist das Darstellungsproblem im Allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Es gibt nämlich allgemein unendlich viele „inäquivalente" Realisierungen einer gegebenen Algebra als Operatoren auf einem Hilbert-Raum. Inäquivalent bedeutet hier, dass beispielsweise Erwartungswerte oder Spektren von Operatoren sich unterscheiden (von Spektren spricht man beispielsweise bei den Energieeigenwerten von Hamilton-Operatoren, weil sie an das Energiespektrum von Wasserstoffatom erinnern). Es stellt sich jedoch heraus, dass in der Schleifen-Quantengravitation das Darstellungsproblem eindeutig lösbar ist, wenn man die physikalisch vernünftige Forderung nach Invarianz unter (räumlichen) Koordinatentransformationen stellt. Da hintergrundabhängige Theorien nicht koordinateninvariant sind, folgt hieraus das erstaunliche Resultat, dass hintergrund*un*abhängige Theorien den ersteren im Grade ihrer Eindeutigkeit überlegen sind.

Ich werde nun den Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ der Schleifen-Quantengravitation in groben Zügen beschreiben. Dazu betrachten wir beliebige, endliche Ansammlungen von Schleifen. Die Vereinigung solcher Schleifenmengen definiert einen sogenannten Graphen: Das ist nach der Graphentheorie ein abstraktes Objekt, das man sich als Netzwerk aus Linien und Verbindungspunkten vorstellen kann – den sogenannten Kanten und Knoten, die jeweils für sich eine Menge bilden (Abbildung 3). Unser Graph γ soll eine Menge von Kanten in sich vereinen, die sich untereinander nur in ihren Endpunkten, den Knoten, schneiden. Um Quanteneigenschaften erfassen zu können, braucht $\mathscr{H}$ nun noch „Wellenfunktionen". Hier sind es komplexwertige Funktionen des magnetischen Potentials. Sie werden durch solche Graphen indiziert, die nur von den Holonomien entlang der entsprechenden Schleifen abhängen. Wie jede Wellenfunktion müssen diese Funktionen quadratintegrabel sein – und zwar bezüglich eines bestimmten Maßes auf einem (verallgemeinerten) Raum von Eichpotentialen.

Für die Experten sei erwähnt, dass dieses Maß das sogenannte Haar-Maß involviert, wie man es auch aus der Gitter-Quantenchromodynamik gewöhnt ist. Im Unterschied zur Gitter-Quantenchromodynamik ist hier das Gitter γ nicht festgelegt: Alle Gitter sind gleichzeitig in $\mathscr{H}$ involviert. Daher handelt es sich bei der Schleifen-Quantengravitation im Gegensatz zur Gittereichtheorie um eine Kontinuumstheorie. Es gibt also keine Gitterlänge, die man am Ende gegen Null zu schicken hat. Das muss auch so sein, denn eine vorgegebene Länge erfordert eine Hintergrundmetrik, für die kein Platz in einer hintergrundunabhängigen Theorie ist.

Quantenspindynamik

Damit ist die Quantenkinematik gelöst, wir können in unserem Hilbert-Raum $\mathscr{H}$ allgemein Bewegungen beschreiben. Wie steht es mit der Dynamik aus, also der Bewegung unter Einfluss von Kräften? Dazu müssen wir Zwangsbedingungen $C(q,p)$ (q ist die Ortskoordinate, p der kanonisch konjugierte Impuls) einführen. Sie sind nötig, um bestimmte Symmetrieeigenschaften der Allgemeinen Relativitätstheorie zu erfüllen: Diese sorgen dafür, dass man bei der Legendre-Transformation nicht alle Geschwindigkeiten v nach den Impulsen p auflösen kann (siehe „Die Quantisierung von Feldtheorien" auf **www.phiuz.de**). Tatsächlich können wir auf $\mathscr{H}$ zu den notwendigen Zwangsbedingungen C korrespondierende Operatoren $\hat{C}$ implementieren: Die zugehörigen Quanten-Einstein-Gleichungen, die auch die Invarianz unter allgemeinen Koordinatentransformationen implementieren,

$$\hat{C}\,\Psi = 0,$$

lassen sich prinzipiell lösen. Allerdings ist das eine komplexe Herausforderung, da der Lösungsraum nicht explizit bekannt ist. Trotzdem haben wir nun tatsächlich einen mathematisch rigorosen Kandidaten für eine Theorie der Quantengravitation konstruiert. Diese Theorie ist zwar nicht komplett lösbar, aber das ist eher ein praktisches Problem. Schließlich sind auch für die klassischen Einstein-Gleichungen nur wenige exakte Lösungen bekannt, trotzdem ist die Allgemeine Relativitätstheorie eine mathematisch wohldefinierte Theorie. Dass die Quantentheorie der Allgemeinen Relativitätstheorie noch schwerer lösbar ist, trifft uns also nicht unerwartet.

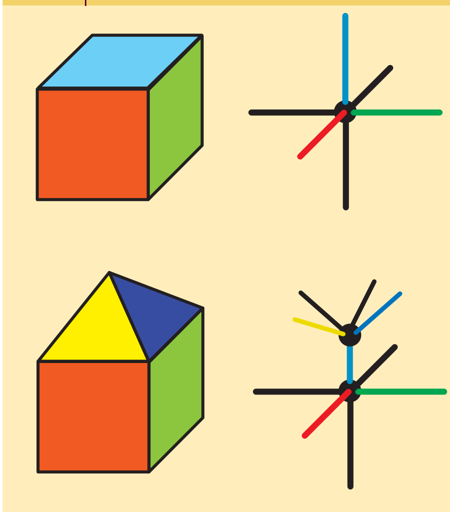
Um uns die Lösungen der Quanten-Einstein-Gleichungen anschaulich vorstellen zu können, müssen wir noch weitere Elemente der Schleifen-Quantengravitation beschreiben. Zunächst benötigen wir den Begriff des Spin-Netzwerkes. Ein Spin-Netzwerk ist ein Tripel (γ, j, I). Es besteht aus einem Graph γ, einem Satz j von Spinquantenzahlen, von denen je eine einer Kante zugeordnet ist, und einem Satz von Quantenzahlen I (Intertwiner), jeweils eine pro Knoten. Die Rolle der Intertwiner will ich hier ausklammern.

Das Auftreten der Spinquantenzahlen erscheint zunächst mysteriös. Den entscheidenden Hinweis auf ihren Ursprung liefert jedoch die Tatsache, dass die Holonomien Elemente von $SU(2)$ sind. Das erinnert an die Theorie des Drehimpulses in der Quantenmechanik-Vorlesung: Dort lernen wir, dass die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ durch Spinquantenzahlen j klassifiziert werden. Um unsere Spinquantenzahlen nun physikalisch zu deuten, betrachten wir zu einem gegebenen Graphen γ einen dazu gehörigen, sogenannten dualen Zellkomplex γ^*. Ein solcher Komplex entsteht wie folgt: Eine Menge von Polygonen (n-Ecke) werden an gemeinsamen Randlinien miteinander verklebt, bis sie ein dreidimensionales Volumen, eine polyedrische Zelle, einschließen.

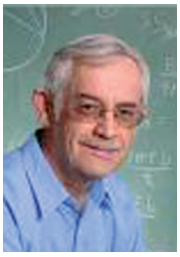
Beispiele für Polyeder sind die regelmäßigen Platonischen Körper wie der Tetrader, Hexaeder (Kubus) etc. Wir brauchen allerdings eine Sammlung von beliebig unregelmäßigen Polyedern, die wir an ihren gemeinsamen Randpolygonen zu einer Art „Raumzeitschaum" verkleben, der einen Zellkomplex γ^* definiert. Den hierzu dualen Graphen γ erhalten wir, wenn wir für jeden Polyeder einen inneren Punkt auswählen und diese Punkte durch die Randpolygone zu jedem benachbarten Polyeder hindurch verbinden. Diese Verbindungslinien sind die Kanten des Graphen, während die inneren Punkte seine Knoten sind (Abbildung 4). Wir sehen, dass jeder Kante des Graphen genau ein Polygon entspricht.

In der Schleifen-Quantengravitation gibt es nun wohldefinierte Operatoren. Ihre klassische Bedeutung liegt im

ABB. 4 | SPIN-NETZWERKE UND POLYGONE



In der Schleifen-Quantengravitation werden die Quantenzustände des Raums durch Spin-Netzwerke dargestellt. Rechts: Zwei Auschnitte aus einem räumlichen Spin-Netzwerk mit seinen Linien (farbig) und Knoten (schwarz). Links: Polygone, durch deren Flächen die zugehörigen Linien (gleiche Farbe) hindurch „stechen". Mit der Größe einer Fläche wächst die Spin-Quantenzahl der zugehörigen Linie oder Kante.



Jakob Bekenstein, Universität Jerusalem

Flächeninhalt der Polygone bezüglich einer Metrik, die durch die elektrischen Felder definiert ist. Entscheidend ist nun, dass die Funktionen des Spin-Netzwerks diese Operatoren diagonalisieren können. Sie führen diese also auf ihre Eigenwerte zurück, wie wir das aus der Quantenmechanik-Vorlesung kennen. Dabei entspricht der Eigenwert eines Polygon-Flächenoperators in etwa der Spin-Quantenzahl der zum Polygon dualen Kante multipliziert mit der Planck-Fläche, für die gilt:

$$\ell_P^2 = \hbar G/c^3 \approx 10^{-66}\ \mathrm{cm}^2.$$

Man beachte, dass das Spektrum der Flächenoperatoren rein diskret ist – wie das Energiespektrum des Wasserstoffatoms. Das sorgt für die entscheidende Eigenschaft der Schleifen-Quantengravitation: Ihre Geometrie ist gequantelt. Die Flächeninhalte der Polygone beispielsweise sind diskret und entsprechen Vielfachen der Planck-Fläche.

Die Quantendynamik lässt sich nun wie folgt beschreiben. Wir betrachten zu einem gegebenen Zeitpunkt eine Funktion des Spin-Netzwerks mit einem zugehörigen dualen Komplex γ^*. Zur Vereinfachung der Illustration stellen wir nur γ^* graphisch dar und betrachten auch nur einen Komplex, der aus lauter Tetraedern besteht. Mehr oder weniger Flächeninhalt wird durch eine mehr oder weniger rote oder violette Farbe auf den Tetraederflächen dargestellt (Abbildung siehe S. 117). Die Wirkung der Hamiltonschen Zwangsbedingung besteht darin, dass sie den Spin auf den Kanten des Graphen und damit den Flächeninhalt (Farbe) auf den dualen Flächen nach bestimmten Regeln verändert. Die Regeln sind durch die analytische Form von C vorgegeben. Dabei können neue Kanten (Flächen) mit niedrigem Spin (roter Farbe) neu entstehen oder alte Kanten (Flächen) mit niedrigem Spin vergehen. Eine nicht vorhandene Kante entspricht in der gezeigten Grafik einer durchsichtigen Fläche.

Man beachte, dass die abgebildeten Flächen nicht den Flächeninhalt besitzen, den sie ihrer Form nach zu haben scheinen. Dazu würde man nämlich annehmen müssen, dass sie in eine flache Euklidische Geometrie eingebettet sind. Schleifen-Quantengravitation ist aber eine hintergrundunabhängige Theorie. Daher ist die Form der Flächen völlig irrelevant – man weiß a priori nicht, wie sie eingebettet sind. Der Flächeninhalt wird einzig und allein durch den Spin, also die Farbe bestimmt: Dies ist eine Eigenschaft des Quantenzustandes.

Die in der Abbildung angedeuteten Leerräume bedeuten nicht etwa, dass dort materiefreier Raum ist. Von Materie ist bisher noch gar nicht die Rede, wir haben nur die Quanten-Einstein-Gleichungen des Vakuums betrachtet. In den materiefreien Bereichen ist die Geometrie nicht angeregt: Die Flächen haben dort keinen Inhalt, weil kein Graph existiert. Folglich stellen die Leerräume im Bild Regionen ohne Volumeninhalt dar – sie sind physikalisch gar nicht vorhanden, also Löcher im Raum! Diese Leerräume entstehen und vergehen permanent. Also fluktuiert in der Schleifen-Quantengravitation auf der Planck-Skala die Topologie des Raums in chaotischer Art und Weise.

Für die Dynamik der Schleifen-Quantengravitation ergibt sich zusammengefasst folgendes Bild. Die Hamiltonsche Zwangsbedingung wirkt wie ein Polynom aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Sie verändert den Spin einer Funktion des Spin-Netzwerks und damit die durch sie bestimmte Quantengeometrie in jedem Planck-Zeitschritt. Da die Spins die „Farbladungen“ der $SU(2)$-Gruppe sind, darf man in Anlehnung an die Quantenchromodynamik die Schleifen-Quantengravitation auch als Quantenspindynamik bezeichnen.

Physikalische Anwendungen

Bisher war nur von der Vakuumtheorie die Rede, doch alle bisherigen Aussagen lassen sich auf den Fall vorhandener Materie übertragen. Damit ist die Beschreibung der vollen Quantentheorie von Gravitation und Standardmodell möglich. Allerdings müssen dabei neuartige, hintergrundunabhängige Hilbert-Räume verwendet werden. Grob gesprochen sind alle bosonischen Teilchen (Kräfte) auf den Kanten eines Graphen lokalisiert, während die Fermionen (und das Higgs-Teilchen) an dessen Knoten lokalisiert sind. Die Kanten sorgen damit für den Kräfteaustausch zwischen den Leptonen und Quarks – sie wirken wie Spiralfedern.

Damit wird die Theorie natürlich noch komplizierter und wohl kaum exakt lösbar sein, was unbefriedigend ist. Schließlich kann man nur mit Kenntnis der physikalischen Zustände die Schleifen-Quantengravitation auf ihre Konsistenz mit den etablierten Theorien testen. Im semiklassischen Limes, also bei kleinen Fluktuationen des Gravitationsfeldes, muss sie die Allgemeine Relativitätstheorie korrekt beschreiben – und genauso bei den Materiekräften die Quantenfeldtheorien mit deren Hintergrundmetriken.

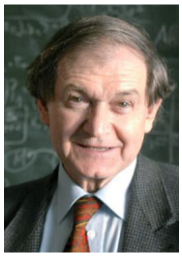
Um trotzdem Forschritte zu erzielen und somit den Kontakt mit der bereits bekannten Physik herzustellen, muss man also Näherungslösungen der Theorie finden – zumindest im semiklassischen Regime. Störungstheoretische Verfahren verbieten sich, wie schon diskutiert, wegen der fundamentalen Forderung der Hintergrundunabhängigkeit. Als nicht-perturbatives Werkzeug entwickelten Theoretiker daher kohärente Zustände in $\mathcal{H}$, welche die Zwangsbedingung näherungsweise lösen. Diese Zustände minimieren die Heisenbergsche Unschärferelation zwischen den Flüssen und den Holonomien – und damit die Quantenfluktuationen der Geometrie insgesamt. Solche Zustände nähern die Erwartungswerte von Operatoren sehr genau an die Werte an, die sie als klassische Funktionen haben würden. Mit ihrer Hilfe wurde bereits gezeigt, dass die Hamiltonsche Zwangsbedingung auf dem kinematischen Hilbert-Raum den richtigen klassischen Limes hat. Das ist ein wichtiger Schritt zur Etablierung des physikalischen klassischen Limes, weil die Hamiltonsche Zwangsbedingung den physikalischen Hilbert-Raum bestimmt. Ein davon unabhängiges Verfahren zur Berechnung physikalischer Zustände stellen auch sogenannte Spinschaum-Modelle dar.

Mit derartigen Zuständen kann man prinzipiell Korrekturen zur Physik des Standardmodells oder der Quantenkosmologie berechnen. Genau das passiert zur Zeit an der Forschungsfront. Mit der Inbetriebnahme des Large Hadron Collider LHC am CERN (siehe Physik in unserer Zeit **2008**, *39* (2), 78) und der Verbesserung der Präzision der Vermessung der Anisotropie der kosmologischen Hintergrundstrahlung mit dem NASA-Satelliten WMAP und demnächst auch mit dem ESA-Satelliten PLANCK werden die nächsten Jahre hochinteressant. Starke Indizien deuten auch darauf hin, dass die Singularität der klassischen Allgemeinen Relativitätstheorie beim Urknall vermeidbar ist. Womöglich gab es also eine Zeit vor dem Urknall, spekulieren manche. Derzeit wird untersucht, ob solche Eigenschaften der Quantengravitation beobachtbare Signaturen in der Hintergrundstrahlung hinterlassen haben.

Auch zu Schwarzen Löchern gibt es vielversprechende Resultate aus der Schleifen-Quantengravitation. Berühmte Arbeiten von Jakob Bekenstein, Stephen Hawking und Roger Penrose legen nahe, dass schwarze Löcher mit einer intrinsischen Entropie ausgestattet sind. Es stellt sich die Frage, wie diese Entropie mikroskopisch erklärt werden kann. Ein naives Bild besteht darin, dass sich der Ereignishorizont des Schwarzen Lochs in Flächen mit der Größe ℓ_P^2 unterteilen lässt, denen man jeweils ein Bit 1 oder 0 an im Loch „verschwundener" Information zuordnen kann (siehe Physik in unserer Zeit **1997**, *28*(1), 22 und **2005**, *36*(2), 70). Die Analyse der Schleifen-Quantengravitation würde tatsächlich eine Strukturierung des Ereignishorizonts liefern, aber eine komplexere: Die Elementarflächen könnten dann nicht nur 0 und 1 als fehlende Elementarinformation tragen, sondern 0, 1, … $2j$. Dabei ist j die Spinquantenzahl einer Kante, die den Ereignishorizont schneidet und die den Wert A/ℓ_P^2 nicht übersteigen darf (A ist der Flächeninhalt des Ereignishorizonts).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Schleifen-Quantengravitation ein vielversprechender Kandidat für eine Theorie der Quantengravitation ist. Sie basiert auf einfachen, klaren Konzepten und benutzt zudem nur die bekannten Prinzipien der Quantentheorie und der Allgemeinen Relativitätstheorie. Daher vermeidet sie zusätzliche Annahmen, die sich bisher der Beobachtung entziehen. Dazu zählen zum Beispiel die höheren Dimensionen, wie sie die Stringtheorien benötigen. Auch für die Grundannahme der Supersymmetrie (Susy), nämlich dass es genauso viele Fermionen wie Bosonen gibt, fehlt bis heute jegliche experimentelle Bestätigung. Auf Susy basieren jedoch viele Stringtheorien oder Große Vereinheitlichte Theorien.

Es gibt bereits Ideen, wie sich die Schleifen-Quantengravitation im Experiment prüfen ließe. Technisch könnten Experimente mit der Auflösung bis zur hinunter Planck-Skala nicht so absurd unerreichbar zu sein, wie es zunächst scheint (siehe auch den Beitrag von Claus Lämmerzahl im gleichen Heft). Der Schlüssel liegt in der Beschreibung des Vakuums. Falls die Schleifen-Quantengravitation richtig liegt, haben wir davon eine falsche Vorstellung. Das Vakuum ist dann kein glattes, makelloses Gebilde, sondern eher ein auf der Planck-Skala amorpher, sich stets verändernder Kristall. In einem Kristall gibt es aber Dispersion, also eine Frequanzabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit. Diese sollte sich in Laufzeitunterschieden von Photonen manifestieren, die von einem weit entfernten und gut beobachtbaren kosmischen Ereignis zu uns reisen. Die Hoffnung ruht hier konkret auf den gewaltigen Gammastrahlungsblitzen (Gamma-Ray Bursts, siehe Physik in unserer Zeit **2007**, *38*(6), 274). Sollte der Dispersionseffekt existieren und groß genug sein, worauf die Schleifen-Quantengravitation hoffen lässt, dann sollte er bei diesen Beobachtungen messbar sein. Das bietet eine faszinierende Perspektive.



Roger Penrose, Gresham College, London.

DIE ABENTEUER VON OPUS, DEM PINGUIN

Mehr über die Abenteuer von Opus, dem Pinguin, auf www.berkeleybreathed.com. Sein Schöpfer, der amerikanische Cartoonist Berkeley Breathed, erhielt 1987 den Pulitzer-Preis.

Zusammenfassung

Die Theorie einer Quantengravitation soll die Quantentheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie in Einklang bringen. Doch die Suche nach ihr ist seit fast siebzig Jahren ein ungelöstes Problem, sozusagen der „heilige Gral" der Grundlagenphysik. Ein guter Kandidat ist die Schleifen-Quantengravitation (Loop Quantum Gravity, LQG), die sich in den letzten zwanzig Jahren vielversprechend entwickelt hat. Sie baut aus sogenannten Spin-Netzwerken eine quantisierte Raumzeit auf. Daher kommt sie ohne Hintergrundmetrik als „Bühne" aus, auf der die Materie wie ein Schauspieler agieren muss. Sie ist also wie die Allgemeine Relativitätstheorie hintergrundunabhängig. Das unterscheidet sie von den Quantenfeldtheorien und Stringtheorien, deren Hintergrundabhängigkeit eine fundamentale, konzeptionelle Schwäche darstellt. Ob die Schleifen-Quantengravitation der richtige Weg ist, müssen allerdings erst noch experimentelle Beobachtungen erweisen. Die Hoffnung ruht zum Beispiel auf der Beobachtung von kosmischen Gammastrahlungsblitzen (Gamma-Ray Bursts).

Stichworte

Schleifen-Quantengravitation, Loop Quantum Gravity, Allgemeine Relativitätstheorie, Quantentheorie, Quantenfeldtheorien, Hintergrundabhängigkeit, Hintergrundunabhängigkeit, Stringtheorie, Supersymmetrie, Gamma-Ray Bursts.

Literatur

Ein Liste mit vertiefender Fachliteratur zum Thema steht auf www.phiuz.de unter „Downloads/Zusatzmaterial zu den Heften" bereit. Populärwissenschaftliche Darstellungen bieten zwei Quellen:

[1] T. Thiemann, in: Ist das Universum ein Computer?, Spektrum der Wissenschaft Spezial **2007**, *3*, 58.

[2] T. Thiemann, B. Röthlein, MaxPlanckForschung **2006**, *1*, 53. PDF-Download auf www.mpg.de/bilderBerichteDokumente/multimedial/mpForschung/2006/heft01/1_06MPF_48_53.pdf

Der Autor

Thomas Thiemann forscht am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in Potsdam (Albert-Einstein-Institut), hält eine Associate-Stelle am Perimeter Institute for Theoretical Physics im kanadischen Waterloo und eine Gastprofessur an der chinesischen Bejing Normal University. Er gehört zu den Pionieren der Schleifen-Quantengravitation.

Anschrift

Prof. Dr. Thomas Thiemann, MPI f. Gravitationsphysik, Albert-Einstein-Institut, Am Mühlenberg 1, D- 14476 Potsdam. thiemann@aei.mpg.de, tthiemann@perimeterinstitute.ca