

FAKULTÄT FÜR PHYSIK UND
ASTRONOMIE

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

Diplomarbeit
Im Studiengang Physik

vorgelegt von

Tim-Oliver Müller
aus Gehrden

2009

Spin-Effekte bei der Multiphotonen-Paarzeugung

Die Diplomarbeit wurde von Tim-Oliver Müller

ausgeführt am

Max-Planck-Institut für Kernphysik

unter der Betreuung von

Prof. Dr. Christoph H. Keitel

Spin-Effekte bei der Multiphotonen-Paarerzeugung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Einfluss des Lepton-Spins auf die Raten für die e^+e^- -Paarerzeugung durch einen Atomkern in einem intensiven Laserfeld. Der Prozess der Paarbildung wird im Rahmen der Dirac-Theorie als Coulomb-induzierter Übergang von einem Volkov-Zustand negativer Energie zu einem Volkov-Zustand positiver Energie beschrieben. Ausgehend von der Übergangsamplitude für diesen Prozess, werden die Raten für die Paarproduktion bei Absorption unterschiedlich vieler Photonen aus einer zirkular polarisierten Laser-Welle berechnet. Unsere Rechnung reproduziert die bekannten Resultate für den spin-aufgelösten Ein-Photon-Prozess. Wir stellen darüber hinaus fest, dass von der Polarisation der erzeugten Teilchen ausgehende Effekte nicht zwangsläufig mit steigender Zahl der absorbierten Photonen zunehmen. Vielmehr wird der Betrag der übertragenen Energie auf die erzeugten Teilchen als wesentlicher Einfluss auf deren Polarisation identifiziert. Ein effektiver Helizitätstransfer wird aber im Übergangsbereich möglich. Es werden Ergebnisse für totale und differentielle Raten gezeigt. Die Ergebnisse der betrachteten Prozesse werden auch anhand der Möglichkeiten ihrer experimentellen Umsetzung diskutiert.

Spin Effects in Multiphoton Pair Production

The thesis at hand deals with the influence of the lepton spin on the rates for e^+e^- pair production by a nucleus in an intense laser field. The process of pair production is considered to be a Coulomb-induced transition from a Volkov state with negative energy to a Volkov state with positive energy, according to the Dirac theory. Starting with the transition amplitude for this process the pair production rates are calculated, taking different numbers of absorbed photons from a circularly polarized laser wave into account. Our calculations reproduce the well-known results for the spin-resolved single photon process. Beyond that we discover that the effect arising from polarization of the produced particles is not necessarily increased by absorbing more photons. In fact the energy transfer to the produced particles is identified as the main impact on their polarization. An efficient transfer of helicity becomes possible in the transition regime. Results for total and differential rates are going to be presented. The results for the considered processes are discussed with respect to the possibility of their experimental implementation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Grundlagen der Paarerzeugung	1
1.2	Realisierung des Multiphotonenprozesses	4
1.2.1	Paarerzeugung im Laserfeld	4
1.2.2	Laser-Technik	5
1.2.3	Nachweis der Multiphotonen-Paarerzeugung	7
1.3	Spinaufgelöste Prozesse	9
1.4	Ziel und Aufbau der Arbeit	10
1.5	Resultate	10
2	Elektron im Laser	13
3	Der Spinformalismus	17
3.1	Das Photon	17
3.2	Spin massiver Fermionen	18
3.2.1	Der Spinoperator	18
3.2.2	Der Spinprojektor	19
3.2.3	Spin im Ruhesystem	20
3.2.4	Spin für bewegte Fermionen	21
4	Theorie der Paarerzeugung	25
4.1	Theoretisches Grundkonzept	25
4.2	Produktionsraten	27
4.3	Matrixelement	35
4.4	Transformation der Raten	48
5	Ergebnisse zur spin-aufgelösten Paarerzeugung	51
5.1	Der Ein-Photon-Prozess	52
5.2	Multiphotonen-Regime	54
5.2.1	Polarisationsgrade	55
5.2.2	Helizitätseigenzustände	57

5.2.3	Spin-Up-/Spin-Down-Eigenzustände	60
5.2.4	Totale Raten	63
5.3	Übergangsregime	67
6	Zusammenfassung und Ausblick	71
6.1	Zusammenfassung	71
6.2	Ausblick	72
	Anhang	75
A	Einheitensystem	75
B	Relativistik	77
C	Dirac-Matrizen	79
D	Dirac-Spinoren	81
E	Spurbildung	83
F	Finale Darstellung des Matrixelements	85
	Literaturverzeichnis	96

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

1.1 Grundlagen der Paarerzeugung

In einer Veröffentlichung aus dem Jahre 1928 sagte Dirac die Existenz eines *Anti-Elektrons* voraus [Dir28a, Dir28b]. Die Dirac-Gleichung, wie sie jedem Standardwerk der relativistischen Quantenmechanik (zum Beispiel [BD84b, Sch05]) entnommen werden kann, besitzt zu jeder Lösung, die ein Elektron beschreibt, auch eine entsprechende Lösung mit negativem Energieeigenwert. Dirac ordnet diese Lösungen entsprechend des Vorzeichens ihrer Energie im negativen Energiekontinuum an. Die Annahme, dass alle Zustände innerhalb dieses *Dirac-Sees* besetzt sind, stellt sicher, dass die Übergänge zu Zuständen negativer Energie nicht willkürlich stattfinden können. Damit ist die Stabilität von Materie gewährleistet. Die Existenz eines unbesetzten Zustands (*Loch*) im negativen Energiekontinuum interpretiert Dirac als Existenz eines Anti-Elektrons. Der Übergang eines Elektrons aus dem Dirac-See ins positive Energiekontinuum bildet demnach einen Paarerzeugungsprozess ab.

Die experimentelle Bestätigung dieser Interpretation lieferte Anderson wenig später. In seiner Arbeit zu kosmischer Strahlung [And32] fand er Nebelkammerspuren des von Dirac postulierten Teilchens. Es gelang ihm erstmals einen Paarerzeugungsprozess experimentell nachzuweisen. Er konnte zwei gleichartig, aber entgegengesetzt gekrümmte Spiralbahnen sichtbar machen, von denen er eine als Spur des Elektrons identifizieren konnte. Die andere Spiralbahn musste dementsprechend zu einem Teilchen entgegengesetzter Ladung, aber gleichem Quotienten aus Ladung und Masse gehören. Anderson gab dem entdeckten Teilchen wegen des positiven Ladungsvorzeichens den Namen *Positron* [And33], der bis heute geläufig ist.

Wir wollen im Folgenden einige Möglichkeiten der Paarerzeugung durch elektrische und elektromagnetische Felder vorstellen und uns auf diesem Weg dem im weiteren Verlauf dieser Arbeit betrachteten Prozess annähern.

Für spontane Paarproduktion in einem konstanten elektrischen Feld sind Feldstärken notwendig, welche der kritischen Feldstärke

$$E_{kr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 1,3 \times 10^{16} \text{V/cm} \quad (1.1)$$

entsprechen. Diese kritische Feldstärke verrichtet an einer Elementarladung gerade die Ruheenergie mc^2 entlang einer Comptonwellenlänge $\lambda_c = \hbar/mc$ [Sau31, HE36]. In der Quantenelektrodynamik geht man davon aus, dass im Vakuumzustand permanent virtuelle Teilchen-Antiteilchen-Paare gebildet werden, welche sich nach extrem kurzer Lebensdauer wieder vernichten [BD84a]. Die virtuellen Paare werden erst dann real, wenn es gelingt, die beiden Teilchen über die Distanz von einer Compton-Wellenlänge zu separieren. In seiner Arbeit von 1951 [Sch51] greift Schwinger daher das Konzept der kritischen Feldstärke wieder auf und bestimmt mit einer quantenelektrodynamischen Rechnung die Wahrscheinlichkeit für die Paarproduktion in einem konstanten Feld E_0 zu

$$W \propto \left(\frac{E_0}{E_{kr}} \right)^2 \exp \left(-\pi \frac{E_{kr}}{E_0} \right). \quad (1.2)$$

Im Einklang mit dem Ergebnis von Sauter wird auch hier festgestellt, dass signifikante Beiträge zur Paarerzeugungswahrscheinlichkeit nur für Feldstärken in der Größenordnung von E_{kr} existieren. Diese grundlegenden Resultate wurden zwanzig Jahre später von Brezin und Itzykson [BI70] auf elektrische Wechselfelder ausgedehnt. Dabei handelt es sich um Wechselfelder mit periodischer Zeitabhängigkeit derart, dass $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$. Näherungsweise konnten sie die Formeln

$$W \propto \begin{cases} \left(\frac{E_0}{E_{kr}} \right)^2 \exp \left(-\pi \frac{E_{kr}}{E_0} \right) & \text{für } \xi_0 \gg 1 \\ \left(\frac{E_0}{E_{kr}} \right)^2 \left(\frac{\xi_0}{2} \right)^{4mc^2/\hbar\omega} & \text{für } \xi_0 \ll 1 \end{cases} \quad (1.3)$$

gewinnen, wobei hier der dimensionslose Parameter $\xi_0 = eE_0/m\omega c$ das Verhältnis aus Feldstärke und Frequenz angibt. Wir sehen hier deutlich, dass die Formel für $\xi_0 \gg 1$ dem Skalierungsgesetz aus (1.2) folgt. Für extrem niedrige Frequenzen ω soll das Verhalten natürlicherweise dem von zeitlich konstanten Feldern ähneln.

Im anderen Fall, dass $\xi_0 \ll 1$ ist, zeigt sich ein Übergang, der anderer Natur ist. Um hier einen signifikanten Wert für die Übergangswahrscheinlichkeit zu finden, muss die Oszillationsfrequenz mindestens von der Größenordnung $\omega \approx mc^2/\hbar$ sein, was bedeutet, dass die vorhandene Energie mindestens in der Größenordnung der Ruheenergie des Elektrons liegen muss, um die Paarproduktion zu ermöglichen.

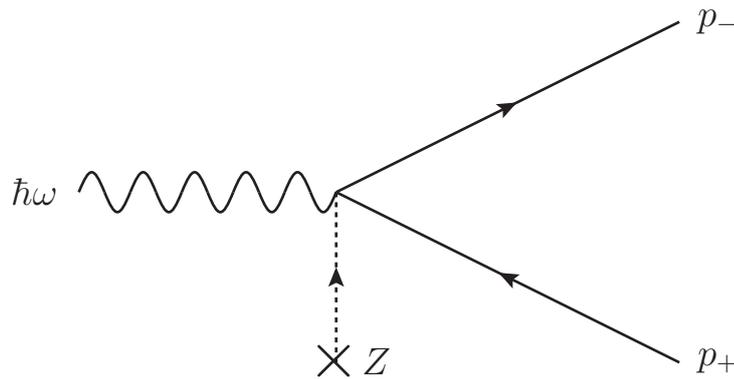


Abbildung 1.1: Feynman-Diagramm für den Bethe-Heitler-Prozess. Dabei sind die Impulse p_{\mp} Elektron und Positron zuzuordnen. Z ist die Ladungszahl des beteiligten Kerns

Damit ist das theoretische Grundgerüst für den Paarerzeugungsprozess gegeben. Die Paarerzeugung spielt neben dem photoelektrischen Effekt und der Compton-Streuung eine wesentliche Rolle bei der Absorption von elektromagnetischer Strahlung in Materie. Dabei erzeugt ein hochenergetisches Photon im Coulomb-Feld eines der Atomkerne ein Teilchen-Antiteilchen-Paar. Ein Paarerzeugungsprozess in dieser Feldkonstellation ist daher von besonderem Interesse. Bethe und Heitler waren die Ersten, die Wirkungsquerschnitte dieses Prozesses mit Hilfe der Bornschen Näherung [Bor26] berechneten [BH34]. Der Prozess

$$Z + \hbar\omega \rightarrow Z + e^- + e^+ \quad (1.4)$$

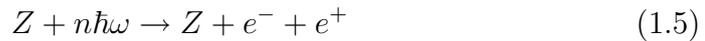
trägt daher den Namen Bethe-Heitler-Prozess und ist in Abbildung 1.1 dargestellt. Dabei muss die Photonenenergie mindestens die Ruheenergien beider erzeugter Teilchen aufbringen ($\hbar\omega \geq 2mc^2$).

1.2 Realisierung des Multiphotonenprozesses

1.2.1 Paarerzeugung im Laserfeld

Der intuitivste Weg, Paarerzeugung in einem Laser theoretisch zu beschreiben, ist es nun, ein ähnliches Verhalten wie in (1.3) auch für Felder mit periodischer Raumzeit-Abhängigkeit zu finden. Eine solche ebene Welle lässt sich prinzipiell am ehesten mit einem Laser realisieren. Die Eigenschaften der stimulierten Emission, die allen optischen Lasern zu Grunde liegt, überträgt sich auf den Laserstrahl. Somit ist dieser im Wesentlichen monochromatisch, kohärent und besitzt eine einheitliche Propagationsrichtung. Schwinger [Sch51] hatte allerdings bereits gezeigt, dass im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle die Wahrscheinlichkeit für Paarproduktion aus dem Vakuum verschwindet. Eine vereinfachte Vorstellung lässt sich aus der Tatsache gewinnen, dass die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit pro Zeit und Volumen aus dem Vakuum ein eichinvarianter Lorentz-Skalar ist. Die einzigen auftretenden eichinvarianten Lorentzskalare, von denen diese abhängen kann ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$), sind im Fall einer ebenen Welle identisch null, sodass dies auch für die Wahrscheinlichkeit der Paarerzeugung gilt.

Wollen wir uns also die Energie einer Laserwelle für die Paarerzeugung zu Nutze machen, ist die Anwesenheit eines weiteren elektromagnetischen Feldes notwendig. Eine Möglichkeit der Realisierung einer solchen Quelle ist zum Beispiel die Einstrahlung eines weiteren Photons in das Feld des Lasers. Theoretisch wurden diese Prozesse schon bald nach der Erfindung des Lasers 1960 untersucht [Rei62, NR64]. Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, einen Atomkern und damit ein Coulomb-Feld in den Laserstrahl einzubringen. In der somit gegebenen Konstellation können Paare über die Reaktion



erzeugt werden, wobei n die Anzahl der aus der Laserwelle absorbierten Photonen angibt. Für $n = 1$ ist diese Reaktion identisch mit dem Bethe-Heitler-Prozess aus (1.4). Aus diesem Grund nennen wir (1.5) den nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozess. Die Begrifflichkeit stützt sich dabei auf die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit für Multiphotonenprozesse nicht linear in der Laserintensität ist, wie es beim Ein-Photon-Prozess der Fall ist. Dies ist die Reaktion, die unseren späteren Überlegungen zu Grunde liegen wird.

Der Prozess (1.5) wurde zunächst von Yakovlev [Yak65] untersucht. Dieser fand in seiner Rechnung wieder bestätigt, dass Feldstärken im Bereich der kritischen Feldstärke oder Frequenzen im Bereich der Ruheenergie benötigt werden, um Paare zu produzieren. Ansonsten blieben die Produktionsraten

verschwindend gering. Zu dieser Zeit schienen Laser mit derart hohen Intensitäten oder Frequenzen fernab jeglicher Realisierungsmöglichkeit. Mittleman [Mit87] beschränkte seine Untersuchungen auf den Fall linearer Polarisation, konnte aber trotz des technischen Fortschritts von über 20 Jahren auch nur feststellen, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten im Vergleich zu anderen Prozessen vernachlässigbar klein sind.

Wir wollen im Folgenden zunächst Laser-Systeme kategorisieren, in denen wir signifikante Beiträge zur Vakuumpolarisation vermuten. Um eine geeignete Abgrenzung machen zu können, bedienen wir uns des *Keldysh-Parameters*

$$\kappa_{\text{paar}} = \frac{1}{\xi}, \quad (1.6)$$

dessen Größenordnung Auskunft über den Charakter des Übergangs gibt. Hierbei ist ξ der Intensitätsparameter, wie er auch in (2.11) wiederzufinden ist. Ursprünglich [Kel64] auf den Photoionisationsprozess von Atomen in Laserfeldern angewendet, wird er in späteren Arbeiten [Pop01] auch für die Beschreibung von Paarerzeugungsprozessen im Laser genutzt. Ist der Keldysh-Parameter klein ($\kappa_{\text{paar}} \ll 1$), haben wir es mit einem relativ langsam oszillierenden Laserpotential zu tun, welches eine verhältnismäßig große Amplitude besitzt. Der Übergang vom negativen ins positive Energiekontinuum ähnelt daher einem Tunnelprozess durch einen Potentialwall der Höhe $2m_*c^2$, wobei m_* die effektive Elektronenmasse in Laserfeld ist (siehe (2.12)). Daher werden wir bei einem derartig kleinen Keldysh-Parameter vom *Tunnelregime* sprechen.

Der entgegengesetzte Fall, in dem der Keldysh-Parameter sehr groß ist ($\kappa_{\text{paar}} \gg 1$), entspricht einem Laserfeld mit relativ geringer Intensität, dafür aber mit einer hohen Photonenenergie (vgl. Abschnitt 5.2). Eine solche Konstellation werden wir im Folgenden das *Multiphotonenregime* nennen.

1.2.2 Laser-Technik

Der im vorigen Abschnitt angesprochene nicht-lineare Paarerzeugungsprozess ist seit der Erfindung der *Chirped Pulse Amplification* (CPA) erstmals in die Reichweite technischer Realisierungsmöglichkeiten gerückt. Bei der CPA handelt es sich um eine Methode zur Verstärkung von Laserpulsen. Diese werden zunächst zeitlich aufgeweitet (Dispersion), um dann verstärkt [DJP92] und wieder zeitlich komprimiert zu werden [SM85]. Mit dieser Methode können heute Intensitäten von über 10^{20} W/cm² erreicht werden. Noch vor 30 Jahren war man der Meinung, dies sei die obere Grenze für erreichbare Laser-Intensitäten [SGWS73]. Einfache Verstärkungsmethoden wie zum Beispiel die Fokussierung des Laserstrahls sind schon lange bekannt und werden auch

heute noch eingesetzt. Zusammen mit der Verkürzung der Pulsdauer ist dies die wesentliche Methode, hohe Laser-Intensitäten zu erzeugen. So ist es mit Hilfe von adaptiver Optik gelungen einen Laserstrahl auf einen Durchmesser von nur $0,8 \mu\text{m}$ zu fokussieren und damit eine Intensität von $2 \times 10^{22} \text{ W/cm}^2$ im optischen Frequenzbereich zu erhalten [YCK⁺08].

Theoretisch soll es möglich sein, solch hochintensive Laser auch als transportable Geräte zu konzipieren. Für derartige Konstruktionen ist allerdings vom heutigen Stand der Technik davon auszugehen, dass eine Intensität von 10^{22} W/cm^2 nicht überschritten werden kann. Auf der anderen Seite ist man inzwischen soweit, den Bau eines Lasers im optischen Frequenzbereich mit einer Intensität von mehr als 10^{25} W/cm^2 in die Tat umzusetzen¹.

Zwei Projekte bilden aktuell die Speerspitze der Bemühungen um Laser mit extrem hohen Photonenenergien. Das ist zum einen der *European XFEL*, ein *Röntgen-Freie-Elektronen-Laser* dessen Bau am Deutschen Elektronen-Synchrotron in Hamburg im Januar 2009 begonnen hat und 2014 abgeschlossen sein soll. Eine Vorstufe dieses Lasers ist bereits in Betrieb gegangen. Dabei handelt es sich um FLASH², einen Freie-Elektronen-Laser, der Photonenenergien in der Größenordnung von 10^2 eV bereitstellen kann.

Desweiteren gibt es die *Linac Coherent Light Source* (LCLS), welche sich am Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) im Bau befindet. Eine Vorstufe dieser Einrichtung soll 2009 in Betrieb gehen.

Ein Röntgen-Freie-Elektronen-Laser wie er in Hamburg geplant ist soll Photonenenergien von bis zu 14 keV zur Verfügung stellen. Er beruht wie sein amerikanisches Pendant auf dem SASE-Prinzip (*self-amplified spontaneous emission*)[A⁺00]. Dabei werden relativistische Elektronen paketweise durch einen Kanal aus alternierend ausgerichteten Magneten, einen so genannten Undulator, geschossen. Durch das wechselnde Magnetfeld sind die Elektronen einer Lorentzkraft ausgesetzt, welche senkrecht zu deren Bewegungsrichtung gerichtet ist. Die Elektronen bewegen sich also auf einer sinusförmigen Bahn und emittieren Synchrotronstrahlung in einen schmalen Kegel in ihre Bewegungsrichtung. Um dabei destruktive Interferenzen zu vermeiden, muss darauf geachtet werden, dass beim Durchlauf einer Periode des Undulators das Elektron um eine Wellenlänge der emittierten Strahlung gegenüber der Strahlung zurückfällt. Während die Elektronen also durch den Undulator oszillieren, wechselwirken sie mit ihrem eigenen Strahlungsfeld. Dadurch bildet sich eine longitudinale Feinstruktur in der Elektronendichte, das sogenannte *micro-bunching* [GFRT07]. Dabei ordnen sich die Elektronen in äquidistanten *Scheiben* entlang der longitudinalen Richtung an. Der räumliche Abstand

¹ELI (*Extreme Light Infrastructure*: www.extreme-light-infrastructure.eu)

²FLASH (*Freie-Elektronen-LASer in Hamburg*: flash.desy.de)

zwischen diesen Scheiben entspricht einer Wellenlänge des Strahlungsfeldes. Dadurch emittieren mehr Elektronen ihre Strahlung in Phase. Das führt zu einer kohärenten Überlagerung der Synchrotronstrahlung. Je höher dabei die Intensität des Strahlungsfeldes wird, desto stärker ist die Ausprägung der Micro-Bunches, was wiederum zu einer Erhöhung der Intensität führt. Am Ende des Undulators wird dann der Elektronenstrahl aus der ursprünglichen Richtung abgelenkt und der inzwischen hochintensive Laserstrahl kann beliebig verwendet werden. Dieser Laserstrahl hat entsprechend seiner Herkunft die Charakteristik von Synchrotronstrahlung und ist deswegen linear polarisiert. Zirkulare Polarisation kann mittels mechanischer Phasenverschiebung der Magnetisierungsregionen im Undulator erreicht werden [Tem08]. Somit eignet sich das Licht des XFEL auch für Polarisationsexperimente.

Für die von uns betrachteten Paarerzeugungsprozesse im Multiphotonenregime sind dabei Intensitäten von $\sim 10^{21}$ W/cm² notwendig [Mül09]. Es ist damit zu rechnen, dass Röntgen-Freie-Elektronen-Laser mit Intensitäten dieser Größenordnung sehr bald realisiert sein werden.

1.2.3 Nachweis der Multiphotonen-Paarerzeugung (Experiment E-144 am SLAC)

Im Jahr 1997 sorgte ein Experiment für besonderes Aufsehen. Dabei gelang es Wissenschaftlern am SLAC zum ersten Mal, Materie nur aus Strahlung zu erzeugen [BFHS⁺97]. Wir wollen hier kurz auf die dort beobachteten Prozesse eingehen. Die Möglichkeit der Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren in einer Kollision von zwei Photonen wurde erstmalig von Breit und Wheeler [BW34] in Erwägung gezogen. Sie berechneten den Wirkungsquerschnitt für die Reaktion

$$\omega_1 + \omega_2 \rightarrow e^+ e^-. \quad (1.7)$$

Dieser Prozess wurde allerdings bis dato nicht im Labor realisiert. Man geht aber davon aus, dass er in astrophysikalischen Prozessen stattfindet. Wie schon eingangs erwähnt, wurden korrespondierende Rechnungen auch für die Kollision eines einzelnen Photons mit einem Laserstrahl angestellt [Rei62, NR64].

Im Experiment E-144 wird im Wesentlichen ein zweistufiger Prozess beobachtet. In der ersten Stufe kollidiert ein Elektronenstrahl mit einer Energie von 46,6 GeV mit Pulsen eines Lasers mit einer Wellenlänge von 527 nm. Das entspricht einer Photonenenergie ω_0 von 2,35 eV. Durch den stattfindenden Compton-Streuprozess entstehen rückgestreute Photonen mit einer maximalen Energie ω von 29,2 GeV. Zur Realisierung des linearen Breit-Wheeler-Prozesses (1.7) in dem gegebenen Laserfeld wäre allerdings eine Photonen-

energie von 111 GeV notwendig. Bei einer Laserintensität von 10^{19} W/cm² gibt es aber für die hier erreichte Photonenenergie eine nicht verschwindende Wahrscheinlichkeit für den Multiphotonen-Prozess

$$\omega + n\omega_0 \rightarrow e^+e^- \quad (1.8)$$

ab einer Anzahl von absorbierten Laserphotonen $n \geq 4$. Diesen Prozess nennen wir nicht-linearen Breit-Wheeler-Prozess. Im Experiment E-144 werden die detektierten Elektron-Positron-Paare diesem Prozess zugeschrieben. Der konkurrierende Prozess

$$e + n\omega_0 \rightarrow e' + e^+e^-, \quad (1.9)$$

der ein Spezialfall des nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozesses (1.5) ist, kann gegenüber dem Prozess aus (1.8) vernachlässigt werden. In der hiesigen Konstellation wäre er ab einer Zahl absorbierten Photonen von $n \geq 5$ möglich.

Das Experiment E-144 hat für viel Aufsehen gesorgt und das Interesse an der Multiphotonen-Paarzeugung gesteigert. Mittlerweile konnte dieses Experiment auch mit rein optischen Mitteln realisiert werden [BK08]. Dabei wird das initiale Elektron durch einen Laser beschleunigt.

Obwohl hier also der für unsere Betrachtungen wichtige Bethe-Heitler-Prozess nicht in Erscheinung tritt, ist das Auftreten eines Multiphotonenprozesses doch ein starker Indikator dafür, dass auch Paarerezeugungsprozesse durch ein Coulomb-Feld im Laser mittelfristig experimentell realisiert werden können.

Dadurch, dass wir Head-On-Kollisionen eines Kerns mit einem Laser untersuchen werden, besteht eine Möglichkeit der Realisierung hoher Frequenzen auch darin, die Geschwindigkeit des Kerns zu erhöhen. In seinem Ruhesystem erscheint das Laserlicht blau-verschoben. Am *Large Hadron Collider* stehen Protonen mit einem γ -Faktor von bis zu 7000 zur Verfügung. Die GSI in Darmstadt, welche mit PHELIX auch über einen Leistungsstarken Laser verfügt, kann Protonen auf einen γ -Faktor in der Größenordnung von ~ 30 -100 beschleunigen.

1.3 Spinaufgelöste Prozesse

Seit der Entdeckung longitudinal polarisierter Elektronen, die aus einem β -Zerfall stammen [LY56], ist ein Interesse daran aufgekommen, auch die Wirkungsquerschnitte für die Bremsstrahlung und die Paarerzeugung unter Einbeziehung der Spinkonstellation der beteiligten Teilchen zu betrachten.

Schon im Jahre 1957 konnte McVoy Ergebnisse für derartig spin-aufgelöste Prozesse präsentieren. Er berechnete zunächst den Grad der zirkularen Polarisation des Bremsstrahlungsphotons unter der Annahme, das initiale Elektron sei polarisiert [McV57]. In einer späteren Arbeit dehnte er diese Betrachtungen auch auf den sehr eng verwandten Bethe-Heitler-Prozess (1.4) aus. Er konnte dabei erstmals feststellen, dass das schnellere der erzeugten Teilchen bevorzugt in dieselbe Richtung wie das einfallende Photon polarisiert sind. Eine exaktere Darstellung dieser Arbeiten finden wir in [McV58], wobei McVoy hier ein besonderes Augenmerk auch auf die Eigenwerte des Bahndrehimpulses der Teilchen legt. Seine Ergebnisse dahingehend sind zunächst qualitativer Natur, während es ihm später gelingt das Matrixelement für die Paarproduktion komplett aufzuspalten in Anteile, bei denen der Gesamtdrehimpuls durch Änderung der Spinstellungen erhalten wird, und jene, für die sich der Eigenzustand des Bahndrehimpulsoperators ändert [FMA59].

Die wohl umfassendste Arbeit zur Betrachtung von Spin-Effekten bei der Paarproduktion durch ein Photon an einem Ion stammt von Olsen und Maximon [OM59]. Diese baut im Wesentlichen auf der Veröffentlichung [BM54] von Bethe und Maximon aus dem Jahr 1954 auf. In [OM59] sind die energieabhängigen Polarisationsgrade für eine große Anzahl von möglichen Spinkonstellationen sowohl für die Bremsstrahlung als auch für den Paarerzeugungsprozess berechnet worden. Im Folgenden gelang es Pratt [Pra61] eine qualitative Erklärung für die geringe Polarisation eines langsamen, produzierten Teilchens zu finden.

Die theoretische Arbeit an der spinaufgelösten Paarerzeugung wurde später erst wieder von Tseng und Pratt aufgenommen [TP74, Tse97]. Sie berechnen die Korrelation der am Prozess beteiligten Spins für einige Spezialfälle. Im Jahre 2002 errechnen Bytev et al. [BKG02] analoge Ergebnisse für den Prozess der Triplet-Produktion (1.9); allerdings nur für den linearen Ein-Photon-Fall.

Spinaufgelöste Prozesse im Laser-Feld wurden erst lange nach der Erfindung des Lasers theoretisch behandelt [WK01, WUH⁺02]. Wesentliche Ergebnisse zur spinaufgelösten Elektronenstreuung stammen größtenteils aus der vergangenen Dekade wie zum Beispiel [STM98, MTA05] zur Mott-Streuung, wobei über die Spins summierte Ergebnisse schon in den 1960er Jahren berechnet worden sind [BK64, Kib65](Compton-Streuung). Inspiriert durch

die Ergebnisse des Experiments E-144 am SLAC wurden Versuche unternommen, den nicht-linearen Breit-Wheeler Prozess spinaufgelöst zu betrachten. Die Arbeit von Ivanov et al. [IKS05] gibt detaillierte Auskunft über die Polarisationseffekte für verschiedene Photonenzahlen im Multiphotonenregime. Spin-aufgelöste Ergebnisse zum nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozess (1.5) sind bisher nicht gewonnen worden.

Auch aus heutiger Sicht sind spin-aufgelöste Prozesse von Bedeutung. Sie können der Bereitstellung polarisierter Teilchenstrahlen für Beschleunigerexperimente dienen. So wird aktuell am SLAC daran gearbeitet, polarisierte Teilchenstrahlen aus einem linearen Bethe-Heitler-Prozess zu erzeugen [A⁺08].

1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, ein konsistentes Bild über die auftretenden Spineffekte im nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozess (1.5) zu vermitteln. Von den bekannten Resultaten zum Ein-Photon-Prozess ausgehend wollen wir der Frage nachgehen, ob es grundsätzlich möglich ist, in Multiphotonenprozessen einen höheren Polarisationsgrad als im dortigen Fall zu erreichen.

Die Arbeit ist im Wesentlichen in vier Teile gegliedert. Dem einleitenden Teil folgen die Kapitel 2 und 3, in denen dem Leser das theoretische Rüstzeug an die Hand gegeben wird. Wir stellen die Volkov-Zustände als Lösungen der Dirac-Gleichung vor und geben eine Einführung in das Verhalten des Spins in der Dirac-Theorie.

In Kapitel 4 soll einen Einblick in die Rechentechnik gegeben werden, dabei werden analytisch einsichtige Ergebnisse vorweggenommen. Das Kapitel schließt mit der Darstellung des berechneten Matrixelements in einer Form, welche einige wesentliche Eigenschaften ersichtlich macht.

Der letzte Teil dieser Arbeit beinhaltet die Präsentation einiger quantitativer Ergebnisse (Kapitel 5) sowie deren Interpretation. Darüber hinaus stellt Kapitel 6 alle wesentlichen Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst dar und gibt einen Ausblick.

1.5 Resultate

Das wesentliche Resultat dieser Arbeit wird sein, dass die Polarisation im Multiphotonen-Regime durch den dort geringen Energieübertrag auf die erzeugten Teilchen begrenzt ist. Der Helizitätstransfer ist stark an diesen gekoppelt. Dies wird anhand der Produktionsraten für verschiedene Spin-Basen

verdeutlicht. Wir zeigen, dass die Polarisationsgrade, die wir aus den Ein-Photonen-Prozessen bei hohen Energien kennen, in Multiphotonenprozessen bei einem niedrigen Intensitätsparameter nicht erreicht werden können, obwohl es auch dort signifikante Unterschiede der Polarisation der erzeugten Teilchen gibt. Erhöhen wir aber den Intensitätsparameter, so tragen auch andere als die minimale Photonenzahl bei und es kann ein größerer Polarisationsgrad erreicht werden.

Kapitel 2

Elektron und Positron im Feld einer ebenen elektromagnetischen Welle

In diesem Kapitel werden Lösungen der Dirac-Gleichung vorgestellt, mit deren Hilfe das Verhalten des Elektrons in einer ebenen elektromagnetischen Welle charakterisiert werden kann. Dazu wird die Dirac-Gleichung unter Einbeziehung des entsprechenden Potentials betrachtet und gezeigt, dass sie unter Verwendung eines geeigneten Ansatzes gelöst werden kann [BLP91].

Das räumliche und zeitliche Verhalten des Feldes einer ebenen Welle lässt sich durch den 4-Wellenzahl-Vektor k (mit $k^2 = 0$ im Vakuum) beschreiben. Das 4-Potential A hängt nur über das Skalarprodukt $\eta = (kx) = \omega t - \mathbf{k}\mathbf{r}$ von den Raumzeitkoordinaten ab.

$$A^\mu = A^\mu(\eta) \tag{2.1}$$

Für ein Teilchen, das sich in einem solchen Potential Gl.(2.1) befindet, besitzt die Dirac-Gleichung exakte Lösungen. Diese Zustände, repräsentiert durch Spinorwellenfunktionen, welche die entsprechende Form der Dirac-Gleichung lösen, werden nach Ihrem Entdecker Volkov-Zustände genannt [Vol35]. Ausgangspunkt für die Identifizierung dieser Zustände ist die Dirac-Gleichung

$$\left(i\hbar\cancel{\partial} + \frac{e}{c}\cancel{A} - mc \right) \Psi = 0 \tag{2.2}$$

mit dem Potential A aus Gl.(2.1) und dem Slash-Operator (C.1).

In unserem Fall wird es sich als einfacher herausstellen, Lösungen der Eigenwertgleichung zweiter Ordnung ausfindig zu machen. Dabei gilt es sicherzustellen, dass die Lösungen, die wir finden werden, auch die Gleichung

erster Ordnung lösen. Dieses Verfahren ist der Arbeit von Beresteckij [BLP91] entlehnt. Die Dirac-Gleichung zweiter Ordnung stellt sich uns als

$$\left(-\hbar^2 \partial^2 + 2i \frac{\hbar e}{c} (A \partial) + \frac{e^2}{c^2} A^2 - m^2 c^2 + i \frac{\hbar e}{c} \not{k} \not{A}' \right) \Psi = 0 \quad (2.3)$$

dar, wobei hier und im folgenden der Strich die Ableitung nach η bedeuten soll. Um die Gleichung zu lösen, verwenden wir den Ansatz

$$\Psi_p = e^{-\frac{i}{\hbar}(px)} \varphi_p(\eta). \quad (2.4)$$

Hier ist p^μ ein konstanter 4-Vektor, der die Relation $p^2 = m^2 c^2$ entsprechend der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung erfüllt. Diesen 4-Vektor bezeichnen wir als *asymptotischen Impuls*. Diese Namensgebung rührt daher, dass der zu diesem Zustand gehörende Impuls beim Ausschalten des Feldes in den Impuls p^μ übergeht. Setzen wir nun Gl.(2.4) in Gl.(2.3) ein, so erhalten wir die Bedingung

$$2i\hbar(kp)\varphi_p' + \left[\frac{2e}{c}(pA) + \frac{e^2}{c^2}A^2 + i\frac{\hbar e}{c}\not{k}\not{A}' \right] \varphi_p = 0$$

für $\varphi_p(\eta)$. Diese Gleichung ist nun direkt lösbar und wir erhalten

$$\varphi_p = N_p \exp \left(i \frac{e}{\hbar c(kp)} \int^\eta \left[(pA) + i \frac{e}{2c} A^2 \right] d\tilde{\eta} \right) \times \exp \left(-\frac{e}{2c(kp)} \not{k} \not{A} \right) w_p. \quad (2.5)$$

mit einer Normierungskonstanten N_p und einem Spinor w_p , der hier zunächst keinen weiteren Bedingungen unterworfen wurde.

Es gibt allerdings noch weitere Forderungen. So soll die Wellenfunktion aus Gl.(2.4) mit φ_p aus Gl.(2.5) beim Ausschalten des Feldes in eine Lösung der freien Dirac-Gleichung übergehen. Diese Forderung stellt darüberhinaus sicher, dass wir keine Lösungen beibehalten, die nur die Dirac-Gleichung zweiter Ordnung (2.3) erfüllen, nicht aber Gl.(2.2). Mit dieser Forderung wird $w_p = u_{p,s}$ zum freien elektronischen Dirac-Spinor mit Impuls p^μ und Spin-4-Vektor s^μ [BD84b]. Analog zur Konvention für die Impulsvektoren bezeichnen wir den Vektor s^μ hier als *asymptotischen Spin*. Die Volkov-Zustände, die Gl.(2.2) lösen, ergeben sich also zu

$$\Psi_{p,s}^{(-)}(x) = N_p \left(1 - \frac{e \not{k} \not{A}}{2c(kp)} \right) u_{p,s} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S^{(-)} \right) \quad (2.6)$$

mit

$$S^{(-)} = -(px) + \frac{e}{c(kp)} \int_\eta \left[(pA) + \frac{e}{2c} A^2 \right] d\tilde{\eta}. \quad (2.7)$$

Dies stellt die elektronische Volkov-Wellenfunktion dar. Der Index $(-)$ bezieht sich dabei auf das Ladungsvorzeichen. Der Operator-Term in (2.6) gibt erste Anzeichen auf das Verhalten des Spinors im Laserfeld. Dieser hat eine Raumzeit-Abhängigkeit entsprechend der des Potentials. Wir erwarten also, dass der Spinor eine periodische Änderung vollzieht. Tatsächlich lässt sich für den Spinvektor eine Präzession feststellen [WUH⁺02, PMK07]. Dabei präzediert er um die Propagationsrichtung der ebenen Welle (2.1). erreicht das Feld die kritische Feldstärke (1.1), so hat der Spin auch Auswirkungen auf die Dynamik des Teilchens [WUH⁺02]. Bei den von uns betrachteten Intensitäten (siehe Kapitel 5) wird dieser Effekt allerdings keine Rolle spielen.

Für unsere Zwecke ist es darüberhinaus notwendig, auch die Wellenfunktion für ein Positron zu kennen. In unserer Theorie wird das Positron durch ein fehlendes Elektron im Kontinuum negativer Energie (ein *Loch*) charakterisiert. Um die entsprechende Zustandsfunktion zu identifizieren, genügt es, in den Gleichungen (2.6) und (2.7) die Ersetzung $p^\mu \rightarrow -p^\mu$ zu machen und den elektronischen Spinor $u_{p,s}$ durch den positronischen Spinor $v_{p,s}$ [BD84b] zu ersetzen. Somit finden wir für das Positron

$$\Psi_{p,s}^{(+)}(x) = N_p \left(1 + \frac{e \not{k} \not{A}}{2c(kp)} \right) v_{p,s} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S^{(+)} \right) \quad (2.8)$$

mit

$$S^{(+)} = (px) + \frac{e}{c(kp)} \int_\eta \left[(pA) - \frac{e}{2c} A^2 \right] d\tilde{\eta}. \quad (2.9)$$

Die Bewegung der Teilchen ist in diesen Zuständen durch den *effektiven Impuls* q^μ festgelegt. Dieser stellt sich als

$$q^\mu = p^\mu + \xi^2 \frac{m^2 c^2}{2(kp)} k^\mu \quad (2.10)$$

dar. Dabei ist ξ der dimensionslose Intensitätsparameter, der als

$$\xi = \frac{e}{mc^2} \sqrt{-\overline{A^2}} \quad (2.11)$$

definiert ist, wobei der Querstrich hier den zeitlichen Mittelwert kennzeichnen soll. Die effektiven Impulse erfüllen dann die Energie-Impuls-Beziehung

$$E_q^2 = \mathbf{q}^2 c^2 + m_*^2 c^4,$$

welche der Beziehung (B.2) sehr ähnlich ist. Dabei ist m_* allerdings nicht die gewohnte *nackte* Masse des Elektrons sondern die effektiven Masse

$$m_* = \sqrt{1 + \xi^2} m. \quad (2.12)$$

Zwischen effektiven und asymptotischen Impulsen gilt die Beziehung

$$\frac{d^3q}{q^0} = \frac{d^3p}{p^0}, \quad (2.13)$$

welche sich im Folgenden als nützlich erweisen wird.

Den Normierungsfaktor N_p legen wir durch die Forderung

$$\int (\Psi_{p,s}^{(\pm)})^\dagger \Psi_{p',s}^{(\pm)} d^3x = (2\pi\hbar)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (2.14)$$

fest. Durch diese Normierung wird der Mittelwert der zeitlichen Komponente des Wahrscheinlichkeitsflusses zu c . Für die Normierung ergibt sich dadurch

$$N_p = \sqrt{\frac{mc}{q^0}}.$$

Eine weitere Eigenschaft der Volkov-Zustände ist, dass sie nicht wie die freien Lösungen der Dirac-Gleichung Eigenzustände des Impulsoperators sind. Vielmehr sind sie Eigenzustände der Operatoren $i\hbar\partial_x$, $i\hbar\partial_y$ und $i\hbar(\partial^0 - \partial_z)$ mit den Eigenwerten p_x , p_y und $(p^0 - p_z)$, wenn wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die ebene Welle in z -Richtung propagiere [BLP91]. Dabei wollen wir $p^* := p^0 - p^z$ definieren.

Mit der Zustandsfunktion aus Gl.(2.6) (Gl.(2.8)) haben wir nun also ein Elektron (Positron) im Feld einer elektromagnetischen Welle charakterisiert.

Kapitel 3

Der Spinformalismus

Dieses Kapitel dient der grundlegenden Erläuterung der Beschreibung des Spins in der Dirac-Theorie. Wir wollen zunächst eine kurze Übersicht über die Polarisationszustände eines Photons geben.

Des Weiteren soll in diesem Kapitel ein klares Bild des Spin $\frac{1}{2}$, welchen Fermionen tragen, vermittelt werden. Obwohl dies eine wesentliche Errungenschaft der Dirac-Theorie ist, stellt sich der Versuch der exakten Beschreibung als aufwendig dar. Vor Allem ist es dabei allerdings wichtig, eine sprachliche Konvention zu schaffen, auf die wir uns im Folgenden beziehen können. Deshalb werden wir hier konkrete Darstellungen für alle in dem von uns betrachteten Prozess relevanten Polarisationsrichtungen angeben.

3.1 Das Photon

Das masselose Photon bewegt sich in jedem Bezugssystem mit Lichtgeschwindigkeit. Dabei ist seine Energie durch $\hbar\omega$ mit der Strahlungsfrequenz ω gegeben. Als Spin betrachten wir definitionsgemäß den Drehimpuls im Ruhesystem eines Teilchens. Da das Photon aber in keinem Bezugssystem in Ruhe ist, ist es nicht sinnvoll eine Unterscheidung zwischen Spin- und Drehimpuls-Zustand vorzunehmen, da diese ohnehin nicht unterscheidbar sind. Da das Photon eine dreikomponentige (vektorielle) Wellenfunktion besitzt, muss die Spinwellenfunktion dreifach entartet sein. Das führt bekanntermaßen zu einem Spin von 1, wobei die Spinkomponente in jede Raumrichtung beim Photon höchstens die Werte $+1, -1$ annehmen kann. Zudem gibt es in jedem Bezugssystem eine ausgezeichnete Raumrichtung $\mathbf{n} = c\mathbf{k}/\omega$, wobei \mathbf{k} hier der Wellenzahlvektor des Photons ist, dessen Betrag im Vakuum den Wert $|\mathbf{k}| = \omega/c$ annimmt. Da man also dementsprechend in jedem Bezugssystem eine axiale Symmetrie vorfindet, können nur vernünftige Aussagen

über die Spinprojektion auf die Bewegungsrichtung die sogenannte *Helizität* gemacht werden. Aus Eigenschaften der Parität der Wellenfunktion [BLP91] des Photons folgt daraus, dass nur die Helizitätseigenwerte

$$h = \pm 1 \quad (3.1)$$

angenommen werden können. Da für ein Photon der Polarisationsvektor die Rolle der Spin-Wellenfunktion spielt, kann dieser also immer als Linearkombination der Vektoren

$$\mathbf{e}^{(+1)} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{e}^{(-1)} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) \quad (3.3)$$

betrachtet werden, wobei (3.2) einem links-zirkular polarisierten Photon entspricht und (3.3) einem rechts-zirkular polarisierten. In (3.2) und (3.3) wurde darüberhinaus ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, das Photon bewege sich in z -Richtung. Ein reiner Photonenzustand trägt also den Drehimpuls \hbar entweder entlang oder entgegen der Richtung \mathbf{n} . Für ein grundlegendes Verständnis des Transformationsverhaltens der Spin-Wellenfunktion des Photons sei auf [BLP91] verwiesen.

3.2 Spin massiver Fermionen

Im folgenden Abschnitt werden wir eine Möglichkeit darlegen, den Spin auf konsistente und intuitive Art und Weise in der Dirac-Theorie zu erfassen. Wir werden uns dazu in erster Linie auf Projektionen beschränken, die es uns ermöglichen, den Dirac-Spinor für jeweils nur eine spezielle Spinrichtung zu betrachten. Damit soll zunächst ein Überblick über den Spin eines einzelnen Teilchens in dem wohl natürlichsten Bezugssystem nämlich seinem Ruhesystem gegeben werden. Die daraus erhaltenen Einsichten sollen dann auf beliebige bewegte Systeme ausgeweitet werden.

3.2.1 Der Spinoperator

Der Spin eines massiven Teilchens ist gegeben durch seinen Gesamtdrehimpuls im Ruhesystem. Ist das Teilchen in Ruhe, so gibt es dazu keinen Beitrag vom Bahndrehimpuls. Für ein Teilchen, welches durch einen 4-Spinorzustand charakterisiert wird, verwenden wir hier den Spinoperator

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & -\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

dessen Eigenwerte den Spinkomponenten in die drei Raumrichtungen entsprechen. Den Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ können wir mit den Pauli-Matrizen identifizieren $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, wobei die Pauli-Matrizen durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

gegeben sind. Sie sind ein Spezialfall eines Drehimpulsoperators mit $j = 1/2$. Im Gegensatz zur Definition des Spinoperators, wie sie in [BLP91, BD84b] gegeben ist, ordnen wir hier dem Spin der Zustände mit negativem Energieeigenwert das Negative der dort definierten Eigenwerte zu. Dies bezieht sich darauf, dass wir den Spin dieser Zustände als Spin des Positrons selbst verstehen wollen, anstatt vom Spin eines *Lochs* im Dirac-See zu sprechen.

3.2.2 Der Spinprojektor

Wir wollen an dieser Stelle einen Operator einführen, der aus einem Spinor die Komponente herausprojiziert, die zu einer bestimmten Spinrichtung gehören soll. Der *Spin-Projektionsoperator* ist als

$$\Sigma(s) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} + \gamma^5 \not{s}) \quad (3.6)$$

definiert. Dabei ist s der Spin-4-Vektor, der die Bedingungen

$$\begin{aligned} s^2 &= \eta_{\mu\nu} s^\mu s^\nu = -1, \\ (sp) &= \eta_{\mu\nu} s^\mu p^\nu = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

erfüllen soll. Der Spin-Projektor Σ unterliegt per Definition den Relationen

$$\begin{aligned} \Sigma(s)\Sigma(-s) &= 0, \\ \Sigma(s) + \Sigma(-s) &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

und ist idempotent

$$\Sigma(s)\Sigma(s) = \Sigma(s), \quad (3.9)$$

welches eine inherente Eigenschaft eines Projektors ist. Tatsächlich folgt die Beschränkung der Eigenwerte des Operators (3.6) auf 0 und 1 unmittelbar aus seiner Idempotenz.

Im Folgenden wollen wir das Verhalten des Spin-Projektors in verschiedenen Systemen betrachten.

3.2.3 Spin im Ruhesystem

Im Ruhesystem eines Teilchens ist der Gesamtdrehimpuls gerade gleich dem Spinanteil ($j = s$), da es keinen Beitrag vom Bahndrehimpuls des Teilchens gibt ($l = 0$). Da sich das Teilchen in Ruhe befindet, gibt es keine Raumrichtung, die wir einer anderen vorziehen könnten. Wir werden uns hier allerdings der Einfachheit halber auf den Spin in z -Richtung beschränken. Der Spin-4-Vektor soll dann entsprechend ein rein raumartiger Einheitsvektor in z -Richtung sein. Wir definieren

$$\begin{aligned}\hat{s}_\uparrow^\mu &= (0, \hat{e}_z), \\ \hat{s}_\downarrow^\mu &= (0, -\hat{e}_z),\end{aligned}\tag{3.10}$$

wobei der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{n}}_z = (0, 0, 1)$ sein soll. Explizit soll noch einmal auf den hier trivial erscheinenden Zusammenhang $\hat{s}_\uparrow^\mu = -\hat{s}_\downarrow^\mu$ hingewiesen werden. Der untere Index in Form eines Pfeil soll die zwei möglichen Spinstellungen in z -Richtung bezeichnen. Als *Spin-Up*-Zustand wollen wir den Zustand verstehen, bei dem der Spinvektor in positive z -Richtung zeigt. Der entgegengesetzte Fall soll entsprechend *Spin-Down*-Zustand heißen.

Es wird in diesem System, in dem das Teilchen ruht, unmittelbar klar, dass die Relationen (3.7) erfüllt sind, da für den Impulsvektor im Ruhesystem $\hat{p}^\mu = (mc, \mathbf{0})$ gilt.

Wir werden nun die Wirkung des Spin-Projektors auf die bekannten Lösungen der Dirac-Gleichung für ein ruhendes Teilchen [BD84b] untersuchen. Mit den Spinvektoren aus (3.10) können wir die Spin-Projektoren als

$$\begin{aligned}\Sigma(\hat{s}_\uparrow) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \sigma^3 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} - \sigma^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\hbar} (\mathbf{S}e_z), \\ \Sigma(\hat{s}_\downarrow) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} - \sigma^3 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} + \sigma^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\hbar} (\mathbf{S}e_z)\end{aligned}\tag{3.11}$$

schreiben. Dabei sehen wir, dass die Eigenzustände des Spinprojektors zum Eigenwert 1 den Eigenzuständen des Spinoperators in z -Richtung zum Eigenwert $+\frac{1}{2}\hbar$ beziehungsweise $-\frac{1}{2}\hbar$ entsprechen. Für Spinoren ruhender Teilchen positiver Energie gilt somit

$$\begin{aligned}\Sigma(\hat{s}_\uparrow) \begin{cases} u_1(\hat{p}) \\ u_2(\hat{p}) \end{cases} &= \begin{cases} u_1(\hat{p}) = u_\uparrow(\hat{p}) \\ 0 \end{cases}, \\ \Sigma(\hat{s}_\downarrow) \begin{cases} u_1(\hat{p}) \\ u_2(\hat{p}) \end{cases} &= \begin{cases} 0 \\ u_2(\hat{p}) = u_\downarrow(\hat{p}) \end{cases},\end{aligned}\tag{3.12}$$

während die Spinoren mit negativem Energieeigenwert die Relationen

$$\begin{aligned} \Sigma(\hat{s}_\uparrow) \begin{cases} v_1(\hat{p}) \\ v_2(\hat{p}) \end{cases} &= \begin{cases} 0 \\ v_2(\hat{p}) = v_\uparrow(\hat{p}), \end{cases} , \\ \Sigma(\hat{s}_\downarrow) \begin{cases} v_1(\hat{p}) \\ v_2(\hat{p}) \end{cases} &= \begin{cases} v_1(\hat{p}) = v_\downarrow(\hat{p}) \\ 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

erfüllen. In (3.12) und (3.13) soll die auf der rechten Seite verwendete Schreibweise für die Spinoren verdeutlichen, dass jeder Zustand durch Angabe des Vorzeichens des Energieeigenwertes, des Impulses und der Richtung des Spins eindeutig bestimmt ist.

Wir können nun also verallgemeinert sagen, dass der Spin-Projektor (3.6) auf Eigenzustände des Spin-Operators in eine beliebige Richtung des Spinvektors \hat{s} projiziert. Die Betrachtung der z -Richtung stellt keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, ermöglicht allerdings die Darstellung der Projektionseigenschaften durch schon bekannte Spinoren.

3.2.4 Spin für bewegte Fermionen

Teilchen, die einen Impuls $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ mit $|\mathbf{p}| \neq 0$ tragen, werden durch Spinoren beschrieben, welche aus den entsprechenden Spinoren im Ruhesystem durch die Lorentz-Transformation hervorgehen $\Psi^\mu = \Lambda(-\boldsymbol{\beta})^\mu{}_\nu \hat{\Psi}^\nu$, da sich das System des Beobachters mit $-\boldsymbol{\beta} = \mathbf{p}c/E$ im Ruhesystem des Teilchens bewegt. Das ergibt für die uns bekannten Spinoren $u^\mu(p, s)$ und $v^\mu(p, s)$ aus [BD84b] Dabei hängen die 4-Vektoren für Spin und Impuls durch die Lorentz-Transformation Λ von ihren Entsprechungen im Ruhesystem des Teilchens ab, was wiederum

$$\begin{aligned} p^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu \hat{p}^\nu, \\ s^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu \hat{s}^\nu \end{aligned} \quad (3.14)$$

bedeutet. Mit der Transformationseigenschaft von Skalarprodukten (B.5) wird unmittelbar klar, dass der Spinvektor dabei wieder die Relationen (3.7) erfüllt. Es ist allerdings zu beachten, dass der Spinvektor in dem bewegten System grundsätzlich seine Anschaulichkeit verliert. So stellt der Spinvektor nicht etwa dar, in welche Richtung der Spin zeigt, sondern es gilt vielmehr

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}\hat{s}) u(\hat{p}, \hat{s}) &= \frac{1}{2}\hbar u(\hat{p}, \hat{s}), \\ (\mathbf{S}\hat{s}) v(\hat{p}, \hat{s}) &= \frac{1}{2}\hbar v(\hat{p}, \hat{s}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

was bedeutet, dass das Teilchen, welches durch den Spinor mit Spinvektor s dargestellt wird, in seinem Ruhesystem entlang \hat{s} polarisiert ist.

Reden wir also im Folgenden von dem Spin eines Teilchens, so werden wir uns implizit grundsätzlich auf den Spin im Ruhesystem beziehen.

Der Spin-Projektor erfüllt in diesem System die Gleichungen

$$\begin{aligned} \Sigma(s) \begin{cases} u(p, s) \\ v(p, s) \end{cases} &= \begin{cases} u(p, s) \\ v(p, s) \end{cases}, \\ \Sigma(-s) \begin{cases} u(p, s) \\ v(p, s) \end{cases} &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei noch einmal darauf hingewiesen werden muss, dass p ein beliebiger Impulsvektor sein kann und s ein beliebiger Vektor, der (3.7) erfüllt. Die zu Grunde liegenden Gleichungen bleiben aber die Eigenwertgleichungen des Spin-Operators in Richtung von \hat{s} im Ruhesystem (siehe dazu auch [Sch05]).

Speziell wollen wir darauf hinweisen, dass wir die Eigenzustände des Spinprojektors mit $s = \pm s_{\uparrow} = \mp s_{\downarrow}$ auch für bewegte Teilchen mit *Spin-Up* und *Spin-Down* bezeichnen wollen. Dabei werden die Spinvektoren unter Zuhilfenahme von (3.14) aus (3.10) gewonnen.

Wir werden nun noch eine spezielle Spinbasis untersuchen, welche wir auch für unsere anschließenden Rechnungen verwenden werden, da sie eine der wenigen intuitiv erscheinenden Konstellationen ist. Es geht dabei um den Spin der parallel oder antiparallel zur Bewegung des Teilchens gerichtet ist. Dazu betrachten wir ein beliebiges Bezugssystem, in dem das Fermion nicht in Ruhe ist ($|\mathbf{p}| \neq 0$). In jedem solchen System gibt es genau eine ausgezeichnete Raumrichtung, welche sich von den anderen unterscheidet, nämlich die Propagationsrichtung des Teilchens. Konstruieren wir nun also die Spin-4-Vektoren, die die Relationen (3.7) erfüllen und darüberhinaus parallel oder antiparallel zur Bewegungsrichtung des Teilchens zeigen. Diese ergeben sich nach einfacher Rechnung zu

$$s_{R,L}^0 = \pm\beta\gamma, \quad \mathbf{s}_{R,L} = \pm\gamma \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (3.17)$$

wobei $\gamma = E/mc^2$ gilt. Natürlicherweise sind die Eigenzustände des entsprechenden Spin-Projektors

$$\begin{aligned} \Sigma(s_R) \begin{cases} u_R(p) \\ v_R(p) \end{cases} &= \begin{cases} u_R(p) \\ v_R(p) \end{cases} \\ \Sigma(s_L) \begin{cases} u_L(p) \\ v_L(p) \end{cases} &= \begin{cases} u_L(p) \\ v_L(p) \end{cases}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

auch Eigenzustände des Helizitätsoperators $\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}/|\mathbf{s}||\mathbf{p}|$ mit den Eigenwerten ± 1 . Diese Zustände werden entsprechend der Helizität auch als rechts-/linkshändig bezeichnet, weshalb wir die Zustände auch dementsprechend mit den Indizes R und L bezeichnet haben. Dabei versteht sich, dass der Spinvektor im Ruhesystem seine bisherige Bedeutung verliert, da es dort keine ausgezeichnete Richtung gibt.

Kapitel 4

Theorie der spinaufgelösten freien Paarerzeugung durch einen Atomkern in einem Laserfeld

In diesem Kapitel wird zunächst die theoretische Herangehensweise an den hier untersuchten Prozess dargelegt. Im Anschluss daran wird die Berechnung der Raten für die Paarproduktion im Detail erläutert. Zum Ende dieses Kapitels widmen wir uns der Berechnung des in den Raten auftretenden Matrixelements. Dies wird sich als rechnerisch aufwendigster Schritt herausstellen.

4.1 Theoretisches Grundkonzept

Wir untersuchen hier den nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozess (1.5), wobei wir der Rechnung von Yakovlev [Yak65] folgen werden. Wir betrachten dabei einen Atomkern mit der Ladung Ze , der sich in einem Laser befindet, dessen Photonen im Laborsystem die Energie $\hbar\omega$ haben. Der Laser habe entsprechend (2.11) den invarianten Intensitätsparameter ξ .

Die geplanten Röntgen-Laser (siehe Abschnitt 1.2.2) stellen Energien mit höchstens einigen keV zur Verfügung. Um allerdings ein e^+e^- -Paar erzeugen zu können, bedarf es je nach Intensität einer Energie im MeV-Bereich. Wir wollen uns eines Tricks bedienen, um die Photonenenergie zu erhöhen; und zwar wollen wir uns die Blauverschiebung zu Nutze machen. Dazu werden wir im Folgenden eine frontale Kollision des Kerns mit dem Laser betrachten.

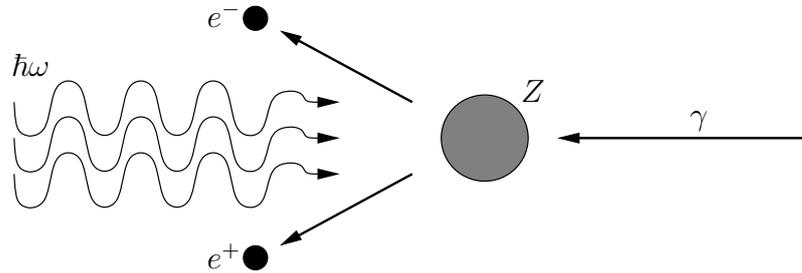


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des betrachteten Prozesses im Laborsystem

Abbildung 4.1 veranschaulicht diesen Prozess im Laborsystem, das heißt, wenn sich der Kern mit einem relativistischen γ -Faktor genau entgegen der Propagationsrichtung des Lasers bewegt. Die Laserfrequenz im Ruhesystem des Kerns ist dann gemäß (B.7) um den Faktor $(\beta + 1)\gamma$ erhöht, wobei $\beta = (1/\gamma^2)^{1/2}$. Betrachten wir diesen Prozess ausschließlich im Ruhesystem des Kerns (Abb. 4.2), so können je nach Beschaffenheit des Strahlungsfeldes und der Geschwindigkeit des Kerns im Ruhesystem Photonenenergien im Bereich der Produktionsschwelle zur Verfügung stehen.

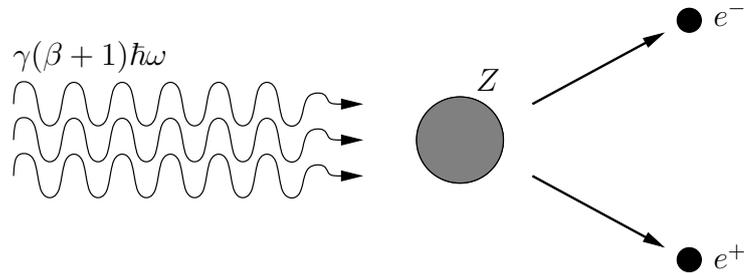


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung des betrachteten Prozesses im Ruhesystem des Kerns

Da wir es dementsprechend mit Lasern sehr hoher Intensität und damit enorm hoher Photonendichte zu tun haben, werden wir das Strahlungsfeld klassisch als ebene, elektromagnetische Welle betrachten. Diese Art der Behandlung eines Laserfeldes wurde bereits von Kibble [Kib65] benutzt. Mittelmann [Mit87] fand heraus, dass die Differenz von klassischem und quantisiertem Viererpotential proportional zu $1/\sqrt{N_k}$ ist, wobei N_k die Anzahl der Photonen pro Frequenzmode im Kohärenzvolumen ist. Diese kann bei modernen Lasern $\sim 10^{17}$ betragen, womit gerechtfertigt ist, dass wir die Laserwelle klassisch betrachten. Zudem ist die Anzahl der in einem Prozess absorbierten Photonen klein gegen N_k , sodass wir die Intensität der Laser-

welle als konstant betrachten können. Der Argumentation aus [Mül03] folgend, werden wir das Potential des Kerns als Störterm behandeln, da sein Einfluss geringer abzuschätzen ist als der des intensiven Laserfeldes [BV80]. Wir werden darüberhinaus auf die aus Kapitel 2 bekannten Volkov-Zustände zurückgreifen, um das Elektron im Feld einer Laserwelle zu beschreiben. Im Wesentlichen werden wir uns also der Rechentchnik von Yakovlev [Yak65] bedienen um dieses Coulomb-Volkov-Problem zu behandeln.

Weiter ist anzumerken, dass wir ausschließlich den Fall der *freien* Paarproduktion betrachten wollen. Andere Effekte wie zum Beispiel die gebundenfreie Paarerzeugung oder etwaige Kernanregungen werden nicht berücksichtigt.

Um Spineffekte bei der Multi-Photonen-Paarerzeugung bestimmen zu können, werden wir im Folgenden nur mit zirkular polarisiertem Laserlicht arbeiten, da Photonen aus einem solchen Laser einen Spin in Propagationsrichtung tragen. Zu jedem der beiden Helizitätseigenzustände der beteiligten Photonen gibt es vier verschiedene Spin-Konstellationen des Prozesses, da jedes produzierte Teilchen zwei verschiedene Spin-Eigenzustände annehmen kann. Damit ergeben sich insgesamt acht verschiedene Spinkonstellationen, die berücksichtigt werden müssen.

4.2 Berechnung der Produktionsraten im Ruhesystem des Kerns

Wir wollen hier die Theorie des Prozesses genauer untersuchen. Mit den Annahmen und Näherungen, die wir in den vorangegangenen Kapiteln gemacht haben, stellt es sich als sinnvoll dar, den Prozess so zu verstehen, dass ein Elektron aus dem negativen Kontinuum durch die Störung des Coulombpotentials in das positive Kontinuum übergeht. Die Energie dafür stammt aus dem Laserfeld. Die spin-aufgelöste Übergangsamplitude für diesen Prozess ist im Ruhesystem des Kerns durch

$$S_{\text{paar}} = \frac{i}{c} \int \bar{\Psi}_{p-,s-}^{(-)} A_K \Psi_{p+,s+}^{(+)} d^4x \quad (4.1)$$

gegeben. Dabei verwenden wir die Volkov-Zustände (2.6) und (2.8) sowie das Coulomb-Potential des Kerns A_K . Dieser Prozess ist in Abbildung 4.3 graphisch dargestellt.

Die Amplitude aus (4.1) legt den Grundstein für unser weiteres Vorgehen. Von ihr ausgehend werden wir nun Ausdrücke für die differentiellen Raten erschließen.

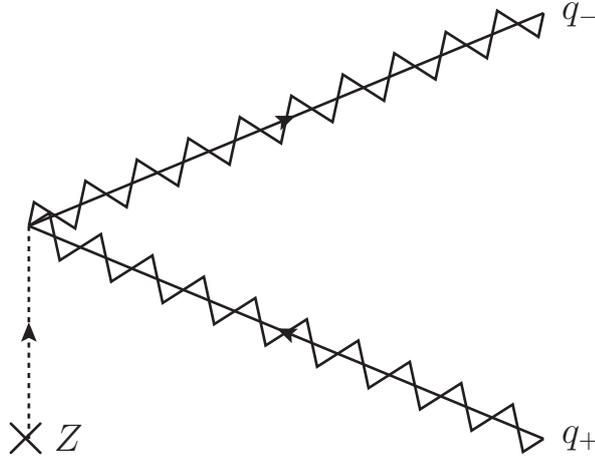


Abbildung 4.3: Feynman-Graph für den Multiphotonen-Prozess, wie wir ihn betrachten wollen. Die Zick-Zack-Linien repräsentieren hier die Volkov-Zustände mit den effektiven Impulsen q_{\pm} . Z ist die Ladungszahl des Kerns.)

In unserem Fall untersuchen wir Teilchen in einer in z -Richtung propagierenden zirkular polarisierten Laserwelle. Wir wollen uns auf eine links-zirkular polarisierte Laserwelle beschränken¹. Der Helizitätseigenwert dieser Photonen ist also $+1$. Diese Beschränkung auf diesen Eigenwert ist möglich, da die Amplitude für einen Störungsprozess erster Ordnung wie er hier betrachtet wird bei der Umkehrung aller beteiligten Spins in sich selbst übergeht [Len57]. Somit gibt es tatsächlich höchstens vier verschiedene Raten. Der Welle, die wir betrachten wollen, liegt ein Potential der Form

$$A_L^\mu(x) = a_1^\mu \cos(kx) + a_2^\mu \sin(kx) \quad (4.2)$$

zugrunde. Der Wellenzahlvektor dieser Welle ergibt sich entsprechend zu $k^\mu = \omega'/c(1, 0, 0, 1)$, wobei $\omega' = \gamma(\beta + 1)\omega$ die Laserfrequenz im Ruhesystem des Kerns ist. Des Weiteren sind $a_1^\mu = (0, a, 0, 0)$ und $a_2^\mu = (0, 0, a, 0)$ Vierervektoren, welche die Richtung des Feldes angeben. Dabei ist a die konstante Amplitude des Vektorpotentials. Die Feldstärke wird damit zu $E_L = a\omega/c$. Die Relationen

$$A_L^2 = a_1^2 = a_2^2 = -a^2, \quad (4.3)$$

$$(kA_L) = (ka_1) = (ka_2) = (a_1a_2) = 0 \quad (4.4)$$

¹Per Konvention ist der Drehsinn einer zirkular polarisierten Welle mit Blickrichtung entgegen der Propagationsrichtung definiert. Links-zirkulare Polarisation ist also gleichbedeutend mit Rechtshändigkeit der Photonen

werden von dem Vektorpotential A_L erfüllt.

Das Potential der ebenen Welle (4.2) führt gemäß (2.6) und (2.8) zu den Volkov-Zuständen im Laser. Die Wirkungsintegrale aus (2.7) und (2.9) werden zu

$$S^{(\pm)} = \pm(px) \pm \frac{a^2}{2c^2(kp)}\eta + \frac{(pa_1)}{c(kp)}\sin\eta - \frac{pa_2}{c(kp)}\cos\eta \quad (4.5)$$

$$= \pm(qx) + \frac{(pa_1)}{c(kp)}\sin\eta - \frac{pa_2}{c(kp)}\cos\eta, \quad (4.6)$$

wobei hier wieder $\eta = (kx)$ gilt. Der Intensitätsparameter aus (2.11), welcher in die effektiven Impulse und die effektive Masse eingeht, wird in einer ebenen Welle zirkularer Polarisation zu $\xi = a/c^2$.

Das Potential des Kerns ist in dessen Ruhesystem durch

$$A_K^0(x) = \frac{Z}{|\mathbf{r}|}, \quad A_K^j(x) = 0 \quad \text{mit } j \in \{1, 2, 3\} \quad (4.7)$$

beschrieben, wobei Z die Ladungszahl des Kerns angibt. In diesem Bezugssystem verschwinden alle räumlichen Komponenten des Kernpotentials. Es gibt also keine magnetischen Beiträge zum Störungsterm.

Damit erhalten wir für die Paarerzeugungsamplitude mit dem Potential (4.7) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} S_{\text{paar}} &= \frac{i}{c} \int \bar{\Psi}_{p-,s-}^{(-)} \gamma_0 A_K^0 \Psi_{p+,s+}^{(+)} d^4x \\ &= \frac{i}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \int \bar{u}_{p-,s-} \left(1 - \frac{A_L \not{k}}{2c(kp_-)} \right) \gamma_0 A_K^0 \left(1 + \frac{\not{k} A_L}{2c(kp_+)} \right) v_{p+,s+} \\ &\quad \times \exp \left\{ -i \left[\frac{(a_1 p_-)}{c(kp_-)} - \frac{(a_1 p_+)}{c(kp_+)} \right] \sin\eta + i \left[\frac{(a_2 p_-)}{c(kp_-)} - \frac{(a_2 p_+)}{c(kp_+)} \right] \cos\eta \right\} \\ &\quad \times e^{i(q_- + q_+) \cdot x} d^4x \end{aligned} \quad (4.8)$$

Setzen wir nun das Viererpotential des Lasers in der Form (4.2) ein und setzen $\gamma^0 = \not{\epsilon}$ mit $\epsilon = (1, 0, 0, 0)$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{\text{paar}} &= \frac{iZ}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \int \frac{d^4x}{|\mathbf{r}|} \bar{u}_{p-,s-} \left\{ \not{\epsilon} + \left[\frac{\not{\epsilon} \not{k} \phi_1}{2c(kp_+)} - \frac{\phi_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right] \cos\eta \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\not{\epsilon} \not{k} \phi_2}{2c(kp_+)} - \frac{\phi_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right] \sin\eta - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right\} v_{p+,s+} \\ &\quad \times e^{-i\alpha_1 \sin\eta + i\alpha_2 \cos\eta} e^{i(q_- + q_+) \cdot x}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

wobei hier und im Folgenden

$$\alpha_j = \frac{(a_j p_-)}{c(k p_-)} - \frac{(a_j p_+)}{c(k p_+)} \quad (4.10)$$

gelten soll. Dabei treten die folgenden x -abhängigen, periodischen Funktionen auf

$$f(\eta) := e^{-i\alpha_1 \sin \eta + i\alpha_2 \cos \eta}, \quad \cos(\eta)f(\eta), \quad \sin(\eta)f(\eta), \quad (4.11)$$

für die wir nun eine entsprechende Reihenentwicklung finden wollen, die uns einen besseren Einblick in das Verhalten der Übergangsamplitude geben soll.

Zunächst finden wir, dass unter Verwendung eines Additionstheorems für die trigonometrischen Funktionen die Relation

$$\alpha_1 \sin \eta - \alpha_2 \cos \eta = \bar{\alpha}(\sin \eta \cos \eta_0 - \cos \eta \sin \eta_0) = \bar{\alpha} \sin(\eta - \eta_0) \quad (4.12)$$

gilt. Hier ist $\bar{\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$ und der eingeführte Winkel η_0 ist gegeben durch $\cos \eta_0 = \alpha_1/\bar{\alpha}$ und $\sin \eta_0 = \alpha_2/\bar{\alpha}$. Damit können wir eine bekannte Reihenentwicklung mit Bessel-Funktionen [AS65] anwenden

$$e^{-ix \sin \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-in\eta}, \quad (4.13)$$

wobei die $J_n(x)$ gewöhnlichen Bessel-Funktionen n -ter Ordnung sind. Mit der Relation (4.12) finden wir für die Funktionen in (4.11) eine entsprechende Darstellung in Form von (4.13). Es gilt somit:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sum_n B_n e^{-in\eta}, \\ \cos(\eta)f(\eta) &= \sum_n C_n e^{-in\eta}, \\ \sin(\eta)f(\eta) &= \sum_n D_n e^{-in\eta}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

wobei die hier auftretenden Fourier-Koeffizienten die gewöhnlichen Bessel-Funktionen aus (4.13) enthalten. Für diese Koeffizienten gilt nun

$$\begin{aligned} B_n &= J_n(\bar{\alpha}) e^{in\eta_0}, \\ C_n &= \frac{1}{2} [J_{n+1}(\bar{\alpha}) e^{i(n+1)\eta_0} + J_{n-1}(\bar{\alpha}) e^{i(n-1)\eta_0}], \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$D_n = \frac{1}{2i} [J_{n+1}(\bar{\alpha}) e^{i(n+1)\eta_0} - J_{n-1}(\bar{\alpha}) e^{i(n-1)\eta_0}]. \quad (4.16)$$

Dabei haben wir die gewohnten Darstellungen

$$\cos \eta = \frac{1}{2} (e^{i\eta} + e^{-i\eta}), \quad \sin \eta = \frac{1}{2i} (e^{i\eta} - e^{-i\eta})$$

von Sinus und Cosinus verwendet. Setzen wir nun die hiermit erhaltenen Entwicklungen (4.14) für die Funktionen (4.11) in die Übergangsamplitude aus (4.9) ein, so erhalten wir

$$S_{\text{paar}} = \frac{iZ}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_n \mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} \int \frac{d^4 x}{|\mathbf{r}|} e^{i(q_+ + q_- - nk) \cdot x}, \quad (4.17)$$

wobei sich uns das hier angegebene Matrixelement $\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}$ als

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} = \bar{u}_{p_-, s_-} & \left\{ \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) B_n \right. \\ & + \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) C_n \\ & \left. + \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) D_n \right\} v_{p_+, s_+} \end{aligned} \quad (4.18)$$

darstellt. Dieses Matrixelement gibt nun die Wahrscheinlichkeiten für den Übergang vom freien positronischen Dirac-Spinor in den freien elektronischen Dirac-Spinor an. Wir betrachten also den Spin bezüglich der asymptotischen Zustände. Die Indizierung des Matrixelements mit den beiden Spinvektoren soll explizit auf die Tatsache hinweisen, dass die Spin-Abhängigkeit des Prozesses hier enthalten ist. Die Bestimmung dieses Matrixelements wird sich trotz ausgefeilter Methoden als äußerst aufwendig darstellen. Aus diesem Grunde werden wir uns dieser Aufgabe im folgenden Abschnitt zuwenden, während unser Augenmerk hier weiterhin auf der Errechnung der Erzeugungsraten liegt.

Wir wenden uns also wieder der Paarerzeugungsamplitude aus (4.17) zu, indem wir die Integrationen über die Raumzeit-Koordinaten ausführen. Aus der Integration über die zeitliche Koordinate erhalten wir eine δ -Distribution, während die Integration über die räumlichen Koordinaten einfach die Fourier-Transformierte des Kernpotentials liefert. Damit wird die Übergangsamplitude zu

$$\begin{aligned} S_{\text{paar}} &= \frac{iZ}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_n \mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} \frac{4\pi}{|\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_- - n\mathbf{k}|^2} 2\pi \delta(q_+^0 + q_-^0 - nk^0) \\ &= \frac{iZ}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_n \mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} \frac{4\pi}{Q_n^2} 2\pi \delta(Q_n^0) \\ &= \frac{-iZ}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_n \mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} \frac{4\pi}{Q_n^2} 2\pi \delta(Q_n^0), \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei hier $Q_n = q_+ + q_- - nk$ den 4-Vektor des Energie- und Impulsübertrags auf den Kern angibt. Hierbei ist zu beachten, dass die δ -Distribution dafür sorgt, dass ausschließlich Prozesse erlaubt sind, in denen die Rückstoßenergie auf den Kern verschwindet, woraus die ebenfalls schon in (4.19) verwendete Relation $Q_n^2 = -Q_n^2$ folgt.

Weiterhin lässt sich aus der δ -Funktion in der Paarerzeugungsamplitude (4.19) ablesen, dass aus dem Laserfeld nur Vielfache der Laserfrequenz $\omega = ck^0$ in dem Paarerzeugungsprozess absorbiert werden können. Obwohl wir also das Laserfeld als ebene Welle approximiert haben, erhalten wir doch eine Quantelung des Strahlungsfeldes. Im Folgenden werden wir n als die Anzahl der am Prozess beteiligten Photonen oder als die *Photonenordnung* des Prozesses bezeichnen.

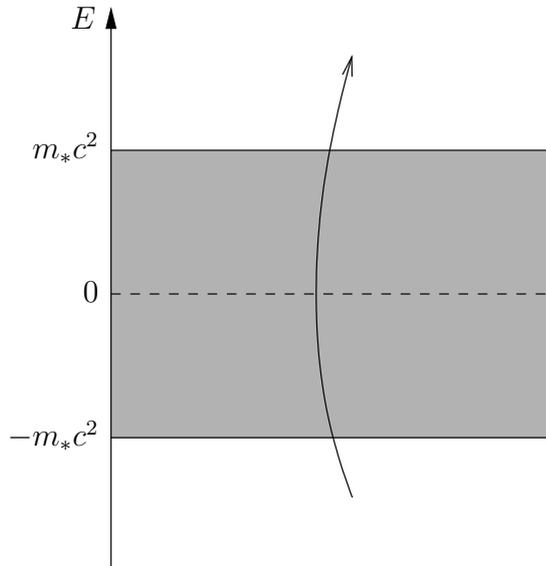


Abbildung 4.4: Übergang aus dem negativen Energie-Kontinuum in das positive Energie-Kontinuum für Elektronen im Laserfeld. Dabei ist m_* die effektive Elektronenmasse im Feld der Laserwelle. Entsprechend (2.12) ist diese größer als die "nackte" Masse des Elektrons.

Da in der δ -Funktion in (4.19) anstelle der asymptotischen (freien) Impulse die effektiven Impulse auftreten, ergibt sich auch für die Energieschwelle eine Änderung gegenüber der nicht-laserinduzierten Paarproduktion. Für jedes erzeugte Teilchen muss hier mindestens seine effektive Ruheenergie aufgebracht werden. Dadurch sind nur Prozesse mit $n\omega \geq 2m_*c^2$ erlaubt, wie in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Das hat zur Folge, dass nur Prozesse ab einer bestimmten Photonenumgebung n_0 zum Matrixelement beitragen. Wir

definieren

$$n_0 := \min \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq \frac{2m_*c^2}{\omega} \right\}. \quad (4.20)$$

Die gesamte Erzeugungsrate für ein Elektron-Positron-Paar hängt vom Betragsquadrat der Übergangsamplitude (4.19) ab. Dieses Betragsquadrat ergibt sich zu

$$|S_{\text{paar}}|^2 = \left| \sum_{n \geq n_0} S_{\text{paar}}^{(n)} \right|^2 = \sum_{n \geq n_0} |S_{\text{paar}}^{(n)}|^2, \quad (4.21)$$

wobei

$$|S_{\text{paar}}^{(n)}|^2 = \frac{Z^2}{q_+^0 q_-^0} |\mathfrak{M}_n|^2 \frac{16\pi^2}{Q_n^4} 2\pi\delta(Q_n^0) cT \quad (4.22)$$

ist. Die Relation (4.21) ist erfüllt, da für die dort auftretenden δ -Funktionen offensichtlich

$$\delta(Q_n^0)\delta(Q_{n'}^0) = \delta_{nn'}\delta(Q_n^0)^2 \quad (4.23)$$

gilt. Dies unterbindet das Auftreten der Doppelsumme über n und n' in (4.21). Desweiteren haben wir in (4.22) das auftretende Quadrat durch

$$[2\pi\delta(Q_n^0)]^2 = 2\pi\delta(Q_n^0) cT \quad (4.24)$$

ersetzt. Dabei ist T ein Zeitfaktor, der die Wechselwirkungsdauer angibt [BD84b]. Die von der Photonenordnung abhängige Partialrate für die Erzeugung eines Paares erhalten wir indem wir aus (4.22) den Zeitfaktor herausdividieren und über alle Freiheitsgrade der erzeugten Teilchen integrieren. In differentieller Form erhalten wir somit

$$d^6 R_n = \frac{1}{T} |S_{\text{paar}}^{(n)}|^2 \frac{d^3 q_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q_-}{(2\pi)^3}. \quad (4.25)$$

Dass wir hier die differentielle Rate bezüglich der effektiven Teilchenimpulse q_{\pm} betrachten, liegt ursächlich in der Normierung (2.14) der Volkov-Zustände begründet. Die differentielle Rate (4.25) hängt außerdem von den asymptotischen Impulsen sowie den Spins der Teilchen ab, welche die Form der freien Dirac-Spinoren im Matricelement (4.18) bestimmen. Damit wird klar, dass jede Rate vier verschiedene Beiträge hat, je nachdem welche Konstellation der Spinorientierung vorliegt. Wir werden später sehen, warum von diesen vier Raten tatsächlich nur drei verschieden sein können.

Im Folgenden werden wir die Raten bezüglich der Energien und Emissionswinkel der Teilchen auffassen. Dazu benötigen wir den Zusammenhang der kartesischen Differentiale mit den Energie- und Winkeldifferentiale:

$$d^3 q = |\mathbf{q}| q^0 dE_q \sin \theta_q d\theta_q d\phi_q \quad (4.26)$$

Des Weiteren sagt uns die δ -Funktion in (4.22), dass bei fester Photonenergie die Angabe einer Teilchenenergie unmittelbar die Energie des anderen Teilchens bestimmt. Das bedeutet, dass wir unter Verwendung der Beziehung

$$|\mathbf{q}_-|^2 d|\mathbf{q}_-| \delta(q_+^0 + q_-^0 - nk^0) = |\mathbf{q}_-| q_-^0 dE_{q_-} \delta(E_{q_+} + E_{q_-} - n\omega) \quad (4.27)$$

die differentielle Rate aus (4.25) über die effektive Elektronenenergie integrieren können. Daraus ergibt sich

$$d^5 R_n = \frac{Z^2 c}{2\pi^3} |\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 \frac{1}{Q_n^4} \frac{d^3 q_+}{q_+^0} |\mathbf{q}_-| \sin \theta_{q_-} d\theta_{q_-} d\phi_{q_-} \Big|_{Q_n^0=0}. \quad (4.28)$$

Hierbei ist anzumerken, dass unsere Wahl, gerade die Elektronenenergie mit Hilfe der δ -Funktion in (4.27) zu eliminieren, rein willkürlich war. Ebenso gut hätten wir über die Positronenenergie integrieren können. Aufgrund der Tatsache, dass wir nämlich die Paarerzeugungsamplitude in erster Ordnung berechnet haben und somit weitere Wechselwirkung mit dem Kernpotential ausschließen, wird sich das Betragsquadrat der Paarerzeugungsamplitude symmetrisch unter der Vertauschung von Elektron und Positron verhalten. Damit wird auch klar, warum wir anstatt der vier kombinatorisch möglichen Raten nur drei verschiedene Raten finden werden. Wir werden dieses Verhalten anhand der Berechnung des Betragsquadrats des Matrixelements (4.18) im folgenden Abschnitt genauer untersuchen.

Nehmen wir an, in einem entsprechenden Experiment werde von dem erzeugten Paar nur das Positron detektiert. Die entsprechenden Raten, welche nur von den Freiheitsgraden des Positrons abhängen erhalten wir dann durch Integration über die Emissionswinkel des Elektrons, was uns die dreifach-differentiellen Raten

$$\begin{aligned} \frac{d^3 R_n}{dE_{q_+} d\theta_{q_+} d\phi_{q_+}} &= \frac{E_{q_+} |\mathbf{q}_+| \sin \theta_{q_+} d^3 R_n}{c^2 d^3 q_+} \\ &= \frac{Z^2}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} d\phi_{q_-} \int_0^\pi d\theta_{q_-} \frac{|\mathbf{q}_+| |\mathbf{q}_-|}{Q_n^4} |\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 \sin \theta_{q_+} \sin \theta_{q_-} \end{aligned} \quad (4.29)$$

liefert. Aufgrund der Azimutalsymmetrie des gewählten Systems (zirkulare Polarisation des Lasers), kann diese Rate nicht von ϕ_{q_+} abhängen und wir können das entsprechende Winkelintegral ausführen und erhalten einfach einen konstanten Faktor

$$\frac{d^2 R_n}{dE_{q_+} d\theta_{q_+}} = \frac{Z^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi_{q_-} \int_0^\pi d\theta_{q_-} \frac{|\mathbf{q}_+| |\mathbf{q}_-|}{Q_n^4} |\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 \sin \theta_{q_+} \sin \theta_{q_-}. \quad (4.30)$$

Darüber hinaus sind wir natürlich auch an totalen Raten interessiert und erhalten durch Integration über die verbleibenden Größen die totalen Partialraten

$$R_n = \int_0^\pi d\theta_{q_+} \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE_{q_+} \left[\frac{d^2 R_n}{dE_{q_+} d\theta_{q_+}} \right]. \quad (4.31)$$

Durch Summation dieser Partialraten über n erhalten wir die Gesamtraten für die Paarproduktion². Dabei versteht sich, dass eine Messung dieser Gesamtraten keinen Rückschluss auf die beitragenden Photonennordnungen zulässt.

4.3 Berechnung des auftretenden Matrixelements

Das Matrixelement, welches in Gl. (4.18) definiert worden ist, wollen wir nun genauer untersuchen. Um die Impuls- und Spin-Abhängigkeit zu verdeutlichen, wird das Matrixelement zunächst zu

$$\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-} = \bar{u}(p_-, s_-) \Gamma_n v(p_+, s_+)$$

umgeschrieben. Damit ist die Matrix Γ_n gemäß der Definition des Matrixelements in Gl.(4.18) durch

$$\begin{aligned} \Gamma_n = & \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) B_n \\ & + \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) C_n \\ & + \left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) D_n \end{aligned} \quad (4.32)$$

gegeben. Da unser Bemühen hauptsächlich darauf zielen soll, das Betragsquadrat des Matrixelements zu berechnen, ist für uns auch die zu (4.32) adjungierte Matrix von Bedeutung. Mit den entsprechenden Relationen aus

²An dieser Stelle sei angemerkt, dass darin auch der Grund dafür liegt, dass wir hier anstatt von Wirkungsquerschnitten, welche üblicherweise den Ein-Photon-Prozess charakterisieren, von Produktionsraten sprechen. Jede Partialrate müsste entsprechend der Definition des Wirkungsquerschnitts auf einen anderen einfallenden Photonenfluss normiert werden.

(C.7) ergibt diese sich zu

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_n &= \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) B_n^* \\ &+ \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_-)} \right) C_n^* \\ &+ \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) D_n^*.\end{aligned}\quad (4.33)$$

Das Betragsquadrat des Matrixelements wollen wir nun in Indexschreibweise als Summe über die einzelnen Beiträge auffassen

$$\begin{aligned}|\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 &= |\bar{u}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta|^2 \\ &= \bar{u}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta \bar{v}_{\beta'} \bar{\Gamma}_{\beta'\alpha'} u_{\alpha'} \\ &= \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta \bar{v}_{\beta'} \bar{\Gamma}_{\beta'\alpha'} u_{\alpha'} \bar{u}_\alpha,\end{aligned}\quad (4.34)$$

wobei hier entsprechend der Summationskonvention über doppelt auftretende Indizes summiert werden soll. In der Form (4.34) finden wir nun die Tensorprodukte der Spinoren aus (D.1) mit den Projektoren (3.6) und (D.2) wieder. Setzt man dann noch die entsprechenden Darstellungen mit Spin- und Impuls-4-Vektor ein, so erhält man

$$|\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 = \text{Sp} \left(\Gamma \left[\left(\frac{\not{\psi}_+ - c}{2c} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{\phi}_+}{2} \right) \right] \bar{\Gamma} \left[\left(\frac{\not{\psi}_- + c}{2c} \right) \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{\phi}_-}{2} \right) \right] \right), \quad (4.35)$$

wobei wir hier die Summation über den Index α als Bildung der Spur über das Produkt der auftretenden Matrizen ausgedrückt haben. Die Zuhilfenahme dieser *Spur-Technik* zur Berechnung von Übergangsraten oder Wirkungsquerschnitten ist wohlbekannt [BD84b] und kann die analytischen Rechnungen drastisch vereinfachen. Dabei nimmt man allerdings in Kauf, dass das Verhalten und die Struktur der Übergangsmatrix selbst (hier: Γ_n) im Wesentlichen verborgen bleibt. Zu dieser Problematik nehmen auch Fano und McVoy in [FMA59] Stellung:

[...] *the trace technique for the direct calculation of cross section has diverted attention from the study of matrix elements.*

Wir werden allerdings im Folgenden sehen, dass die algebraische Berechnung des Betragsquadrats des Matrixelements (4.18) selbst unter Verwendung der Spur-Technik sehr aufwendig ist. Wir werden also – ausgehend von

(4.35) – einen analytischen Ausdruck für die Produktionsraten finden. Dazu setzen wir nun für die Matrix Γ_n (4.32) und für $\bar{\Gamma}_n$ (4.33) in die obige Gleichung (4.35) ein und finden den Ausdruck

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{M}_n^{s_+s_-}|^2 = & B_n B_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& + B_n C_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& + B_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& + C_n B_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& + C_n C_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& + C_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D_n B_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +D_n C_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +D_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \quad (4.36)
\end{aligned}$$

für das Betragsquadrat des Matrixelements.

Verwenden wir nun zum einen die Eigenschaft der Spurbildung aus (E.10), welche besagt, dass die Spur unter Umkehr der Reihenfolge von γ -Matrizen invariant bleibt, und zum anderen die zyklische Vertauschbarkeit (E.4) der Matrizen innerhalb der Spur, so ergibt sich unter Zuhilfenahme der Kommutatorrelation der Projektoren (D.4) die neue Form

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 &= B_n B_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +B_n C_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +B_n^* C_n \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(-s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(-s_-) \right) \\
& +B_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +B_n^* D_n \cdot \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(-s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(-s_-) \right) \\
& +C_n C_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +C_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right) \\
& +C_n^* D_n \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(-s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(-s_-) \right) \\
& +D_n D_n^* \cdot \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \Sigma(s_+) \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \Sigma(s_-) \right). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Hieraus läßt sich sehen, dass wir jeweils die Terme zusammenfassen können, deren Koeffizienten durch komplexe Konjugation ineinander übergehen. Setzt man jeweils die konkrete Gestalt des Spinprojektors Σ (3.6) in obigen Ausdruck ein, so kann dieser in die Form

$$\begin{aligned}
4|\mathfrak{M}_n^{s_+s_-}|^2 = & B_n B_n^* \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \\
& + \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\epsilon}_+ \right. \\
& \left. \left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\epsilon}_- \right) \left. \right] \\
& + (B_n C_n^* + B_n^* C_n) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \\
& + \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\epsilon}_+ \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\epsilon}_- \right) \left. \right] \\
& + (B_n^* C_n - B_n C_n^*) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\epsilon}_+ \right. \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \\
& + \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \\
& \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\epsilon}_- \right) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(B_n D_n^* + B_n^* D_n) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \quad \left. + \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \\
& +(B_n^* D_n - B_n D_n^*) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \quad \left. + \text{Sp} \left(\left(\not{\epsilon} - \frac{a^2 (\epsilon k)}{2c^2 (kp_+) (kp_-)} \not{k} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \\
& + C_n C_n^* \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \quad \left. + \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c (kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c (kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(C_n D_n^* + C_n^* D_n) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \\
& +(C_n^* D_n - C_n D_n^*) \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \\
& + D_n D_n^* \cdot \left[\text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \text{Sp} \left(\left(\frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left(\frac{\not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon}}{2c(kp_+)} - \frac{\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2}{2c(kp_-)} \right) \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right]
\end{aligned}$$

gebracht werden, in der nun erstmals sehr deutlich die verschiedenen Spin-Beiträge zum Übergang identifiziert werden können. Zum einen gibt es Beiträge, die rein kinetischer Natur sind. Da diese nicht von den Spin-Vektoren abhängen, sind sie zu gleichen Teilen auf die vier durch die Spinstellung unterscheidbaren Produktionsraten verteilt.

Weiterhin erhalten wir hier auch spinabhängige Terme, welche sowohl von einem als auch von beiden Spin-Vektoren abhängen können. Auf Grund der Linearität der Spur (E.2) heben sich diese bei Summation über die vier Spinkonstellationen weg und es bleiben nur jene spinunabhängigen Terme erhalten. Daraus ergibt sich das selbe Resultat wie in [MVG03], was nicht verwundert, da bereits die Spinsumme über das Tensorprodukt der Dirac-Zustände in (4.35) die Energieprojektoren (D.2) ergibt.

Es ist auch zu bemerken, dass die Spuren, welche nur vom Spin eines Teilchens abhängen, auch genau eine γ^5 -Matrix enthalten. Per Definition dieser Matrix (C.5) sind diese Spuren rein imaginär. Wir sehen dementsprechend auch, dass diese Spuren nur mit rein imaginärem Vorfaktor auftreten. Dadurch ist weiterhin gewährleistet, dass das Betragsquadrat – wie nicht anders möglich – reell bleibt. Diese Koeffizienten wollen wir im nächsten Schritt umschreiben, um das angesprochene Verhalten zu verdeutlichen.

Solche Terme, welche die Spin-Spin-Kopplung ausdrücken und somit von beiden Spins abhängen, enthalten auch zweimal die Matrix γ^5 . Diese lassen sich aber gemäß (4.32) aus den Spuren eliminieren. Damit und nach weiteren linearen Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
4|\mathfrak{M}_n^{s_+s_-}|^2 = & B_n B_n^* \cdot \left\{ \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\not{p}}_- \right) \\
& - \frac{a^2(\epsilon k)}{2c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{k} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& + \text{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \\
& + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{k} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\not{p}}_- \right) \\
& \left. + \text{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\not{p}}_- \right) \right] \\
& + \frac{a^4(\epsilon k)^2}{4c^4(kp_+)^2(kp_-)^2} \left[\text{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{k} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \left. + \text{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{k} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\not{p}}_- \right) \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cdot \operatorname{Re}\{B_n C_n^*\} \cdot \left\{ \frac{1}{2c(kp_+)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2c(kp_-)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)^2(kp_-)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)(kp_-)^2} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right] \right\} \\
& +2i \cdot \operatorname{Im}\{B_n^* C_n\} \cdot \left\{ \frac{1}{2c(kp_+)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2c(kp_-)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)^2(kp_-)} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{a}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)(kp_-)^2} \left[\operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + \operatorname{Sp} \left(\not{k} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{a}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{s}_- \right) \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \cdot \operatorname{Re}\{B_n D_n^*\} \cdot \left\{ \frac{1}{2c(kp_+)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2c(kp_-)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)^2(kp_-)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)(kp_-)^2} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right] \right\} \\
& +2i \cdot \operatorname{Im}\{B_n^* D_n\} \cdot \left\{ \frac{1}{2c(kp_+)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{1}{2c(kp_-)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)^2(kp_-)} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{a^2(\epsilon k)}{4c^3(kp_+)(kp_-)^2} \left[\operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\not{s}}_+\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \left. + \operatorname{Sp}\left(\not{k}\Lambda_+(p_+)\not{\not{k}}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\not{s}}_-\right) \right] \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C_n C_n^* \cdot \left\{ \frac{1}{4c^2(kp_+)^2} \left[\text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{4c^2(kp_-)^2} \left[\text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right\} \\
& + 2 \cdot \text{Re} \{ C_n D_n^* \} \cdot \left\{ \frac{1}{4c^2(kp_+)^2} \left[\text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_1 \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\phi}_2 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{4c^2(kp_-)^2} \left[\text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2 \Lambda_-(p_-) \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp} \left(\not{\phi}_1 \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\phi}_+ \not{\epsilon} \not{k} \not{\phi}_2 \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\phi}_- \right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2i \cdot \text{Im}\{C_n^* D_n\} \cdot \left\{ \frac{1}{4c^2(kp_+)^2} \left[\text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_1\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_1\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_1\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_1\Lambda_+(p_+)\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp}\left(\not{a}_1\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{a}_1\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{1}{4c^2(kp_-)^2} \left[\text{Sp}\left(\not{a}_1\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{a}_1\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right\} \\
& + D_n D_n^* \cdot \left\{ \frac{1}{4c^2(kp_+)^2} \left[\text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_+(p_+)\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \quad - \frac{1}{4c^2(kp_+)(kp_-)} \left[\text{Sp}\left(\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{1}{4c^2(kp_-)^2} \left[\text{Sp}\left(\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \text{Sp}\left(\not{a}_2\not{k}\not{\epsilon}\Lambda_+(p_+)\gamma^5\not{\epsilon}_+\not{\epsilon}\not{k}\not{a}_2\Lambda_-(p_-)\gamma^5\not{\epsilon}_-\right) \right] \right\} \\
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Anhand dieser Form wollen wir nun die Symmetrie der Übergangsraten bei Teilchenvertauschung untersuchen. Dazu prüfen wir das Verhalten des Be-

tragsquadrats des Matrixelements aus (4.38) bei der Transformation $p_+ \leftrightarrow p_-$ und $s_+ \leftrightarrow s_-$. Zunächst betrachten wir dazu die Fourier-Koeffizienten aus (4.16). Wir sehen sodann, dass bei Teilchenvertauschung der Phasenwinkel η_0 in $\eta_0 + \pi$ übergeht. Dieses Verhalten ist unmittelbar einsehbar, da die Parameter α_j aus (4.10) bei der Transformation einfach ihr Vorzeichen ändern. Damit bleibt auch das Argument der Bessel-Funktionen $\bar{\alpha}$ erhalten, da die α_j dort quadratisch eingehen. Wir können dementsprechend festhalten, dass die Fourier-Koeffizienten B_n , C_n und D_n in $(-1)^n B_n$, $(-1)^{n+1} C_n$ und $(-1)^{n+1} D_n$ übergehen. Damit verhalten sich deren hier auftretende Produkte $B_n B_n^*$, $C_n C_n^*$ und $D_n D_n^*$ symmetrisch unter der betrachteten Transformation, während sich die Produkte $B_n C_n^*$ und $B_n D_n^*$ antisymmetrisch verhalten. Aufgrund der Eigenschaften der Spur, lässt sich das Transformationsverhalten der einzelnen Terme leicht einsehen und wir finden, dass das Betragsquadrat des Matrixelements (4.38) unter Teilchenvertauschung invariant ist:

$$|\mathfrak{M}_n^{s_+ s_-}|^2 \leftrightarrow |\mathfrak{M}_n^{s_- s_+}|^2 \quad \text{bei } p_+ \leftrightarrow p_-, \quad s_+ \leftrightarrow s_- \quad (4.39)$$

Damit finden wir unmittelbar, dass die Raten bei verschiedenen Spinstellungen der erzeugten Teilchen unabhängig davon sind, welches der Teilchen welchen Spin trägt. Von den zu den vier verschiedenen Spinkonstellationen gehörenden Raten sind also wiederum nur drei Raten tatsächlich verschieden. Wir werden bei der Vorstellung der numerischen Ergebnisse noch einmal auf dieses Verhalten eingehen.

Hier soll nochmals angemerkt sein, dass das Matrixelement nicht von beiden Azimutalwinkeln abhängt, sondern nur von deren Differenz. Diese Eigenschaft ist unmittelbarer Ausdruck der Azimutalsymmetrie des Systems. Wir haben sie in (4.30) schon verwendet.

Die in (4.38) auftretenden Spuren können schließlich unter Zuhilfenahme der in E gegebenen Umformungen komplett durch Skalarprodukte der beteiligten 4-Vektoren ausgedrückt werden. Da diese Rechnungen sehr umfangreich sind, werden sie nur exemplarisch für einige spezielle Spuren dargestellt. Diese Rechnungen finden sich in Anhang F wieder, wo auch eine skalare Darstellung des Betragsquadrats des Matrixelements gegeben ist.

4.4 Transformation der Raten

Abschließend werden in diesem Kapitel die in Abschnitt 4.2 ermittelten Produktionsraten in andere Systeme transformiert. Die dort berechneten Raten wurden im Kernsystem berechnet und sind differentiell im effektiven Impuls (2.10) eines erzeugten Teilchens. Wirklich messbar sind allerdings nur die asymptotischen Impulse im Laborsystem. Um die Raten bezüglich dieser

Impulse zu ermitteln, stellen wir zunächst die Transformation der dreifach-differentiellen Raten aus (4.29) vor. Unter Verwendung der Relation (2.13) erhalten wir für die im asymptotischen Impuls dreifach-differentielle Produktionsrate

$$\frac{d^3 R_n}{dE_p d\theta_p d\phi_p} = \frac{|\mathbf{p}| \sin \theta_p}{|\mathbf{q}| \sin \theta_q} \frac{d^3 R_n}{dE_q d\theta_q d\phi_q}. \quad (4.40)$$

Verwenden wir nun noch die exakte Beschaffenheit des hier betrachteten Systems, so können wir diesen Ausdruck noch weiter vereinfachen. Da sich nämlich die hier betrachtete Laserwelle in die z -Richtung ausbreitet, bleiben die Impulskomponenten in x - und y -Richtung unverändert. Dies lässt sich unmittelbar aus (2.10) ablesen. Für beliebige Ausbreitungsrichtungen sehen wir, dass sich jeweils die transversalen Komponenten der verschiedenen Impulse nicht ändern. Somit gilt generell $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{q}_\perp$, was mit unserer Wahl der Koordinaten zu $|\mathbf{p}_\perp| \sin \theta_p = |\mathbf{q}_\perp| \sin \theta_q$ und $\phi_p = \phi_q$ wird. Aus letzterer Relation folgt unmittelbar auch die Gleichheit der entsprechenden Differentiale. Damit vereinfacht sich der obige Ausdruck drastisch und wir erhalten

$$\frac{d^2 R_n}{dE_p d\theta_p} = \frac{d^2 R_n}{dE_q d\theta_q} \quad (4.41)$$

für die zweifach-differentiellen Raten, wobei wir wieder die Azimutalsymmetrie unseres Systems ausgenutzt haben.

Es ist klar, dass etwaige Messungen nur im Laborsystem gemacht werden können. Eine Mitführung der Messapparatur ist unmöglich. Obwohl wir in dieser Arbeit keine Ergebnisse im Laborsystem vorstellen werden, sei für den interessierten Experimentator im Folgenden die Transformation der Raten ins Laborsystem erläutert. Dazu werden die asymptotischen Impulse im Kernsystem ins Laborsystem Lorentz-transformiert (B.6). Bewegt sich das Kernsystem im Laborsystem mit dem relativistischen Faktor γ , so ergibt sich das bekannte Transformationsverhalten für differentielle Wirkungsquerschnitte [EM95]. Wir haben es hier allerdings mit Produktionsraten zu tun, welche im Gegensatz zu Wirkungsquerschnitten nicht Lorentz-invariant sind. Vielmehr müssen wir wegen der Abhängigkeit von der zeitlichen Komponente auch die Zeitdilatation in Betracht ziehen. Wird zum Beispiel in einem System ein Paar in einem Zeitintervall Δt erzeugt, so erscheint dieses in einem sich mit γ darin bewegenden System um eben diesen Faktor gedehnt. Dementsprechend vermindert sich auch die Produktionsrate. In unserem Fall gilt $\Delta t = \gamma \Delta t'$ und somit $R = R'/\gamma$, wobei hier die gestrichenen Größen dem Kernsystem und die ungestrichenen Größen dem Laborsystem zugeordnet werden sollen. Es ergibt sich also für die dreifach-differentielle Rate im

Laborsystem

$$\frac{d^3 R_n}{dE d\theta d\phi} = \frac{1}{\gamma} \frac{|\mathbf{p}| \sin \theta}{|\mathbf{p}'| \sin \theta'} \frac{d^3 R'_n}{dE' d\theta' d\phi'}. \quad (4.42)$$

Auch hier werden wir einsehen, dass dieser Ausdruck sich in der von uns betrachteten Konstellation noch vereinfacht. Da wir eine Head-On-Kollision des Kerns mit dem Laser betrachten wollen, bewegt sich das Kernsystem nämlich mit Faktor γ im Laborsystem und zwar in negative z -Richtung. Da bei jedem Lorentz-Boost allgemein $\mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}'_\perp$ gilt, so ergibt sich hier im Speziellen $|\mathbf{p}| \sin \theta = |\mathbf{p}'| \sin \theta'$ mit $\phi = \phi'$. Damit erhalten wir

$$\frac{d^2 R_n}{dE d\theta} = \frac{1}{\gamma} \frac{d^2 R'_n}{dE' d\theta'} \quad (4.43)$$

als vereinfachten Ausdruck für unsere Produktionsrate. Damit sind wir nun in der Lage, die Raten bezüglich aller relevanten Impulse zu betrachten.

Der Grund dafür, dass wir in dieser Arbeit ausschließlich Raten im Ruhesystem des Kerns vorstellen werden, liegt darin, dass sich bei der Lorentz-Transformation (B.6) die Helizität der Teilchen ändern kann, was verhindert, dass wir ohne Weiteres von den berechneten Raten im Laborsystem auf die Spinkonstellation im Kernsystem schließen können.

Kapitel 5

Ergebnisse zur spin-aufgelösten Paarерzeugung

In diesem Kapitel werden die numerischen Ergebnisse der Rechnung aus Kapitel 4 und dem Matrixelement aus Anhang F präsentiert. Für die Integration der Raten wird ein Algorithmus verwendet, der die Stützstellen und Gewichte für die Gauß-Legendre-Quadratur mit Legendre-Polynomen beliebiger Ordnung bestimmt. Dieser wurde in C++ unter Zuhilfenahme der Entwicklungsumgebung Eclipse implementiert.

Wir wollen die Ergebnisse vor dem Hintergrund einiger wesentlicher Fragen zu den Spin-Effekten in Multiphotonen-Prozessen beurteilen.

Aus den bekannten Arbeiten für den spin-aufgelösten Ein-Photon-Prozess [OM59, MD57] wissen wir zum Beispiel, dass das schnellere der beiden produzierten Teilchen bevorzugt die Helizität des absorbierten Photons annimmt, während das langsamere Teilchen nur sehr schwach polarisiert ist. Wir stellen uns nun die Frage, ob es möglich ist, dass bei der Absorption mehrerer Photonen beide Teilchen diesen *photon-artigen* Charakter aufweisen. Darüber hinaus sind wir generell daran interessiert, ob es möglich ist, durch Steigerung der Photonenzahl höhere Polarisationsgrade zu erreichen, um eventuell eine praktische Anwendungsmöglichkeit der Multiphotonen-Paarерzeugung aufzeigen zu können. Der lineare Bethe-Heitler-Prozess hat bereits bei der Erzeugung polarisierter Teilchenstrahlen für Hochenergieexperimente Anwendung gefunden [A⁺08].

Zunächst werden wir dazu unsere Rechnungen auf den Ein-Photon-Fall anwenden, um zu sehen, ob sie dort zu Ergebnissen führen, die eine Übereinstimmung mit den bekannten Ergebnissen für diesen Fall aufweisen. Daraufhin werden wir die Ergebnisse auf das Multiphotonenregime ausdehnen. Wir werden dort sehen, ob die Erhöhung des im Prozess absorbierten Gesamtdrehimpulses allein eine Auswirkung auf die Polarisations-Effekte hat. Im

Anschluss daran, werden wir noch ein Ergebniss aus dem Übergangsregime präsentieren, um festzustellen, ob das Zulassen hoher Photonenergien durch Anpassung des Intensitätsparameters eine Auswirkung auf den Polarisationsgrad hat.

5.1 Der Ein-Photon-Prozess

Wir wollen zunächst nach einer geeigneten Methode suchen, die Ergebnisse unserer Rechnung zu bestätigen. Dazu soll uns ein Ergebnis aus [OM59] und [MD57] dienen. Dort wird der longitudinale Polarisationsgrad für den detektierten Teilchenstrahl in Abhängigkeit von der Energie der Teilchen angegeben. Für relativistische Teilchen gilt

$$P = \frac{d\sigma_R - d\sigma_L}{d\sigma_R + d\sigma_L} = \frac{4x - 1}{4x^2 - 4x + 3}, \quad (5.1)$$

wobei der dimensionslose Parameter $x = E/\hbar\omega$ der Quotient aus Teilchen- und Photonenergie ist. Wir sehen also, dass im Ein-Photon-Prozess die longitudinale Polarisation nicht von der absoluten Energie des erzeugten Teilchens abhängt, sondern nur von dem relativen Energieübertrag vom Photon. In Abbildung 5.1 ist der Polarisationsgrad für den Ein-Photon-Prozess dargestellt. Dabei haben wir angenommen, das Photon treffe auf einen Kern in Ruhe. Mit $\xi \ll 1$ haben wir angenommen, dass die Intensität der Laserwelle so gering ist, dass wir quasi den Fall des linearen Bethe-Heitler-Prozesses (1.4) betrachten. Die Indizes R, L deuten auf die longitudinale Polarisation hin. Analog zu der Nomenklatur für die Spinoren aus Kapitel 3 nennen wir das beobachtete Teilchen rechts-/linkshändig. Über den Spin des anderen Teilchens ist summiert worden. Da die von uns berechneten Raten aber symmetrisch unter Teilchenvertauschung sind (4.39), ergibt sich für beide Teilchenstrahlen dieselbe Energieabhängigkeit des Polarisationsgrades, wenn das jeweils andere Teilchen nicht detektiert wird. Für den Polarisationsgrad im Ein-Photon-Prozess ist es darüber hinaus zulässig, die Wirkungsquerschnitte für unsere Rechnung durch die Erzeugungsraten zu ersetzen. Der konstante Fluss, auf den die Wirkungsquerschnitte normiert sind, hebt sich im Quotienten gerade weg. Es gilt also

$$R_R^1/R_L^1 = \sigma_R^1/\sigma_L^1. \quad (5.2)$$

Wir finden in Abbildung 5.1 eine deutliche Übereinstimmung unserer numerischen Ergebnisse mit dem analytischen Ausdruck (5.1) aus [MD57]. Dies entspricht dem Polarisationsgrad aus [OM59], wenn man die dort berücksichtig-

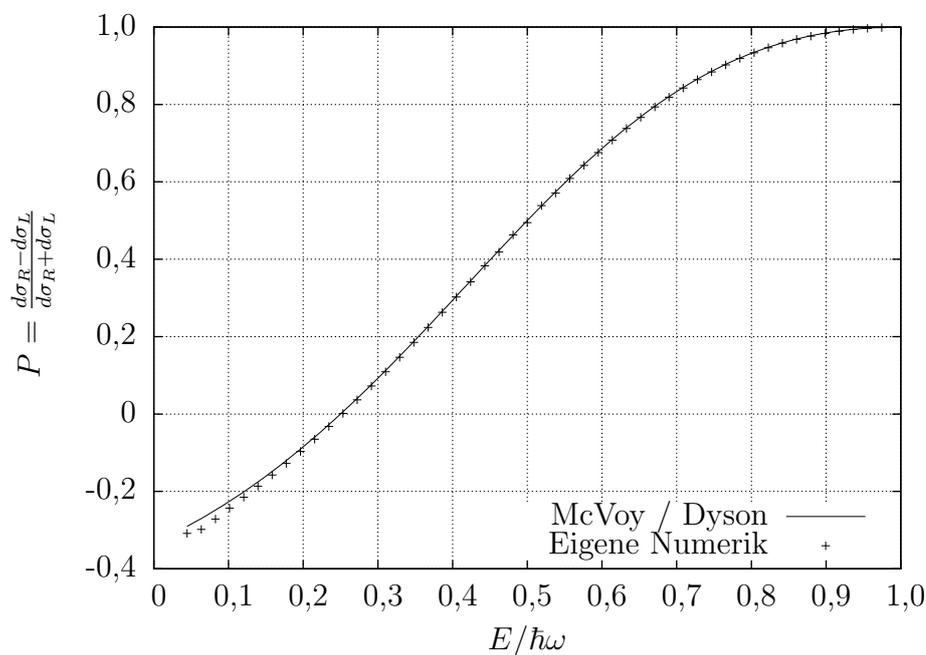


Abbildung 5.1: Longitudinaler Polarisationsgrad in Abhängigkeit von der Energie für den Ein-Photon-Prozess bei einer Photonenenergie von 20 MeV und einem Intensitätsparameter von $\xi \ll 1$. Die Kreuze stellen unsere numerischen Ergebnisse dar, während die durchgezogene Linie Gleichung (5.1) entspricht.

ten Screening-Effekte vernachlässigt. In unserem Modell ist von vornherein von dem Potential eines Atomkerns die Rede, so dass eine etwaige Abschirmung durch eine Elektronenhülle nicht in Betracht gezogen wird. Wir finden also bestätigt, dass unsere Rechnung die Ergebnisse, die seit Ende der 1950er Jahre bekannt sind, reproduzieren kann.

Wir wollen dieses wesentliche Resultat noch einmal erläutern. Das wohl eindrucklichste Ergebnis ist, dass das erzeugte Teilchen, welches den Großteil der Photonenenergie trägt, mit erhöhter Wahrscheinlichkeit in dieselbe Richtung polarisiert ist wie das Photon selbst. Wir wollen an dieser Stelle auf [BLP91] verweisen, wo die kinematischen Eigenschaften der in diesem Prozess erzeugten Teilchen erläutert werden. Ein wesentliches Resultat ist dort, dass der Emissionswinkel mit steigender Teilchenenergie abnimmt. Wir haben also für hochenergetische, rechtshändig polarisierte Teilchen den Fall, dass der Spinvektor quasi in z -Richtung zeigt. Für das Teilchen, welches sich am unteren Ende des Energiespektrums befindet, ist die linkshändige Polarisation leicht bevorzugt.

Wir haben in der Einleitung dieses Kapitels von *photon-artigen* Teilchen gesprochen. Als solche wollen wir die Teilchen verstehen, deren kinetischen Eigenschaften denen des Photons gemäß

$$E \approx |\mathbf{p}|c \quad (5.3)$$

entsprechen. Dabei ist der Emissionswinkel sehr niedrig. Es ist im Ein-Photon-Prozess höchstwahrscheinlich, dass ein derartiges Teilchen die Helizität des absorbierten Photons trägt [Pra61].

5.2 Multiphotonen-Regime

Wir wollen im Folgenden sehen, wie sich die Polarisation verhält, wenn Prozesse mit einer höheren Photonenordnung betrachtet werden. Dazu werden wir die theoretischen Betrachtungen im Multiphotonen-Regime fortsetzen. Dort ist $\kappa_{\text{paar}} \gg 1$ und damit gilt für den Intensitätsparameter $\xi \ll 1$. Wir wollen für unsere Rechnungen in diesem Abschnitt grundsätzlich den Intensitätsparameter $\xi = 10^{-3}$ annehmen. Für derart kleine Intensitätsparameter kommt es dazu, dass für beliebige Photonenenergien nur die Rate mit minimaler Photonenordnung n_0 einen signifikanten Beitrag zur Gesamtrate liefert. Schon die Rate für den Prozess, in dem nur ein Photon mehr absorbiert wird, ist um den Faktor ξ^2 unterdrückt [Yak65]. Für die maximale kinetische Energie eines Teilchens im Ruhesystem des Kerns, welches in einem n -Photonen-Prozess mit $n > 1$ erzeugt worden ist, gilt die Relation

$$E_{\text{kin}}^{\text{max}} = n\hbar\omega' - 2mc^2 = \left(\frac{1}{n-1}\right) 2mc^2 \leq 2mc^2. \quad (5.4)$$

Dabei haben wir die nackte Masse des Elektrons angenommen, da für derart niedrige Intensitätsparameter gemäß (2.12) die Relation $m \approx m_*$ erfüllt ist, die effektive Masse sich also von der nackten Masse nicht unterscheidet. Dabei ist zu bemerken, dass für diesen Fall auch $q \approx p$ gilt (siehe (2.10)). Wir brauchen zwischen effektiven und asymptotischen Impulsen in diesem Stoßsystem also nicht zu unterscheiden.

Gemäß (5.4) befinden wir uns im Multiphotonen-Regime also energetisch immer in der Nähe der Produktionsschwelle. Mit (5.4) können wir für Multiphotonen-Prozesse in diesem Regime nicht annehmen, dass (5.3) erfüllt ist. Somit sind die kinetischen Eigenschaften der produzierten Teilchen nicht photon-artig. Mit dieser Argumentation wäre anzunehmen, dass zumindest mit den Mechanismen des Helizitätstransfers, die wir aus dem Ein-Photon-Prozess kennen, die Polarisationsseffekte im Multiphotonen-Regime weniger

stark ausgeprägt sind. Auf der anderen Seite stellt sich wiederum die Frage, ob durch eine Erhöhung der Zahl der absorbierten Photonen eine Steigerung des Polarisationsgrades zu erreichen ist.

Wir werden im Folgenden Prozesse untersuchen, in denen für die Gesamtenergie der absorbierten Photonen im Ruhesystem des Protons $n\hbar\omega' \approx 3mc^2$ gilt. Dabei ist zu bemerken, dass eine gesamte Photonenenergie von $4mc^2$ gemäß (5.4) schon nicht mehr möglich wäre, ohne eine niedrigere Photonenordnung zu bevorzugen.

Nehmen wir einen Lorentz-Faktor von $\gamma = 100$ an, so ist dies mit einer Photonenenergie im Laborsystem von $\hbar\omega \approx 7,5\text{keV}$ für den Ein-Photon-Prozess realisiert. Für höhere Photonenordnungen ist jeweils nur der n -te Bruchteil dieser Energie erforderlich. Dies entspricht bei einem Intensitätsparameter von $\xi = 10^{-3}$ einer maximalen Intensität von 10^{20} W/cm^2 . Wir liegen also hier in einem Bereich, der durch die in Abschnitt 1.2.2 erwähnten Röntgen-Freie-Elektronen-Laser realisiert werden könnte.

5.2.1 Polarisationsgrade

Wir wollen nun zum ersten Mal ein Ergebnis für Multiphotonen-Prozesse präsentieren. Die Abbildung 5.2 zeigt die Polarisationsgrade bei verschiedenen Photonenordnungen n , aber einer konstanten Gesamtenergie. Als Referenz ist hier wieder der energieabhängige Polarisationsgrad aus (5.1) aufgetragen. Wir sehen allerdings, dass das analytische Ergebnis selbst für den Prozess mit $n = 1$ keine gute Übereinstimmung liefert. Da zwei Drittel der Photonenenergie allein für die Aufwendung der Ruheenergien benötigt werden, ist diese Abweichung auch nicht weiter verwunderlich, da das Resultat (5.1) aus [MD57] und [OM59] mit der Annahme gewonnen wurde, dass sich beide Teilchen mit relativistischer Geschwindigkeit bewegen. In Abbildung 5.2 sehen wir vor Allem, dass sich das Verhalten bei niedrigen Teilchenenergien für die verschiedenen Photonenordnungen signifikant unterscheidet. Der Polarisationsgrad für den Ein-Photon-Prozess ähnelt qualitativ dem Verlauf von (5.1) aus Abb. 5.1. Für Energien nahe der Produktionsschwelle haben wir es zunächst mit vorwiegend linkshändiger Polarisation zu tun. Schon für den 2-Photonen-Prozess nimmt diese Wahrscheinlichkeit deutlich ab. Ein unwesentlich von null verschiedener Polarisationsgrad ist dort überhaupt nur bei sehr kleinen Energien möglich. Qualitativ deutlich anders verhält es sich, sobald ein Photon mehr absorbiert wird. Bei der Photonenordnung 3 findet man bei jeder Energie mehr rechtshändige als linkshändige Teilchen, der Polarisationsgrad ist also immer positiv.

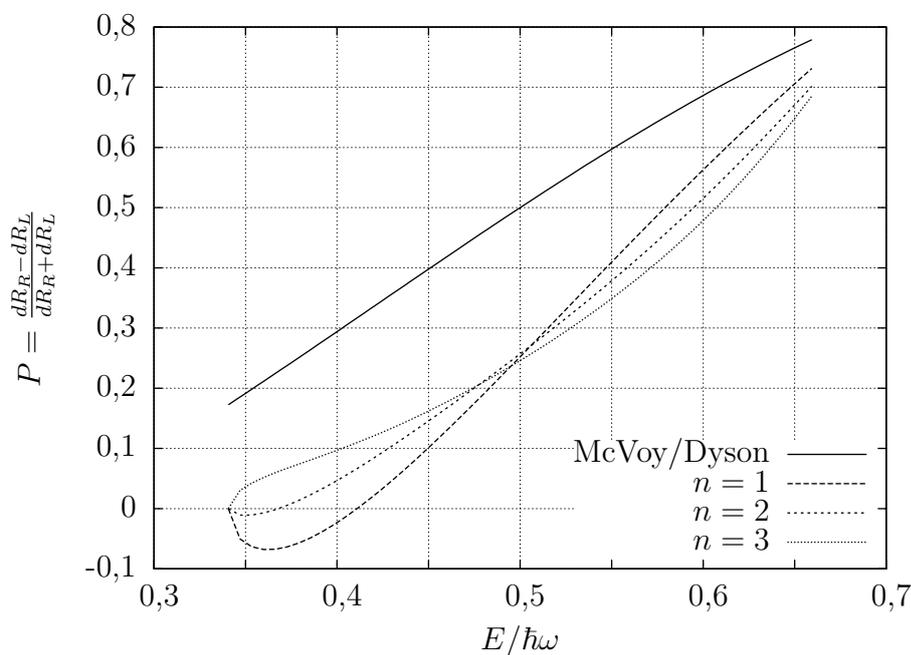


Abbildung 5.2: Longitudinaler Polarisationsgrad in Abhängigkeit von der Energie für Multiphotonenprozesse mit $n\hbar\omega' \approx 3mc^2$ und $\xi = 10^{-3}$

Bei hohen Energien unterscheidet sich das Polarisationsverhalten qualitativ nicht. Nimmt ein Teilchen die maximal mögliche Energie auf, so beträgt der Polarisationsgrad bei allen drei Prozessen $\sim 0,7$.

Auf Grund der Limitierung des Energieübertrags auf die erzeugten Teilchen haben wir es hier also mit deutlich niedrigeren Polarisationsgraden zu tun, als sie im Ein-Photon-Prozess mit höheren Energien realisierbar sind. Nach wie vor liegt der größere Einfluss auf die Polarisation also beim Energieübertrag. Auch eine Erhöhung der Photonenzahl kann der Verminderung des maximalen Polarisationsgrades nicht entgegenwirken.

5.2.2 Helizitätseigenzustände

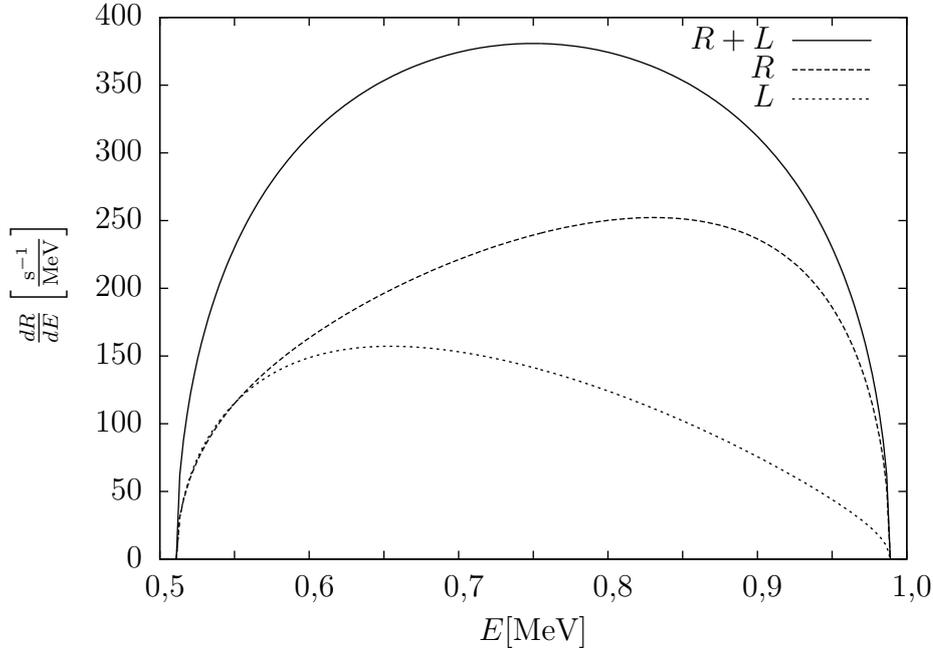


Abbildung 5.3: Erzeugungsraten differentiell in der Energie eines der erzeugten Teilchen für die Helizitätseigenzustände bei der Photonenordnung $n = 2$ mit $\hbar\omega' \approx 1,5mc^2$, $Z = 1$ und $\xi = 10^{-3}$

Den im vorangegangenen Abschnitt ermittelten Polarisationsgraden liegen die energie-differentiellen Erzeugungsraten zugrunde. Wir wollen diese gesondert betrachten, um weitere Einsichten in die Spineffekte zu gewinnen. Dabei werden wir im Folgenden die Ergebnisse für $Z = 1$ – also den Stoß mit einem Proton – angeben. Aus Abbildung 5.3 können wir ablesen, dass die Erzeugung von Teilchen, die einen Spin entlang ihrer Bewegungsrichtung (rechtshändig) tragen, einen größeren Beitrag zur Erzeugungsrates liefert als bei entgegengesetzt polarisierten Teilchen. Wir sehen auch, dass rechtshändige Teilchen bevorzugt mit höheren Energien erzeugt werden, während bei linkshändigen Teilchen eine Energieverschiebung zu niedrigeren Energien zu verzeichnen ist.

Zudem finden wir hier wieder, dass nach der Summation über die beteiligten Spins die Energie symmetrisch um die mittlere Energie von $\hbar\omega'/2$ verteilt ist. Dieses Resultat wird von [MVG03] bestätigt. Unabhängig von den Stoßparametern ist die effektive Energie eines erzeugten Teilchens im Ruhesystem des Kerns bei Summation über die Spins immer symmetrisch

um die mittlere Energie verteilt, was unmittelbar aus (4.39) und (4.19) folgt. Es ist auch zu bemerken, dass es bei dieser Spinkonstellation ab einer Photonordnung von $n \geq 3$ bei keiner Energie möglich ist, hauptsächlich Teilchen im linkshändigen Zustand zu erzeugen. Wie in Abbildung 5.2 gezeigt, sieht der Polarisationsgrad hier also qualitativ anders aus. Die winkeldifferenti-

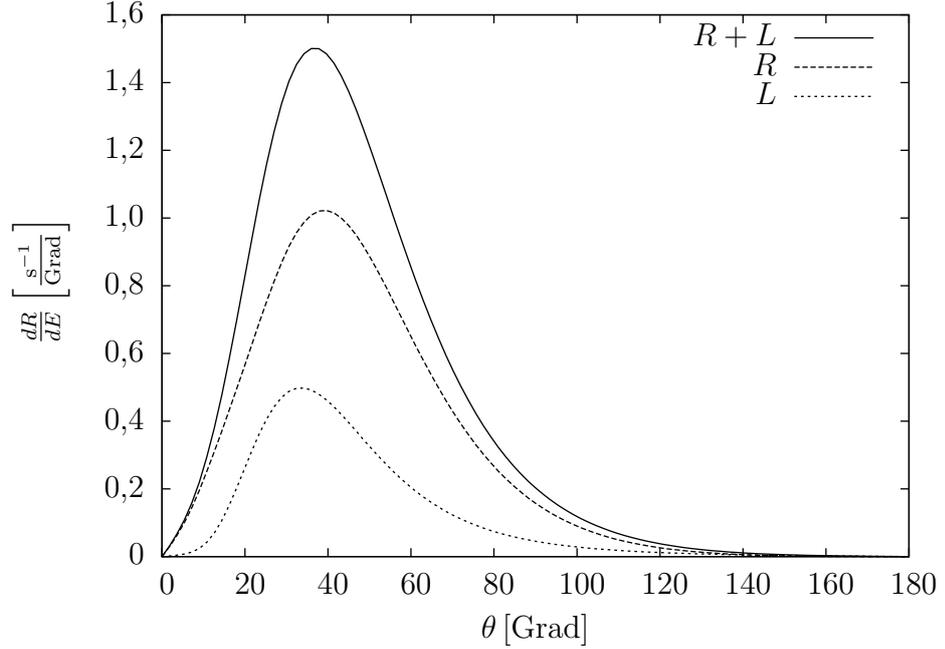


Abbildung 5.4: Winkel-differentielle Erzeugungsraten im System aus Abbildung 5.3; θ ist dabei der Winkel zwischen Propagationsrichtung des Lasers und Impuls des erzeugten Teilchens

ellen Raten aus Abbildung 5.4 zeigen ebenfalls eine Abhängigkeit von der Polarisation des detektierten Teilchens. Zunächst finden wir eine allgemeine kinematische Eigenschaft der erzeugten Teilchen aus [BLP91] bestätigt, nämlich, dass ein Teilchen bestimmter Energie in einen bestimmten Winkelbereich um $\hat{\theta}_q$ erzeugt werden. Für diesen Winkel gilt

$$\sin \hat{\theta}_q = \frac{m_* c^2}{E_q}. \quad (5.5)$$

Dabei werden Teilchen mit höherer Energie im Kernsystem in einem schmalen Kegel um die z -Achse erzeugt. Wir sehen nun recht deutlich, dass sich der Erwartungswert des Emissionswinkels für Teilchen in einem rechtshändigen Helizitätszustand in Richtung kleinerer Winkel verschiebt. Für linkshändige

Teilchen stellen wir eine Verschiebung in Richtung größerer Winkel fest. Somit stehen unsere Ergebnisse wieder im Einklang mit der Relation (5.5), da der Emissionswinkel in jedem Prozess im Wesentlichen durch die Energie des Teilchens bestimmt ist.

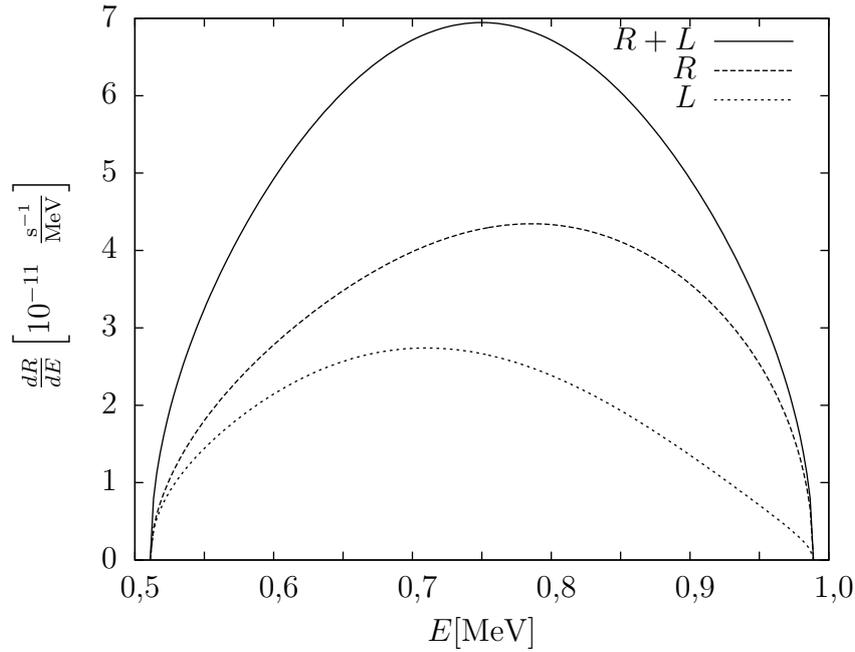


Abbildung 5.5: Erzeugungsraten differentiell in der Energie für die Helizitätseigenzustände bei der Photonenzahl $n = 4$ mit $\hbar\omega' \approx 0,75mc^2$ und $\xi = 10^{-3}$

Wir wollen nun noch weitere differentielle Raten betrachten, und zwar in einer Konstellation, in der die gesamte absorbierte Energie dieselbe bleiben soll, wie im vorigen Fall; die Photonenzahl allerdings verdoppelt werden soll. Abbildung 5.5 stellt dieses Ergebnis für die energiedifferentiellen Raten dar. Im Wesentlichen ist zu bemerken, dass die Absorption mehrerer Photonen bei einem niedrigen Intensitätsparameter eher unwahrscheinlich ist (Faktor 10^{-11}). Darüber hinaus sehen wir, dass der Einfluss des Spins gleicher Art ist, wie im Fall geringerer Photonenzahlen. Es ist allerdings festzustellen, dass analog zu dem Verhalten, welches wir in Abbildung 5.2 gesehen haben, die Verschiebung der Erwartungswerte der Energie jeweils weniger stark ausgeprägt ist.

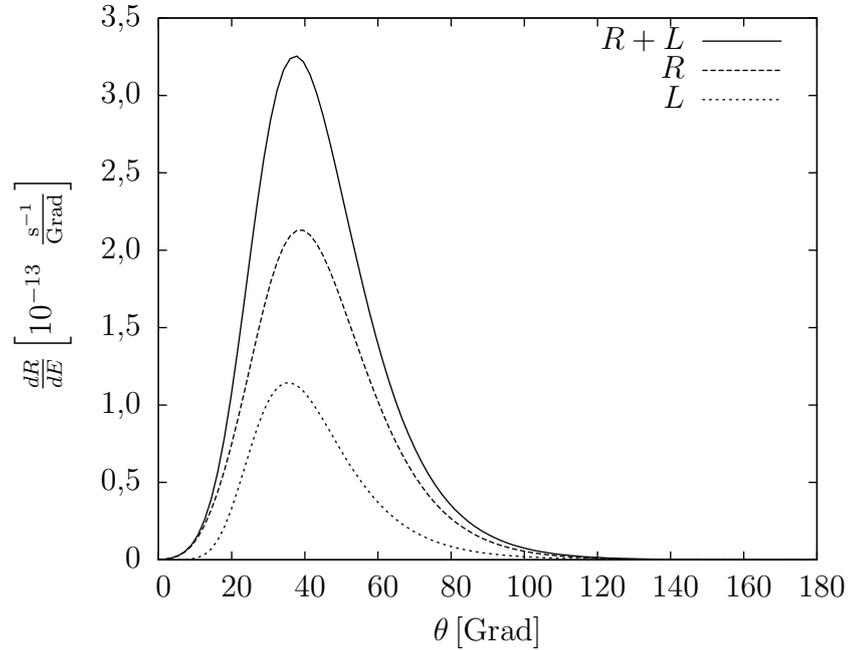


Abbildung 5.6: Winkel-differentielle Rate für $n = 4$ mit $\hbar\omega' \approx 0,75mc^2$ und $\xi = 10^{-3}$

Betrachten wir dazu auch noch die Raten differentiell im Winkel θ (Abbildung 5.6), so kommen wir zu dem Schluss, dass die Erhöhung der Potonenordnung im Multiphotonen-Regime keinen großen Einfluss auf die Verteilung der Spins auf die erzeugten Teilchen hat. Dies hatten wir schon angenommen, nachdem wir die Polarisationsgrade aus Abbildung 5.2 betrachtet haben.

5.2.3 Spin-Up-/Spin-Down-Eigenzustände

In Kapitel 3 haben wir neben den eben betrachteten Helizitätseigenzuständen eine weitere Spin-Basis eingeführt, welche wir im Folgenden auch untersuchen wollen; nämlich die Spin-Up- und Spin-Down-Zustände. Auch hier wollen wir zunächst die differentiellen Produktionsraten bei gegebener Photonennordnung untersuchen, um anschließend nach Stoßparametern zu suchen, bei denen wir eine Steigerung der Polarisationsseffekte erwarten.

Zunächst beginnen wir damit, die energie-differentielle Rate für die Photonennordnung $n = 2$ zu betrachten (Abbildung 5.7). Dabei nehmen wir dieselben Bedingungen wie im vorigen Abschnitt an. Der Intensitätsparameter sei also wieder $\xi = 10^{-3}$ und die gesamte Energie, die im Prozess absorbiert wird, ist $3mc^2$. Wir sehen in Abbildung 5.7, dass die Raten für die Erzeugung von Spin-Up- und Spin-Down-Teilchen sich im Wesentlichen nur im Bereich

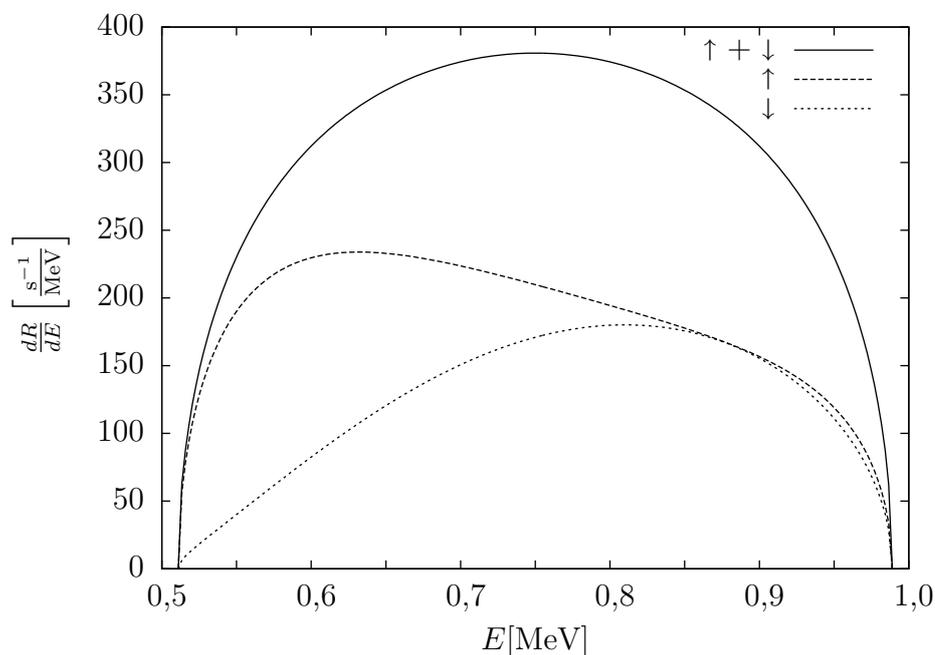


Abbildung 5.7: Erzeugungsraten differentiell in der Energie für Spin-Up-/Spin-Down-Zustände bei der Photonenordnung $n = 2$ mit $\hbar\omega' \approx 1,5mc^2$ und $\xi = 10^{-3}$

niedriger Energien unterscheiden, während die Rate für Spin-Up-polarisierte Teilchen den größeren Anteil an der spin-summierten Gesamtrate hat. Dieses Verhalten können wir dadurch verstehen, dass die langsameren Teilchen hier auch stark in die Polarisationsrichtung der einfallenden Photonen polarisiert sein können. Bei der Transformation des Spin-Vektors aus dem Ruhesystem des Teilchens ändert sich dieser für langsame Teilchen kaum. Zudem steht diesem Teilchen ein breiteres Winkelspektrum offen (vgl. 5.5), sodass ein größerer Anteil des Spinvektors senkrecht zu der Bewegungsrichtung steht und bei der Transformation ins bewegte System nicht geändert wird. Wir sehen allerdings wieder, dass die Polarisierungseffekte hier – wie im vorangegangenen Abschnitt – recht gering ausfallen.

Wir wollen, um festzustellen, ob höhere Polarisationsgrade überhaupt möglich sind, jetzt den stark unterdrückten Prozess untersuchen, bei dem die Photonenordnung größer als n_0 ist. Wir werden dazu den Prozess mit der Photonenordnung $n = 2$ betrachten, bei dem zwei Photonen der Energie $3mc^2$ absorbiert werden. Jedes dieser Photonen hat eine Energie, die ausreicht, die Produktionsschwelle von $2mc^2$ zu überwinden. Dieser Prozess ist also hypothetischer Natur, da in einer derartigen Konstellation auch der Ein-Photon-Prozess möglich ist und damit bevorzugt stattfindet. Es wird

in diesem Prozess eine Gesamtenergie von $\sim 6mc^2$ absorbiert. Der Freielektronen-Laser, der diese Rahmenbedingungen liefern könnte, müsste im Laborsystem wie zuvor eine Intensität von 10^{20} W/cm² bereitstellen.

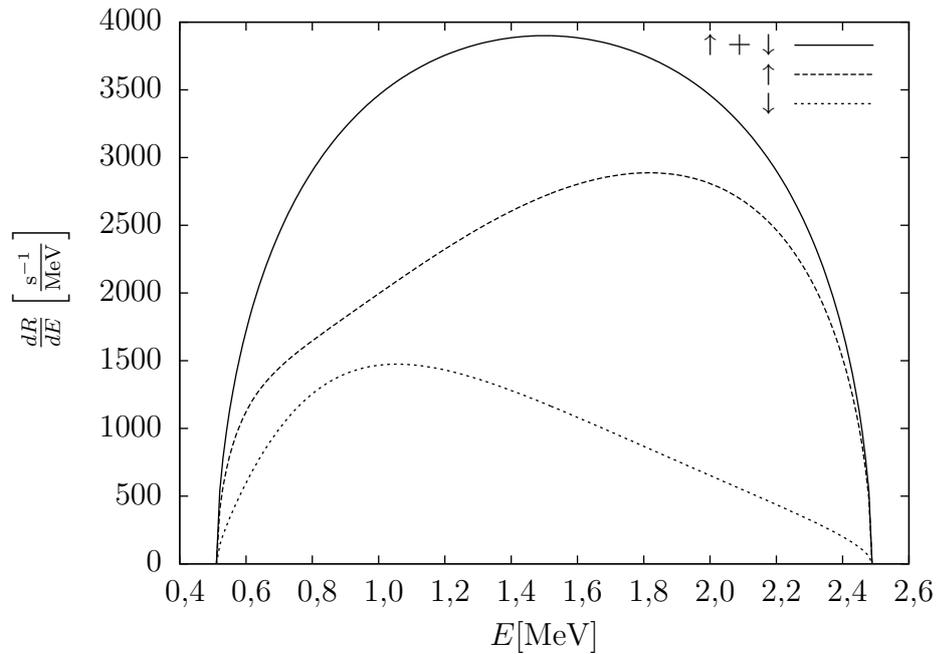


Abbildung 5.8: Energie-differentielle Raten für den stark unterdrückten 2-Photonen-Prozess mit einer absorbierten Gesamtenergie von $6mc^2$ bei $\xi = 10^{-3}$

In Abbildung 5.8 wird nun wieder deutlich, dass in einem Prozess mit höherem Energieübertrag auch die Polarisationsgrade zunehmen. Wir sehen hier einen deutlich höheren Polarisationsgrad als bei den zuvor betrachteten Prozessen. Auch fällt die Ähnlichkeit zu dem in Abbildung 5.3 betrachteten Prozess auf. Diese lässt sich erklären, wenn man sich vergegenwärtigt, dass der Spin-Up-Zustand für schnelle Teilchen, deren Impuls gemäß (5.5) fast parallel zur z -Achse gerichtet ist, dem rechtshändigen Helizitätseigenzustand sehr ähnlich ist. Selbiges gilt analog auch für den Spin-Down-Zustand. Die Spin-Effekte, die in Abbildung 5.8 verdeutlicht sind, fallen hier wieder recht eindrucksvoll ins Gewicht. Wir sehen zum einen eine starke Energieverschiebung der Teilchen je nach Spinausrichtung und zum anderen ein Übergewicht an den erzeugten Teilchen von Spin-Up-Zuständen auf dem gesamten Energiespektrum. In Abbildung 5.9 sind die winkel-differentiellen Raten für denselben Prozess gezeigt. Auch hier sind die Spin-Effekte signifikant. Wir sehen sehr schön, dass die Teilchen im Spin-Up-Zustand bevorzugt in einen schmalen Kegel emittiert werden, während die Winkelverteilung für Spin-

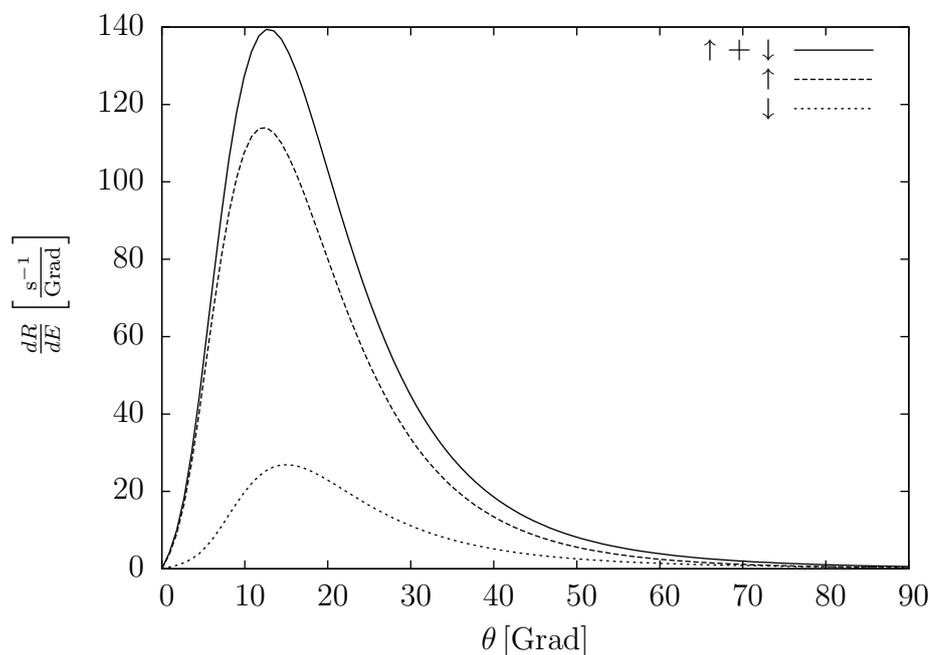


Abbildung 5.9: Winkel-differentielle Raten für den stark unterdrückten 2-Photonen-Prozess mit einer absorbierten Gesamtenergie von $\sim 6mc^2$ bei $\xi = 10^{-3}$

Down-Teilchen deutlich breiter ist. Darüber hinaus ist es aus Abbildung 5.9 möglich, den Unterschied in den totalen Raten abzuschätzen. Eine genauere Untersuchung der totalen Raten wird im folgenden Abschnitt vorgenommen.

5.2.4 Totale Raten

Nachdem wir nun die differentiellen Raten im Multiphotonen-Regime ausgiebig dargestellt haben, werden wir uns jetzt der Betrachtung der totalen Raten zuwenden. Wir zeigen zunächst die totalen Raten für den Fall, dass bei verschiedener Photonenumgebung jeweils die gleiche Gesamtenergie von $3mc^2$ absorbiert wird (Abbildung 5.10). Dabei wird die Gesamtrate in der Spin-Up-/Spin-Down-Basis zerlegt. Es werden alle drei verschiedenen Beiträge zur Partialrate einzeln betrachtet und somit der Polarisation beider produzierter Teilchen Rechnung getragen. Die beiden Beiträge der verschiedenen Spin-Stellungen sind summiert aufgetragen, da sie ohnehin identisch sind (4.39).

Da der Intensitätsparameter hier mit $\xi = 10^{-3}$ wieder sehr gering angenommen worden ist, liegt im Laser eine aus unserer Sicht relativ geringe Photonendichte vor, sodass ein Prozess, der einer höheren Anzahl von Photo-

nen bedarf, unabhängig von deren Energie seltener stattfindet. Dies schlägt sich in einer Abnahme der Produktionsraten mit steigendem n nieder (vgl. Abb. 5.3, 5.5). Daher haben wir hier die Raten für jedes n jeweils auf die gesamte, spin-summierte Partialrate normiert. Prinzipiell ist zu bemerken, dass für sehr hohe Energien die hier betrachteten Spin-Zustände den Helizitätseigenzuständen entsprechen.

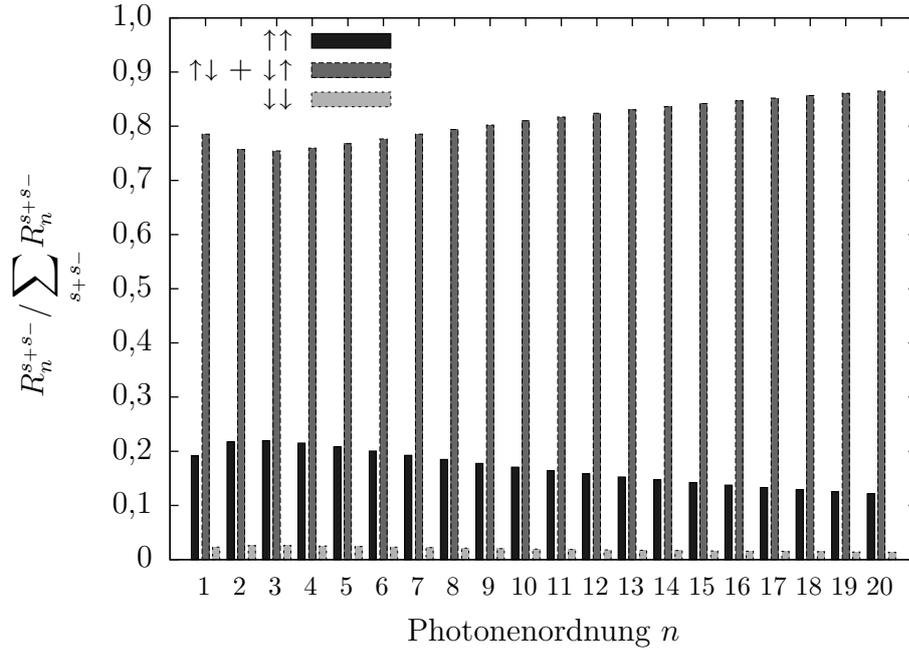


Abbildung 5.10: Beitrag der verschiedenen spinabhängigen Partialraten zur gesamten Partialrate, wobei das Stoßsystem hier wieder durch $n\hbar\omega' = 3m_*c^2$ und $\xi = 10^{-3}$ gegeben ist

Wir sehen in Abbildung 5.10 also die Raten, die wir für die Photonennordnungen $n \leq 3$ in Abbildung 5.2 schon differentiell in der Energie betrachtet haben. Wie wir schon dort feststellen konnten, ist auch hier deutlich zu erkennen, dass sich die Polarisationen des gesamten erzeugten Teilchenstrahls jeweils nicht in besonderem Maße voneinander unterscheiden. Geringe Spin-Effekte existieren dennoch. So lässt sich aus Abbildung 5.2 schon erkennen, dass bis zu $n = 3$ der Beitrag der Produktionsrate für zwei Spin-Up-polarisierte Teilchen anwächst. Somit steigt der Gesamtpolarisationsgrad bis zu dieser Photonennordnung. Für größere Photonennordnungen nimmt er wieder ab. Der Fall, dass beide Teilchen Spin-Down-polarisiert sind, trägt nur gering zur gesamten Partialrate bei, sein Anteil bleibt aber für alle n relativ konstant. Den wesentlichen Anteil an der Partialrate tragen immer

die gemischten Raten. Diese tragen allerdings nicht zum Polarisationsgrad eines der produzierten Teilchen bei. Wir stellen also erneut fest, dass sich im Multiphotonen-Regime keine höheren Polarisierungen erreichen lassen als bei der Absorption eines hochenergetischen Photons.

Um wieder einen Eindruck von den Spin-Effekten in Prozessen mit höherer absorbierter Energie zu gewinnen, verdeutlicht Abbildung 5.11 das Verhalten der totalen Raten, wenn n Photonen mit einer jeweiligen Energie von $3mc^2$ absorbiert werden. Die gesamte Partialrate skaliert dabei wieder mit ξ^{2n} , was aus [Yak65] bekannt ist. Dadurch trägt wieder nur die niedrigste Photonenordnung n_0 signifikant zum Prozess bei. Gerade bei der Betrachtung hoher Photonenordnungen n handelt es sich somit um eine vorwiegend theoretische Anschauung, um eventuelle Multiphotonen-Effekte sichtbar zu machen. Für jede der berücksichtigten Photonenordnungen ist dementsprechend wieder jeweils der Quotient aus einer der drei verschiedenen Raten und der Spinsumme der Partialrate aufgetragen. Es sei angemerkt, dass diese Verhältnisse auch im Laborsystem dieselben bleiben, da die totale Rate gemäß (4.43) transformiert wird und die Klassifikation der Spin-Basis ohnehin im Ruhesystem der Teilchen gemacht wurde. Wir sehen zunächst, dass der

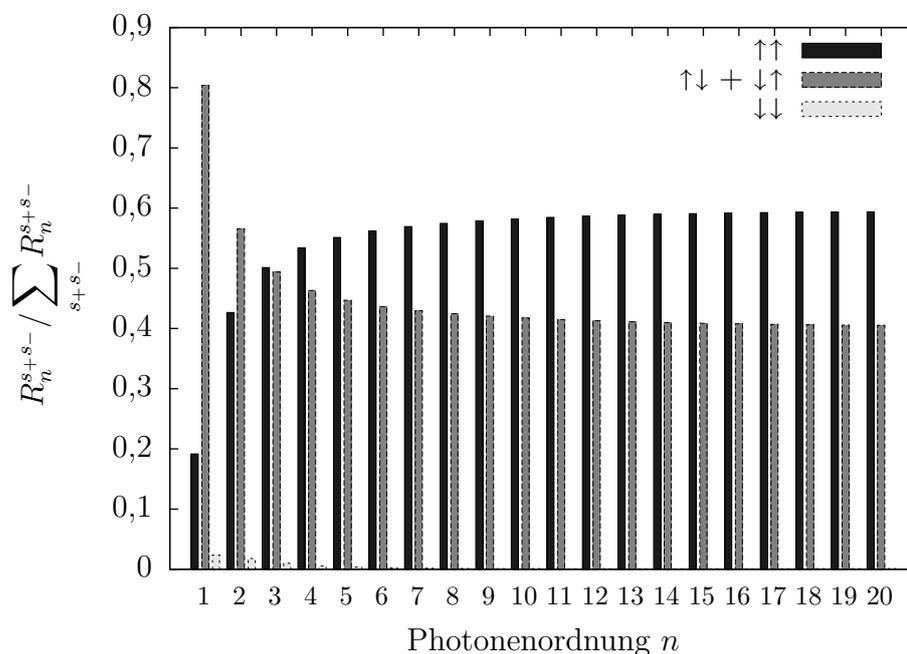


Abbildung 5.11: Beitrag der verschiedenen spinabhängigen Partialraten zur gesamten Partialrate, wobei hier die gesamte absorbierete Energie erhöht wird, $\hbar\omega' = 3m_*c^2$ und $\xi = 10^{-3}$

Beitrag, bei dem sowohl Elektron als auch Positron in Spin-Down-Zuständen sind, wie erwartet sehr klein ist. Ab einer Photonenordnung von ~ 6 ist dieser Anteil an der Partialrate nur noch so gering, dass er komplett zu vernachlässigen ist.

Außerdem fällt ins Auge, dass bei niedrigen Photonenordnungen $n \leq 2$ der Anteil der gemischten Raten dominant ist. Die Polarisation der erzeugten Teilchenstrahlen ist somit eher gering. Das Resultat, dass die Polarisation bei niedrigen Energien im Ein-Photon-Prozess abnimmt, ist aus [FMA59] bekannt. Dort übersteigt der Anteil der Spin-Up/Spin-Up-Rate den Anteil der gemischten Raten selbst bei hohen Energien nicht. Damit gibt es im Ein-Photon-Prozess eine obere Grenze für den Polarisationsgrad. Da unsere Ergebnisse (Abb. 5.11) bei einer Photonenenergie in der Größenordnung der Produktionsschwelle aufgenommen worden sind, ergibt sich demnach eine sehr geringe Polarisation.

Das erstaunlichste Resultat ergibt sich allerdings, wenn eine größere Anzahl von Photonen in einem Prozess absorbiert wird. Naiverweise würden wir erwarten, dass die Wahrscheinlichkeit der Spin-Up-Polarisation mit steigender Photonenordnung immer weiter zunimmt, da ein Gesamtdrehimpuls in z -Richtung von $n\hbar$ im Prozess erhalten bleiben soll. Tatsächlich finden wir allerdings, dass der Anteil der Rate für den Spin-Up/Spin-Up-Fall zwar zunimmt, sich aber einem konstanten Wert (hier: $\sim 0,6$) annähert. Somit finden wir im Grenzwert hoher Photonenordnungen eine konstante Differenz zwischen diesem Anteil und dem Anteil an der Partialrate, der gemischte Spinstellungen repräsentiert. Es scheint also eine obere Grenze für die Polarisation der gesamten Teilchenstrahlen zu geben.

An dieser Stelle sei ein Erklärungsversuch für dieses Verhalten gegeben. Nehmen wir an, die beiden erzeugten Teilchen seien nicht-relativistisch und durch einen Zwei-Teilchen-Zustand mit festem Gesamtbahndrehimpuls beschrieben [CTDL08]. Durch die Erhaltung der z -Komponente des Gesamtdrehimpulses können zu den verschiedenen Raten, die sich durch die Spinstellung unterscheiden, nur bestimmte Partialwellen $|L, M\rangle$ beitragen. Dabei ist L die Quantenzahl für den Betrag des Drehimpulses und M seine Komponente in z -Richtung. Die Quantenzahl M kann dabei alle ganzzahligen Werte von $-L$ bis L annehmen. Die Beiträge sind in Tabelle 5.1 aufgelistet.

Dabei ist zugrunde gelegt, dass jedes absorbierte Photon den Drehimpuls \hbar in z -Richtung trägt und damit in einem n -Photonen-Prozess der Gesamtdrehimpuls $n\hbar$ erhalten werden muss. Da die Wahrscheinlichkeit, ein mögliches M in einem Zustand mit gegebenem L zu finden, für alle diese M gleich ist, unterscheiden sich die Raten nur durch Beiträge gewisser Partialwellen mit bestimmtem L . Eine der gemischten Raten unterscheidet sich zum Beispiel nur um den Beitrag der Partialwelle $|L = n - 1\rangle$ von der Rate

Tabelle 5.1: *Beiträge der Partialwellen*

Spinstellung	M	L
$\uparrow\uparrow$	$M = n - 1$	$L \geq n - 1$
$\uparrow\downarrow / \downarrow\uparrow$	$M = n$	$L \geq n$
$\downarrow\downarrow$	$M = n + 1$	$L \geq n + 1$

für den Fall, beide Teilchen im Spin-Up-Zustand zu finden. Dem Resultat folgend, dass es für jede Partialrate eine obere Grenze für den Beitrag zu einer Streuamplitude gibt [CTDL08], können wir also annehmen, dass die Differenz $\Delta R^n = R_{\uparrow\uparrow}^n - R_{\uparrow\downarrow/\downarrow\uparrow}^n$ proportional zu diesem Beitrag ist. Damit erhalten wir in unserem Fall mit einer Gesamtenergie von $n\hbar\omega'$ das Resultat

$$\Delta R^n \propto \frac{1}{\hbar\omega'} \quad (5.6)$$

im Grenzwert hoher Photonenordnungen. Dieses Verhalten wurde zumindest qualitativ anhand der Partialraten bei anderen Photonenenergien bestätigt. Wir finden also ein Argument dafür, dass der Polarisationsgrad nicht beliebig gesteigert werden kann, ohne die Laserfrequenz zu verringern. Es wird sich zeigen, ob dieses Argument einer genaueren Untersuchung der Prozesse standhalten kann und ob die Begrenzung des Polarisationsgrades wirklich in der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses begründet liegt.

Generell bleibt also erneut festzuhalten, dass durch die Absorption einer großen Photonenanzahl bei fester Photonenenergie auch keine beliebige Erhöhung des Polarisationsgrades erreicht werden kann. Es wird allerdings durch die vorangegangene Argumentation die prinzipielle Möglichkeit nahegelegt, den Polarisationsgrad durch Verminderung der Photonenenergie bei ähnlich hoher Intensität und gleichzeitiger Steigerung der Photonenordnung erhöhen zu können.

5.3 Übergangsregime

Aus den vorangegangenen Ergebnissen aus dem Multiphotonen-Regime haben wir gelernt, dass eine Erhöhung des Polarisationsgrades zwar prinzipiell durch eine Erhöhung der Anzahl der absorbierten Photonen gleicher Energie möglich ist, diese Prozesse aber auf Grund des niedrigen Intensitätsparameters extrem stark unterdrückt sind. Darüber hinaus stellt sich für die Polarisation eine obere Grenze ein, von der wir das Skalierungsverhalten aus (5.6) erwarten. Wir wollen ausgehend davon ein Regime konstruieren, in dem wir stärker ausgeprägte Polarisierungseffekte erwarten. Dazu müssen wir

den Intensitätsparameter erhöhen, um auch für höhere Photonennordnungen signifikante Beiträge zu erhalten (siehe zum Beispiel [MVG03]). Weiterhin sollten wir die Energie der einzelnen Photonen vermindern, um den Grenzwert für die Polarisation zu erhöhen.

Deswegen werden wir im Folgenden Ergebnisse präsentieren, welche in einem Regime aufgenommen worden sind, welches wir als *Übergangsregime* bezeichnen wollen. Damit wollen wir es von den in Abschnitt 1.2 definierten Regimes abgrenzen. Kennzeichnend soll dabei wieder der Keldysh-Parameter (1.6) sein. Mit einem Intensitätsparameter von $\xi = 0,5$ wird dieser zu $\kappa_{\text{paar}} = 2$ und wir befinden uns weder im Tunnel- noch im Multiphotonen-Regime. Wir wollen im Laborsystem eine Laserfrequenz mit $\hbar\omega = 300$ eV annehmen. Damit wird die Intensität der Laserwelle dort zu $I \approx 4 \times 10^{22}$ W/cm². Auch dieses Regime ist von der tatsächlichen Realisierung nicht weit entfernt. Der in Abschnitt 1.2.2 erwähnte FLASH, der eine Vorstufe des European XFEL ist, stellt heute schon Photonenergien dieser Größenordnung mit Intensitäten von bis zu 10^{22} W/cm² zur Verfügung.

Im Ruhesystem des Protons finden wir bei dem hier angenommenen Lorentz-Faktor von $\gamma = 500$ also Photonen mit einer Energie von $\hbar\omega' \approx 0,3$ MeV. Die Gesamtenergie der absorbierten Photonen muss in einem Prozess mindestens $2m_*c^2$ betragen, um die effektiven Ruheenergien beider Teilchen zur Verfügung zu stellen. Entsprechend der Größe der effektiven Masse (2.12) ergibt sich in dem hier betrachteten Laserfeld $m_* \approx 1,12m$. Die minimale, zur Erzeugungsrate beitragende Photonennordnung beträgt also $n_0 = 4$. Wir werden im Folgenden die Partialraten mit $n_0 \leq n \leq 13$ betrachten. Dies sind die Raten, die hier einen signifikanten Beitrag geben. Die Wahrscheinlichkeit $n \geq 13$ Photonen zu absorbieren, ist auch hier – mit $\xi = 0,5$ – extrem gering.

In diesem Regime ist zu bemerken, dass auf Grund des Intensitätsparameters, der hier um zwei Größenordnungen gegenüber dem im vorigen Abschnitt verwendeten angehoben wurde, es nicht mehr möglich ist, den asymptotischen Impuls mit dem effektiven Impuls zu identifizieren. Wir sollten also, um anschauliche Ergebnisse zu erhalten, die ermittelten Raten gemäß (4.41) transformieren.

Die energie-differentiellen Raten aus diesem Regime sind in Abbildung 5.12 gezeigt. Durch die Tatsache, dass nur relativ wenige Photonennordnungen beitragen, können wir in Abbildung 5.12 die einzelnen Beiträge derer identifizieren. Der größte Beitrag, der für das Maximum der Verteilung bei $\sim 0,75$ MeV verantwortlich ist, stammt aus dem 5-Photonen-Prozess. Der 4-Photonen-Prozess ist im Gegensatz dazu zwar möglich, fällt aber kaum ins Gewicht, da dort nur sehr wenig Überschuss-Energie zur Verfügung steht. Der sukzessive Beitrag der nächstgrößeren Photonennordnungen äußert sich im Auftreten von Schultern in der Verteilung. Die Raten für die Photonen-

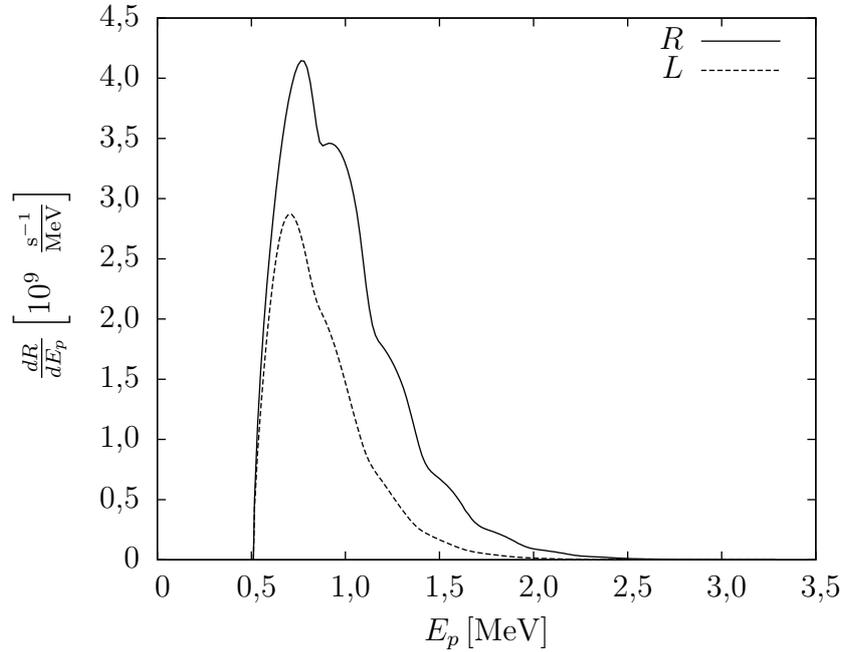


Abbildung 5.12: Energie-differentielle Raten für die Erzeugung rechts- bzw. linkshändiger Teilchen mit allen beitragenden Photonennordnungen mit $\hbar\omega' \approx 0,3$ MeV und $\xi = 0,5$

ordnungen $n \geq 11$ tragen zur Gesamtrate kaum noch bei, sie lassen sich in Abbildung 5.12 nur noch erahnen.

Die Rate für die Detektion eines Teilchens im rechtshändigen Polarisationszustand ist auf dem gesamten Energiespektrum größer als die entsprechende Rate für linkshändig polarisierte Teilchen. Der dazugehörige longitudinale Polarisationsgrad ist in Abbildung 5.13 dargestellt. Dort sind mehrere Effekte sichtbar. Da zum Beispiel die minimale Photonennordnung $n_0 = 4$ ist, tritt selbst für niedrige asymptotische Energien nahe der Ruheenergie kein negativer Polarisationsgrad auf. Da für die niedrigen Photonennordnungen allerdings der Energieübertrag stark begrenzt ist, tritt dort nur eine relativ geringe Polarisation der Teilchenstrahlen auf. Je höher allerdings die Energie wird, desto größer wird der Einfluss von Prozessen höherer Photonennordnungen, welche auch einen höheren Energieübertrag und damit einen höheren Polarisationsgrad ermöglichen. Jeder Teilsteigung des Polarisationsgrades können wir einen Prozess mit einer bestimmten Photonennordnung zuordnen.

Da wir von den erzeugten Teilchen nicht unbedingt wissen, welche Photonennordnung der Prozess hatte, aus dem es stammt, können wir nicht ohne Weiteres auf die Energie des anderen in diesem Prozess erzeugten Teilchens

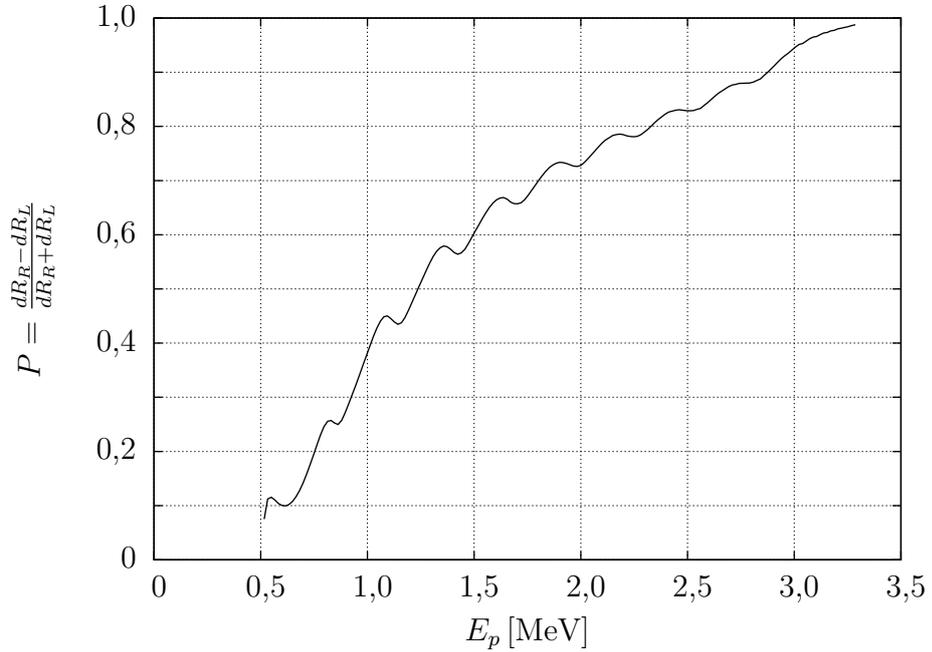


Abbildung 5.13: Longitudinale Polarisation für den Prozess aus Abbildung 5.12

schließen. Die Erzeugung zweier photon-artiger Teilchen nach (5.3) bleibt aber auf Grund des Skalierungsverhaltens der Partialraten höchst unwahrscheinlich.

Auch in diesem Prozess sind hohe Polarisationsgrade nur für hohe Energien möglich. Die Problematik dabei ist allerdings, dass es ab einer bestimmten Energie (hier ~ 2 MeV, siehe Abbildung 5.12) kaum noch einen signifikanten Beitrag zur Erzeugungsrate gibt.

Der Gesamtpolarisationsgrad eines erzeugten Teilchenstrahls ist aber im Vergleich zu dem Polarisationsgrad im Ein-Photon-Prozess größer, da selbst nahe der Ruheenergie der Polarisationsgrad deutlich von Null verschieden ist (hier $\sim 0,1$).

Wir wollen also festhalten, dass es prinzipiell möglich ist, auch in Multiphotonen-Prozessen Teilchen mit hohen Polarisationsgraden zu erzeugen. Während es sich im Multiphotonen-Regime also als nicht realisierbar herausstellt, Polarisationsgrade vergleichbar mit denen aus dem Ein-Photon-Prozess zu erreichen, können wir hier durchaus ähnlich hohe Polarisationsgrade erzielen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die Methoden und Ergebnisse zusammengefasst, welche für wesentlich gehalten werden. Außerdem soll ein Ausblick – ausgehend vom Stand dieser Arbeit – auf weitere Forschungsbemühungen zu diesem Themenbereich in theoretischer und auch experimenteller Hinsicht gegeben werden.

6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden die Paarerzeugungsraten im nicht-linearen Bethe-Heitler-Prozess (1.5) berechnet und für bestimmte Regime graphisch dargestellt. Wir haben – der Dirac-Theorie entsprechend – den Übergang vom negativen Energiekontinuum in das positive Energiekontinuum durch ein Coulomb-Feld eines Atomkerns im Feld eines intensiven Lasers untersucht. Der Atomkern bewegt sich dabei derartig im Laserfeld, dass dieses aus seiner Sicht blauverschoben ist. Dabei wurde das Hauptaugenmerk auf den Spin der erzeugten Teilchen gelegt.

Der für diese Arbeit sehr wichtige Spinformalismus der relativistischen Quantenmechanik ist in Kapitel 3 erläutert worden. Dabei wurde bei der Beschreibung der Spin-Projektionsoperator in den Vordergrund gestellt, da er es uns ermöglicht, den Spin in die Rechnung mit einzubeziehen.

Daraufhin haben wir an Abschnitt 4.2 verdeutlicht, warum es in unserer Rechnung erster Ordnung nur drei verschiedene Raten gibt, obwohl es mehr Kombinationsmöglichkeiten der betrachteten Spins gibt. Für dieses Resultat ist es wesentlich, dass das berechnete Betragsquadrat des Matrixelements in erster Ordnung invariant bei einer Teilchenvertauschung ist.

Ausgehend von diesem theoretischen Grundgerüst gelang es uns, das bekannte Ergebnis für die longitudinale Polarisation der Teilchenstrahlen im

Ein-Photon-Prozess [MD57, OM59] zu reproduzieren.

Wir haben daraufhin unsere Untersuchungen auf das Multiphotonen-Regime ausgedehnt. Dort konnten wir aufgrund des geringen Energieübertrags keine substantielle Steigerung des Polarisationsgrades mit steigender Photonenordnung feststellen. Die Polarisation ist wesentlich geringer als bei der Absorption nur eines Protons mit hoher Energie. Wir haben aber gesehen, dass die dort stark unterdrückten Prozesse höherer Ordnung zu größeren Polarisierungen führen könnten. Auch bei diesen Prozessen scheint allerdings die Gesamtpolarisation begrenzt zu sein. Eine Überlegung, welche der nicht-relativistischen Quantenmechanik entlehnt ist, veranlasst uns, davon auszugehen, dass diese obere Grenze von der jeweiligen Energie der absorbierten Photonen abhängt und auf die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses zurückzuführen ist. Die Energie- und Winkelverteilung der erzeugten Teilchen wurde bezüglich ihrer Polarisation beschrieben.

Um Photonenordnungen höher als n_0 beitragen zu lassen, erhöhen wir im nächsten Schritt den Intensitätsparameter um zwei Größenordnungen. Auch um der Begrenzung der Polarisation entgegenzuwirken aber in erster Linie um einen realisierbaren Wert für die Intensität der Laserwelle anzunehmen, vermindern wir dabei die Photonenenergie. In diesem Regime sehen wir schlussendlich tatsächlich, dass durch Beiträge höherer Photonenordnungen mit entsprechend größerem Energieübertrag auf die produzierten Teilchen auch höhere Polarisationsgrade erreicht werden können.

Es bleibt festzuhalten, dass der Helizitätstransfer stark an den Energieübertrag innerhalb der beitragenden Prozesse gekoppelt ist.

6.2 Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit geben Anlass zu der Vermutung, dass höhere Polarisationsgrade im Tunnel-Regime auftreten können. Eine genaue Untersuchung der Prozesse bei hohem Intensitätsparameter ξ und damit hoher Photonenordnungen ($\sim 10^6$) wird sich an diese Arbeit anschließen.

Außerdem wäre es sicherlich lehrreich, auch den Bahndrehimpuls explizit in die Rechnung zu integrieren, um eine Erhaltung des Gesamtdrehimpulses nachweisen zu können. Einsichten in dessen Verhalten bei den hier betrachteten Prozessen wurden bisher durch die Verwendung der Spurtechnik nicht zugelassen. Die initiale Entwicklung der freien Dirac-Spinoren in Partialwellen könnte sicherlich eine Möglichkeit sein, dies zu realisieren.

Bei der Präsentation der Ergebnisse in Kapitel 5 ist darauf geachtet worden, Parameterbereiche anzunehmen, die nicht fernab jeglicher experimenteller Realisierbarkeit sind. So sind Laser-Einrichtungen, welche die hier erforder-

der Parameter zur Verfügung stellen, entweder im Bau (European XFEL) oder existieren bereits (FLASH). Für die experimentelle Realisierung der hier betrachteten Prozesse ist allerdings auch immer eine Beschleunigeranlage notwendig, welche Atomkerne mit den entsprechenden Geschwindigkeiten bereitstellen kann. Moderate Lorentz-Faktoren, wie wir sie in Abschnitt 5.2 in unsere Betrachtungen einbeziehen, hätten am DESY, wo sich auch der European XFEL befinden wird, erreicht werden können. Dort war bis 2007 der Beschleuniger HERA in Betrieb, der Protonen mit Lorentz-Faktoren von bis zu 1000 bereitstellen konnte.

Somit wird die experimentelle Überprüfung der theoretischen Vorhersagen für diese und ähnliche Prozesse in absehbarer Zukunft in die Reichweite der technischen Möglichkeiten rücken.

Anhang A

Einheitensystem

Dem Leser wird sicherlich aufgefallen sein, dass in dieser Arbeit mehrere verschiedene Einheitensysteme verwendet worden sind. In Kapitel 4 haben wir durchgehend atomare Einheiten verwendet, welche für die analytische Rechnung von Vorteil sind, da dieses Maßsystem auf Gaußschen Einheiten [Jac75] beruht und zudem noch die Festlegung $\hbar = m_e = e = 1$ einschließt. Das bedeutet, dass hier zum Beispiel Wirkungen und Drehimpulse in Vielfachen des Planckschen Wirkungsquantums gemessen werden. Entsprechend kann jede physikalische Größe in atomaren Einheiten (a.u.) ausgedrückt werden. Die wohl bedeutendsten Größen Länge und Zeit werden in Vielfachen von

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m},$$
$$t_0 = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} = 2,42 \times 10^{-17} \text{ s}$$

angegeben. Daraus folgend lassen sich die atomaren Einheiten weiterer, für unseren Prozess relevanter Größen ableiten. Somit erhalten wir die folgenden atomaren Einheiten

$$\begin{aligned}\omega_0 &= t_0^{-1} = 4,13 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}, \\ E_0 &= \hbar \omega_0 = 27,21 \text{ eV}, \\ F_0 &= \frac{e^2}{r_0} = 5,14 \times 10^9 \text{ V/m}\end{aligned}\tag{A.1}$$

für Frequenz, Energie und elektrische Feldstärke. Weiterhin ist zu bemerken, dass für die Lichtgeschwindigkeit $c = 1/\alpha \approx 137$ gilt, wobei α hier die wohlbekannte Feinstrukturkonstante ist.

In den Kapiteln 2 und 3 wird das Gaußsche Einheitensystem verwendet, wobei dort aber die Formelzeichen \hbar, e, m_e explizit aufgeführt sind, um quantenmechanische Effekte leichter identifizieren zu können.

Anhang B

Relativistik

Die Minkowski-Raumzeit, in der sich die hier untersuchten Prozesse abspielen, ist im Wesentlichen durch die zugehörige Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

charakterisiert. Deswegen nennt man (B.1) die Minkowski-Metrik. Eine Metrik wird auf jeder beliebigen Raumzeit benötigt, um Raumzeit-Intervalle

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

zu definieren. Ein Element dieser Raumzeit nennen wir Ereignis und seine Komponenten sind in kontravarianter Form durch $x^\mu = (ct, x, y, z)$ gegeben.

Ein weiterer wichtiger 4-Vektor, den wir in dieser Arbeit verwendet haben, ist der Impuls-4-Vektor $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$, dessen nullte Komponente die Energie gemäß der relativistischen Energie-Impulsbeziehung

$$E^2 = |\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{B.2})$$

enthält, sowie auch das 4-Potential $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$.

Ein Skalarprodukt auf einer Minkowski-Raumzeit ist als

$$(ab) = a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (\text{B.3})$$

definiert, wobei wir $b_\mu = \eta_{\mu\nu} b^\nu$ einen kovarianten Vektor nennen. Um Vektoren von einem Bezugssystem in ein anderes zu transformieren, verwenden wir die Lorentz-Transformation Λ . Bewegt sich zum Beispiel ein Bezugssystem S'

mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} in dem Bezugssystem S , so hängen die Raumzeit-Koordinaten eines Ereignisses in beiden Systemen über die Relation

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{B.4})$$

zusammen. Das Transformationsverhalten von Skalarprodukten ist umso einfacher, da sich Raumzeit-Intervalle bei einer Lorentztransformation gemäß

$$\begin{aligned} (a'b') &= \eta_{\mu\nu} (\Lambda^{\mu}_{\rho} a^{\rho}) (\Lambda^{\nu}_{\sigma} b^{\sigma}) \stackrel{!}{=} (ab) \\ &\Rightarrow \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

nicht ändern. Die explizite Form der Lorentz-Transformation lässt sich durch

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta_1\gamma & -\beta_2\gamma & -\beta_3\gamma \\ -\beta_1\gamma & 1 + (1-\gamma)\frac{\beta_1^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_2\gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1 + (1-\gamma)\frac{\beta_2^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\beta_3\gamma & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_1}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1 + (1-\gamma)\frac{\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

darstellen, wobei hier $\beta = |\mathbf{v}|/c$, $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ der dimensionslose Geschwindigkeitsparameter und $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ der relativistische Lorentzfaktor ist. Ein Teilchen, dem ein Impuls-4-Vektor zugeordnet ist, erfüllt mit diesen Faktoren die Relationen $E = \gamma mc^2$ und $|\mathbf{p}| = \beta \gamma mc^2$.

Gemäß der in (B.6) definierten Lorentz-Transformationen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma [\mathbf{E} + (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}), \\ \mathbf{B}' &= \gamma [\mathbf{B} - (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})] - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned}$$

für elektromagnetische Felder. Haben wir allerdings den Fall einer Lorentz-Transformation einer elektromagnetischen Welle wie aus Kapitel 2 entgegen ihrer Ausbreitungsrichtung (vgl. Kapitel 4), so erhalten wir die vereinfachten Relationen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma (1 + \beta) \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}' &= \gamma (1 + \beta) \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Anhang C

Dirac-Matrizen

In dieser Arbeit verwenden wir den *Slash-Operator*. Dieser wurde von Feynman eingeführt und bildet einen 4-Vektor gemäß

$$\not{a} = a_\mu \gamma^\mu = a_0 \gamma^0 - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{C.1})$$

auf eine 4×4 -Matrix ab. Dabei sind

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

die *Dirac-Matrizen* in der Standard-Darstellung. Diese hängen mit bekannten 2×2 -Matrizen gemäß

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{C.3})$$

zusammen, wobei die σ_j die Pauli-Matrizen (3.5) sind. Die Dirac-Matrizen erfüllen die fundamentale Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}. \quad (\text{C.4})$$

Darüber hinaus gibt es die für die Beschreibung des Spins notwendige Matrix

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

welche zum Beispiel in (3.6) auftritt. Diese Matrix erfüllt die Relationen

$$\begin{aligned}\gamma^5\gamma^5 &= \mathbb{1}_{4\times 4} \\ \{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0.\end{aligned}\tag{C.6}$$

Für die Adjungierte einer allgemeinen 4×4 -Matrix legen wir die Relation

$$\bar{A} = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0\tag{C.7}$$

fest. Mit Hilfe der Antikommutatorbeziehungen erhält man

$$\begin{aligned}\gamma^{0\dagger} &= \gamma^0, \\ \gamma^{j\dagger} &= -\gamma^j \quad \text{mit } j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned}\tag{C.8}$$

für die adjungierten Dirac-Matrizen.

Anhang D

Dirac-Spinoren

Für die freie Dirac-Gleichung finden wir je nach Vorzeichen des Energieeigenwerts die Lösungen $u_{p-,s-}$ und $v_{p+,s+}$. Das Tensorprodukt zweier identischer Spinoren ist in Indeschreibweise durch

$$\begin{aligned} u_\alpha \bar{u}_\beta &= \left[\left(\frac{\not{p}_- + c}{2c} \right) \cdot \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}_-}{2} \right) \right]_{\alpha\beta} \\ v_\alpha \bar{v}_\beta &= \left[\left(\frac{\not{p}_+ - c}{2c} \right) \cdot \left(\frac{1 + \gamma^5 \not{s}_+}{2} \right) \right]_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

gegeben, wobei für adjungierte Spinoren generell $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$ gilt. In dieser Form finden wir den aus (3.6) bekannten Spinprojektor Σ wieder, welcher den 4-Spin-Vektor aus (3.7) enthält. Zudem finden wir den Energieprojektor

$$\Lambda_\mp(p) = \left(\frac{\not{p} \pm c}{2c} \right), \quad (\text{D.2})$$

welcher entsprechend der Relationen

$$\begin{aligned} \Lambda_-(p)u_{p,s} &= u_{p,s}, & \Lambda_+(p)u_{p,s} &= 0 \\ \Lambda_+(p)v_{p,s} &= v_{p,s}, & \Lambda_-(p)v_{p,s} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

auf Zustände eines entsprechenden Energieeigenwerts projiziert. Dabei ist zu beachten, dass die Vorzeichenindizes aus (D.2) wie in dieser Arbeit üblich das Ladungsvorzeichen von Elektron beziehungsweise Positron bezeichnen. Der Energieprojektor erfüllt mit dem Spinprojektor aus (3.6) die Vertauschungsrelation

$$[\Lambda_\pm(p), \Sigma(s)] = \pm \frac{1}{2c} \underbrace{(ps)}_{=0} \gamma^5 = 0. \quad (\text{D.4})$$

Anhang E

Spurbildung

Die Bildung der Spur über eine $n \times n$ -Matrix A ist als

$$\text{Sp}(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii} \quad (\text{E.1})$$

definiert. Die Spurbildung ist eine lineare Abbildung einer Matrix auf ein Skalar. Sie erfüllt

$$\text{Sp}(s_1 A_1 + s_2 A_2) = s_1 \cdot \text{Sp}(A_1) + s_2 \cdot \text{Sp}(A_2) \quad (\text{E.2})$$

als Bedingung für die Linearität. Eine weitere Eigenschaft der Spur ist

$$\text{Sp}(A_1 A_2) = \text{Sp}(A_2 A_1), \quad (\text{E.3})$$

woraus eine der wesentlichen Eigenschaften der Spur unmittelbar folgt: Die Spur ist invariant unter zyklischer Vertauschung, was soviel bedeutet wie

$$\text{Sp}(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_n}) = \text{Sp}(A_{j_1} A_{j_2} \dots A_{j_n}), \quad (\text{E.4})$$

wobei (i_1, i_2, \dots, i_n) durch zyklische Vertauschung in (j_1, j_2, \dots, j_n) übergehen kann.

Damit kommen wir zu den Spureigenschaften der Dirac-Matrizen, welche für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sind. Zunächst gilt

$$\text{Sp}(\gamma^\mu) = \text{Sp}(\gamma^5) = 0, \quad (\text{E.5})$$

was unmittelbar aus der Standarddarstellung der Dirac-Matrizen (C.2) folgt. Weiterhin ist es wichtig zu bemerken, dass die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen gemäß

$$\text{Sp}(\not{\phi}_1 \not{\phi}_2 \dots \not{\phi}_{2n+1}) = 0 \quad (\text{E.6})$$

verschwindet. Diese Eigenschaft lässt sich leicht mit Hilfe von (C.6) nachweisen. Aus (C.4) folgt die Darstellung durch Skalarprodukte

$$\text{Sp}(\not{a}_1 \not{a}_2) = 4(a_1 a_2), \quad (\text{E.7})$$

welche sich weiter auf eine größere Anzahl von Dirac-Matrizen ausdehnen lässt. Somit gilt

$$\text{Sp}(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4) = 4(a_1 a_2)(a_3 a_4) - 4(a_1 a_3)(a_2 a_4) + 4(a_1 a_4)(a_2 a_3) \quad (\text{E.8})$$

für genau 4 γ -Matrizen und die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \dots \not{a}_n) = & (a_1 a_2) \text{Sp}(\not{a}_3 \not{a}_4 \not{a}_5 \dots \not{a}_n) \\ & - (a_1 a_3) \text{Sp}(\not{a}_2 \not{a}_4 \not{a}_5 \dots \not{a}_n) \\ & \pm \dots \\ & + (a_1 a_n) \text{Sp}(\not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4 \dots \not{a}_{n-1}). \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Damit und mit den vorangegangenen Formeln lässt sich prinzipiell eine Spur über eine beliebige Anzahl von γ -Matrizen durch Skalarprodukte ausdrücken. Des Weiteren gilt, dass die Spur bei Umkehrung der Reihenfolge in sich selbst übergeht

$$\text{Sp}(\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_{n-1} \not{a}_n) = \text{Sp}(\not{a}_n \not{a}_{n-1} \dots \not{a}_2 \not{a}_1). \quad (\text{E.10})$$

Für spezielle Spuren, die darüberhinaus auch eine γ^5 -Matrix enthalten, gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\gamma^5) &= 0, \\ \text{Sp}(\gamma^5 \not{a} \not{b}) &= 0, \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$\text{Sp}(\gamma^5 \not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta, \quad (\text{E.12})$$

deren Beweis aus [BD84b] zu entnehmen ist. Dabei ist $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ der total antisymmetrische Tensor vierter Stufe.

Anhang F

Finale Darstellung des Matrizelements

Wir wollen im Folgenden eine Darstellung des Matrizelements finden, wie sie auch in unserer Numerik verwendet wird. Dabei gehen wir von der Form (4.38) aus und zeigen, wie die dort auftretenden Spuren mit Hilfe der Relationen aus Anhang E berechnet werden können.

Die Berechnung der Spuren, welche nicht von mindestens einem der Spin-Vektoren abhängen, ist in [Mül03] vorgeführt worden. Wir wollen uns im Wesentlichen darauf konzentrieren, zu veranschaulichen, wie die Matrix γ^5 innerhalb der spin-abhängigen Spuren behandelt wird. Dazu werden wir exemplarische Spuren aus (4.38) in eine Form bringen, von der ausgehend es durch die iterative Anwendung der Relation (E.9) gelingt, die Spur durch Skalarprodukte auszudrücken.

Dazu legen wir die Notation

$$\mathcal{T}_1 = \text{Sp} (\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{k} \Lambda_-(p_-) \gamma^5 \not{\not{p}}_-)$$

fest. Wie wir aus (E.6) wissen, verschwindet die Spur über eine ungerade Anzahl von γ -Matrizen. Damit ergibt sich

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{4c^2} [\text{Sp} (\not{\epsilon} \not{p}_+ \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{k} \not{p}_- \gamma^5 \not{\not{p}}_-) - c^2 \text{Sp} (\not{\epsilon} \gamma^5 \not{\not{p}}_+ \not{k} \gamma^5 \not{\not{p}}_-)],$$

wobei wir γ^5 gemäß (C.5) als Produkt von vier Dirac-Matrizen interpretieren. Mit Hilfe der Relationen (C.6) können wir γ^5 mit den anderen Matrizen vertauschen, um sie dann auf sich selbst anzuwenden. Dies ergibt

$$\mathcal{T}_1 = -\frac{1}{4c^2} [\text{Sp} (\not{\epsilon} \not{p}_+ \not{\not{p}}_+ \not{k} \not{p}_- \not{\not{p}}_-) + c^2 \text{Sp} (\not{\epsilon} \not{\not{p}}_+ \not{k} \not{\not{p}}_-)]. \quad (\text{F.1})$$

Dabei ist darauf zu achten, dass sich das Vorzeichen auf Grund der Anti-kommutator-Relation bei jeder Permutation ändert. Die Spuren aus (F.1) können

nun mit (E.9) und (E.8) durch Skalarprodukte ausgedrückt werden. In dieser Arbeit wird darauf verzichtet, diese Rechenschritte explizit anzugeben.

Für Spuren, in denen nur eine γ^5 -Matrix auftritt, verhält es sich etwas anders. Exemplarisch für diesen Fall wollen wir die Spur

$$\mathcal{T}_{2,j} = \text{Sp} (\not{\epsilon} \Lambda_+(p_+) \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} \not{\epsilon} \Lambda_-(p_-))$$

betrachten. Hierbei kann j die Werte $\{1, 2\}$ annehmen. Wieder können wir zunächst ausnutzen, dass die Spur bei ungerader Anzahl der γ -Matrizen verschwindet. Das gibt uns

$$\mathcal{T}_{2,j} = \frac{1}{4c} [\text{Sp} (\not{\epsilon} p_+ \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} \not{\epsilon}) - \text{Sp} (\not{\epsilon} \gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} \not{\epsilon} p_-)] = \frac{1}{4c} [\mathcal{T}_{2,j}^{(1)} - \mathcal{T}_{2,j}^{(2)}]$$

Die beiden hier eingeführten Spuren lassen sich nun auf prinzipiell verschiedene Weise ausrechnen. Für die erste Spur können wir nach zyklischer Vertauschung gemäß (E.4) verwenden, dass $\not{\epsilon} \not{\epsilon} = \gamma^0 \gamma^0 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$ gilt, was uns nach erneuter zyklischer Vertauschung

$$\mathcal{T}_{2,j}^{(1)} = \text{Sp} (\gamma^5 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} p_+)$$

liefert. Haben wir eine Spur in dieser Form, so können wir sie unter Zuhilfenahme der Relation (E.12) direkt berechnen. Wir erhalten also

$$\mathcal{T}_{2,j}^{(1)} = 4i \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} s_+^\alpha a_j^\beta k^\gamma p_+^\delta,$$

was wir anhand der bekannten Formen der beteiligten Vektoren und der Eigenschaften des ϵ -Tensors einfach ausrechnen können. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{2,j}^{(1)} = 4i \frac{a\omega'}{c} [& (s_+^3 p_+^2 - s_+^2 p_+^3 + s_+^2 p_+^0 - s_+^0 p_+^2) \delta_{j1} \\ & + (s_+^1 p_+^3 - s_+^3 p_+^1 + s_+^0 p_+^1 - s_+^1 p_+^0) \delta_{j2}]. \end{aligned}$$

Die Spur $\mathcal{T}_{2,j}^{(2)}$ lässt sich nicht auf diese Art und Weise berechnen, da die Anzahl der beteiligten γ -Matrizen vier übersteigt. Wir müssen also eine wesentlich weniger elegante Methode wählen, indem die Matrix γ^5 durch das Produkt der vier anderen Dirac-Matrizen (C.5) ausgedrückt wird. Für die entsprechende Spur ergibt sich daraus

$$\mathcal{T}_{2,j}^{(2)} = i \text{Sp} (\not{\epsilon} \not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_3 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} \not{\epsilon} p_-),$$

wobei die hier eingeführten 4-Vektoren ϵ_i die Relationen $\not{\epsilon}_i = \gamma^i$ erfüllen. In unserem speziellen Fall lässt sich die Spur daraufhin noch zu

$$\mathcal{T}_{2,j}^{(2)} = i \text{Sp} (\not{\epsilon}_1 \not{\epsilon}_2 \not{\epsilon}_3 \not{s}_+ \not{a}_j \not{k} \not{\epsilon} p_-)$$

vereinfachen. Die Rechnung lässt sich wieder mit dem bekannten Verfahren (E.9) fortsetzen. Sie ist allerdings beschwerlich, da wir es mit acht γ -Matrizen innerhalb der Spur zu tun haben. Damit können sich prinzipiell 105 ($= 7 \cdot 5 \cdot 3$) verschiedene Terme mit Skalarprodukten ergeben. In unseren Rechnungen werden wir es mit Spuren über das Produkt von maximal zehn γ -Matrizen zu tun haben. In jedem dieser Fälle ergeben sich dabei bis zu 945 Terme. Das Betragsquadrat des Matrixelements ist daher in dieser Form äußerst unhandlich. Auf den folgenden Seiten ist diese gegeben.

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{M}_n|^2 = & B_n B_n^* \cdot \left\{ \frac{1}{4c^2} \left[\begin{aligned} & 2p_+^0 p_-^0 - (p_+ p_-) \\ & + (p_+ p_-)(s_+ s_-) - (p_- s_+)(p_+ s_-) \\ & - 2p_+^0 p_-^0 (s_+ s_-) - 2s_+^0 s_-^0 (p_+ p_-) \\ & + 2s_+^0 (p_+ s_-) p_-^0 + 2p_+^0 (p_- s_+) s_-^0 \\ & - c^2 [2s_+^0 s_-^0 - (s_+ s_-) + 1] \end{aligned} \right] \right. \\
& - \frac{\xi^2}{4p_+^* p_-^*} \left[\begin{aligned} & p_+^0 p_-^* + p_-^0 p_+^* - (p_+ p_-) \\ & + (p_+ p_-)(s_+ s_-) - (p_+ s_-)(p_- s_+) \\ & + p_-^0 (-p_+^* (s_+ s_-) + (p_+ s_-) s_+^*) \\ & - p_+^0 (-p_- s_+) s_-^* + (s_+ s_-) p_-^* \\ & + s_+^0 (-p_+ p_-) s_-^* + (p_+ s_-) p_-^* \\ & - s_-^0 (-p_+^* (p_- s_+) + (p_+ p_-) s_+^*) \\ & - c^2 [s_+^0 s_-^* + s_-^0 s_+^* - (s_+ s_-) + 1] \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\xi^4 c^2}{8(p_+^*)^2 (p_-^*)^2} \left[\begin{aligned} & p_+^* p_-^* - s_-^* s_+^* c^2 \\ & + p_+^* s_-^* (p_- s_+) - p_+^* p_-^* (s_+ s_-) \\ & - s_+^* s_-^* (p_+ p_-) + s_+^* p_-^* (p_+ s_-) \end{aligned} \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re}\{B_n C_n^*\} \cdot \left\{ -\frac{\xi}{4cp_+^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^1 p_-^0 - p_+^1 p_-^* + p_+^* p_-^1 \\
& -(p_+^1 p_-^* - p_-^1 p_+^*)(2s_+^0 s_-^0 - (s_+ s_-)) \\
& -(p_-^1 s_+^* - s_+^1 p_-^*)(2p_+^0 s_-^0 - (p_+ s_-)) \\
& -(s_-^1 p_+^* - p_+^1 s_-^*)(2s_+^0 p_-^0 - (s_2 p_1)) \\
& -(s_+^1 s_-^* - s_-^1 s_+^*)(2p_+^0 p_-^0 - (p_+ p_-)) \\
& + 2p_+^1 (-p_-^0 (s_+ s_-) + s_-^0 (p_- s_+)) \\
& - 2s_+^1 (-p_-^0 (s_- p_+) + s_-^0 (p_+ p_-)) \\
& - c^2 [s_-^1 s_+^* + s_+^1 (2s_-^0 - s_-^*)] \end{aligned} \right] \right. \\
& + \frac{\xi}{4cp_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^1 p_+^0 - p_-^1 p_+^* + p_-^* p_+^1 \\
& -(p_-^1 p_+^* - p_+^1 p_-^*)(2s_-^0 s_+^0 - (s_- s_+)) \\
& -(p_+^1 s_-^* - s_-^1 p_+^*)(2p_-^0 s_+^0 - (p_- s_+)) \\
& -(s_+^1 p_-^* - p_-^1 s_+^*)(2s_-^0 p_+^0 - (s_2 p_1)) \\
& -(s_-^1 s_+^* - s_+^1 s_-^*)(2p_-^0 p_+^0 - (p_- p_+)) \\
& + 2p_-^1 (-p_+^0 (s_- s_+) + s_+^0 (p_+ s_-)) \\
& - 2s_-^1 (-p_+^0 (s_+ p_-) + s_+^0 (p_- p_+)) \\
& - c^2 [s_+^1 s_-^* + s_-^1 (2s_+^0 - s_+^*)] \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\xi^3 c}{8(p_+^*)^2 p_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^1 p_+^* - 2s_-^1 s_+^* c^2 \\
& -(p_-^1 p_+^0 - p_+^1 p_-^0)(2s_-^* s_+^* - (s_+ s_-)) \\
& -(p_+^1 s_-^0 - s_-^1 p_+^0)(2p_-^* s_+^* - (p_- s_+)) \\
& -(s_+^1 p_-^0 - p_-^1 s_+^0)(2p_+^* s_-^* - (p_+ s_-)) \\
& -(s_-^1 s_+^0 - s_+^1 s_-^0)(2p_-^* p_+^* - (p_+ p_-)) \\
& - 2p_-^1 (-(p_+ s_-) s_+^* + (s_+ s_-) p_+^*) \\
& + 2s_-^1 (-(p_+ p_-) s_+^* + (p_- s_+) p_+^*) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi^3 c}{8(p_-^*)^2 p_+^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^1 p_-^* - 2s_+^1 s_-^* c^2 \\
& -(p_+^1 p_-^0 - p_-^1 p_+^0)(2s_+^* s_-^* - (s_- s_+)) \\
& -(p_-^1 s_+^0 - s_+^1 p_-^0)(2p_+^* s_-^* - (p_+ s_-)) \\
& -(s_-^1 p_+^0 - p_+^1 s_-^0)(2p_-^* s_+^* - (p_- s_+)) \\
& -(s_+^1 s_-^0 - s_-^1 s_+^0)(2p_+^* p_-^* - (p_- p_+)) \\
& -2p_+^1 (-(p_- s_+) s_-^* + (s_- s_+) p_-^*) \\
& +2s_+^1 (-(p_- p_+) s_-^* + (p_+ s_-) p_-^*) \end{aligned} \right] \Big\} \\
& + \text{Im}\{B_n^* C_n\} \cdot \left\{ \frac{\xi}{4p_+^*} \left[\begin{aligned}
& s_+^2 p_+^* - p_+^2 s_+^* - s_-^2 (p_-^0 + p_-^3) + p_-^2 (s_-^0 + s_-^3) \\
& + p_+^2 (s_-^3 + s_-^0) - s_+^2 (2p_-^0 - p_-^*) - p_-^2 s_+^* + s_-^2 p_+^* \end{aligned} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\xi}{4p_-^*} \left[\begin{aligned}
& s_-^2 p_-^* - p_-^2 s_-^* - s_+^2 (p_+^0 + p_+^3) + p_+^2 (s_+^0 + s_+^3) \\
& + p_-^2 (s_+^3 + s_+^0) - s_-^2 (2p_+^0 - p_+^*) - p_+^2 s_-^* + s_+^2 p_-^* \end{aligned} \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{\xi^3 c^2}{4(p_+^*)^2 p_-^*} \left[\begin{aligned}
& s_+^2 (p_+^0 + p_+^3) - p_+^2 (s_+^3 + s_+^0) - p_-^2 s_+^* + s_-^2 p_+^* \end{aligned} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\xi^3 c^2}{4(p_-^*)^2 p_+^*} \left[\begin{aligned}
& s_-^2 (p_-^0 + p_-^3) - p_-^2 (s_-^3 + s_-^0) - p_+^2 s_-^* + s_+^2 p_-^* \end{aligned} \right] \right\} \\
& + \text{Re}\{B_n D_n^*\} \cdot \left\{ -\frac{\xi}{4cp_+^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^1 p_-^0 - p_+^1 p_-^* + p_+^* p_-^1 \\
& -(p_+^1 p_-^* - p_-^1 p_+^*)(2s_+^0 s_-^0 - (s_+ s_-)) \\
& -(p_-^1 s_+^* - s_+^1 p_-^*)(2p_+^0 s_-^0 - (p_+ s_-)) \\
& -(s_-^1 p_+^* - p_+^1 s_-^*)(2s_+^0 p_-^0 - (s_2 p_1)) \\
& -(s_+^1 s_-^* - s_-^1 s_+^*)(2p_+^0 p_-^0 - (p_+ p_-)) \\
& +2p_+^1 (-p_-^0 (s_+ s_-) + s_-^0 (p_- s_+)) \\
& -2s_+^1 (-p_-^0 (s_- p_+) + s_-^0 (p_+ p_-)) \\
& -c^2 [s_-^1 s_+^* + s_+^1 (2s_-^0 - s_-^*)] \end{aligned} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\xi}{4cp_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^1 p_+^0 - p_-^1 p_+^* + p_-^* p_+^1 \\
& - (p_-^1 p_+^* - p_+^1 p_-^*) (2s_-^0 s_+^0 - (s_- s_+)) \\
& - (p_+^1 s_-^* - s_-^1 p_+^*) (2p_-^0 s_+^0 - (p_- s_+)) \\
& - (s_+^1 p_-^* - p_-^1 s_+^*) (2s_-^0 p_+^0 - (s_+ 2p_+)) \\
& - (s_-^1 s_+^* - s_+^1 s_-^*) (2p_-^0 p_+^0 - (p_- p_+)) \\
& + 2p_-^1 (-p_+^0 (s_- s_+) + s_+^0 (p_+ s_-)) \\
& - 2s_-^1 (-p_+^0 (s_+ p_-) + s_+^0 (p_- p_+)) \\
& - c^2 [s_+^1 s_-^* + s_-^1 (2s_+^0 - s_+^*)] \end{aligned} \right] \\
& + \frac{\xi^3 c}{8(p_+^*)^2 p_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^1 p_+^* - 2s_-^1 s_+^* c^2 \\
& - (p_-^1 p_+^0 - p_+^1 p_-^0) (2s_-^* s_+^* - (s_+ s_-)) \\
& - (p_+^1 s_-^0 - s_-^1 p_+^0) (2p_-^* s_+^* - (p_- s_+)) \\
& - (s_+^1 p_-^0 - p_-^1 s_+^0) (2p_+^* s_-^* - (p_+ s_-)) \\
& - (s_-^1 s_+^0 - s_+^1 s_-^0) (2p_-^* p_+^* - (p_+ p_-)) \\
& - 2p_-^1 (- (p_+ s_-) s_+^* + (s_+ s_-) p_+^*) \\
& + 2s_-^1 (- (p_+ p_-) s_+^* + (p_- s_+) p_+^*) \end{aligned} \right] \\
& - \frac{\xi^3 c}{8(p_-^*)^2 p_+^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^1 p_-^* - 2s_+^1 s_-^* c^2 \\
& - (p_+^1 p_-^0 - p_-^1 p_+^0) (2s_+^* s_-^* - (s_- s_+)) \\
& - (p_-^1 s_+^0 - s_+^1 p_-^0) (2p_+^* s_-^* - (p_+ s_-)) \\
& - (s_-^1 p_+^0 - p_+^1 s_-^0) (2p_-^* s_+^* - (p_- s_+)) \\
& - (s_+^1 s_-^0 - s_-^1 s_+^0) (2p_+^* p_-^* - (p_- p_+)) \\
& - 2p_+^1 (- (p_- s_+) s_-^* + (s_- s_+) p_-^*) \\
& + 2s_+^1 (- (p_- p_+) s_-^* + (p_+ s_-) p_-^*) \end{aligned} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Im}\{B_n^* D_n\} \cdot \left\{ \frac{\xi}{4p_+^*} \left[s_+^1 p_+^* - p_+^1 s_+^* - s_-^1 (p_-^0 + p_-^3) + p_-^1 (s_-^0 + s_-^3) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + p_+^1 (s_-^3 + s_-^0) - s_+^1 (2p_-^0 - p_-^*) - p_-^1 s_+^* + s_-^1 p_+^* \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{\xi}{4p_-^*} \left[s_-^1 p_-^* - p_-^1 s_-^* - s_+^1 (p_+^0 + p_+^3) + p_+^1 (s_+^0 + s_+^3) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + p_-^1 (s_+^3 + s_+^0) - s_-^1 (2p_+^0 - p_+^*) - p_+^1 s_-^* + s_-^1 p_+^* \right] \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - \frac{\xi^3 c^2}{4(p_+^*)^1 p_-^*} \left[s_+^1 (p_+^0 + p_+^3) - p_+^1 (s_+^3 + s_+^0) - p_-^1 s_+^* + s_-^1 p_+^* \right] \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{\xi^3 c^2}{4(p_-^*)^1 p_+^*} \left[s_-^1 (p_-^0 + p_-^3) - p_-^1 (s_-^3 + s_-^0) - p_+^1 s_-^* + s_+^1 p_-^* \right] \right\} \\
& + C_n C_n^* \cdot \left\{ \frac{\xi^2}{8(p_+^*)^2} \left[2p_-^0 p_+^* - p_-^* p_+^* - c^2 [2s_-^0 s_+^* - s_-^* s_+^*] \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad - (2s_+^* s_-^0 - s_-^* s_+^*) (p_+^1 p_-^1 + p_-^1 p_+^1) \\
& \qquad \qquad \qquad - (2p_+^* p_-^0 - p_-^* p_+^*) (s_+^1 s_-^1 + s_-^1 s_+^1) \\
& \qquad \qquad \qquad + (2p_+^* s_-^0 - p_+^* s_-^*) (s_+^1 p_-^1 + p_-^1 s_+^1) \\
& \qquad \qquad \qquad + (2s_+^* p_-^0 - s_+^* p_-^*) (s_-^1 p_+^1 + p_+^1 s_-^1) \\
& \qquad \qquad \qquad + 2p_+^* (p_- s_+) s_-^0 - 2p_+^* (s_+ s_-) p_-^0 \\
& \qquad \qquad \qquad - 2s_+^* (p_+ p_-) s_-^0 + 2s_+^* (p_+ s_-) p_-^0 \\
& \qquad \qquad \qquad - 2p_-^* p_+^* s_-^0 s_+^0 + p_-^* p_+^* (s_+ s_-) \\
& \qquad \qquad \qquad + 2p_-^* s_+^* p_+^0 s_-^0 - p_-^* s_+^* (p_+ s_-) \\
& \qquad \qquad \qquad + 2s_-^* p_+^* s_+^0 p_-^0 - s_-^* p_+^* (p_- s_+) \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - 2s_-^* s_+^* p_+^0 p_-^0 + s_-^* s_+^* (p_+ p_-) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\xi^2}{4p_+^*p_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^1p_+^1 + p_-^*p_+^* + (p_+p_-) - p_-^*p_+^0 - p_+^*p_-^0 \\
& -c^2[2s_-^1s_+^1 + s_-^*s_+^* + (s_+s_-) - s_-^*s_+^0 - s_+^*s_-^0 - 1] \\
& -(p_+^1p_-^1 + p_-^1p_+^1)(s_-^*s_+^* + ((s_+s_-) - s_+^0s_-^0 - s_-^0s_+^*)) \\
& +(p_+^1s_-^1 + s_-^1p_+^1)(p_-^*s_+^* + ((p_-s_+) - s_+^0p_-^* - p_-^0s_+^*)) \\
& +(p_-^1s_+^1 + s_+^1p_-^1)(p_+^*s_-^* + ((p_+s_-) - s_-^0p_+^* - p_+^0s_-^*)) \\
& -(s_+^1s_-^1 + s_-^1s_+^1)(p_-^*p_+^* + ((p_+p_-) - p_+^0p_-^* - p_-^0p_+^*)) \\
& +p_-^*p_+^*(2s_-^0s_+^0 - (s_+s_-)) \\
& +s_-^*s_+^*(2p_-^0p_+^0 - (p_+p_-)) \\
& -p_-^*s_+^*(2s_-^0p_+^0 - (s_1p_2)) \\
& -p_+^*s_-^*(2p_-^0s_+^0 - (p_-s_+)) \\
& +((p_+p_-)(s_+s_-) - (p_-s_+)(p_+s_-)) \\
& +p_+^*(s_-^0(p_-s_+) - p_-^0(s_+s_-)) \\
& +s_+^*(p_-^0(p_+s_-) - s_-^0(p_+p_-)) \\
& +p_-^*(s_+^0(p_+s_-) - p_+^0(s_+s_-)) \\
& +s_-^*(p_+^0(p_-s_+) - s_+^0(p_+p_-))
\end{aligned} \right] \\
& +\frac{\xi^2}{8(p_-^*)^2} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^0p_-^* - p_+^*p_-^* - c^2[2s_+^0s_-^* - s_+^*s_-^*] \\
& -(2s_-^*s_+^0 - s_+^*s_-^*)(p_-^1p_+^1 + p_+^1p_-^1) \\
& -(2p_-^*p_+^0 - p_+^*p_-^*)(s_-^1s_+^1 + s_+^1s_-^1) \\
& +(2p_-^*s_+^0 - p_-^*s_+^*)(s_-^1p_+^1 + p_+^1s_-^1) \\
& +(2s_-^*p_+^0 - s_-^*p_+^*)(s_+^1p_-^1 + p_-^1s_+^1) \\
& +2p_-^*(p_+s_-)s_+^0 - 2p_-^*(s_-s_+)p_+^0 \\
& -2s_-^*(p_-p_+)s_+^0 + 2s_-^*(p_-s_+)p_+^0 \\
& -2p_+^*p_-^*s_+^0s_-^0 + p_+^*p_-^*(s_-s_+) \\
& +2p_+^*s_-^*p_-^0s_+^0 - p_+^*s_-^*(p_-s_+) \\
& +2s_+^*p_-^*s_-^0p_+^0 - s_+^*p_-^*(p_+s_-) \\
& -2s_+^*s_-^*p_-^0p_+^0 + s_+^*s_-^*(p_-p_+)
\end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{Re}\{C_n D_n^*\} \cdot \left\{ \frac{\xi^2}{4(p_+^*)^2} \left[-(2s_+^* s_-^0 - s_-^* s_+^*)(p_+^1 p_-^2 + p_-^1 p_+^2) \right. \right. \\
& \quad - (2p_+^* p_-^0 - p_-^* p_+^*)(s_+^1 s_-^2 + s_-^1 s_+^2) \\
& \quad + (2p_+^* s_-^0 - p_-^* s_+^*)(s_+^1 p_-^2 + p_-^1 s_+^2) \\
& \quad \left. \left. + (2s_+^* p_-^0 - s_-^* p_+^*)(s_-^1 p_+^2 + p_+^1 s_-^2) \right] \right. \\
& \quad - \frac{\xi^2}{2p_+^* p_-^*} \left[p_-^1 p_+^2 + p_-^2 p_+^1 - c^2 [s_-^1 s_+^2 + s_-^2 s_+^1] \right. \\
& \quad - (p_+^1 p_-^2 + p_-^1 p_+^2)(s_-^* s_+^* + ((s_+ s_-) - s_+^0 s_-^* - s_-^0 s_+^*)) \\
& \quad + (p_+^1 s_-^2 + s_-^1 p_+^2)(p_-^* s_+^* + ((p_- s_+) - s_+^0 p_-^* - p_-^0 s_+^*)) \\
& \quad + (p_-^1 s_+^2 + s_+^1 p_-^2)(p_+^* s_-^* + ((p_+ s_-) - s_-^0 p_+^* - p_+^0 s_-^*)) \\
& \quad - (s_+^1 s_-^2 + s_-^1 s_+^2)(p_-^* p_+^* + ((p_+ p_-) - p_+^0 p_-^* - p_-^0 p_+^*)) \\
& \quad - (p_+^1 s_+^2 - s_+^1 p_+^2)(p_-^* s_-^0 - p_-^0 s_-^*) \\
& \quad \left. \left. + (p_-^1 s_-^2 - s_-^1 p_-^2)(p_+^* s_+^0 - p_+^0 s_+^*) \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\xi^2}{4(p_-^*)^2} \left[-(2s_-^* s_+^0 - s_+^* s_-^*)(p_-^1 p_+^2 + p_+^1 p_-^2) \right. \right. \\
& \quad - (2p_-^* p_+^0 - p_+^* p_-^*)(s_-^1 s_+^2 + s_+^1 s_-^2) \\
& \quad + (2p_-^* s_+^0 - p_+^* s_-^*)(s_-^1 p_+^2 + p_+^1 s_-^2) \\
& \quad \left. \left. + (2s_-^* p_+^0 - s_+^* p_-^*)(s_+^1 p_-^2 + p_-^1 s_+^2) \right] \right\} \\
& + \operatorname{Im}\{C_n^* D_n\} \cdot \left\{ \frac{\xi^2 c}{4(p_+^*)^2} \left[p_-^0 s_+^3 + p_-^0 s_+^0 + p_+^3 s_+^3 + p_+^3 s_+^0 + p_+^*(s_-^0 + s_-^3) \right] \right. \\
& \quad - \frac{\xi^2 c}{2p_+^* p_-^*} \left[p_+^0 s_+^3 - p_+^3 s_+^0 + p_-^0 s_-^3 - p_-^3 s_-^0 \right. \\
& \quad \left. - p_+^1 s_-^1 - p_+^2 s_-^2 - p_-^1 s_+^1 - p_-^2 s_+^2 \right] \\
& \quad \left. + \frac{\xi^2 c}{4(p_-^*)^2} \left[p_+^0 s_-^3 + p_+^0 s_-^0 + p_+^3 s_-^3 + p_+^3 s_-^0 + p_-^*(s_+^0 + s_+^3) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +D_n D_n^* \cdot \left\{ \frac{\xi^2}{8(p_+^*)^2} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^0 p_+^* - p_-^* p_+^* - c^2 [2s_-^0 s_+^* - s_-^* s_+^*] \\
& -(2s_+^* s_-^0 - s_-^* s_+^*) (p_+^2 p_-^2 + p_-^2 p_+^2) \\
& -(2p_+^* p_-^0 - p_-^* p_+^*) (s_+^2 s_-^2 + s_-^2 s_+^2) \\
& +(2p_+^* s_-^0 - p_+^* s_-^*) (s_+^2 p_-^2 + p_-^2 s_+^2) \\
& +(2s_+^* p_-^0 - s_+^* p_-^*) (s_-^2 p_+^2 + p_+^2 s_-^2) \\
& +2p_+^* (p_- s_+) s_-^0 - 2p_+^* (s_+ s_-) p_-^0 \\
& -2s_+^* (p_+ p_-) s_-^0 + 2s_+^* (p_+ s_-) p_-^0 \\
& -2p_-^* p_+^* s_-^0 s_+^0 + p_-^* p_+^* (s_+ s_-) \\
& +2p_-^* s_+^* p_+^0 s_-^0 - p_-^* s_+^* (p_+ s_-) \\
& +2s_-^* p_+^* s_+^0 p_-^0 - s_-^* p_+^* (p_- s_+) \\
& -2s_-^* s_+^* p_+^0 p_-^0 + s_-^* s_+^* (p_+ p_-) \end{aligned} \right] \\
& - \frac{\xi^2}{4p_+^* p_-^*} \left[\begin{aligned}
& 2p_-^2 p_+^2 + p_-^* p_+^* + (p_+ p_-) - p_-^* p_+^0 - p_+^* p_-^0 \\
& -c^2 [2s_-^2 s_+^2 + s_-^* s_+^* + (s_+ s_-) - s_-^* s_+^0 - s_+^* s_-^0 - 1] \\
& -(p_+^2 p_-^2 + p_-^2 p_+^2) (s_-^* s_+^* + ((s_+ s_-) - s_+^0 s_-^* - s_-^0 s_+^*)) \\
& +(p_+^2 s_-^2 + s_-^2 p_+^2) (p_-^* s_+^* + ((p_- s_+) - s_+^0 p_-^* - p_-^0 s_+^*)) \\
& +(p_-^2 s_+^2 + s_+^2 p_-^2) (p_+^* s_-^* + ((p_+ s_-) - s_-^0 p_+^* - p_+^0 s_-^*)) \\
& -(s_+^2 s_-^2 + s_-^2 s_+^2) (p_-^* p_+^* + ((p_+ p_-) - p_+^0 p_-^* - p_-^0 p_+^*)) \\
& +p_-^* p_+^* (2s_-^0 s_+^0 - (s_+ s_-)) \\
& +s_-^* s_+^* (2p_-^0 p_+^0 - (p_+ p_-)) \\
& -p_-^* s_+^* (2s_-^0 p_+^0 - (s_1 p_2)) \\
& -p_+^* s_-^* (2p_-^0 s_+^0 - (p_- s_+)) \\
& +((p_+ p_-) (s_+ s_-) - (p_- s_+) (p_+ s_-)) \\
& +p_+^* (s_-^0 (p_- s_+) - p_-^0 (s_+ s_-)) \\
& +s_+^* (p_-^0 (p_+ s_-) - s_-^0 (p_+ p_-)) \\
& +p_-^* (s_+^0 (p_+ s_-) - p_+^0 (s_+ s_-)) \\
& +s_-^* (p_+^0 (p_- s_+) - s_+^0 (p_+ p_-)) \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\xi^2}{8(p_-^*)^2} \left[\begin{aligned}
& 2p_+^0 p_-^* - p_+^* p_-^* - c^2 [2s_+^0 s_-^* - s_+^* s_-^*] \\
& - (2s_-^* s_+^0 - s_+^* s_-^*) (p_-^2 p_+^2 + p_+^2 p_-^2) \\
& - (2p_-^* p_+^0 - p_+^* p_-^*) (s_-^2 s_+^2 + s_+^2 s_-^2) \\
& + (2p_-^* s_+^0 - p_-^* s_+^*) (s_-^2 p_+^2 + p_+^2 s_-^2) \\
& + (2s_-^* p_+^0 - s_-^* p_+^*) (s_+^2 p_-^2 + p_-^2 s_+^2) \\
& + 2p_-^* (p_+ s_-) s_+^0 - 2p_-^* (s_- s_+) p_+^0 \\
& - 2s_-^* (p_- p_+) s_+^0 + 2s_-^* (p_- s_+) p_+^0 \\
& - 2p_+^* p_-^* s_+^0 s_-^0 + p_+^* p_-^* (s_- s_+) \\
& + 2p_+^* s_-^* p_-^0 s_+^0 - p_+^* s_-^* (p_- s_+) \\
& + 2s_+^* p_-^* s_-^0 p_+^0 - s_+^* p_-^* (p_+ s_-) \\
& - 2s_+^* s_-^* p_-^0 p_+^0 + s_+^* s_-^* (p_- p_+) \end{aligned} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

- [A⁺00] ANDRUSZKOW, J. u. a.: First observation of self-amplified spontaneous emission in a free-electron laser at 109-nm wavelength. In: *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), S. 3825–3829
- [A⁺08] ALEXANDER, G u. a.: Observation of Polarized Positrons from an Undulator-Based Source. In: *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008), S. 210801
- [And32] ANDERSON, Carl D.: Energies of Cosmic-Ray Particles. In: *Phys. Rev.* 41 (1932), S. 405–421
- [And33] ANDERSON, Carl D.: The Positive Electron. In: *Phys. Rev.* 43 (1933), S. 491–494
- [AS65] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover Publ., 1965. – ISBN 0–486–61272–4, 978–0–486–61272–0
- [BD84a] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenfeldtheorie*. BI-Wiss.-Verl., 1984 (BI-Hochschultaschenbücher ; 101). – ISBN 3–411–00101–1, 978–3–411–00101–9
- [BD84b] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenmechanik*. Bibliogr. Inst., 1984 (BI-Hochschultaschenbücher ; 98). – ISBN 3–411–0098–8
- [BFHS⁺97] BURKE, D. L. ; FIELD, R. C. ; HORTON-SMITH, G. u. a.: Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), Nr. 9, S. 1626–1629
- [BH34] BETHE, H. ; HEITLER, W.: On the Stopping of fast particles and on the creation of positive electrons. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.* A146 (1934), S. 83–112

- [BI70] BREZIN, E. ; ITZYKSON, C.: Pair production in vacuum by an alternating field. In: *Phys. Rev. D2* (1970), S. 1191–1199
- [BK64] BROWN, Lowell S. ; KIBBLE, T. W. B.: Interaction of Intense Laser Beams with Electrons. In: *Phys. Rev.* 133 (1964), Nr. 3A, S. A705–A719
- [BK08] BELL, A. R. ; KIRK, John G.: Possibility of Prolific Pair Production with High-Power Lasers. In: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008), S. 200403
- [BKGP02] BYTEV, V. V. ; KURAEV, E. A. ; GALYNSKII, M. V. ; POTYLITSYN, A. P.: Polarized triplet production by circularly polarized photons. In: *JETP Lett.* 75 (2002), S. 452–456
- [BLP91] BERESTECKIJ, Vladimir B. ; LIFSIC, Evgenij M. ; PITAEVSKIJ, Lev P.: *Quantenelektrodynamik*. [Deutsch], 1991 (Lehrbuch der theoretischen Physik / von L. D. Landau; E. M. Lifschitz ; 4). – ISBN 3–05–500068–4, 3–8171–1329–3, 978–3–8171–1329–3, 978–3–05–500068–3
- [BM54] BETHE, H. A. ; MAXIMON, L. C.: Theory of Bremsstrahlung and Pair Production. I. Differential Cross Section. In: *Phys. Rev.* 93 (1954), Nr. 4, S. 768–784
- [Bor26] BORN, M.: Quantenmechanik der Stossvorgänge. In: *Z. Phys.* 38 (1926), S. 803
- [BV80] BERGOU, J. ; VARRO, S.: Wave Functions of a Free Electron in an External Field and Their Application in Intense Field Interactions. II. Relativistic Treatment. In: *J. Phys.* A13 (1980), S. 2823–2837
- [BW34] BREIT, G. ; WHEELER, John A.: Collision of Two Light Quanta. In: *Phys. Rev.* 46 (1934), Nr. 12, S. 1087–1091
- [CTDL08] COHEN-TANNOUJJI, Claude ; DIU, Bernard ; LALO, Franck: *Quantenmechanik*. Berlin [u.a.] : de Gruyter, 2008
- [Dir28a] DIRAC, Paul A. M.: The Quantum theory of electron. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.* A117 (1928), S. 610–624
- [Dir28b] DIRAC, Paul A. M.: The Quantum theory of electron. 2. In: *Proc. Roy. Soc. Lond.* A118 (1928), S. 351

- [DJP92] DUBIETIS, A. ; JONUŠAUSKAS, G. ; PISKARSKAS, A.: Powerful femtosecond pulse generation by chirped and stretched pulse parametric amplification in BBO crystal. In: *Optics Communications* 88 (1992), S. 437
- [EM95] EICHLER, Jörg ; MEYERHOF, Walter E.: *Relativistic atomic collisions*. San Diego, Calif. [u.a.] : Academic Press, 1995. – XII, 413 S.. – ISBN 0–12–233675–5, 978–0–12–233675–1
- [FMA59] FANO, U. ; McVOY, K. W. ; ALBERS, James R.: Interference of Orbital and Spin Currents in Bremsstrahlung and Photoelectric Effect. In: *Phys. Rev.* 116 (1959), Nr. 5, S. 1159–1167
- [GFRT07] GATTI, G. ; FREDERICO, J. T. ; REICHE, S. ; TIKHOPLAV, R.: Simulation of an Iris guided Inverse Free electron Laser Micro bunching Experiment. In: *Particle Accelerator Conference PAC07, Albuquerque, New Mexico, 2007*, S. 1266
- [HE36] HEISENBERG, W. ; EULER, H.: Consequences of Dirac's theory of positrons. In: *Z. Phys.* 98 (1936), S. 714–732
- [IKS05] IVANOV, D.Yu. ; KOTKIN, G.L. ; SERBO, V.G.: Complete description of polarization effects in e^+e^- pair production by a photon in the field of a strong laser wave. In: *Eur. Phys. J. C* 40 (2005), S. 27–40
- [Jac75] JACKSON, John D.: *Classical electrodynamics*. New York [u.a.] : Wiley, 1975. – XXII, 848 S.. – ISBN 0–471–43132–X, 978–0–471–43132–9
- [Kel64] KELDYSH, L. V.: Diagram technique for nonequilibrium processes. In: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 47 (1964), S. 1515–1527
- [Kib65] KIBBLE, T. W. B.: Frequency Shift in High-Intensity Compton Scattering. In: *Phys. Rev.* 138 (1965), S. B740–B753
- [Len57] LENARD, Andrew: Spin Reversal in Scattering Processes. In: *Phys. Rev.* 107 (1957), Nr. 6, S. 1712–1713
- [LY56] LEE, T. D. ; YANG, C. N.: Question of Parity Conservation in Weak Interactions. In: *Phys. Rev.* 104 (1956), Nr. 1, S. 254–258
- [McV57] McVOY, Kirk W.: Circular Polarization of Bremsstrahlung from Polarized Electrons in Born Approximation. In: *Phys. Rev.* 106 (1957), Nr. 4, S. 828–829

- [McV58] McVOY, Kirk W.: Longitudinal Polarization of Bremsstrahlung and Pair Production. In: *Phys. Rev.* 111 (1958), Nr. 5, S. 1333–1337
- [MD57] McVOY, Kirk W. ; DYSON, Freeman J.: Longitudinal Polarization of Bremsstrahlung and Pair Production at Relativistic Energies. In: *Phys. Rev.* 106 (1957), Nr. 6, S. 1360–1361
- [Mit87] MITTLEMAN, Marvin H.: Multiphoton pair creation. In: *Phys. Rev. A* 35 (1987), Nr. 11, S. 4624–4628
- [MTA05] MANAUT, B. ; TAJ, S. ; ATTAOURTI, Y.: Mott scattering of polarized electrons in a strong laser field. In: *Phys. Rev. A* 71 (2005), Nr. 4, S. 043401
- [Mül03] MÜLLER, C.: *Nichtlineare Paarerzeugung im Stoß eines relativistischen Kerns mit einem intensiven Laserstrahl*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Diss., 2003
- [Mül09] MÜLLER, C.: Nonlinear Bethe-Heitler pair creation with attosecond laser pulses at the LHC. In: *Phys. Lett.* B672 (2009), S. 56–60
- [MVG03] MÜLLER, C. ; VOITKIV, A. B. ; GRÜN, N.: Differential rates for multiphoton pair production by an ultrarelativistic nucleus colliding with an intense laser beam. In: *Phys. Rev. A* 67 (2003), Nr. 6, S. 063407
- [NR64] NIKISHOV, A.I. ; RITUS, V.I.: Quantum Processes in the field of a plane electromagnetic wave and in a constant field 1. In: *Sov. Phys. JETP* 19 (1964), Nr. 2, S. 529–541
- [OM59] OLSEN, Haakon ; MAXIMON, L. C.: Photon and Electron Polarization in High-Energy Bremsstrahlung and Pair Production with Screening. In: *Phys. Rev.* 114 (1959), Nr. 3, S. 887–904
- [PMK07] PEATROSS, J. ; MÜLLER, C. ; KEITEL, C. H.: Electron wavepacket dynamics in a relativistic electromagnetic field: 3-D analytical approximation. In: *Opt. Express* 15 (2007), Nr. 10, S. 6053–6061
- [Pop01] POPOV, V. S.: On Schwinger mechanism of e^+e^- pair production from vacuum by the field of optical and X-ray lasers. In: *JETP Lett.* 74 (2001), S. 133–138

- [Pra61] PRATT, R. H.: Transfer of Helicity in Radiation and Absorption of High-Energy Photons. In: *Phys. Rev.* 123 (1961), Nr. 4, S. 1508–1510
- [Rei62] REISS, Howard R.: Absorption of Light by Light. In: *J. Math. Phys.* 3 (1962), S. 59
- [Sau31] SAUTER, Fritz: Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs. In: *Z. Phys.* 69 (1931), S. 742–764
- [Sch51] SCHWINGER, Julian S.: On gauge invariance and vacuum polarization. In: *Phys. Rev.* 82 (1951), S. 664–679
- [Sch05] SCHWABL, Franz: *Quantenmechanik für Fortgeschrittene*. Berlin ; Heidelberg [u.a.] : Springer, 2005. – ISBN 3–540–25904–X, 978–3–540–25904–6
- [SGWS73] SHEARER, J.W. ; GARRISON, J. ; WONG, J. ; SWAIN, J.E.: Pair Production by Relativistic Electrons from an Intense Laser Focus. In: *Phys. Rev. A* 8 (1973), S. 1582
- [SM85] STRICKLAND, Donna ; MOUROU, Gerard A.: Compression of amplified chirped pulses. In: *Optics Communications* 56 (1985), S. 219
- [STM98] SZYMANOWSKI, C. ; TAIBET, R. ; MAQUET, A.: Laser-Assisted Scattering of Polarized Electrons at High Field Intensities. In: *Laser Physics* 8 (1998), Nr. 1, S. 1–5
- [Tem08] TEMNYKH, Alexander B.: Delta undulator for Cornell energy recovery linac. In: *Phys. Rev. ST Accel. Beams* 11 (2008), Nr. 12, S. 120702
- [TP74] TSENG, H. K. ; PRATT, R. H.: Polarization correlations in atomic-field pair production. In: *Phys. Rev. A* 9 (1974), Nr. 2, S. 752–761
- [Tse97] TSENG, H. K.: Polarization correlations in atomic-field pair production. In: *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 30 (1997), S. 557–564
- [Vol35] VOLKOV, D.M.: Über eine Klasse von Lösungen der Diracschen Gleichung. In: *Z. Phys.* 94 (1935), S. 250

- [WK01] WALSER, M.W. ; KEITEL, C.H.: Narrow high-frequency spectral features via laser-induced slow spin flips. In: *Opt. Comm.* 199 (2001), Nr. 5-6, S. 447–451
- [WUH⁺02] WALSER, M. W. ; URBACH, D. J. ; HATSAGORTSYAN, K. Z. ; HU, S. X. ; KEITEL, C. H.: Spin and radiation in intense laser fields. In: *Phys. Rev.* A65 (2002), S. 043410
- [Yak65] YAKOVLEV, V.P.: Electron-Positron Pair Production by a Strong Electromagnetic Wave in the Field of a Nucleus. In: *Sov. Phys. JETP* 22 (1965), Nr. 1, S. 223–229
- [YCK⁺08] YANOVSKY, V. ; CHVYKOV, V. ; KALINCHENKO, G. ; ROUSSEAU, P. ; PLANCHON, T. ; MATSUOKA, T. ; MAKSIMCHUK, A. ; NEES, J. ; CHERIAUX, G. ; MOUROU, G. ; KRUSHELNICK, K.: Ultra-high intensity- 300-TW laser at 0.1 Hz repetition rate. In: *Opt. Express* 16 (2008), Nr. 3, S. 2109–2114

Danksagung

Ich möchte die Gelegenheit ergreifen, um mich bei allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, zu bedanken.

Mein Dank gilt zunächst Christoph Keitel, der es mir ermöglicht hat, während der Zeit dieser Diplomarbeit von den hervorragenden Bedingungen am Max-Planck-Institut für Kernphysik zu profitieren.

Für die interessante und ergiebige Themenstellung dieser Arbeit, seine fachliche Unterstützung und seine besonnene Art danke ich Carsten Müller in besonderem Maße.

Weiter gilt mein Dank allen Kollegen und Mitarbeitern, die sich die Zeit genommen haben, meine unterschiedlichsten Fragen zu beantworten, und somit einen maßgeblichen Anteil am Fortschritt meiner Arbeit hatten.

Speziell danke ich Julian Stürmer und Sebastian Krämer, die sich als Lektoren zur Verfügung gestellt haben.

Ich danke allen Freunden, die mich während meiner Zeit in Heidelberg begleitet haben.

Allen voran danke ich meinen Eltern, die mich in den zurückliegenden Jahren immer bedingungslos unterstützt haben. Ohne ihren Rückhalt hätte meine Studienzeit sicherlich nicht so unbeschwert verlaufen können.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Heidelberg, den 4. Mai 2009

Unterschrift