

INAUGURAL–DISSERTATION  
zur  
Erlangung der Doktorwürde  
der  
Naturwissenschaftlich-Mathematischen  
Gesamtfakultät  
der Ruprecht-Karls-Universität  
Heidelberg

vorgelegt von  
Dipl.-Phys. Alexander Dietz  
aus Rüdesheim am Rhein

Tag der mündlichen Prüfung: 30.04.2003



Auswertung des neutrinolosen  
Doppelbetazerfalls von  $^{76}\text{Ge}$   
im Heidelberg-Moskau-Experiment  
mit verbesserten statistischen  
Methoden

Gutachter: Prof. Dr. Hans-Volker Klapdor-Kleingrothaus  
Prof. Bogdan Povh



**Zusammenfassung:**

Die Untersuchung des neutrinolosen Doppelbetazerfalls erlaubt es, stringente Grenzen auf hypothetische Zerfallsprozesse und somit auf Physik jenseits des Standardmodells zu setzen. Insbesondere sind damit Schlüsse auf die Neutrinomasse möglich. Im Heidelberg-Moskau-Experiment wird dafür der Doppelbetazerfall des Germaniumisotops  $^{76}\text{Ge}$  untersucht.

Da ein Doppelbetazerfall eine sehr große Halbwertszeit besitzt, muss zu seiner Beobachtung die Quellenstärke maximiert und der störende Untergrund minimiert werden. Für eine maximale Quellenstärke und eine hohe Nachweiswahrscheinlichkeit werden fünf Detektoren aus hochreinem Germanium verwendet, welche zu 86% mit  $^{76}\text{Ge}$  angereichert sind; sie fungieren aus diesem Grund gleichzeitig als Quelle und als Detektor. Mit 125.5 mol  $^{76}\text{Ge}$  besitzt das Heidelberg-Moskau-Experiment die größte Quellenstärke aller derzeit messenden  $\beta\beta$ -Experimente weltweit. Zur Auswertung werden verschiedene statistische Methoden angewendet und verglichen. Die Daten des Heidelberg-Moskau-Experiments für den Zeitraum von August 1990 bis Mai 2000 wurden ausgewertet. Diese bestätigen die Existenz des neutrinolosen Doppelbetazerfalls mit einer großen Wahrscheinlichkeit.

**Abstract:**

The examination of the neutrinoless double beta decay allows to set stringent limits on hypothetical decay modes and therefore on Physics Beyond the Standard Model. Especially conclusions on the mass of the neutrino are possible. In the Heidelberg-Moscow-Experiment the double-beta decay of  $^{76}\text{Ge}$  is examined.

Because double beta decay has a very large half-life it is important to maximize the source strength and to minimize the background. For a maximal source strength and a high detection efficiency five high-purity germanium-detectors are used which consist of enriched  $^{76}\text{Ge}$ ; hence they work as source and detector at the same time. With a source strength of 125.5 mol  $^{76}\text{Ge}$  the Heidelberg-Moscow-Experiment possesses the largest source strength at present of all  $\beta\beta$ -experiments worldwide. Different statistical methods are used and compared. The data of the Heidelberg-Moscow-Experiment from August 1990 to May 2000 has been analyzed. They confirm the existence of the neutrinoless double-beta decay at a large confidence level.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen des Doppelbetazerfalls</b>	<b>5</b>
2.1	Neutrinobegleiteter Doppelbetazerfall . . . . .	8
2.2	Neutrinoloser Doppelbetazerfall . . . . .	9
2.3	Neutrinoloser Doppelbetazerfall mit Majoron-Emission . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Das Heidelberg-Moskau-Experiment</b>	<b>15</b>
3.1	Aufbau des Experiments . . . . .	15
3.2	Bestimmende Parameter eines $\beta\beta$ -Experimentes . . . . .	18
3.3	Untergrundreduzierung . . . . .	20
3.4	Datenaufnahme . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Erstellung des Summenspektrums</b>	<b>27</b>
4.1	Datenkonvertierung . . . . .	29
4.1.1	Aufbau der Binärdateien . . . . .	29
4.1.2	Das neue Konvertierungsprogramm . . . . .	32
4.2	Eichung . . . . .	35
4.3	Pulsformanalyse . . . . .	36
4.4	Erstellung des Summenspektrums . . . . .	38
4.4.1	Selektion der Datensätze . . . . .	39
4.4.2	Selektion der Ereignisse . . . . .	43
4.4.3	Korrektur der Zählraten . . . . .	45
4.4.4	Nacheichung . . . . .	52
4.5	Das Summenspektrum . . . . .	54
4.5.1	Niederenergiespektrum . . . . .	54
4.5.2	Hochenergiespektrum . . . . .	54
4.5.3	Verteilung der Ereignisse . . . . .	61
4.5.4	Detektor ANG4 . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Datenanalyse</b>	<b>69</b>
5.1	Die $\chi^2$ - und die Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	69
5.1.1	Die Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	70
5.1.2	Die $\chi^2$ -Methode . . . . .	71
5.2	Die Bayes'sche Methode . . . . .	72
5.2.1	Herleitung der Likelihood-Funktion . . . . .	73
5.2.2	Herleitung der Prior-Wahrscheinlichkeit . . . . .	75
5.2.3	Bestimmung des Konfidenzintervalls . . . . .	77
5.2.4	Bestimmung der Existenzwahrscheinlichkeit . . . . .	79
5.2.5	Statistische Tests . . . . .	80
5.2.6	Auswertebereich . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>87</b>
6.1	Untergrund . . . . .	87
6.2	Peakscan-Verfahren . . . . .	91
6.3	Auswertung der Daten . . . . .	94
6.3.1	Gesamtspektrum . . . . .	94
6.3.2	SSE-Spektrum . . . . .	98
6.3.3	$^{214}\text{Bi}$ -Linien . . . . .	100
6.4	Auswertung der Daten bis 2002 . . . . .	104
6.5	Zusammenfassung . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>107</b>
<b>A</b>	<b>Herleitung Erwartungswert</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Das Ziel physikalischer Forschung ist es, die Zusammenhänge in der Natur und deren Kräfte zu begreifen und mathematisch zu beschreiben. Die Grundkräfte der Natur sind zwar schon seit dem letzten Jahrhundert bekannt - jede für sich mit einer Theorie sehr gut beschreibbar - doch sind die Wissenschaftler damit alleine nicht zufrieden. Denn diese Theorien hängen von vielen Größen wie Massen oder Kopplungskonstanten ab, welche die Theorien selbst nicht liefern und die deshalb in Form freier Parameter eingeführt und experimentell bestimmt werden müssen. Für das heute gültige Standardmodell sind das insgesamt 18 Parameter. Aus diesem Grund sind theoretische Physiker auf der Suche nach einer wirklich fundamentalen Theorie, die die vier Grundkräfte vereinheitlicht und aus der sich die obigen Parameter durch grundlegende Gesetzmäßigkeiten ableiten lassen.

Schon seit langem sind die Kräfte bekannt, die im Wesentlichen für alle im täglichen Leben beobachtbaren Phänomene verantwortlich sind: die Gravitation und der Elektromagnetismus. Die beiden anderen Grundkräfte, die starke und die schwache Wechselwirkung, haben im Gegensatz zur Gravitation und zum Elektromagnetismus nur eine sehr kurze Reichweite, weshalb sie erst im 20. Jahrhundert entdeckt wurden. Die starke Wechselwirkung, die für den Zusammenhalt der Nukleonen in den Atomkernen verantwortlich ist, wird heute recht erfolgreich mit der Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Die schwache Wechselwirkung hingegen, die unter anderem für die  $\beta$ -Zerfälle in Atomkernen verantwortlich ist, konnte im letzten Jahrhundert erfolgreich mit der Theorie des Elektromagnetismus vereinheitlicht werden. Diese von Glashow, Weinberg und Salam formulierte Theorie [Gla61, Wei67, Sal68] stellt einen der größten Erfolge auf dem Gebiet der theoretischen Physik dar. Mit der Entdeckung der von dieser Theorie vorhergesagten W- und Z-Teilchen konnte diese sogenannte Elektroschwache Theorie eindrucksvoll bestätigt werden. Zusammen mit dem Modell zur starken Wechselwirkung

bildet das Glashow-Weinberg-Salam-Modell das heutige Standardmodell der Elementarteilchenphysik.

Trotz des generellen Erfolges dieser Theorie und der sehr guten Übereinstimmung mit vielen Experimenten besitzt dieses Modell einige grundlegende Schwächen und widerspricht neuesten experimentellen Resultaten. So gehen zum Beispiel, wie schon oben erwähnt, sehr viele freie Parameter in die Theorie ein, sie schließt die Gravitation als vierte Grundkraft nicht mit ein und die Massen der beobachtbaren Teilchen müssen als freie Parameter eingeführt werden. Insbesondere werden die Neutrinos als masselose Teilchen angenommen, während sich in jüngster Zeit die Hinweise auf eine nicht verschwindende Neutrinomasse häufen.

Das Neutrino wurde vor nicht einmal 50 Jahren von Fred Reines und Clyde Cowan am Savannah River Reactor entdeckt [Cow56], nachdem es 1933 von Wolfgang Pauli postuliert wurde [Pau33], um die Energiebilanz des  $\beta$ -Zerfalls in Ordnung zu bringen. Spätere Experimente entdeckten neben diesem Elektron-Neutrino noch zwei weitere, ebenfalls vom Standardmodell vorhergesagte Neutrinosorten, die Myon- und Tau-Neutrinos [Dan62, DON01]. Es gibt zur Zeit zahlreiche Hinweise für eine nichtverschwindende Neutrinomasse, besonders von Experimenten zur Untersuchung solarer und atmosphärischer Neutrinoflüsse. Diese Experimente messen signifikant weniger Neutrinos als von theoretischen Modellen erwartet werden.

Erklärt werden kann dieser Effekt durch die Theorie der Neutrinooszillation, die im Jahre 1957 von B. Pontecorvo vorgeschlagen wurde [Pon57] und von Mikheyev, Smirnov und Wolfenstein erweitert wurde [Smi85, Wol78], um Neutrinooszillationen in Materie zu erklären. In dieser Theorie ändern die Neutrinos dabei auf ihrem Weg durch den Raum kontinuierlich ihren Typ (Flavour). Damit wird es möglich, dass die in der Sonne produzierten Elektronneutrinos auf ihrem Weg zur Erde in einen anderen Flavour umgewandelt werden und somit in den Experimenten nicht mehr nachzuweisen sind bzw. dass Neutrinos anderer Flavours nachweisbar sind. Diese Oszillation kommen aber nur genau dann zustande, wenn die Neutrinos eine Masse besitzen. Ein Nachweis von Neutrinooszillationen ist somit ein direkter Hinweis auf nichtverschwindende Neutrinomassen.

In einem solchen Fall sind die Flavour-Eigenzustände  $\nu_\alpha$  der Neutrinos eine Superposition der Masseneigenzustände  $\nu_i$  und es gilt:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U_{\alpha i} |\nu_i\rangle . \quad (1.1)$$

Die Matrix  $U$  stellt eine ähnlich der im Quarksektor verwendete Mischungsmatrix dar. Betrachtet man der Einfachheit halber ein Zwei-Neutrino Szena-

rio, dann lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass das als  $\nu_\alpha$  emittierte Neutrino beim Beobachter als  $\nu_\beta$ -Neutrino ankommt, wie folgt beschreiben:

$$P_{\alpha \rightarrow \beta}(E, L) = \sin^2(2\theta) \sin^2 \left( 1.27 \Delta m^2 \frac{L}{E} \right). \quad (1.2)$$

In dieser Gleichung ist  $\theta$  der Mischungswinkel zwischen den beiden Zuständen,  $L$  der Abstand vom Entstehungsort des Neutrinos bis zur Detektion in Metern,  $E$  die Energie des Neutrinos in MeV und  $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$  ist die Differenz der Massenquadrate der beiden Masseneigenzustände in Einheiten von  $\text{eV}^2$ .

Den stärksten Hinweis auf das Vorhandensein solcher Neutrinooszillationen liefern Experimente, die den Fluss atmosphärischer Neutrinos untersuchen. Atmosphärische Neutrinos entstehen, wenn geladene kosmische Teilchen (z.B. hochenergetische Protonen) auf die Erdatmosphäre treffen und dort eine Kaskade von Teilchen erzeugen (meist Myonen und Pionen). Diese Prozesse sind gut bekannt, so dass der erwartete Myon-Neutrinofluss sehr genau berechnet werden kann. In den letzten Jahren hat Super-Kamiokande mit sehr großer Wahrscheinlichkeit festgestellt, dass der Fluss nur 50-60% des theoretisch erwarteten Flusses beträgt [Fuk01].

Auch Experimente zur Messung des Flusses solarer Elektroneneutrinos registrieren einen deutlich zu geringen Fluss. Experimente wie GALLEX/GNO [GNO00], die japanischen Experimente KAMIOKANDE [Hir96] und SUPER-KAMIOKANDE [Fuk01a] sowie das HOMESTAKE-Experiment [Cle98] messen nur 30 bis 60% des vom Sonnen-Standardmodell erwarteten Neutrinoflusses [Bah00]. Insbesondere SNO [Ahm01, Ban02] kann das Defizit an solaren Elektroneneutrinos mit sehr großer Wahrscheinlichkeit bestätigen.

Eine Erklärung dieses Effektes durch eine Modifikation des Sonnen-Standardmodells ist mit großer Wahrscheinlichkeit auszuschließen, da dieses Modell durch helioseismologische Messungen sehr gut bestätigt wird [Bah00a, Bah02]. Ebenso hat das japanische KAMLAND-Experiment kürzlich gezeigt, dass der Fluss von Elektron-Antineutrinos aus umliegenden Kernreaktoren deutlich zu gering ist [Egu03]. Auch ein Beschleunigerexperiment am Los Alamos National Laboratory liefert Anzeichen für Neutrinooszillationen [Agu01].

Alle beschriebenen Experimente zur Untersuchung von Neutrinooszillationen sind nur sensitiv auf Massendifferenzen der Neutrinos (siehe Gleichung (1.2)). Die *absoluten* Massen lassen sich daher durch solche Experimente alleine nicht bestimmen; es werden deshalb komplementäre Experimente benötigt.

Das in dieser Arbeit beschriebene Heidelberg-Moskau-Experiment zur Untersuchung des neutrinolosen Doppelbetazerfalls von  ${}^{76}\text{Ge}$  ist ein solches komplementäres Experiment [Kla87, Kla92, Kla94, Kla98, Kla99]. Die neuesten Resultate werden vorgestellt.



# Kapitel 2

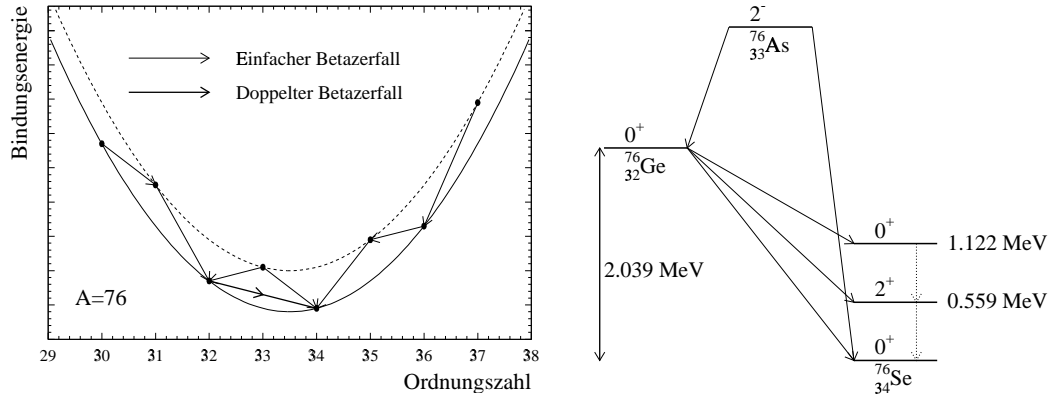
## Grundlagen des Doppelbetazerfalls

Der Doppelbetazerfall ( $\beta\beta$ -Zerfall) ist ein radioaktiver Zerfall eines Atomkerns, bei dem zwei Neutronen (oder Protonen) simultan in zwei Protonen (bzw. Neutronen) umgewandelt werden. Im Prinzip sind es also zwei gleichzeitig stattfindende  $\beta$ -Zerfälle, die aus energetischen Gründen nicht zeitlich getrennt stattfinden können. Dies wird in Abbildung 2.1 deutlich, in der die Bindungsenergie eines Kerns mit der Massenzahl 76 über der Ordnungszahl aufgetragen ist. Berechnen lässt sich diese Bindungsenergie  $E_B$  nach der Weizsäcker-Massenformel. Danach hängt die Bindungsenergie quadratisch von der Ordnungszahl  $Z$  ab:

$$E_B = a_0 + a_1Z + a_2Z^2 + a_3\delta .$$

Die  $a_i$  sind Parameter, die von der Massenzahl  $A$  abhängen, und  $\delta$  ist der sogenannte Paarungsterm. Für gg-Kerne ist  $\delta = +1$  während  $\delta = -1$  für uu-Kerne ist, da Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl besonders stabil sind. Aus diesem Grund liegen die Bindungsenergien eines Kerns mit gerader Massenzahl abwechselnd auf zwei verschiedenen Parabeln. Dies erklärt, warum der Kern mit Ordnungszahl 32 zwar energetisch höher liegt als ein Kern mit  $A = 34$ , jedoch nicht direkt in diesen Kern zerfallen kann, da der dazwischen liegende Kern mit  $A = 33$  eine noch größere Bindungsenergie besitzt. In diesem Fall ist nur der direkte Zerfall durch zwei gleichzeitig stattfindende  $\beta$ -Zerfälle, dem Doppelbetazerfall, möglich.

In Abbildung 2.1 rechts ist das Schema des Doppelbeta-Zerfalls von  $^{76}\text{Ge}$  nach  $^{76}\text{Se}$  dargestellt. Der in dieser Arbeit untersuchte Zerfall in den  $0^+$ -Grundzustand von  $^{76}\text{Se}$  besitzt einen Q-Wert von  $Q = (2039.006 \pm 0.050) \text{ keV}$  [Dou01]. Neben diesem Übergang in den Grundzustand von  $^{76}\text{Se}$  gibt es auch



**Abbildung 2.1:** Massenparabel eines Atomkerns mit einer Massenzahl von 76 und das Zerfallsschema des Germaniumisotops  $^{76}\text{Ge}$ .

Übergänge in angeregte Zustände, die jedoch stark unterdrückt sind und deshalb in der weiteren Diskussion vernachlässigt werden.

Es gibt insgesamt 36 Isotope, die sich auf den Doppelbeta-Zerfall hin untersuchen lassen können [Kla95]. Entsprechende Experimente mit diesen Isotopen erlauben neben der Untersuchung des nach dem Standardmodell erlaubten Doppelbetazerfalls unter Emission zweier Elektronantineutrinos auch die Suche nach exotischen Zerfallskanälen, die nach dem Standardmodell nicht erlaubt sind. Es werden folgende Zerfallskanäle beim  $\beta\beta$ -Zerfall diskutiert:

$$2\nu\beta\beta - \text{Zerfall} : \quad A(Z, N) \rightarrow A(Z+2, N-2) + 2e^- + 2\bar{\nu}_e \quad (2.1)$$

$$0\nu\beta\beta - \text{Zerfall} : \quad A(Z, N) \rightarrow A(Z+2, N-2) + 2e^- \quad (2.2)$$

$$0\nu\chi\beta\beta - \text{Zerfall} : \quad A(Z, N) \rightarrow A(Z+2, N-2) + 2e^- + \chi \quad (2.3)$$

$$0\nu 2\chi\beta\beta - \text{Zerfall} : \quad A(Z, N) \rightarrow A(Z+2, N-2) + 2e^- + 2\chi \quad (2.4)$$

Der erste Zerfall (2.1) ist der schon erwähnte Zerfall, der im Rahmen des Standardmodells erlaubt ist, während alle anderen Zerfälle *nicht* erlaubt sind, da die Leptonzahl um zwei Einheiten geändert wird. Unterscheiden lassen sich diese Zerfälle anhand der Energieverteilung der beiden emittierten Elektronen. So entsteht beim Zerfall (2.2) im Energiespektrum eine einzelne, scharfe Linie beim Q-Wert des Zerfalls, während die Energieverteilung aller anderen Zerfälle von den Phasenraumfaktoren abhängig sind, die wiederum von einem sogenannten spektralen Index  $n$  abhängen. Berechnen lässt sich diese Verteilung nach [Kon66]:

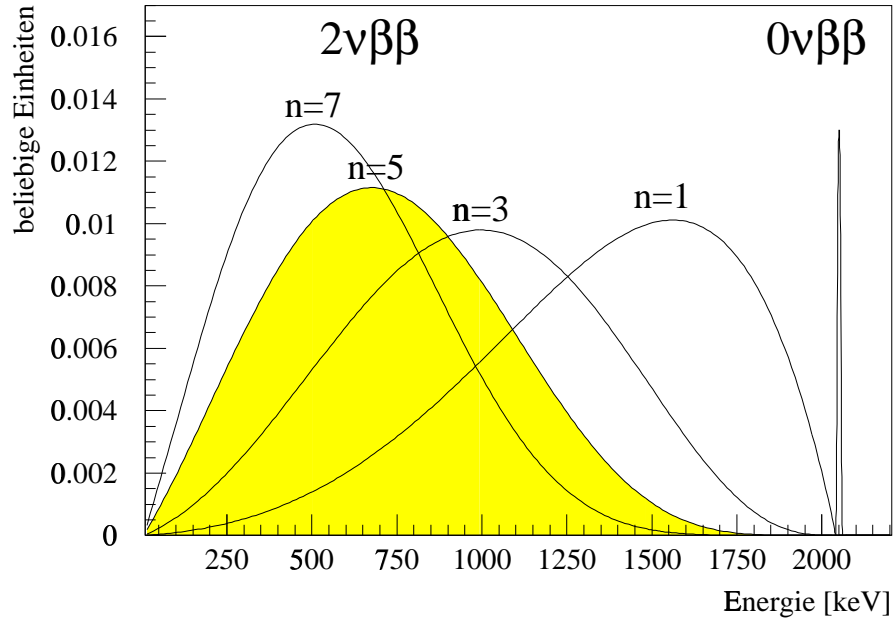
$$\frac{dN}{dT} \sim T (Q - T)^n (T^4 + 10 T^3 + 40 T^2 + 60 T + 30) .$$

Nuklid	$T_{1/2}^{2\nu}$ (QRPA) [y]	$T_{1/2}^{2\nu}$ (Experiment) [y]	
$^{48}\text{Ca}$		$(4.2 \pm 1.2) \times 10^{19}$	[Bru00]
		$(4.3^{+2.4}_{-1.1} \pm 1.4) \times 10^{19}$	[Bal96]
$^{76}\text{Ge}$	$2.99 \times 10^{21}$	$(1.35^{+0.33}_{-0.23} \pm 0.01) \times 10^{21}$	[Dör02]
		$(1.55^{+0.19}_{-0.15} \pm 0.01) \times 10^{21}$	[Kla01a, Die99]
		$(1.77^{+0.01+0.13}_{-0.01-0.11}) \times 10^{21}$	[Gün97]
		$(1.2 \pm 0.2) \times 10^{21}$	[Aal96]
$^{82}\text{Se}$	$10.9 \times 10^{19}$	$(8.3 \pm 1.0 \pm 0.7) \times 10^{19}$	[Arn98]
		$(10.8^{+2.6}_{-0.6}) \times 10^{19}$	[Ell92]
$^{96}\text{Zr}$	$1.08 \times 10^{19}$	$(2.1^{+0.8}_{-0.4} \pm 0.2) \times 10^{19}$	[Arn99]
$^{100}\text{Mo}$	$1.13 \times 10^{18}$	$(0.94 \pm 0.32) \times 10^{19}$ gch.	[Wie01]
		$(11.5^{+3.0}_{-2.0}) \times 10^{18}$	[Eji01]
		$(7.2 \pm 0.9 \pm 1.8) \times 10^{18}$	[Ash01]
		$(7.6^{+2.2}_{-1.4}) \times 10^{18}$	[Als97]
$^{116}\text{Cd}$	$6.31 \times 10^{19}$	$(6.82^{+0.38}_{-0.53} \pm 0.68) \times 10^{18}$	[DeS97]
		$(2.6^{+0.7}_{-0.4} \pm 0.1) \times 10^{19}$	[Dan00]
$^{128}\text{Te}$	$2.63 \times 10^{24}$	$(3.6 \pm 0.35 \pm 0.21) \times 10^{19}$	[Arn96]
		$(7.7 \pm 0.4) \times 10^{24}$ gch.	[Ber93]
$^{130}\text{Te}$	$1.84 \times 10^{21}$	$(7.2 \pm 0.3) \times 10^{24}$	[Cru93]
		$(0.79 \pm 1.0) \times 10^{21}$	[Tak96]
$^{136}\text{Xe}$	$46.4 \times 10^{20}$	$(2.7 \pm 0.1) \times 10^{21}$ gch.	[Ber93]
		$> 8.1 \times 10^{20}$	[Gav00]
$^{142}\text{Ce}$	$1.58 \times 10^{21}$	$> 5.5 \times 10^{20}$	[Bus96]
		$> 1.6 \times 10^{17}$	[Dan01]
$^{150}\text{Nd}$	$7.37 \times 10^{18}$	$> 1.9 \times 10^{19}$	[Dan01]
		$(6.75^{+0.37}_{-0.42} \pm 0.68) \times 10^{18}$	[DeS97]
$^{160}\text{Gd}$	$4.21 \times 10^{20}$	$(18.8^{+6.6}_{-3.9} \pm 1.9) \times 10^{18}$	[Art95]
		$> 1.9 \times 10^{19}$	[Dan01]
$^{238}\text{U}$	$1.53 \times 10^{23}$	$(2.0 \pm 0.6) \times 10^{21}$	[Tur91]
$^{242}\text{Pu}$	$6.54 \times 10^{22}$	$> 1.1 \times 10^{18}$ rch.	[Moo92]

**Tabelle 2.1:** Aktuelle, experimentell gemessene Halbwertszeiten des  $2\nu\beta\beta$  - Zerfalls im Vergleich zu theoretisch berechneten Halbwertszeiten nach der *quasi particle random phase approximation* (QRPA) [Sta90]. Einige Halbwertszeiten wurden auch durch geochemische (gch.) bzw. radiochemische (rch.) Methoden bestimmt.

In dieser Formel ist Q der Q-Wert des Zerfalls (in Einheiten von MeV) und T die kinetische Energie der beiden emittierten Elektronen in der gleichen Einheit. Der erlaubte  $2\nu\beta\beta$  -Zerfall (2.1) hat den spektralen Index  $n=5$ , wegen die spektralen Indizes der Zerfälle (2.3) und (2.4) von der Eigenschaft des Teilchens  $\chi$  abhängen (siehe Abschnitt 2.3).

Die Formen dieser Spektren und die Lage der einzelnen Linie beim Zerfall (2.1) sind in Abbildung 2.2 dargestellt.

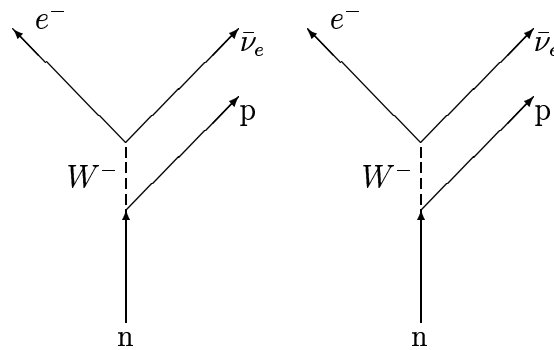


**Abbildung 2.2:** Darstellung der spektralen Energieverteilung der Elektronen eines  $2\nu\beta\beta$ -Zerfall ( $n=5$ , grau unterlegt) sowie von Zerfällen mit Emissionen sogenannter Majoronen (Gl. (2.3,2.4)) für den  $\beta\beta$ -Zerfall von  $^{76}\text{Ge}$ . Nur der neutrino-lose Doppelbetazerfall besitzt eine scharfe Linie beim Q-Wert des Zerfalls bei 2039 keV.

## 2.1 Neutrinobegleiteter Doppelbetazerfall

Der neutrinobegleitete Doppelbetazerfall (2.1) ist im Rahmen des Standardmodells erlaubt, da keine Erhaltungssätze verletzt werden. Bei diesem Zerfall wandeln sich simultan zwei Neutronen in zwei Protonen um und emittieren zwei Elektronen und zwei Elektronantineutrinos. Beschrieben wurde diese Zerfallsart schon 1935 durch M. Goeppert-Mayer [Goe35] und stellt einen Prozess 2. Ordnung in der klassischen Theorie von E. Fermi [Fer34] bzw. einen Prozess 4. Ordnung in der Glashow-Weinberg-Salam-Theorie [Gla61, Wei67, Sal68]. Dementsprechend sind die Halbwertszeiten sehr groß und liegen in Bereichen über  $10^{20}$  Jahren. Der zugehörige Feynman-Graph ist in Abbildung 2.3 dargestellt.





**Abbildung 2.3:** Feynman-Graphen der beiden Neutronen, die sich beim  $2\nu\beta\beta$ -Zerfall simultan in zwei Protonen umwandeln. Dabei entstehen zwei Elektronen und zwei Elektronantineutrinos.

Die theoretische Halbwertszeit für diesen Zerfall ergibt sich durch zwei aufeinanderfolgende Gamow-Teller-Übergänge [Mut88] zu:

$$T_{1/2}^{2\nu} = \left( F^{2\nu} \cdot |M_{GT}^{2\nu}|^2 \right)^{-1}$$

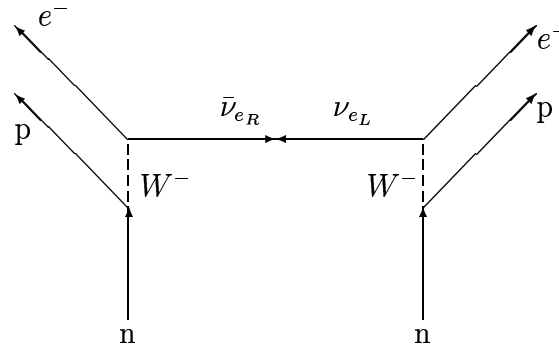
$M_{GT}^{2\nu}$	Gamow-Teller-Matrixelement
$F^{2\nu}$	Phasenraumintegral

Durch die Emission von Neutrinos entzieht sich ein Teil der Zerfallsenergie der Detektion, so dass die Elektronen ein kontinuierliches Spektrum im Detektor erzeugen. Der experimentelle Nachweis des Doppelbetazerfalls gelang erstmals im Jahre 1966, bis heute ist er für 10 Isotope nachgewiesen. In [Kla01] wird ein historischer Überblick über die Geschichte des Doppelbetazerfalls der letzten 60 Jahre gegeben.

In Tabelle 2.1 sind die gemessenen und die theoretisch berechneten Halbwertszeiten zusammengefasst.

## 2.2 Neutrinoloser Doppelbetazerfall

Der neutrinolose Doppelbetazerfall ist im Gegensatz zum neutrinobegleiteten Doppelbetazerfall im Standardmodell nicht erlaubt. Abbildung 2.4 zeigt diesen Zerfallsmodus als Feynmangraphen: Das an dem ersten Vertex als rechtshändig emittierte Antineutrino wird am zweiten Vertex als linkshändiges Neutrino absorbiert. Somit entstehen bei diesem Prozess nur zwei reelle



**Abbildung 2.4:** Feynman-Graphen der beiden Neutronen, die sich beim neutrinolosen Doppelbetazerfall simultan in zwei Protonen umwandeln. Das am linken Vertex emittierte rechtshändige Antineutrino wird dabei am rechten Vertex als linkshändiges Neutrino absorbiert.

Teilchen - zwei Elektronen - die die gesamte Energie dieses Zerfalls im Detektor deponieren. Ein solcher Zerfall erzeugt im Spektrum daher eine scharfe Linie bei dem Q-Wert des Zerfalls, wenn beide Elektronen nachgewiesen werden. Im Falle des in dieser Arbeit betrachteten Doppelbetazerfalls des Isotops  $^{76}\text{Ge}$  liegt diese Linie bei  $Q = 2039.006(50)$  keV.

Dieser Prozess kann allerdings nur dann stattfinden, wenn die Neutrinos folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Neutrinos müssen Majorana-Teilchen sein, d.h. dass das Elektron-Neutrino  $\nu_e$  mit seinem Antiteilchen  $\bar{\nu}_e$  identisch ist.
2. Damit das eine am ersten Vertex als rechtshändig emittierte Antineutrino am zweiten Vertex als linkshändiges Neutrino absorbiert werden kann, muss sich die Helizität des Neutrinos ändern. Da die Helizität eines Teilchens proportional zu seiner Masse ist, kann ein solcher Prozess nur dann stattfinden, wenn das Neutrino massiv ist. Ein Nachweis des neutrinolosen Doppelbetazerfalls wäre somit ein Beweis für die Existenz einer nicht verschwindenden Neutrinomasse.

Nuklid	$T_{\frac{1}{2}}^{0\nu}$ [y]	
$^{48}\text{Ca}$	$> 9.5 \times 10^{21}$ (76%)	[Ke91]
$^{76}\text{Ge}$	siehe Kapitel 6	
$^{82}\text{Se}$	$> 2.7 \times 10^{22}$ (68%)	[Ell92]
$^{96}\text{Zr}$	$> 3.9 \times 10^{19}$ gch.	[Kaw93]
$^{100}\text{Mo}$	$> 5.5 \times 10^{22}$	[Eji01]
	$> 6.4 \times 10^{21}$	[Das95]
	$> 2.2 \times 10^{22}$ (68%)	[Als97]
$^{116}\text{Cd}$	$> 7.0 \times 10^{22}$	[Dan00]
	$> 5.0 \times 10^{21}$	[Arn96]
$^{128}\text{Te}$	$> 7.7 \times 10^{24}$ gch.	[Ber93]
$^{130}\text{Te}$	$> 2.1 \times 10^{23}$ gch.	[Ber93]
	$> 8.2 \times 10^{21}$	[Ale94]
$^{134}\text{Xe}$	$> 5.8 \times 10^{25}$	[Ber02]
$^{136}\text{Xe}$	$> 4.4 \times 10^{23}$	[Lue98]
	$> 4.2 \times 10^{23}$	[Bus96]
$^{142}\text{Ce}$	$> 2.0 \times 10^{18}$	[Dan01]
$^{150}\text{Nd}$	$> 1.2 \times 10^{21}$	[DeS97]
	$> 2.1 \times 10^{20}$	[Art95]
$^{160}\text{Gd}$	$> 1.3 \times 10^{21}$	[Dan01]
$^{238}\text{U}$	$> 2.0 \times 10^{21}$ rch.	[Tur91]
$^{242}\text{Pu}$	$> 1.1 \times 10^{18}$ rch.	[Moo92]

**Tabelle 2.2:** Tabelle mit aktuellen Grenzen für den neutrinolosen Doppelbetazerfall (für 90% C.L., außer es wird eine andere Konfidenz angegeben). Siehe Tabelle 2.1 für Erläuterungen.

Die theoretische Halbwertszeit des  $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls ist unter Vernachlässigung eventueller rechtshändiger Beimischungen gegeben durch [Mut88]:

$$T_{1/2}^{2\nu} = \left[ F^{0\nu} \cdot \left( M_{GT}^{0\nu} - M_F^{0\nu} \right)^2 \cdot \left( \frac{\langle m_\nu \rangle}{m_e} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

$F^{0\nu}$	Phasenraumintegral
$M_{GT}^{0\nu}$	Gamow-Teller-Matrixelement
$M_F^{0\nu}$	Fermi-Matrixelement
$\langle m_\nu \rangle$	effektive Majorana-Neutrinomasse
$m_e$	Elektronmasse

Nuklid	$T_{1/2}^{0\nu\chi}$ [y]	$\langle g_{\nu\chi} \rangle$ in $10^{-4}$	
$^{48}\text{Ca}$	$7.2 \cdot 10^{20}$	5.3	[Bar70]
$^{76}\text{Ge}$	$6.6 \cdot 10^{22}$	1.7	[Bec93, Kla01a]
$^{82}\text{Se}$	$2.3 \cdot 10^{21}$	1.6	[NEM00]
$^{96}\text{Zr}$	$3.1 \cdot 10^{20}$	2.6	[NEM00]
$^{100}\text{Mo}$	$5.8 \cdot 10^{21}$	0.65	[Fus02]
	$3.3 \cdot 10^{20}$	6.26	[DeS97]
	$5.0 \cdot 10^{20}$	6.0	[Das95]
$^{116}\text{Cd}$	$3.7 \cdot 10^{21}$	1.2	[Dan00]
	$1.2 \cdot 10^{21}$	2.1	[Arn96]
$^{128}\text{Te}$	$7.7 \cdot 10^{24}$ gch.	0.7	[Ber93]
$^{130}\text{Te}$	$1.4 \cdot 10^{21}$		[Ale00]
	$2.7 \cdot 10^{21}$ gch.	0.4	[Ber93]
$^{136}\text{Xe}$	$1.4 \cdot 10^{22}$	4.5	[Bus96]
$^{150}\text{Nd}$	$2.8 \cdot 10^{20}$	1.0	[DeS97]
	$1.7 \cdot 10^{20}$	1.29	[Art95]
$^{160}\text{Gd}$	$3.5 \cdot 10^{18}$		[Dan01]

**Tabelle 2.3:** Experimentelle Grenzen für die Halbwertszeiten majoronemittierender Zerfallsmodi für 90% C.L., sowie die daraus resultierenden Grenzen der Neutrino-Majoron-Kopplungskonstanten  $g_{\nu\chi}$ .

Die effektive Majorana-Neutrinomasse  $\langle m_\nu \rangle$  ist dabei eine Mischung der Neutrino-Masseneigenzustände. Wie bei der Mischung unter den Quarkfamilien ist auch bei Neutrinos der Flavoureigenzustand  $\nu_\alpha$  allgemein eine Superposition der verschiedenen Masseneigenzustände  $\nu_i$ . Insbesondere für das Elektronneutrino  $\nu_e$  gilt damit:

$$|\nu_e\rangle = \sum_i U_{ei} |\nu_i\rangle$$

mit den Elementen  $U_{ei}$  der Mischungsmatrix. Die effektive Majorana-Neutrinomasse ergibt sich dann zu :

$$\langle m_{\nu_e} \rangle = \sum_i |U_{ei}^2 \cdot m_i|$$

mit den Massen  $m_i$  der Masseneigenzustände der Neutrinos. Da es bei dieser Überlagerung auch zu Interferenzen kommen kann (aufgrund CP-verletzender Phasen in der Mischungsmatrix [Doi85]), können die wahren Neutrinomassen größer als die im Experiment bestimmten effektiven Massen sein.

Trotz intensiver Suche konnte der neutrinolose Doppelbetazerfall noch in keinem Experiment zweifelsfrei nachgewiesen werden. Nur das Heidelberg-Moskau-Experiment, dessen neueste Resultate in dieser Arbeit vorgestellt werden, zeigt Hinweise für die Existenz eines solchen Zerfalls. Die berechnete Halbwertszeit liegt bei  $1.5 \cdot 10^{25}$  y was einer effektiven Elektronen-Majorana-Neutrinomasse von 0.39 eV entspricht. Eine genaue Diskussion der Ergebnisse und Vergleiche mit anderen Experimenten folgen im Kapitel 6.

## 2.3 Neutrinoloser Doppelbetazerfall mit Majoron-Emission

Die Verletzung der Leptonenzahl um zwei Einheiten beim oben beschriebenen neutrinolosen Doppelbeta-Zerfall ermöglicht Modelle, in denen exotische Zerfallskanäle des neutrinolosen Doppelbetazerfalls unter Emission sogenannter Majoronen möglich sind [Hir96a]. Solche Majoronen sind eng verknüpft mit der Frage nach Neutrinomassen, und insbesondere das klassische Majoron von Gelmini und Roncadelli [Gel81] bricht die globale Leptonenzahlerhaltung und generiert auf diese Weise die Massen der Majorananeutrinos. Neben diesem klassischen Majoron gibt es noch viele andere Modelle, die bedeutende Konsequenzen für die Elementarteilchenphysik haben können [Hir95, Päs95]. Solche Majoronzerfälle können über die Energieverteilung der beiden Elektronen aufgrund des spektralen Index  $n$  klassifiziert werden (siehe Abbildung 2.2). Bisher gibt es keine Hinweise für einen solchen Zerfall. Die besten Halbwertszeitgrenzen für diese Zerfälle und die daraus folgenden Grenzen für die Neutrino-Majoron-Kopplungskonstante  $g_{\nu\chi}$  sind in Tabelle 2.3 aufgelistet.



# Kapitel 3

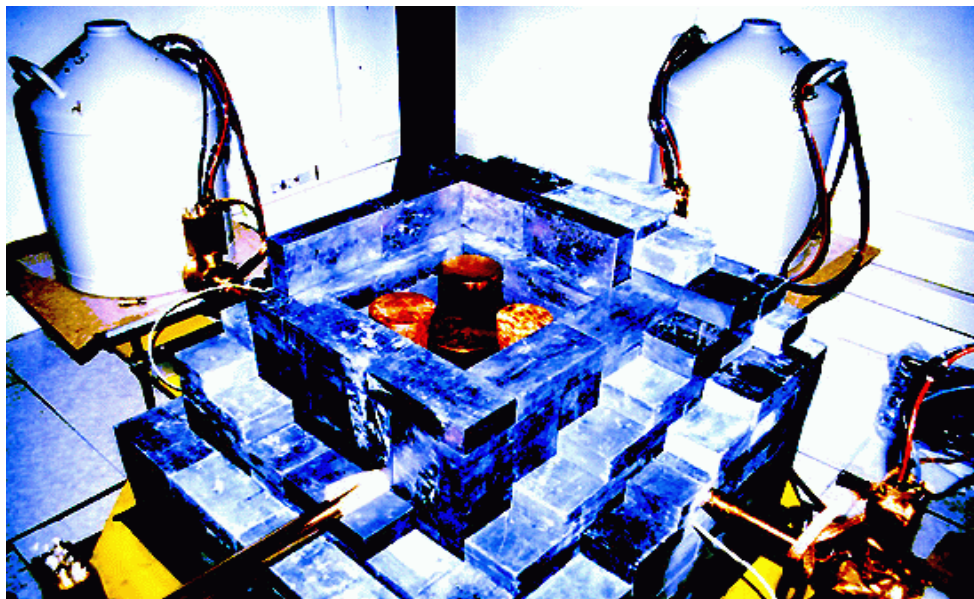
## Das Heidelberg-Moskau-Experiment

Das Heidelberg-Moskau-Experiment, das 1987 vorgeschlagen wurde [Kla87], besteht aus fünf Germanium-Detektoren, von denen jeder aus zu etwa 86% angereichertem Germanium  $^{76}\text{Ge}$  besteht. Das verwendete hochreine Germanium (HPGe) dient zugleich als Quelle für die Doppelbeta-Aktivität, wodurch eine hohe Nachweiswahrscheinlichkeit erreicht wird. In den folgenden Abschnitten wird zunächst der Aufbau des Experiments skizziert, bevor die bestimmenden Parameter und die Untergrundreduzierung besprochen werden. Im letzten Abschnitt wird das Datenaufnahmesystem vorgestellt und eine Übersicht über die einzelnen Messphasen gegeben.

### 3.1 Aufbau des Experiments

Bei den Detektoren des Heidelberg-Moskau-Experiments handelt es sich um  $p$ -Typ Detektoren in einer *closed-ended*-Geometrie (siehe [Mai96]). Sie bestehen aus hochreinem Germanium, in dem das Isotop  $^{76}\text{Ge}$ , welches in natürlichem Germanium zu 7.8% vorkommt, auf etwa 86% angereichert wurde. Die Gesamtmasse aller fünf Detektoren beträgt 11.5 kg, während die aktive Masse etwa 11.0 kg beträgt. Einige Daten der Detektoren sind in Tabelle 3.1 aufgelistet (siehe auch [Hel96, Gün97]). Die Differenz zwischen der Gesamt- und der aktiven Masse ist begründet durch eine inaktive Schicht auf den Detektoren, die nach Herstellerangaben (EG&G Ortec) 0.7 mm beträgt. Die Funktionsweise von Halbleiterdetektoren ist allgemein in [Kno89] und speziell für das Heidelberg-Moskau-Experiment in [Pet95] beschrieben.

Die ersten vier Detektoren - ANG1, ANG2, ANG3 und ANG5 - befinden sich in einem gemeinsamen Aufbau (im Folgenden Aufbau *A* genannt) während

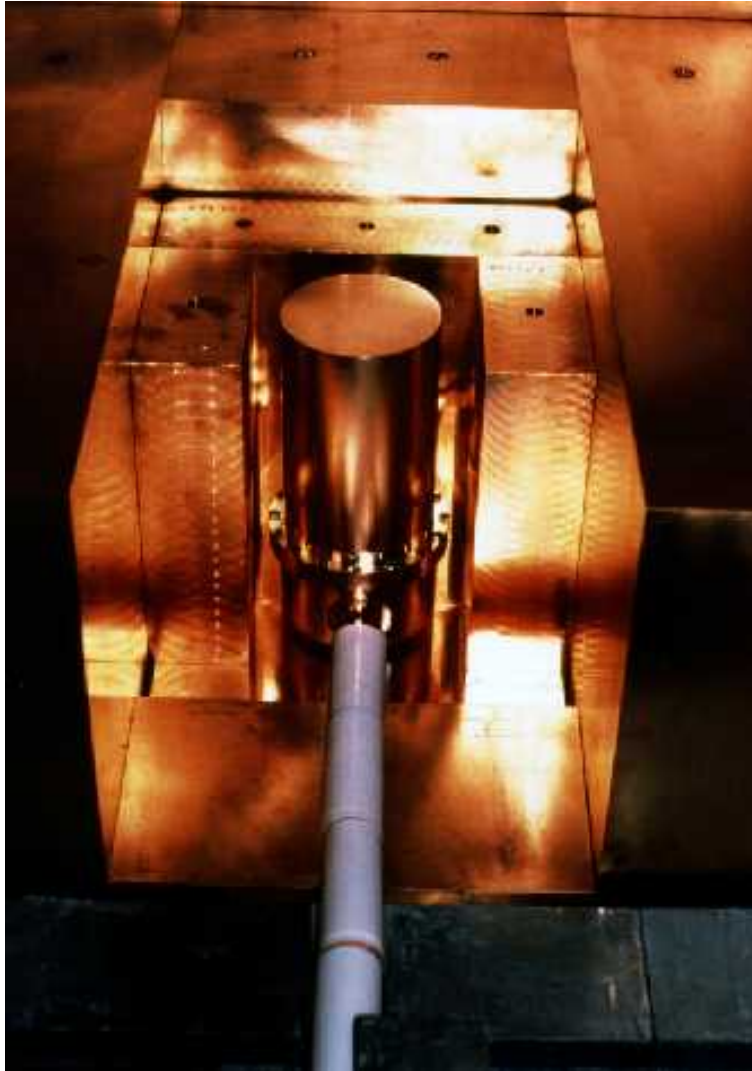


**Abbildung 3.1:** Aufbau A mit den vier angereicherten Detektoren ANG1, ANG2, ANG3 und ANG5 in einer gemeinsamen Bleiabschirmung während des Einbaus des Detektors ANG5 1995.

sich ein weiterer Detektor - ANG4 - in einem separaten Aufbau (Aufbau B) befindet.

In Abbildung 3.1 ist die Detektorkammer des Aufbaus A mit dem Maßen  $30\text{ cm} \times 30\text{ cm} \times 25\text{ cm}$  während der Konstruktionsphase zu sehen. Sie enthält vier Detektoren und ist umgeben von einer Blei-Abschirmung mit einer Gesamtmasse von 7.56 t, die aus zwei Lagen besteht. Die innere Lage umgibt die Detektorkammer mit einer Dicke von 10 cm und besteht aus speziellem LC2-Blei (*Johnson-Matthey-LC2-Grade*) mit einer spezifischen  $^{210}\text{Pb}$ -Aktivität von  $0.36 \pm 0.06\text{ Bq/kg}$  [Mai96]. Die äußere Lage hat eine Dicke von 20 cm und besteht aus Boliden-Blei der Firma *Bleiwerke Goslar* mit einer spezifischen  $^{210}\text{Pb}$ -Aktivität von  $27\text{ Bq/kg}$ . Jeder Bleiziegel dieser Abschirmung wurde vor dem Zusammensetzen zur Vermeidung von Oberflächenverunreinigungen mit analysereinem Alkohol abgerieben, die Ziegel der inneren Abschirmung zusätzlich mit Salpetersäure geätzt. Alle Arbeiten wurden dabei unter Reinraum-Bedingungen durchgeführt. Die gesamte Bleiburg wird von einer Stahlbox luftdicht umschlossen, in die hochreiner, gasförmiger Stickstoff unter leichtem Überdruck geleitet wird. Dadurch werden radioaktive Verschmutzungen, die sich in der Luft befinden - insbesondere radioaktives Radon - aus dem Aufbau herausgedrängt. Außerdem wird der gesamte Aufbau A seit Februar 1994 von 10 cm dicken Bor-Polyethylen-Platten





**Abbildung 3.2:** Aufbau B mit dem angereicherten Detektor ANG4 in einer Kupferabschirmung während des Aufbaus 1995.

umschlossen, die mit 10%  $B_4C$  durchsetzt sind und den Neutronenfluss aus umliegenden Gesteinsschichten für den Energiebereich von 2000 bis 2100 keV um  $(22 \pm 13)\%$  reduzieren [Mai96]. Über dem Aufbau sind zusätzlich Szintillatorplatten angebracht, mit denen der durch Myonen verursachte Untergrund reduziert wird [Gün96, Gün97].

Der Detektor ANG4 befindet sich in einem separaten Aufbau mit einer Abschirmung aus Kupfer und Blei (siehe Abbildung 3.2). Die innere Abschirmung aus Elektrolytkupfer teilt sich in zwei Schichten mit 20 cm und 7.5 cm Dicke. Das Kupfer der inneren Schicht ist elektropoliert worden, um die Ober-

Detektor	Gesamtmasse [kg]	aktive Masse [kg]	Anreicherungsgrad [%]
ANG1	0.980	0.920	$85.9 \pm 1.3$
ANG2	2.906	2.758	$86.6 \pm 2.5$
ANG3	2.446	2.324	$88.3 \pm 2.6$
ANG4	2.400	2.295	$86.3 \pm 1.3$
ANG5	2.781	2.666	$85.6 \pm 1.3$
<b>Summe</b>	<b>11.513</b>	<b>10.963</b>	

**Tabelle 3.1:** Massen aller fünf mit  $^{76}\text{Ge}$  angereicherten Detektoren des Heidelberg-Moskau-Experiments sowie deren Anreicherungsgrad (siehe auch [Hel96]).

fläche zu reinigen. Die Kupferabschirmung wird von weiteren 20 cm Blei umgeben. Wie Aufbau A ist auch dieser Aufbau in einer luftdichten Stahlbox untergebracht, die von hochreinem, gasförmigen Stickstoff unter leichtem Überdruck durchspült wird. Im Gegensatz zu Aufbau A ist dieser Aufbau aus Platzgründen nur an der Unterseite durch eine Bor-Polyethylen-Platte gegen Neutronen abgeschirmt.

### 3.2 Bestimmende Parameter eines $\beta\beta$ -Experimentes

Die folgende Formel gibt an, wie die Untergrenze der Halbwertszeit des  $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls von verschiedenen experimentellen Parametern abhängt [Cal91]:

$$T_{1/2}^{0\nu} > (4.18 \cdot 10^{24} \text{ y kg}^{-1}) \cdot a \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\frac{M \cdot t}{\Delta E \cdot B}} \quad (3.1)$$

$a$	Isotopengehalt der $\beta\beta$ -Quelle
$\epsilon$	Nachweiswahrscheinlichkeit
$M$	aktive Detektormasse [kg]
$t$	Messzeit [y]
$\Delta E$	Energieauflösung beim Q-Wert des Zerfalls [keV]
$B$	Untergrundindex [Ereignisse/kg · y · keV]

Die Bedeutung dieser Parameter und ihre Werte im Heidelberg-Moskau-Experiment werden im Folgenden diskutiert.

Detektor	Messzeit [d]	Signifikanz [kg y]	FWHM (1322 keV) [keV]	Untergrund- index [Ereig./keV kg y]
ANG1	2790.54	7.03	$2.57 \pm 0.19$	0.199
ANG2	2840.06	21.45	$3.06 \pm 0.12$	0.117
ANG3	2610.17	16.61	$2.73 \pm 0.14$	0.167
ANG4	1918.23	12.05	$3.65 \pm 0.19$	0.201
ANG5	1847.21	13.48	$2.52 \pm 0.09$	0.167

**Tabelle 3.2:** Tabelle mit einigen Daten und Parametern für die verwendeten Detektoren für gemessenen Spektren von August 1990 bis April 2002.

- Anreicherung  $a$   
Das Heidelberg-Moskau-Experiment verwendet das auf etwa 86% angereicherte Germaniumisotop  $^{76}\text{Ge}$ .
- Nachweiswahrscheinlichkeit  $\epsilon$   
Da im Heidelberg-Moskau-Experiment die angereicherten HPGe-Detektoren zugleich Quelle und Detektor sind, wird eine sehr hohe Nachweiswahrscheinlichkeit erreicht. Durch die 0.7 mm dicke Totschicht auf den Kristallen ergibt sich ein geringer Unterschied zwischen der Gesamtmasse der Detektoren mit 11.513 kg und der aktiven Masse von 10.963 kg. Damit beträgt die Nachweiswahrscheinlichkeit  $\epsilon = 0.95$ .
- Masse  $m$  und Messzeit  $t$   
Die Masse und die Messzeit werden zur *statistischen Signifikanz* zusammengefasst und ermöglicht Vergleiche zu ähnlichen Experimenten. Da diese Größen in (3.1) unter der Wurzel stehen, muss bei fester Masse die Messzeit vervierfacht werden, um die Grenze der Halbwertszeit zu verdoppeln. Durch die Verwendung von angereichertem Germanium besitzt das Heidelberg-Moskau-Experiment die gleiche Quellenstärke wie ein Experiment mit mehr als 1 Tonne an natürlichem Germanium.
- Auflösung  $\Delta E$   
Die Auflösung  $\Delta E$  der Detektoren geht reziprok unter der Wurzel mit ein. Zur Bestimmung der Auflösung werden wöchentliche Standardmessungen mit einer  $^{228}\text{Th}$ - und einer  $^{228}\text{Th}$ - $^{152}\text{Eu}$ -Quelle durchgeführt, womit die Energieauflösung beim Q-Wert von 2039 keV extrapoliert werden kann. Es ergibt sich eine FWHM bei dieser Energie im Summenspektrum aller Detektoren von  $4.00 \pm 0.39$  keV, welche über die

Messzeit sehr stabil ist.

Eine Verringerung der Auflösung kann durch eine zukünftige verbesserte Datenanalyse ermöglicht werden.

- Untergrundindex  $B$

Der Untergrundindex  $B$  gibt die Zählrate des Untergrunds im Bereich des erwarteten  $0\nu\beta\beta$ -Signals pro Energieintervall [keV], pro Masse [kg] und pro Messzeit [y] an. An der Stelle des untersuchten  $\beta\beta$ -Zerfalls von 2039.006 keV erzeugen einige Isotope Untergrundereignisse. Siehe Kapitel 6 für eine detaillierte Diskussion des Untergrundes in diesem Energiebereich.

### 3.3 Untergrundreduzierung

Der Doppelbeta-Zerfall ist mit einer Halbwertszeit um  $10^{20}$  Jahren der seltenste bislang beobachtete Zerfall, d.h. die Ereignisraten sind extrem gering. Daher ist es unbedingt erforderlich, die Quellenstärke zu maximieren und den Untergrund zu minimieren. Im Vergleich zu anderen Doppelbeta-Experimenten hat das Heidelberg-Moskau-Experiment mit einer aktiven Masse von 10.963 kg aus zu 86% angereichertem  $^{76}\text{Ge}$ , entsprechend 125.5 mol  $^{76}\text{Ge}$ , die größte Quellenstärke aller derzeit messenden  $\beta\beta$ -Experimente.

Zur Minimierung des Untergrunds wurden folgende Punkte beachtet:

1. Zur Abschirmung des Experimentes vor der kosmischen Höhenstrahlung wurde als Standort das Gran-Sasso-Untergrundlabor *Laboratori Nazionali del Gran Sasso* (LNGS) gewählt, welches sich in den italienischen Abruzzen befindet. Dieses Labor hat den Vorteil einer großen Abschirmung, entsprechend etwa 3500 m.w.e<sup>1</sup>, gegenüber der Erdoberfläche. Dadurch wird die hadronische Komponente der Höhenstrahlung komplett abgeschirmt und der Myonenfluss gegenüber dem Fluss an der Erdoberfläche etwa um einen Faktor  $10^6$  reduziert. Der Myonenfluss im Untergrundlabor beträgt nur noch  $(1.16 \pm 0.09) \frac{1}{m^2 h}$  [Cri97].
2. Um den Einfluss der natürlichen Umgebungsradioaktivität zu minimieren, sind die Detektoren des Aufbaus A durch eine spezielle Bleischicht und der Detektor des Aufbaus B durch eine Schicht aus Elektrolytkupfer abgeschirmt.
3. Um das Experiment selbst von Radioaktivität möglichst frei zu halten, wurden beim Bau der Detektoren ausschließlich Materialien verwendet,

---

<sup>1</sup>meter water equivalent, 1 m Gran-Sasso-Gestein entspricht 2.1 mwe.

die auf radioaktive Verunreinigungen getestet worden sind. Außerdem wurden sämtliche Bauteile mehrfach gereinigt und geätzt, bevor sie unter Reinraumbedingungen zusammengesetzt worden sind [Mül93].

4. Um den Einfluss von  $^{222}\text{Rn}$  zu minimieren, welches in der Luft geschlossener Räume angereichert wird, da dieses Gas ständig dem umliegenden Gestein entströmt, werden beide Aufbauten mit hochreinem, gasförmigen Stickstoff durchspült, wodurch die verunreinigte Luft aus den Aufbauten verdrängt wird. Dies ergibt eine Untergrundreduzierung um einen Faktor  $\sim 10$  [Mai96].
5. Über dem Aufbau A mit den Detektoren ANG1, ANG2, ANG3 und ANG5 sind Plastiksintillatoren zur Detektion von Myonen angebracht [Gün96]. Wird dort ein Signal in Koinzidenz mit einem Ereignis in einem dieser Detektoren registriert, so wird dieses verworfen (siehe Abschnitt 4.4.2). Der Untergrund im Energiebereich zwischen 2000 und 2100 keV wird dadurch um etwa 4.9% reduziert.
6. Der Beitrag des Neutronenflusses stammt hauptsächlich von  $(\alpha, n)$ -Reaktionen und Spallationsprozessen im Fels und beträgt im Untergrundlabor  $(3.78 \pm 0.24) \cdot 10^{-2} \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$  [Bel89]. Durch Einbau einer speziellen Neutronenabschirmung mit Bor-Polyethylen im Februar 1994 konnte der neutroneninduzierte Untergrund im Energiebereich 100 – 2800 keV um  $(7.5 \pm 0.5) \%$  und im Energiebereich 2000 – 2100 keV um  $(22 \pm 13) \%$  reduziert werden [Mai96].

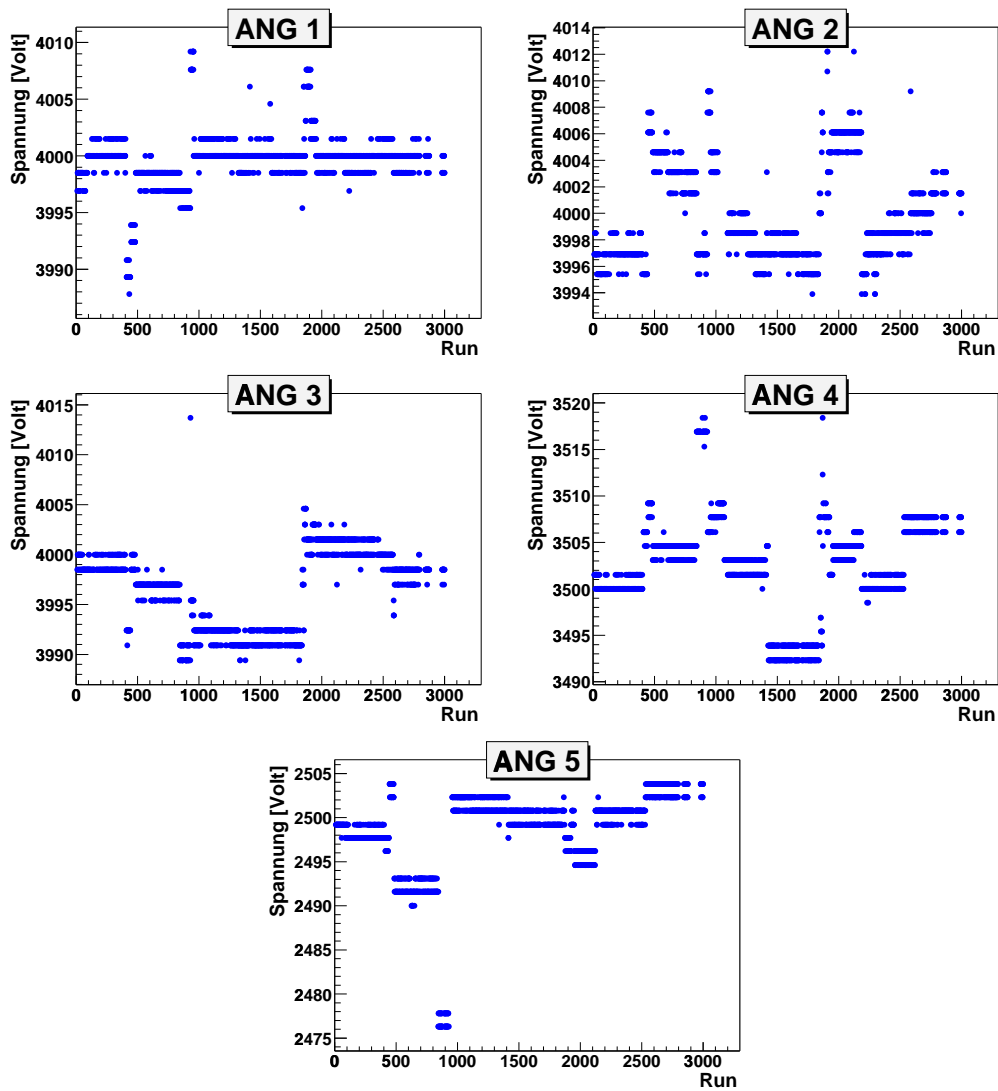
Zur weiteren Untergrundoptimierung wird seit November 1995 eine digitale Pulsformanalyse angewendet zur Unterscheidung von Ereignissen, die ihre Energie punktuell im Detektor deponieren (sogenannte SSE), von Ereignissen, die ihre Energie in einem ausgedehnteren Gebiet im Detektor deponieren (sogenannte MSE). Siehe dazu siehe Abschnitt 4.3.

## 3.4 Datenaufnahme

Die Datenaufnahme erfolgt seit November 1995 über ein CAMAC-System das von einem CETIA-Prozessor gesteuert wird. Dabei werden die Signale aus dem Vorverstärker eines jeden Detektors einem Spektroskopie- und einem Triggerzweig zugeführt. Liegt eine Signalamplitude über einer bestimmten Schwelle, dann gibt der schnellere Triggerzweig ein Signal zum Auslesen der digitalisierten Daten im Spektroskopiezweig. In diesem Zweig werden die Signale eines jeden Detektors verstärkt und mit einem 13-bit ADC<sup>2</sup> digitali-

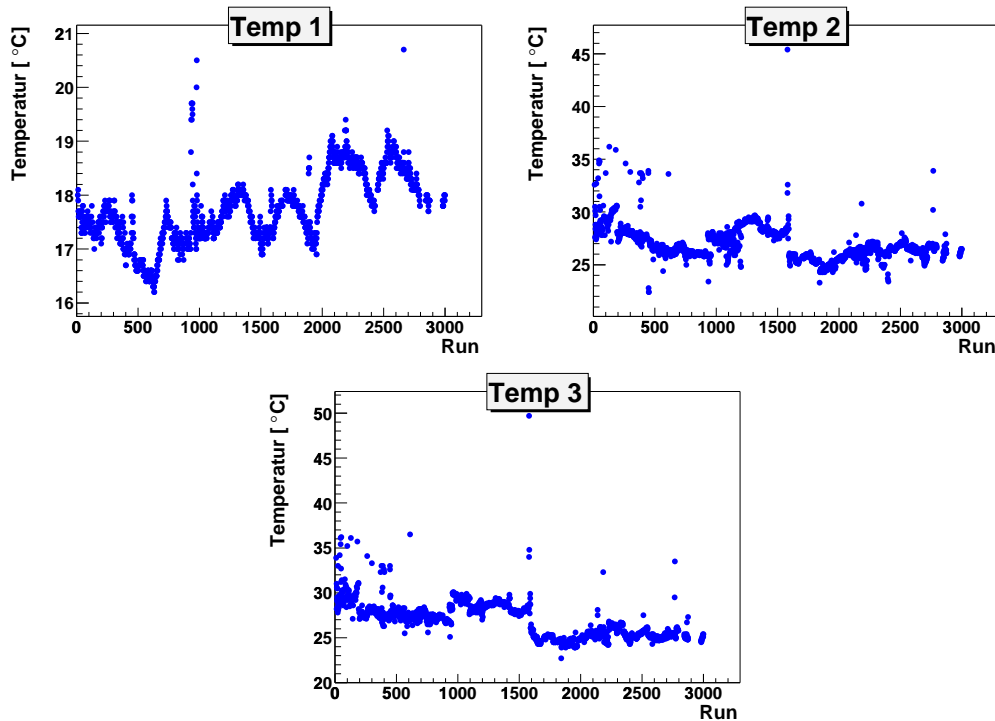
---

<sup>2</sup>Analog to Digital Converter



**Abbildung 3.3:** Darstellung des zeitlichen Verlaufs der an den Detektoren anliegenden Hochspannung. Diese sind zeitlich sehr stabil und schwanken maximal um 1.2%.

siert. Durch unterschiedliche Verstärkung wird so ein Niederenergiespektrum (LE) bis zu einer Energie von 2800 keV und ein Hochenergiespektrum (HE) bis 8000 keV erzeugt. Weil jeder Trigger bearbeitet wird, ist eine sogenannte 'event-by-event'-Datenaufnahme möglich. Dies ermöglicht, außer dem ADC-Wert weitere Parameter zu speichern, wie etwa den genauen Zeitpunkt des Ereignisses, die an den Detektoren anliegenden Spannungen, die Temperatur



**Abbildung 3.4:** Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Temperaturen an drei verschiedenen Messpunkten. Zwei Messpunkte sind dabei im Raum mit der Elektronik untergebracht (Temp2 und Temp3) und ein weiterer Messpunkt befindet sich im Detektorraum (Temp1).

an drei Messpunkten sowie andere Parameter der Elektronik-Crates [Buc90]. Der zeitliche Verlauf der gemessenen Hochspannungen und der Temperaturen werden in Abbildung 3.3 und 3.4 gezeigt. Außerdem kann die 'Pulsform', also die zeitliche Entwicklung des am Detektor gemessenen Signals, für jedes Ereignis aufgenommen und gespeichert werden. Diese Pulsform ermöglicht in einer späteren Offline-Analyse die Unterscheidung von sogenannten MSE und SSE (siehe Abschnitt 4.3). Das gesamte Experiment wird über eine unterbrechungsfreie Stromversorgung mit Energie versorgt, wodurch kurze Stromausfälle bis zu 20 Minuten überbrückt werden können. Für eine detailliertere Beschreibung der Datenaufnahme des Experiments siehe z.B. [Pet95, Hel96]. Die ersten Messungen nahm das Heidelberg-Moskau-Experiment im August 1990 mit zunächst einem Detektor auf. Bis September 1992 wurden zwei weitere Detektoren installiert, bevor im November 1995 die beiden letzten Detektoren eingebaut wurden. Dann begannen schließlich die Messungen mit dem kompletten Aufbau des Heidelberg-Moskau-Experiments mit fünf Detektoren

Detektor	Messzeit [d]	Datum Begin-Ende	Abschirmungen		Untergrund [Ereignisse/keV·y·kg]	
				Bor	100-2800 keV	2000-2100 keV
Erste low-level Aufbauten einzelner Detektoren						
ANG1	387.6	2.8.90-11.8.92	Cu		9.74	0.56
ANG2	225.4	26.9.91-11.8.92	Pb		6.09	0.29
Gemeinsame Abschirmung für die drei ersten Detektoren						
ANG1	405.0	3.9.92-26.1.94	Pb		7.81	0.22
ANG2	397.4				4.86	0.22
ANG3	405.0				6.67	0.21
ANG1	525.8	5.2.94-26.11.94	Pb	X	6.96	0.20
ANG2	520.1			X	4.48	0.14
ANG3	505.5			X	6.06	0.18
<b>Kompletter Aufbau des Experiments</b> ANG1,ANG2,ANG3,ANG5 in gemeinsamer Abschirmung ANG4 in einem separaten Aufbau						
ANG1	1859.7	5.12.94-16.4.02	Pb	X	6.51	0.20
ANG2	1842.9			X	3.75	0.12
ANG3	1857.0			X	4.96	0.17
ANG5	1857.2			X	4.63	0.20
ANG4	1847.2	31.1.95-16.4.02	Cu	X	5.75	0.17

**Tabelle 3.3:** Übersicht über die einzelnen Messphasen der Detektoren und der zeitlichen Entwicklung des Untergrunds. *Bor* steht für eine Abschirmung aus Polyethylen mit 10% Beimischung von  $B_4C$  zur Reduzierung des Neutronenflusses.

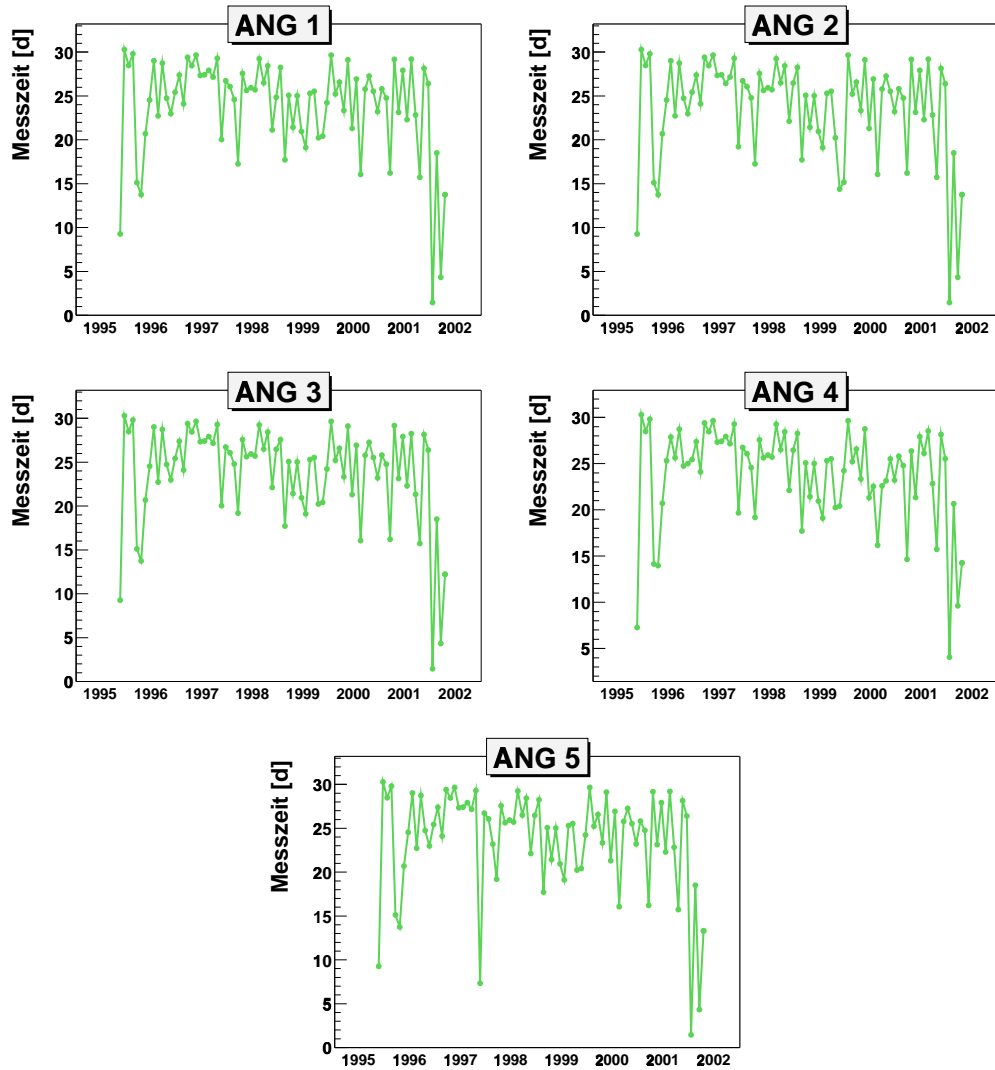
aus angereichertem  $^{76}Ge$ . Im Februar 1994 wurde eine zusätzliche Abschirmung aus Polyethylen mit einer Beimischung von 10%  $B_4C$  installiert, um den Neutronenfluss zu reduzieren. Tabelle 3.3 gibt einen detaillierten Überblick über die verschiedenen Messperioden (siehe auch [Gün97]).

Die Messungen des Experiments erfolgen nicht kontinuierlich, sondern werden in einzelne sogenannte 'Runs' unterteilt, die täglich gestoppt werden. Dann können bestimmte Parameter wie der Leckstrom der Detektoren und der Druck in den Stickstoff-Flaschen überprüft werden. Außerdem wird eine Kurzauswertung der gemessenen Daten vorgenommen um so Probleme in der Messung oder in der Elektronik frühzeitig erkennen zu können. Es werden in diesen Fällen die Probleme behoben und gegebenenfalls defekte



Elektronik-Module ausgetauscht, bevor ein neuer Run gestartet wird. Alle gemessenen Werte und Parameter werden dann mit Datum und anderen besonderen Vorkommnissen von dem anwesenden Operator in einem Protokoll notiert, damit die Messungen später genau nachvollziehbar sind.

In Abbildung 3.5 werden die monatlichen Zeiten dargestellt, in denen das Experiment zwischen dem 20.11.1995 und dem 16.4.2002 Daten gesammelt hat. Das Verhältnis der Zeiten, in denen das Experiment Daten gemessen hat zur real verstrichenen Zeit beträgt 79.2%.



**Abbildung 3.5:** Darstellung der monatlichen Messzeiten der Detektoren zwischen dem 20.11.1995 und zum 16.4.2002.

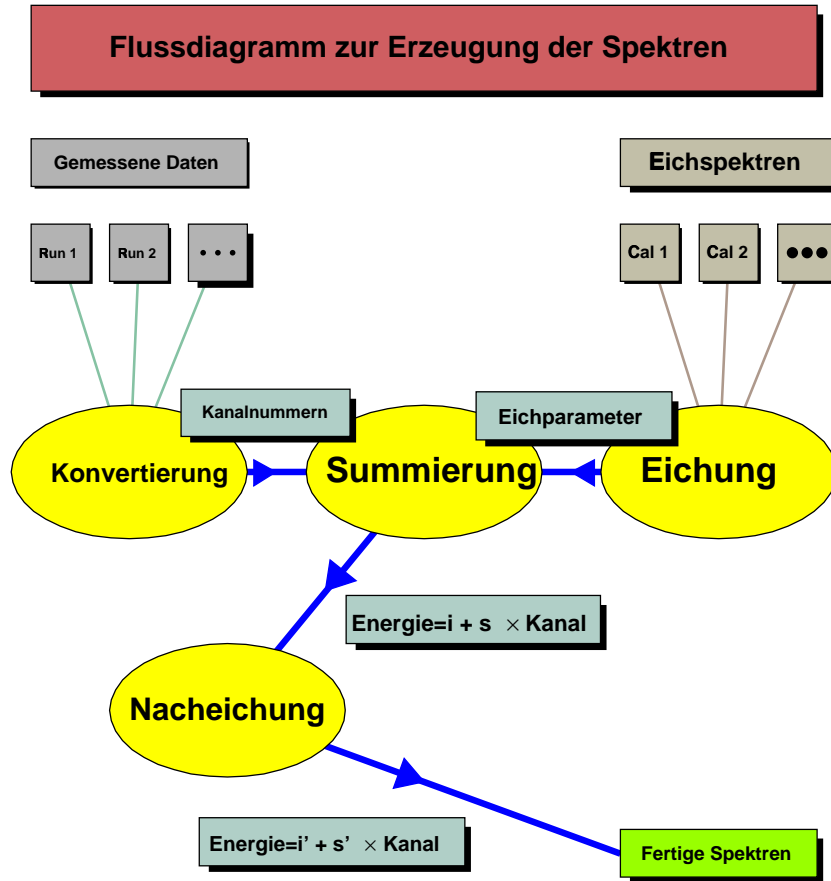
# Kapitel 4

## Erstellung des Summenspektrums

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie aus den im Gran Sasso gewonnenen Rohdaten das zur Auswertung benutzte Summenspektrum bis April 2002 erstellt wird. Die Erstellung des Summenspektrums erfordert dabei große Sorgfalt, da trotz einer Messzeit von etwa 10 Jahren die Statistik im Energiebereich um die erwartete Linie bei 2039.006 keV sehr gering ist. So wurden im Rahmen dieser Arbeit viele vorhandene Auswertprogramme völlig neu überarbeitet und verschiedene Verbesserungen eingebracht. Diese Verbesserungen sind im Folgenden aufgelistet:

- Durch Verwendung der objektorientierten Programmiersprache C++ werden die Programme durch einfachere Wartbarkeit, höhere Flexibilität und bessere Portabilität ausgezeichnet, und die Realisation umfangreicher Programme wird mit vergleichsweise geringem Aufwand ermöglicht.
- Für jedes Programm wurde sowohl eine umfangreiche Dokumentation angelegt als auch jeder Programmschritt im Quellcode mit zahlreichen Kommentaren versehen.
- Jeder Programmschritt wurde bei der Überarbeitung nochmals überprüft und vorhandene Fehler beseitigt.

In Abbildung 4.1 wird schematisch gezeigt, wie die Erstellung des Summenspektrums abläuft. Zunächst werden die im Gran Sasso erzeugten binären Daten zu Text-Daten konvertiert. Mit den aus wöchentlichen Eichmessungen bestimmten Eichparametern werden die Energien der Ereignisse berechnet, wobei die eigentliche Eichung und das Aufsummieren der Daten mit dem



**Abbildung 4.1:** Schematische Darstellung des Ablaufs zur Erstellung des Summenspektrums. Für Details siehe Text.

Summationsprogramm erfolgt. Damit wird ein Energiespektrum in der sogenannten Standard Eichung erzeugt, wobei der Zusammenhang zwischen der (gemessenen) Kanalnummer  $K$  und der (physikalischen) Energie  $E$  gegeben ist durch:

$$E = \hat{i} + \hat{s} \cdot K \quad (4.1)$$

mit  $\hat{i} = -1.00 \text{ keV}$  (*intercept*, Achsenabschnitt) und  $\hat{s} = 0.36 \text{ keV/Kanal}$  (*slope*, Steigung). In einer anschließenden Nacheichung des Summenspektrums werden diese Parameter nochmals etwas genauer angepasst, so dass dann

$$E = i' + s' \cdot K \quad (4.2)$$

gilt mit  $i' \approx \hat{i}$  und  $s' \approx \hat{s}$ . Auf diese Weise wird die Übereinstimmung der Positionen der im Spektrum befindlichen  $\gamma$ -Linien mit den in der Literatur angegebenen Energiewerten (*Literaturenergien*) optimiert (siehe Abschnitt 4.4.4). In den folgenden Abschnitten soll auf diese Schritte genauer eingegangen und die Verbesserungen gegenüber der alten Auswertung erläutern werden.

## 4.1 Datenkonvertierung

Die im Gran Sasso erzeugten Dateien enthalten die gemessenen Daten in binärer Form. Dadurch ist es nicht möglich, durch einfaches Anschauen der Datei Informationen über ihren Inhalt zu erhalten. Aus diesem Grund werden die Daten in ein leichter lesbares Text-Format konvertiert, wodurch das Arbeiten sehr erleichtert wird. Dazu wurde ein bereits vorhandenes Programm deutlich erweitert.

In dem folgenden Abschnitt wird zunächst der Aufbau der Binärdatei beschrieben bevor im darauf folgenden Abschnitt die Funktionsweise des neuen Programmes (`c_convertBeta`) skizziert wird.

### 4.1.1 Aufbau der Binärdateien

Wird im Untergrundlabor ein Run aufgenommen, so werden stets vier verschiedene Dateien mit Namen `BB-76Ge-[typ].[run]` angelegt, wobei `typ` für einen Dateityp steht und `run` die Run-Nummer bezeichnet. Es gibt vier Typen von Dateien: `adcspec`, `adclist`, `ad811spec` und `listfile`. Die Datei mit dem letztgenannten Typ ist die wichtigste dieser Dateien, da sie alle relevanten Daten des Runs inklusive der Pulsformen zu jedem Ereignis enthält. Diese Datei besteht im Wesentlichen aus drei Teilen: dem Kopfteil, dem Hauptteil und dem Schlussteil. Der Hauptteil enthält die binär gespeicherten Daten, der Kopf- und der Schlussteil dagegen enthält Daten im Text-Format. Ein Beispiel für den Kopfteil einer solchen Datei wird hier gezeigt:

```
Title:          10 channel mpi adc and 2 dl515 flash read out
Identifizier:  ad811-1c1151-mpadc-dl515-mptda4516
Run:           2750
Type:          Eventfile
Maxevents:     -
Starttime:     2001/10/25-02:11:48.20 1006654308 200000
Endtime:       - 0 0
Clearflag:     1
Comment:       BB-76Ge auto start run
Config:        ad811.1:      dt ge+(szint. coin.) : 0.02839 : -0.86 :
Config:        ad811.2:      - : X1: low : 1.0 : 0.0
Config:        ad811.3:      -
Config:        ad811.4:      -
Config:        ad811.5:      -
Config:        ad811.6:      -
Config:        ad811.7:      -
Config:        ad811.8:      -
Config:        mpadc.1:      ang1: low: 0.349481: -0.088753:
Config:        mpadc.2:      ang1: high: 1.034126: 2.346021:
Config:        mpadc.3:      ang2: low: 0.348873: 3.868772:
```

```

Config:      mpadc.4:      ang2: high: 1.030786: 2.683042:
Config:      mpadc.5:      ang3: low: 0.348154: 3.171183:
Config:      mpadc.6:      ang3: high: 1.015319: 6.181709:
Config:      mpadc.7:      ang4: low: 0.353196: 3.851514:
Config:      mpadc.8:      ang4: high: 1.016145: 7.801179:
Config:      mpadc.9:      ang5: low: 0.353678: 5.280116:
Config:      mpadc.10:     ang5: high: 1.020189: 16.299210:
Config:      lc1151.1:     : Trigger total:
Config:      lc1151.2:     ang1 : Trigger :
Config:      lc1151.3:     ang2 : Trigger :
Config:      lc1151.4:     ang3 : Trigger :
Config:      lc1151.5:     ang4 : Trigger :
Config:      lc1151.6:     ang5 : Trigger :
Config:      lc1151.7:     : szint. coincidences :
Config:      lc1151.8:     ang1 : overflow :
Config:      lc1151.9:     ang2 : overflow :
Config:      lc1151.10:    ang3 : overflow :
Config:      lc1151.11:    ang4 : overflow :
Config:      lc1151.12:    ang5 : overflow :
Config:      lc1151.13:    -
Config:      lc1151.14:    -
Config:      lc1151.15:    -
Config:      lc1151.16:    -
Config:      dl515.1:      : funktioniert nicht :
Config:      dl515.2:      ang3 : tfa 474 20ns diff, int out:
Config:      dl515.3:      ang4 : tfa 474 20ns diff, int out:
Config:      dl515.4:      ang5 : tfa 579 10ns diff, int out:
Config:      dl515.5:      ang5 : tfa 454 20ns diff, int out:
Config:      dl515.6:      ang5 : tfa 474 0 diff, int out, d3.out:
Config:      dl515.7:      ang2 : tfa 474 20ns diff, int out:
Config:      dl515.8:      : upper szintillator :
Config:      mptdadc.1:     ang1 : HV : 0.655 : 0.0 :
Config:      mptdadc.2:     ang2 : HV : 0.655 : 0.0 :
Config:      mptdadc.3:     ang3 : HV : 0.658 : 0.0 :
Config:      mptdadc.4:     ang4 : HV : 0.652 : 0.0 :
Config:      mptdadc.5:     ang5 : HV : 0.653 : 0.0 :
Config:      mptdadc.6:     : Temperature 1. floor : 0.0252 : 0.0 :
Config:      mptdadc.7:     : Temperature 2. floor : 0.0252 : 0.0 :
Config:      mptdadc.8:     : Temperature ADC crate : 0.0252 : 0.0 :
Config:      mptdadc.9:     : : :
Config:      mptdadc.10:    : : :
Config:      mptdadc.11:    : : :
Config:      mptdadc.12:    : : :
Config:      mptdadc.13:    : : :
Config:      mptdadc.14:    : : :
Config:      mptdadc.15:    : : :
Config:      mptdadc.16:    : : :

```

Die Bedeutungen der wichtigsten Einträge werden hier kurz erläutert:

- **Title:**  
Hier befinden sich Informationen über die zur Datenaufnahme verwendeten ADC's.
- **Identifizier:**  
Hier befinden sich weitere Informationen über die verwendeten elektronischen Module.
- **Run:**  
Nummer des Runs.
- **Starttime:**  
Hier ist die Startzeit des Runs in verschiedenen Formaten angegeben. Der erste Wert ist die gewöhnliche Zeitangabe mit Datum und Tageszeit, gefolgt von der unter Linux üblichen Angabe der Zeit mit der Anzahl der Sekunden, die seit dem 1.1.1970 00:00 UTC verstrichen

sind. Die Zahl in der letzten Spalte entspricht der Nachkommastelle der Linux-Zeit.

- **Endtime:**

In dieser Zeile wird im Schlussteil die Stoppzeit angegeben.

- **Comment:**

Hier wird für jeden Run manuell ein Kommentar des jeweiligen Operators angegeben, um die Art des Runs zu spezifizieren. Jeder 'normale' Run des Heidelberg-Moskau-Experiments trägt den Kommentar `background measurement` bzw. `BB-76Ge auto start run`, wenn der Run automatisch vom Datenaufnahmesystem gestartet wird (wie im obigen Beispiel dargestellt).

Werden Kalibrations- oder Testmessungen durchgeführt, dann wird ein geänderter Kommentar angegeben, damit die Daten solcher Messungen nicht zur Auswertung benutzt werden.

- **Config:**

Die Angaben in den nun folgenden **Config**-Zeilen repräsentieren die Reihenfolge der im binären Teil gespeicherten Daten. Durch die Angabe in der zweiten Spalte, die die unterschiedlichen Elektronik-Module kennzeichnen, wird genau definiert, welche Informationen wo gespeichert sind.

- **ad811**

Mit diesem Modul werden die Daten von dem Myon-Koinzidenzschild registriert.

- **mpadc**

Die **mpadc**-Module sind für die Datenaufnahme der einzelnen Ereignisse verantwortlich. Hier wird für jeden angeschlossenen Detektor die in diesem Detektor deponierte Energie als digitalisierter Kanalwert gespeichert. Für die angereicherten Detektoren wird jeweils ein niederenergetischer (LE) und ein hochenergetischer (HE) ADC-Wert gespeichert. Im obigen Beispiel für Run 2750 gibt es 10 ADC-Werte, für jeden Detektor zwei. Die Zahlen in den letzten Spalten geben zuvor bestimmte, ungefähre Eichparameter an, um in etwa die Energien der Ereignisse berechnen zu können.

- **lc1151**

Mit diesen Modul werden die Anzahl aller detektierten Ereignisse, deren Summe sowie die Anzahl der Überläufe und die Szintillator-Koinzidenzrate gezählt. Überlaufereignisse entstehen, wenn die deponierte Energie eines Ereignisses für den 13-Bit ADC zu gross ist und nicht mehr in einen digitalen Wert umgewandelt werden

kann. Für das Hochenergie-ADC ist dies für Energien mit mehr als ca. 8 MeV der Fall.

– **d1515**

Mit diesen 250 MHz flash-ADC-Modulen werden die in den Detektoren gemessenen Pulsformen ausgelesen und in einem 2048 Kanal tiefen Speicher abgelegt, entsprechend  $8.2 \mu\text{s}$  [Hel96].

– **mptdadc**

Mit diesem Modul werden schließlich noch weitere Informationen gespeichert, wie die an den Detektoren anliegende Hochspannung (HV) und die an drei Orten gemessenen Temperaturen. In Abbildung 3.4 werden die zeitliche Entwicklung der Hochspannungen und der Temperaturen graphisch dargestellt.

Nach dem Binärteil schließt sich am Ende der Datei der Schlussteil an, in dem sämtliche sich im Kopfteil befindliche Informationen ein zweites Mal aufgelistet werden. Zusätzlich ist jetzt die bekannte Stoppzeit des Runs angegeben.

### 4.1.2 Das neue Konvertierungsprogramm

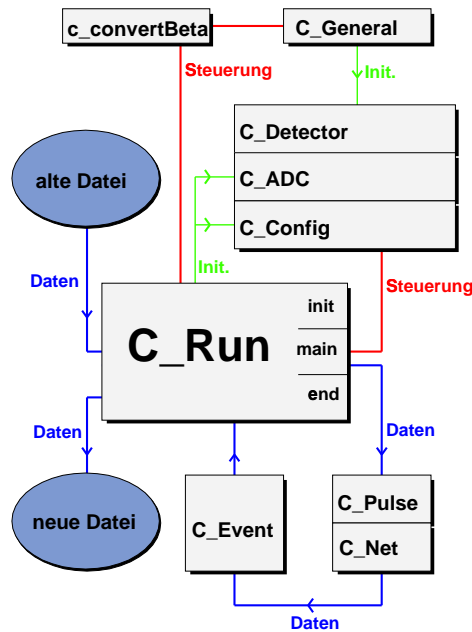
Das neue Konvertierungsprogramm ist ein in der Programmiersprache C++ geschriebenes, modular aufgebautes und objektorientiertes Programm, das die Aufgabe der Konvertierung übernimmt (siehe Abbildung 4.2). Durch den modularen Aufbau ist es nun sogar möglich, einzelne Module zur Konvertierung der Daten des HDMS-Experimentes [Bau97, Kla03] zu benutzen, ohne dafür ein komplett neues Programm entwickeln zu müssen.

Da der Gesamtaufbau dieses Programmes sehr komplex ist, wird im Folgenden nur kurz auf die einzelnen Programm-Module (bzw. Programm-Klassen in der C++ Sprache) eingegangen.

Das Hauptsteuerungsprogramm ist `c_convertBeta`, mit dem die zu konvertierenden Dateien festgelegt werden. Mit dem Modul `C_General` werden einige grundlegende Daten initialisiert, insbesondere die Daten der verwendeten Detektoren und die Namen einiger Computerverzeichnisse. Im Falle einer Änderung der Verzeichnisstruktur auf dem Computer ist somit nur eine einzige Änderung dieser Namen nötig, um das Programm funktionsfähig zu halten. Die Daten der Detektoren werden in den Modulen `C_Detector` gespeichert.

Das Hauptmodul zum Einlesen der Binärdaten und zur anschließenden Ausgabe im Text-Format ist das Modul `C_Run`. In diesem Modul werden zunächst sämtliche Daten aus dem Kopfteil der Datei eingelesen, insbesondere die An-





**Abbildung 4.2:** Graphische Darstellung der Funktionsweise des Konvertierungsprogrammes. Zuerst werden vom Hauptprogramm `c_convertBeta` ausgehend grundlegende Daten initialisiert (durch `C_General`), insbesondere die Daten der Detektoren. Danach wird das Modul `C_Run` aufgerufen, welches zunächst die Module `C_ADC` und `C_Config` initialisiert, die für jeden Run verschieden sein können. Anschließend erfolgt die Bearbeiten der Daten eines Runs, die aus der Binärdatei eingelesen werden. Die Daten jedes Ereignisses durchlaufen die Pulsformanalyse (`C_Pulse`, `C_Net`) und werden dann im Modul `C_Event` gespeichert. Sind alle Ereignisse eines Runs eingelesen und ausgewertet, werden diese Daten in die neue Datei geschrieben.

gaben aus den `Config`-Zeilen, die im Modul `C_Config` gespeichert werden. Außerdem wird zu jedem aufgelisteten ADC ein `C_ADC`-Modul initialisiert.

Wie in Abschnitt 3.4, erwähnt werden zusätzlich zu den ADC-Werten die Pulsformen der Ereignisse gemessen, die in `C_Pulse`-Modulen gespeichert werden. Die Auswertung der Pulsformen erfolgt ebenfalls im Modul `C_Pulse` sowie in einem Modul `C_Net` (zur Pulsformanalyse siehe Abschnitt 4.3). Alle aus diesen Analysen resultierenden Parameter, der Kanalwert, der dazugehörige Detektor, der Zeitpunkt und alle weiteren Informationen eines Ereignisses werden schließlich im Modul `C_Event` zusammengefasst und gespeichert.

Zu fast jedem der hier aufgeführten Module gibt es übergeordnete Module,

die einen einfachen Zugriff auf die Einzel-Module erlauben. So sind z.B. alle Ereignisse, die einzeln in `C_Event`-Modulen gespeichert sind, in einem Modul `C_EventList` zusammengefasst.

Nach dem kompletten Auslesen aller Daten eines Runs und der Analyse der Pulsformen werden sämtliche relevante Daten in eine neue Datei namens `run_[run].conv` geschrieben, wobei `[run]` die Run-Nummer bedeutet. Die folgenden Zeilen zeigen einen Auszug aus einer solchen Datei (`run_1993.conv`):

```
Run number : 1993
Start date : 24.2.2000-20:59:40
End date   : 25.2.2000-16:21:43
Start time : 951425979
End time   : 951495703
#events    : 318
Active mass : 10.963
Life time (in s) : 69723.4
Life time in kgd : 8.84696
Triggerrate : 2.73653 cts/10min
Calibration file : /Work/BB-76Ge/Calibration/CalNew/cal_1991.new

HV ANG1: 4000 V
HV ANG2: 4006.1 V
HV ANG3: 4000 V
HV ANG4: 3503.1 V
HV ANG5: 2494.6 V
Temp 1. floor: 18.1 C
Temp 2. floor: 25.6 C
ADC crate : 24.9 C
Scintillator coincidences: 40.700 +- 0.024 per Second

name trigger ADC over zero burst short myon correlat
          low high flow          l h l h l h
ang1 41 9 +- 2 9 +- 2 0 1 0 0 0 0 1 1 0.99 0.01
ang2 61 6 +- 1 5 +- 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1.24 0.85
ang3 80 7 +- 1 7 +- 1 1 0 1 0 0 0 0 1 1.01 0.02
ang4 63 7 +- 1 7 +- 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1.04 0.04
ang5 87 8 +- 1 8 +- 1 0 0 0 0 0 0 1 2 0.99 0.01
```

Darin enthalten sind die Start- und Stoppzeit des Runs, die Messzeit, die Anzahl aller registrierter Ereignisse, die an den Detektoren anliegenden Hochspannungen, die an drei Orten gemessenen Temperaturen und viele weitere Informationen.

Der Hauptteil einer konvertierten Datei, der mit dem Schlüsselwort `Data` eingeleitet wird, enthält detaillierte Informationen über jedes einzelne Ereignis des Runs. Als Beispiel wird hier ein Ausschnitt aus dem Hauptteil einer konvertierten Datei gezeigt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Data:												
1	ang4	70.88	920	325.14	290	313.76	0	0.36266	1.58e-05	1.19e-05	67	4.5043
2	ang2	650.13	759	265.77	258	265.86	0	0.1839	0.0163	0.00702	32	8.3356
3	ang3	814.26	509	178.18	170	175.59	0	0.20634	0.934	0.997	110	4.0827
4	ang3	1031.14	2911	1018.1	993	1019.3	0	0.19848	0.987	0.999	71	11.336
4	ang5	1031.14	676	242.81	236	244.96	0	0.34185	1.5e-05	0.000863	115	3.996
5	ang4	1150.39	411	146.31	115	129.78	0	0.33288	1	1	37	3.2566
6	ang4	1713.41	649	229.93	196	214.94	0	0.38192	0.00582	0.00582	61	4.4143
7	ang3	1795.02	4189	1465	1432	1469.4	0	0.20047	1	1	37	12.411
8	ang3	1993.64	0	-1	1431	1468.4	2.4616	-3.1715e-05	1	1	0	0
8	ang5	1993.64	1188	425.1	409	423.69	2.4616	0.29533	0.991	0.999	106	6.6746
9	ang4	2294.51	427	151.93	120	135.04	0	0.32799	2.58e-24	5.68e-24	18	3.4386
10	ang1	3004.48	921	318.67	312	320.38	0	0	0	0	0	0
11	ang5	3283.02	4335	1545.5	1496	1546.7	0	0.29111	0.0255	0.274	119	4.5619
12	ang2	3321.46	1461	509.98	496	509.52	0	0.19667	1	1	33	9.1463
13	ang3	3965.58	2637	922.3	900	924	0	0.22107	2.38e-05	0.000464	60	5.5139
14	ang1	4027.73	3834	1333.5	1299	1337	0	0	0	0	0	0
14	ang2	4027.73	1051	367.35	357	367.21	0	0.20173	1	1	70	1.1639

Die Zahlen in der ersten Zeile gehören nicht zu den Daten, sie dienen zur Durchnummerierung der Spalten, deren Bedeutung im Folgenden erläutert wird:

1. Nummer des Ereignisses.
2. Name des Detektors, in dem das Ereignis registriert wurde.
3. Zeitpunkt des Ereignisses in Sekunden seit dem Start des Runs.
4. ADC-Wert für das LE-Spektrum.
5. Der aus diesem ADC-Wert mit einer vorläufigen Eichung berechnete Energiewert (in keV).
6. ADC-Wert für das HE-Spektrum.
7. Der aus diesem ADC-Wert mit einer vorläufigen Eichung berechnete Energiewert (in keV).
8. Wert aus dem TPHC-Modul. Wird innerhalb von  $22\mu\text{s}$  ein Ereignis in einem Detektor *und* im Myonschild registriert, so ist dieser Wert ungleich Null. Er gibt dann die Zeitdifferenz an (siehe Ereignis 8).
9. Der EOI-Wert (*energy over integral*) (siehe z.B. [Maj00]).
10. Ein Parameter aus der *N*-Pulsformanalyse.
11. Ein Parameter aus der *R*-Pulsformanalyse.
12. Ein nicht mehr benutzter Parameter aus der *H*-Pulsformanalyse.
13. Ein Parameter aus der *H*-Pulsformanalyse.

Im oben gezeigten Beispiel befinden sich auch zwei myoninduzierte Ereignisse (Ereignis 8) sowie zwei andere koinzidente Ereignisse (Ereignis 4).

Alle Werte aus den konvertierten Dateien werden im späteren Summationsprogramm dafür verwendet, die Ereignisse zu selektieren, zu entscheiden, ob ein Ereignis ein SSE ist, die Energien der Ereignisse zu bestimmen und schließlich um daraus das Summenspektrum zu erstellen.

## 4.2 Eichung

Mit der Eichung werden die experimentellen mit den physikalischen Größen in Zusammenhang gebracht. Die experimentelle Größe ist die ganzzahlige Kanalnummer  $K$ , die mit den ADC-Modulen für jedes einzelne Ereignis bestimmt wird und proportional zur physikalischen Größe, der im Detektor

durch das Ereignis deponierten Energie  $E$  sind. Die Anpassung dieser beiden Größen erfolgt linear:

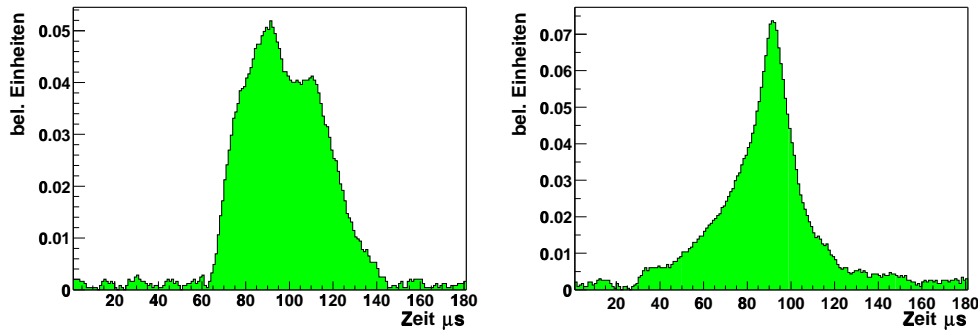
$$E = i + s \cdot K . \quad (4.3)$$

Um die für jede Eichmessung individuellen Eichparameter  $i$  und  $s$  bestimmen zu können werden wöchentliche Eichmessungen mit radioaktiven Quellen durchgeführt. Für Aufbau A (Detektoren ANG1, ANG2, ANG3 und ANG5) wird eine  $^{228}\text{Th}$ -Quelle verwendet und für Aufbau B (Detektor ANG4) eine  $^{152}\text{Eu}$ - $^{228}\text{Th}$ -Quelle. In der Zeit vom 20.11.1995 (Run 10) bis zum 3.2.1998 (Run 1046) wurden alle Detektoren ausschließlich mit einer  $^{228}\text{Th}$ -Quelle geeicht. Diese radioaktiven Quellen erzeugen in den Eichspektren Linien mit bekannten Energien und großer Statistik, so dass die Position im Spektrum mit großer Genauigkeit festgestellt werden kann. Mit einer Anpassung dieser Positionen an die bekannten Energien können die Parameter  $i$  und  $s$  aus Gleichung (4.3) bestimmt werden. Diese Auswertung erfolgt automatisch mit einem Programm `auto_fit` bzw. `auto_eu`, welches die Resultate der Eichung in Dateien namens `cal_[run].cfg` schreibt [Hel94]. Die Zahl `run` steht für die jeweilige Nummer des Eichruns.

Die wöchentlichen Eichungen sind notwendig, da die Messelektronik kleinen langfristigen Schwankungen unterlegen ist und somit auch die Eichparameter zeitlich nicht konstant sind. Im Anhang A.4 ist der zeitliche Verlauf der Parameter  $i$  und  $s$  für jeden Detektor dargestellt.

### 4.3 Pulsformanalyse

Auf die Pulsformanalyse soll nur kurz eingegangen werden, da diese in [Pet95, Hel96, Maj00] detailliert beschrieben ist. Im Wesentlichen geht es bei der Pulsformanalyse darum, anhand des zeitlichen Verlaufs des am Detektor gemessenen Stromflusses sogenannte SSE und MSE zu unterscheiden. SSE (*single site events*) sind Ereignisse, die ihre Energie an einer einzigen Stelle im Detektor deponieren. Solche Ereignisse werden zum Beispiel von Elektronen erzeugt, da diese nur eine sehr kurze freie Weglänge von einigen mm besitzen. Sie deponieren daher ihre gesamte Energie in einem kleinen Volumen im Detektor. Hochenergetische Photonen hingegen besitzen eine größere freie Weglänge und können deshalb ihre Energie an verschiedenen Stellen und somit in einem ausgedehnteren Gebiet im Detektor deponieren. Solche Ereignisse heißen MSE (*multiple site events*). In Abbildung 4.3 werden je ein Beispiel für ein SSE und ein MSE gezeigt.



**Abbildung 4.3:** In dieser Abbildung sind zwei Beispiele für den zeitlichen Verlauf des am Detektor gemessenen Stromflusses von zwei Ereignissen dargestellt. Das linke Bild zeigt ein MSE (Energiedepositionen an zwei Stellen im Detektor) während auf dem rechten Bild ein SSE zu erkennen ist (nur eine einzige Energiedeposition).

Die im Heidelberg-Moskau-Experiment gesuchten Doppelbeta-Ereignisse sind single site events, da in diesem Zerfallsmodus nur Elektronen emittiert werden. Untergrundquellen hingegen emittieren hochenergetische Photonen, welche zu 90% MSE erzeugen [Hel96], wenn von double-escape Linien abgesehen wird. Solche double-escape Linien entstehen durch Photonen mit einer Energie größer als 1.22 MeV, die Paarbildung verursachen. Das bei dieser Paarbildung erzeugte Positron annihiliert mit einem anderen Elektron und erzeugt zwei 511 keV-Photonen. Wenn diese beiden Photonen ohne Wechselwirkung aus dem Detektor entkommen, wird nur das bei der Paarbildung erzeugte Elektron als SSE nachgewiesen. Allerdings gibt es nur wenige Linien im Spektrum, die eine genügend große Energie und Intensität besitzen, um double-escape Linien zu erzeugen. Und erst ab einer Energie von  $\sim 10$  MeV ist Paarbildung der dominierende Wechselwirkungsmechanismus von Photonen in Materie.

Die Pulsformanalyse ist somit ein geeignetes Mittel, um den Untergrund entscheidend zu reduzieren. Zwar erzeugen auch  $\beta$ -emittierende Isotope SSE, doch sind die Energien dieser Elektronen kontinuierlich verteilt.

Für die Analyse zur Unterscheidung zwischen MSE und SSE werden zwei verschiedene Methoden verwendet. Die Methode **H** (nach *Hellmig* [Hel96, Pet95]) bestimmt einen Breitenparameter aus der Pulsform, während die andere Methode (nach Majorovits [Maj99, Maj00]) die gesamte Pulsform mittels eines neuronalen Netzes analysiert. Um ein neuronales Netz anwenden zu können, muss es zuvor mit Eingangsmustern bekannter Pulsformen trainiert werden. Dazu wurden Pulsformen von zwei verschiedenen Linien des

Isotops  $^{232}\text{Th}$  verwendet; eine Linie bei 1592.5 keV ist eine double-escape Linie und erzeugt nur SSE, während eine andere Linie bei 1621 keV eine full-energy  $\gamma$ -Linie ist und überwiegend aus MSE besteht. Das neuronale Netz, das mit den Pulsformen dieser Linien erzeugt wurde, wird im Folgenden mit **N** bezeichnet.

Die Energien der für das N-Netz verwendeten Linien liegen etwa 400 keV von dem zu untersuchenden Bereich bei 2039 keV entfernt. Um diesen Unterschied zu verringern, wurde ein zweites neuronales Netz erzeugt, das zusätzlich mit den Pulsformen von Ereignissen aus der Linie bei 2231.4 keV des Isotops  $^{56}\text{Co}$  trainiert wurde. Diese Linie ist ebenfalls eine double-escape Linie und besteht somit aus SSE. Dieses zweite, auf diese Weise trainierte Netz wird im Folgenden mit **R** (*Random*) bezeichnet. Für mehr Details dieser neuronalen Netze siehe [Maj99, Maj00].

## 4.4 Erstellung des Summenspektrums

Ein Teil der vorliegenden Arbeit war es, neben der Erstellung eines neuen Konvertierungsprogrammes das Programm zu überarbeiten, das aus den konvertierten Daten Summenspektren erstellt. Dieses Summationsprogramm summiert nicht nur die einzelnen Ereignisse, sondern führt auch deren Eichung durch. Die folgende Auflistung zählt einige Eigenschaften des neuen Programmes auf:

- Das neue Programm wurde unter Verwendung von C++ objektorientiert aufgebaut, wodurch sich die am Anfang dieses Kapitels erwähnten Verbesserungen ergeben. Außerdem benutzt das Programm dieselben Module wie auch das Konvertierungsprogramm, wodurch die Handhabung sehr erleichtert wird.
- Es werden alle Ereignisse verworfen, die in Koinzidenz mit einem anderen Ereignis oder einem Vetosignal aus dem Myonschild detektiert werden. Für den  $0\nu\beta\beta$ -Bereich reduziert sich so der Untergrund um etwa 4.4% (wenn alle Detektoren betrachtet werden) bzw. um etwa 5.8%, wenn die Daten des Detektors ANG4 nicht verwendet werden.
- Durch Angabe von Parametern kann das zu erstellende Summenspektrum leicht variiert werden. Es kann der Bereich der aufzusummierenden Daten angegeben werden, es kann das Selektionskriterium für die Daten als auch für die Standardeichung verändert werden, und es können weitere Parameterangaben gemacht werden. Dadurch ist das Programm sehr flexibel.

- Jedes einzelne aufsummierte Ereignis wird außerdem, zusammen mit anderen Informationen wie der Nummer des Runs und der Nummer des Ereignisses, der Zeit, der Nummer des getroffenen Detektors und den Resultaten aus der Pulsformanalyse in einer speziellen Datei gespeichert. Damit ist das Auftreten jedes einzelnen Ereignisses genau nachvollziehbar.

Für die Erstellung des Summenspektrums liest das Programm zunächst die Daten eines Runs ein und die zu diesem Run gehörenden Eichparameter. Mit den Eichparametern wird aus dem Kanalwert  $K$  für jedes Ereignis die entsprechende Energie  $E$  berechnet:

$$E = i + s \cdot K .$$

Dieser so berechnete Energiewert wird anschließend wieder in einen Kanalwert  $B$  des Summenspektrums umgerechnet, diesmal bezogen auf eine Standard Eichung ( $\hat{i} = -1.00$  keV und  $\hat{s} = 0.36$  keV/Kanal):

$$B = \text{int} \left( \frac{E - \hat{i}}{\hat{s}} \right) .$$

In dieser Formel bedeutet das Wort `int`, dass der ganzzahlige Teil des nachfolgenden Ausdrucks zu verwenden ist.

Diese Rechnung wird für jedes Ereignis und für jeden selektierten Datensatz wiederholt, bis das gesamte Spektrum erstellt ist. Ein Datensatz bezeichnet dabei alle Ereignisse eines Runs, die in einem bestimmten Detektor gemessen wurden. Ein Kanal  $B$  im Summenspektrum entspricht dann einem Energieintervall  $[E(B), E(B + 1)]$  mit

$$E(B) = \hat{i} + \hat{s} \cdot B \tag{4.4}$$

und einer Breite von 0.36 keV.

#### 4.4.1 Selektion der Datensätze

Zur Erstellung des Summenspektrums können nicht alle gemessenen Daten verwendet werden, da das Experiment in manchen Fällen fehlerhafte oder unbrauchbare Daten liefert. Aus diesem Grund müssen zuvor die unbrauchbaren Datensätze selektiert werden.

Die Selektion erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt werden manuell alle offensichtlich fehlerhaften Datensätze ausgeslektiert, danach erfolgt eine automatische Selektion von Datensätzen mit anormaler Ereignisrate.

Run	betreffende(r) Detektor(en)	Vorkommnis
116	12345	Test-Run
151	12345	Sinnlose ADC-Werte
174	12345	Sinnlose ADC-Werte
185	12345	Test-Run
186	12345	Test-Run
212	12345	Computer abgestürzt
222	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu gering
308	12345	Sinnlose ADC-Werte
309	12345	Sinnlose ADC-Werte
317	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu gering
318	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu gering
403-410	12345	Test-Runs
438	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu gering
439	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu gering
562	12345	Zu viele Burst <sup>1</sup> Ereignisse
563	12345	Zu viele Burst <sup>1</sup> Ereignisse
566	12345	Keine Ereignisse in diesem Run
567	12345	Sinnlose ADC-Werte
711	12345	Füllen der Dewars während laufender Messung
807	2	Viele Ereignisse doppelt vorhanden
932	3	Viele Ereignisse doppelt vorhanden
933-956	5	ANG5 nicht mit Datenaufnahme verbunden
946	2	Sinnlose ADC-Werte für ANG2
1044	1	Zu geringe Zählrate und merkwürdige ADC-Werte
1069		ADC-Modul für ANG4 ausgewechselt
1070-1071	5	ANG5 nicht mit Datenaufnahme verbunden
1106-1108	12	Stark abweichende Werte für Nieder/Hochenergiedaten
1268-1269	4	Stickstoff-Schlauch offen
1369	2	Einige Werte nicht in Ordnung
1414-1416		TPHC-Modul <sup>2</sup> defekt
1422-1427	1	Sinnlose ADC-Werte für ANG1
1494	3	Einige Werte nicht in Ordnung
1612	12345	Sinnlose ADC-Werte
1872	45	Detektoren ANG4,5 ausgeschaltet
1878-1904	2	ANG2 nicht mit Datenaufnahme verbunden
1984		TPI <sup>3</sup> von ANG3 stark verändert
2038		Falsches Datum
2084	1	ANG1 nicht verbunden
2131	12345	Run zu kurz
2145-2148	4	ANG4 nicht verbunden
2370		TFA-Modul <sup>4</sup> für ANG2 ausgewechselt
2432-2435	12345	Datenaufnahme stoppte nach kurzer Zeit
2436-2440	12345	Test-Runs
2441-2448	12345	Datenaufnahme stoppte nach kurzer Zeit
2602-2605	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu niedrig
2627	3	Sinnlose EOI-Werte <sup>5</sup> für Detektor ANG3
2691	3	Sinnlose EOI-Werte <sup>5</sup> für Detektor ANG3
2789	12345	Werte der Trigger anormal
2796	1235	N <sub>2</sub> Fluss zu niedrig

**Tabelle 4.1:** Liste aller Runs mit besonderen Vorkommnissen. Die Zahlen in der zweiten Spalte geben die Nummern der Detektoren an, deren Daten unbrauchbar sind. Zur Erläuterung der verwendeten Begriffe:

Ein Burst<sup>1</sup> ist das gleichzeitige Auftreten mehrerer Trigger, ein TPHC-Modul<sup>2</sup> wandelt eine Zeitspanne in eine Amplitude um (*Time to Pulse Height Converter*, siehe Abschnitt 4.4.2), die TPI<sup>3</sup> ist der gemessene Leckstrom (*Test-Punkt I*), ein TFA-Modul<sup>4</sup> differenziert die Pulsform (*Timing Filter Amplifier*) und der EOI-Wert<sup>5</sup> ist ein Kontrollparameter bei der Vorauswertung im Gran Sasso (*Energy Over Integral*).

Für den ersten Selektionsschritt, der vor der Aufsummierung erfolgt, wird zum Einen das täglich aktualisierte Protokoll nach entsprechenden Kom-



Run	Detektor	Messzeit [d]	Run	Detektor	Messzeit [d]
10	ANG4	0.57	13	ANG5	0.06
14	ANG4	0.74	15	ANG4	0.75
138	ANG4	0.96	176	ANG5	0.22
276	ANG4	1.12	437	ANG1	1.03
437	ANG2	1.03	437	ANG3	1.03
437	ANG5	1.03	943	ANG4	0.62
1068	ANG4	0.22	2104	ANG4	0.38
2176	ANG4	0.82	2184	ANG1	0.11
2215	ANG4	0.93	2238	ANG4	0.75
2242	ANG4	1.50	2243	ANG4	0.52
2248	ANG4	0.90	2251	ANG4	1.52
2252	ANG4	0.46	2253	ANG4	0.71
2452	ANG4	0.54	2453	ANG4	1.04
2486	ANG4	0.50	2488	ANG4	1.50
2500	ANG4	0.81	2507	ANG4	0.80
2510	ANG4	0.99	2641	ANG4	0.65
2772	ANG4	0.87	2795	ANG1	1.09
2795	ANG2	1.09	2795	ANG3	1.09
2795	ANG5	1.09	2866	ANG1	0.82
2866	ANG2	0.82	2866	ANG3	0.82
2866	ANG5	0.82	2869	ANG1	0.67
2869	ANG2	0.67	2869	ANG3	0.67
2869	ANG5	0.67	2870	ANG1	0.67
2870	ANG2	0.67	2870	ANG3	0.67
2870	ANG5	0.67	2871	ANG2	1.50
2871	ANG3	1.50	2871	ANG5	1.50
2872	ANG1	1.46	2872	ANG2	1.46
2872	ANG3	1.46	2872	ANG5	1.46
2980	ANG2	0.82	2980	ANG3	0.82
2980	ANG5	0.82	2981	ANG1	1.50
2981	ANG2	1.50	2981	ANG3	1.50
2981	ANG5	1.50	2983	ANG3	1.50
2984	ANG1	0.52	2984	ANG2	0.52
2984	ANG3	0.52	2985	ANG5	0.94

**Tabelle 4.2:** Liste aller verworfenen Datensätze mit Ereignisraten außerhalb des zulässigen Bereiches. Die hier aufgelisteten 68 Datensätze entsprechen einer Gesamtmesszeit von 61.52 Tagen.

mentaren durchgesehen und zum Anderen die Daten selbst geprüft. Auf diese Weise können Runs mit größeren Problemen sehr schnell erkannt werden. In den meisten Fällen lagen Probleme mit der Elektronik vor, die mit dem

Detektor	untere Grenze $b^-$ [Erg./keV d]	obere Grenze $b^+$ [Erg./keV d]	verworfen Datensätze
ANG1	0.00	19.71	9
ANG2	1.82	11.28	10
ANG3	1.92	13.63	11
ANG4	2.19	14.30	26
ANG5	3.52	15.39	12

**Tabelle 4.3:** Tabelle mit den zulässigen Bereichen  $[b^-; b^+]$  für die Ereignisraten und der Anzahl aller Datensätze, deren Ereignisrate außerhalb dieses Bereiches liegen und deshalb verworfen werden.

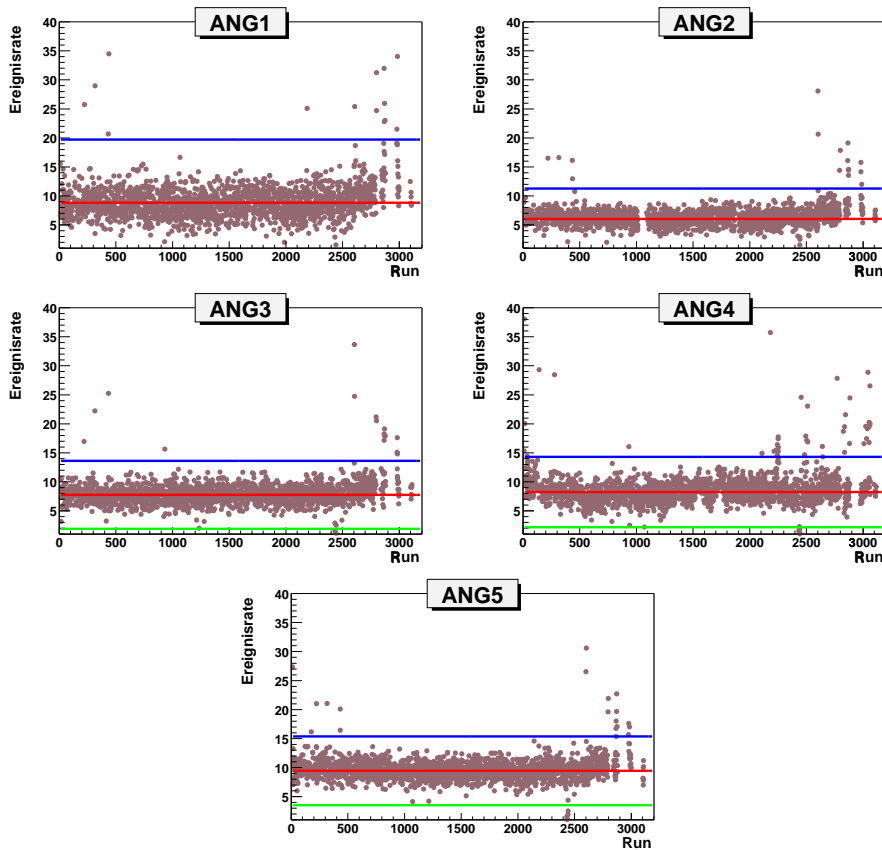
Austausch des betroffenen Moduls behoben wurden. In Tabelle 4.1 sind alle Runs mit besonderen Vorkommnissen aufgelistet. Werden davon die Daten selbst betroffen und sind deshalb nicht mehr zur Auswertung zu gebrauchen, dann wird in dieser Tabelle zusätzlich die Nummer des betroffenen Detektors (oder der betroffenen Detektoren) aufgeführt. Auf diese Weise werden in diesem ersten Selektionsschritt 143 von insgesamt 9281 Datensätze ausselektiert, das entspricht 1.5% aller Daten. Jeder Datensatz besitzt dabei eine durchschnittliche Messzeit von 1.0 Tagen.

Als zweites Selektionskriterium wird die Ereignisrate eines Datensatzes verwendet. Die Ereignisrate gibt die Anzahl von Ereignissen mit einer Energie zwischen 400 und 2700 keV an, normiert auf keV und Tag. Es wird aus den gemessenen Ereignisraten zunächst ein  $5\sigma$ -Intervall berechnet, in dem der Großteil dieser Werte liegt. Alle Datensätze mit Ereignisraten außerhalb dieses Intervalls werden verworfen.

Sei  $x_{rd}$  die Ereignisrate für den Datensatz des Runs  $r$  und des Detektors  $d$  und  $e_{rd}$  der zugehörige Fehler. Der zulässige Bereich  $[b_d^+, b_d^-]$  für die Ereignisrate des Detektors  $d$  wird bestimmt wie folgt:

$$b_d^\pm = \frac{1}{n} \left( \sum_{r=1}^n x_{rd} \pm 5 \cdot \sum_{r=1}^n e_{rd} \right) ,$$

wobei  $n$  die Zahl aller Datensätze für Detektor  $d$  ist. Tabelle 4.3 enthält die Werte für  $b^-$  und  $b^+$  für jeden Detektor und in Abbildung 4.4 wird der zeitliche Verlauf der Ereignisrate in Abhängigkeit von der Run-Nummer gezeigt. Wie deutlich zu erkennen ist, sind die Werte sehr stabil, abgesehen von einigen wenigen Ausreißern. Die rote Linie entspricht dem Mittelwert und die blaue bzw. grüne Linie dem oberen bzw. dem unteren Grenzwert. Es werden



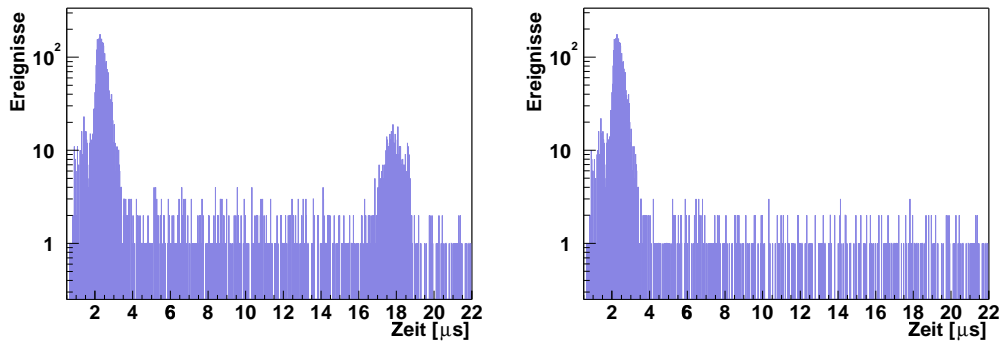
**Abbildung 4.4:** Ereignisraten der Detektoren ANG1 bis ANG5 im Bereich von 400 bis 2700 keV, aufgetragen über der Nummer des Runs. Die rote Linie entspricht dem Mittelwert und die grüne/blau Linie der Unter- bzw. Obergrenze des zulässigen Bereichs. Für mehr Details siehe Text.

durch diese Selektion weitere 68 Datensätze mit einer Gesamtmesszeit von 61.52 Tagen verworfen (siehe Tabelle 4.2).

Diese zweite Selektion erfolgt während der Erstellung des Summenspektrums durch das Summationsprogramm, wenn die für jeden Datensatz eingelesenen Ereignisraten mit den vorher bestimmten zulässigen Bereichen (Tabelle 4.3) verglichen werden.

#### 4.4.2 Selektion der Ereignisse

Die Selektion koinzidenter Ereignisse erfolgt während der Aufsummierung durch das Summationsprogramm. Ein Ereignis wird genau dann ausselektiert, wenn es entweder in Koinzidenz mit einem Signal aus dem Myonveto



**Abbildung 4.5:** In dieser Abbildung wird die Zeitverteilung der myoninduzierten Ereignisse gezeigt. Aufgetragen ist die Anzahl myoninduzierter Ereignisse in Abhängigkeit von der gemessenen Zeitdifferenz. Deutlich ist ein ausgeprägtes Maximum bei  $2.374 \pm 0.005 \mu\text{s}$  mit einer Breite von  $0.243 \pm 0.004 \mu\text{s}$  zu erkennen. Die Ereignisse bei  $18\mu\text{s}$  im linken Bild stammen von einem fehlerhaften TPHC-Modul während der Runs 1614 bis 1616. Werden die Daten dieser Runs nicht betrachtet, entsteht die im rechten Bild gezeigte Verteilung.

oder in Koinzidenz mit einem anderen Ereignis detektiert wird:

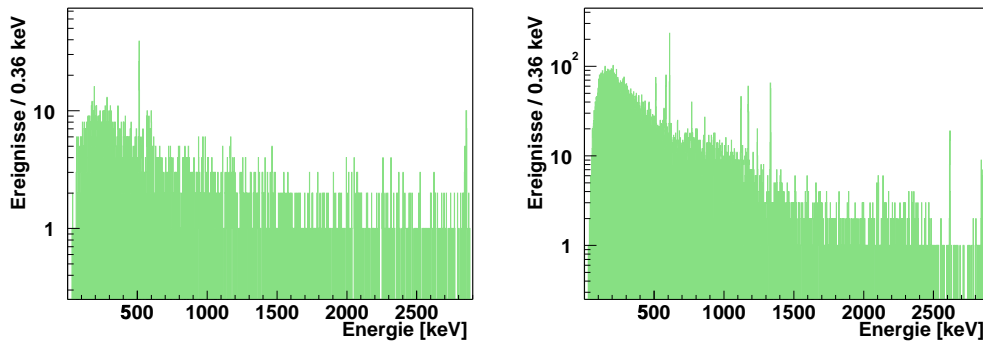
- Myoninduzierte Ereignisse

Über dem Aufbau A mit den Detektoren ANG1, ANG2, ANG3 und ANG5 sind Plastiksintillatoren in zwei Ebenen zur Detektion von Myonen angebracht [Gün97]. Wenn beide Ebenen ein Signal in Koinzidenz messen, wird in einem Elektronikmodul ein Zeitmesser gestartet. Dieser Zeitmesser stoppt, wenn innerhalb von  $22 \mu\text{s}$  ein Trigger durch ein Ereignis in einem der vier Detektoren des Aufbaus A ausgelöst wird. Die gemessene Zeit wird in diesem Fall durch das TPHC-Modul<sup>1</sup> in eine der Zeit proportionale Amplitude umgewandelt.

Abbildung 4.5 zeigt die Verteilung der auf diese Weise gemessenen Zeitdifferenzen, deren Mittelwert bei  $2.374 \pm 0.005 \mu\text{s}$  liegt. Dieser Mittelwert stellt keine reale physikalische Zeitdifferenz dar, sondern resultiert aus einer elektronischen Verzögerung [Gün96]. Liegt die Zeitdifferenz innerhalb eines Bereiches von 1 bis  $5 \mu\text{s}$ , dann wird das Ereignis verworfen, anderenfalls wird es weiter verwendet. Die Tabelle 4.4 gibt die Anzahl der Ereignisse an, die in Koinzidenz mit dem Myonschild detektiert und verworfen werden. Für mehr Details über die aktive Myonabschirmung siehe [Gün96].

---

<sup>1</sup>Time to Pulse Height Converter



**Abbildung 4.6:** Energieverteilung aller Ereignisse, welche in Koinzidenz mit einem Signal aus dem Myonveto detektiert (links) bzw. in Koinzidenz mit einem anderen Ereignis (rechts). Es werden alle koinzidente Ereignisse im Zeitraum von November 1995 bis April 2002 dargestellt.

- Andere koinzidente Ereignisse

Es gibt natürlich auch den Fall myoninduzierter oder sonstiger koinzidenter Ereignisse, ohne dass ein Trigger im Myonveto ausgelöst wird. Aus diesem Grund werden ebenfalls alle Ereignisse verworfen, die gleichzeitig in mehr als einem Detektor auftreten (bzw. deren zeitliche Differenz maximal  $15 \mu\text{s}$  beträgt [Pet95]). Die Tabelle 4.4 listet alle 19932 sonstigen koinzidente Ereignisse auf.

Von den insgesamt 835 235 Ereignissen in allen Datensätzen seit November 1995 werden durch die beiden beschriebenen Selektionen bis Mai 2002 insgesamt 23551 Ereignisse verworfen, das entspricht 2.8 % aller gemessener Ereignisse.

### 4.4.3 Korrektur der Zählraten

Neben den Spektren mit allen Ereignissen werden vom Summationsprogramm auch die SSE-Spektren erzeugt. Diese enthalten nur die Ereignisse, die von allen drei in Abschnitt 4.3 beschriebenen Pulsformanalysemethoden (PFA) als SSE identifiziert wurden. Diese Methoden besitzen Effizienzen zwischen 70% und 90% (siehe Tabelle 4.5 und [Pet95, Hel96, Maj99, Hel00, Maj00]). Der Wert  $p$  in dieser Tabelle gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass mit der entsprechenden Methode ein SSE korrekt als SSE identifiziert wird, während der Wert  $q$  angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein MSE fälschlicherweise als SSE identifiziert wird.

Myoninduzierte koinzidente Ereignisse					
Detektor	Anzahl gleichzeitig getroffener Detektoren				Summe
	1	2	3	4	
ANG1	249	181	184*	71	685
ANG2	479	311	209	71	1070
ANG3	407	265	176	71	919
ANG5	424	251	199	71	945
Summe	1559	1008	768	284	3619
Sonstige koinzidente Ereignisse					
Detektor	Anzahl gleichzeitig getroffener Detektoren				Summe
	2	3	4		
ANG1		3622	179	48	3849
ANG2		4364	219	48	4631
ANG3		5374	209	48	5631
ANG4		1	0	0	1
ANG5		5572	200	48	5820
Summe		18933	807	192	19932

**Tabelle 4.4:** Tabelle mit allen registrierten koinzidenten Ereignissen, aufgeteilt in Ereignisse mit und ohne einem Vetosignal aus dem Myonschild. Der mit \* gekennzeichnete Wert zum Beispiel gibt an, dass in 184 Fällen ein myoninduziertes Ereignis in Detektor ANG1 *und* in zwei weiteren Detektoren gleichzeitig registriert wurden.

Werden alle drei PFA-Methoden angewendet, so erhält man die Gesamteffizienz durch Bildung des Produktes der drei Einzeleffizienzen:

$$p = p_1 p_2 p_3 = 0.55255 \quad \text{und} \quad q = q_1 q_2 q_3 = 0.00546 . \quad (4.5)$$

Da diese Effizienzen bekannt sind, können die Zählraten der SSE-Spektren korrigiert werden. Es gibt dafür mehrere Möglichkeiten:

Methode	Effizienzen	
	$p$ [%]	$q$ [%]
H	78	28
N	92	15
R	77	13

**Tabelle 4.5:** Effizienzen für die verwendeten Pulsformanalysemethoden, für  $H$  genommen aus [Hel00] und für  $N$  und  $R$  aus [Maj00].

- Korrektur nach Hellmig [Hel00]

Für die in der Arbeit [Hel00] beschriebenen Korrektur wird zunächst angenommen, dass  $A$  die Anzahl von Ereignissen in einem bestimmten Kanal des Gesamtspektrums ist (vor der Pulsformanalyse) und  $a$  die Anzahl der Ereignisse im gleichen Kanal des SSE-Spektrums (nach der Analyse) ist.  $A$  ist dann die Summe der *vor* der Analyse vorhandenen MSE ( $M$ ) und SSE ( $S$ ) und  $a$  die Summe der *nach* der Analyse vorhandenen MSE ( $m$ ) und SSE ( $s$ ). Es gilt also:

$$A = M + S \quad M, S \geq 0 \quad \text{und} \quad a = m + s \quad m, s \geq 0. \quad (4.6)$$

Mit den Effizienzen  $p$  und  $q$  gilt dann (für *große* Zählraten):

$$m = qM \quad \text{und} \quad s = pS$$

Diese Gleichungen können zusammen mit den Gleichungen (4.6) nach dem gesuchten Wert, der real vorhandenen Anzahl von SSE vor der Analyse  $S$  aufgelöst werden:

$$S = \frac{a - qA}{p - q}. \quad (4.7)$$

Diese Gleichung gilt allerdings nur für große Zählraten. Es kann leicht nachgerechnet werden, dass wenn z.B.  $A=20$  und  $a=2$  ist, der Wert für  $S$  negativ wird (für  $p = 0.8$  und  $q = 0.2$ ). Da dies kein zulässiger Wert für eine Zählrate ist, kann Gleichung (4.7) für kleine Zählraten nicht angewendet werden.

- Triviale Korrektur

Um die triviale Korrektur anwenden zu können, wird eine Linienanpassung im SSE-Spektrum durchgeführt. Die so bestimmte Linienintensität wird durch die Effizienz  $p$  dividiert, um die ursprüngliche Anzahl von SSE in der Linie zu erhalten. Es ist einsichtig, dass diese Korrektur in der Regel nicht besonders gut sein kann. Trotzdem liefert sie bei den hier verwendeten Effizienzen sehr gute Resultate, da das Verhältnis von  $p$  zu  $q$  sehr groß ist.

Um die Berechnung der Korrektur für kleine Zählraten korrekt herzuleiten, muss mit den entsprechenden statistischen Verteilungsfunktionen gerechnet werden. Da in dem vorliegenden Problem zwei Klassen unterschiedlicher Ereignisse vorhanden sind (SSE und MSE), ist die zugrundeliegende Verteilung durch die Binomialverteilung gegeben. Die damit neu entwickelte Korrektur wird im Folgenden beschrieben.

- Neu entwickelte Korrektur

Die Wahrscheinlichkeit, von  $S$  SSE nach Anwendung der PFA noch  $s$  als solche zu identifizieren, ist gegeben durch

$$P(S, s) = \binom{S}{s} p^s (1 - p)^{S-s} ,$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass von  $M$  MSE fälschlicherweise  $m$  Ereignisse als SSE identifiziert werden ist:

$$Q(M, m) = \binom{M}{m} q^m (1 - q)^{M-m} .$$

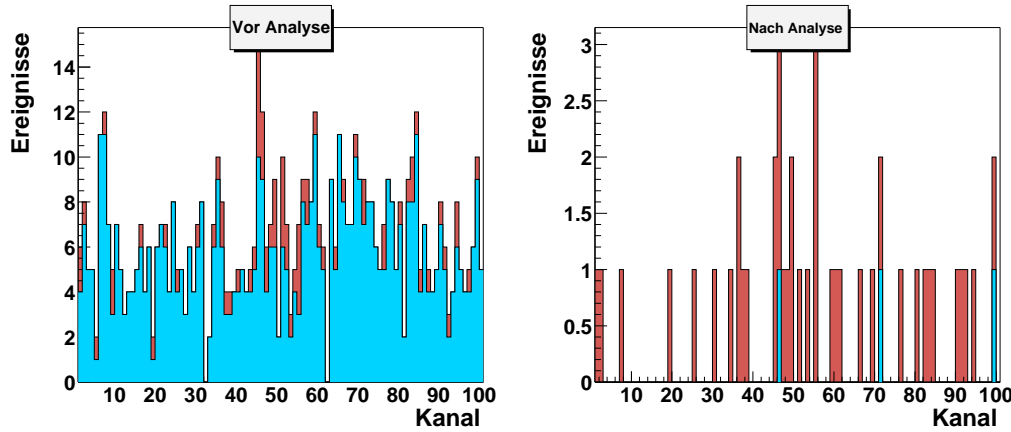
Die Gesamtwahrscheinlichkeit ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} p(S, s|A, a) &= P(S, s) Q(M, m) \\ &= P(S, s) Q(A - S, a - s) . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da nur der Wert für  $S$  interessiert, nicht aber der Wert für  $s$ , wird Gleichung (4.8) über alle möglichen Werte von  $s$  summiert:

$$p'(S|A, a) = \sum_{s=s_{min}}^{s_{max}} P(S, s) Q(A - S, a - s) . \quad (4.9)$$





**Abbildung 4.7:** Die linke Abbildung zeigt ein Beispiel eines künstlich erzeugten Spektrums mit poissonverteiletem Untergrund (90% MSE, 10% SSE) für den Test der Korrekturmethode mit einer gaußförmigen Linie aus 10 SSE im Kanal 50 mit einer Breite von 4 Kanälen. Die rot abgebildeten Ereignisse stellen die SSE dar, während die blauen die MSE darstellen. Die rechte Abbildung zeigt das gleiche Spektrum nach der simulierten Pulsformanalyse aller drei Methoden mit den Effizienzen aus (4.5), d.h. es wird gefordert, dass ein Ereignis von allen drei Methoden als SSE identifiziert wird. Hier ist jetzt die künstlich erzeugte Linie deutlich zu erkennen.

Für die Minimal- und Maximalwerte von  $s$  gilt:

$$s_{min} = \max\{0 ; a - M\} \quad (4.10)$$

$$s_{max} = \min\{a ; S\} . \quad (4.11)$$

Die Gleichungen (4.10) und (4.11) berücksichtigen einige Randbedingungen, da nicht jeder Wert von  $s$  überhaupt möglich ist. Falls z.B.  $m = M$  ist, also jedes MSE fälschlicherweise als SSE identifiziert wird, dann ist  $a = m + s = M + s$  bzw.  $s = a - M$ . Einen kleineren Wert kann  $s$  nicht annehmen. Außerdem kann  $s$  höchstens so groß werden wie  $S$  (wenn jedes SSE auch als SSE identifiziert wird) und darf gleichzeitig nicht größer sein als  $a$ , die Gesamtzahl der Ereignisse nach der Analyse.

Für die zwei bekannten Werte  $A$  und  $a$  werden alle Wahrscheinlichkeitskombinationen von  $p'(S|A, a)$  berechnet (mit  $S = 0, \dots, A$ ) und das  $S$  gewählt, für das die Wahrscheinlichkeit (4.9) maximal wird. Dieser Wert von  $S$  entspricht dann der wahrscheinlichsten Anzahl von SSE im betrachteten Kanal.

Linie	Intensität $n$	vor Korrektur	triviale Korrektur	neue Korrektur
SSE	1000	$552.2 \pm 16.5$	$999.4 \pm 29.9$	$988.7 \pm 25.4$
SSE	20	$11.2 \pm 3.5$	$20.3 \pm 6.3$	$17.5 \pm 5.8$
MSE	1000	$5.2 \pm 3.4$	$9.5 \pm 6.2$	$5.9 \pm 4.8$
MSE	20	$0.6 \pm 1.7$	$1.0 \pm 3.0$	$0.9 \pm 2.3$

**Tabelle 4.6:** Diese Tabelle gibt die Mittelwerte an, die aus den Bestwerten von je 1000 zufallsgenerierten Spektren berechnet wurden. Außerdem werden die Intensitäten vor der Korrektur gezeigt. Besteht die Linie aus SSE, dann stimmen die berechneten Linienintensitäten sehr gut mit den vorgegebenen Werten überein. Besteht die Linie hingegen aus MSE dann werden nur sehr wenige Ereignisse als SSE gefunden.

Es ist anzumerken, dass diese Methode bei extrem kleiner Statistik gegebenenfalls nicht die gewünschten Resultate liefert, da die Methode nur ganzzahlige Werte für  $S$  bestimmt. Dadurch kann es vorkommen, dass die Wahrscheinlichkeiten für direkt aufeinanderfolgende Werte für  $S$  fast gleich sind und so dieser Unterschied bei extrem kleiner Statistik zu großen Abweichungen im Resultat führen kann.

Diese neu entwickelte Methode hat gegenüber den zuvor beschriebenen Methoden folgende Vorteile:

- Das Resultat liegt innerhalb physikalischer Grenzen; es werden keine negativen Werte für  $S$  berechnet oder Werte, die größer sind als die ursprünglich vorhandene Zahl  $A$  von Ereignissen vor der Analyse.
- Das Resultat ist, wie für Zählraten üblich, ein ganzzahliger Wert.

Es wurden Tests durchgeführt, um die Leistungsfähigkeit der neu entwickelten mit der trivialen Methode zu vergleichen.

Für diese Tests wurden Zufallsspektren erzeugt, bestehend aus einem poissonverteilten Untergrund (zu 90% aus MSE und zu 10% aus SSE) und einer gaußförmigen Linie, die entweder aus SSE oder MSE besteht. In Abbildung 4.7 links wird ein Beispiel eines solchen Spektrums gezeigt, die MSE blau und die SSE rot dargestellt. Dann wird eine kombinierte Pulsformanalyse aller drei Methoden simuliert mit den in (4.5) angegebenen Effizienzen, d.h. damit ein Ereignis als SSE anerkannt wird, muss es von allen drei Methoden als SSE identifiziert werden. Für das in Abbildung 4.7 links gezeigte

Linienenergie [keV]	Isotop
$1063.662 \pm 0.004$	$^{207}\text{Bi}$
$1173.237 \pm 0.004$	$^{60}\text{Co}$
$1238.110 \pm 0.012$	$^{214}\text{Bi}$
$1332.501 \pm 0.005$	$^{60}\text{Co}$
$1377.669 \pm 0.012$	$^{214}\text{Bi}$
$1460.830 \pm 0.000$	$^{40}\text{K}$
$1509.228 \pm 0.015$	$^{214}\text{Bi}$
$1588.190 \pm 0.030$	$^{228}\text{Ac}$
$1729.595 \pm 0.015$	$^{214}\text{Bi}$
$1764.494 \pm 0.014$	$^{214}\text{Bi}$
$1847.420 \pm 0.025$	$^{214}\text{Bi}$
$2204.210 \pm 0.040$	$^{214}\text{Bi}$
$2447.860 \pm 0.100$	$^{214}\text{Bi}$
$2505.738 \pm 0.006^\dagger$	$^{60}\text{Co}$
$2614.533 \pm 0.013^*$	$^{208}\text{Tl}$

**Tabelle 4.7:** Liste aller zur Nacheichung verwendeten Linien. Nur die Linie bei 2614 keV \* wird ebenfalls für die Haupteichung verwendet. Die Linie bei 2505 keV † ist eine Summationslinie der Linien bei 1173 und 1332 keV.

Testspektrum ergibt sich so das in Abbildung 4.7 rechts gezeigte Spektrum. Aus diesem Spektrum kann dann die Linienintensität mit der trivialen Methode, oder mit der neu entwickelten Methode bestimmt werden, nachdem das Spektrum gemäß Gleichung (4.9) korrigiert worden ist.

Wie gut diese Korrekturen sind, ist in Tabelle 4.6 gezeigt, in der die Mittelwerte der korrigierten Linienintensitäten aus je 1000 zufallsgenerierten Spektren aufgelistet sind. Die angegebenen Fehler wurden aus den Schwankungen der 1000 Mittelwerte bestimmt. Besteht die Linie aus SSE, so liegt der wahre Wert der Linienintensität deutlich im Konfidenzbereich des Mittelwertes. Eine SSE-Linie wird also im Mittel mit ihrer wahren Intensität gefunden, während eine MSE-Linie deutlich unterdrückt wird. Zum Vergleich werden in dieser Tabelle zusätzlich die Linienintensitäten angegeben, wie sie vor den Korrekturen gemessen werden.

Außerdem ist in dieser Tabelle gut zu sehen, dass für die hier verwendeten Effizienzen sowohl die triviale als auch die neu entwickelte Korrektur zu übereinstimmenden Resultaten führt.

Energie $E^{lit}$ [keV]	Energie $E^{mess}$ [keV]	Abweichung [keV]
1063.66	1063.20 ± 0.12	-0.46 ± 0.12
1173.24	1172.63 ± 0.03	-0.61 ± 0.03
1238.11	1237.43 ± 0.11	-0.68 ± 0.11
1332.50	1332.03 ± 0.03	-0.47 ± 0.03
1377.67	1377.00 ± 0.10	-0.67 ± 0.10
1460.83	1460.15 ± 0.01	-0.68 ± 0.01
1509.23	1508.28 ± 0.19	-0.95 ± 0.19
1588.19	1587.11 ± 0.33	-1.08 ± 0.33
1729.59	1729.15 ± 0.10	-0.45 ± 0.10
1764.49	1764.23 ± 0.04	-0.27 ± 0.04
1847.42	1847.35 ± 0.14	-0.07 ± 0.14
2204.21	2204.43 ± 0.11	0.22 ± 0.11
2447.86	2448.25 ± 0.19	0.39 ± 0.19
2505.74	2506.18 ± 0.20	0.44 ± 0.20
2614.53	2615.52 ± 0.06	0.99 ± 0.06

**Tabelle 4.8:** Liste der gemessenen Energien großer Linien im Gesamtspektrum, verglichen mit den bekannten Energien dieser Linien *vor* der Nacheichung.  $E^{lit}$  kennzeichnet die aus der Literatur bekannte Linienenergie (aus [Lund]) und  $E^{mess}$  die aus der Messung mit den Eichparametern bestimmte Energie.

#### 4.4.4 Nacheichung

Nach der Erstellung des Summenspektrums kann im Prinzip mit der Auswertung begonnen werden. Die zur Erstellung dieses Summenspektrums verwendeten Eichparameter können allerdings systematische und konstante Verschiebungen beinhalten, die durch Eichlinien mit sehr großer Intensität durch den sogenannten *pile-up* Effekt verursacht werden können. Dieser Effekt kommt zustande, wenn ein zweites Ereignis Energie im Detektor deponiert während noch der Stromfluss des ersten Ereignisses gemessen wird. Durch den zusätzlichen Stromfluss wird dem ursprünglichen Ereignis fälschlicherweise eine zu große Energie zugeordnet. Außerdem können in der Eichung nichtlineare Effekte auftreten.

Um diese Einflüsse auszugleichen, und um eine bessere Eichung zwischen Kanal und Energie herzustellen, wird eine Nacheichung für einen eingeschränkten Energiebereich durchgeführt. Da die Eichung besonders für den Energiebereich um 2039 keV wichtig ist, wird diese Nacheichung ausschließlich mit Linien durchgeführt, deren Energie größer als 1000 keV sind (siehe Ta-

Energie $E^{lit}$ [keV]	Energie $E^{mess}$ [keV]	Abweichung [keV]
1063.66	1064.13 ± 0.12	0.47 ± 0.12
1173.24	1173.45 ± 0.03	0.21 ± 0.03
1238.11	1238.20 ± 0.11	0.09 ± 0.11
1332.50	1332.70 ± 0.03	0.20 ± 0.03
1377.67	1377.63 ± 0.10	-0.04 ± 0.10
1460.83	1460.70 ± 0.01	-0.13 ± 0.01
1509.23	1508.79 ± 0.18	-0.44 ± 0.18
1588.19	1587.53 ± 0.33	-0.66 ± 0.33
1729.59	1729.44 ± 0.10	-0.16 ± 0.10
1764.49	1764.48 ± 0.04	-0.01 ± 0.04
1847.42	1847.53 ± 0.14	0.11 ± 0.14
2204.21	2204.27 ± 0.11	0.06 ± 0.11
2447.86	2447.85 ± 0.20	-0.01 ± 0.20
2505.74	2505.72 ± 0.20	-0.02 ± 0.20
2614.53	2614.96 ± 0.06	0.43 ± 0.06

**Tabelle 4.9:** Liste der gemessenen Energien großer Linien im Gesamtspektrum, verglichen mit den bekannten Energien dieser Linien *nach* der Nacheichung. Für Erläuterungen siehe Tabelle 4.8.

belle 4.7). Die Positionen dieser Linien werden in dem Summenspektrum bestimmt und dann die Parameter  $i'$  und  $s'$  aus Gleichung (4.2) angepasst. Die Tabellen 4.8 und 4.9 zeigen die Übereinstimmungen der Literaturenergien mit den nach Gleichung (4.2) berechneten Energien der Linien im Spektrum vor und nach der Nacheichung. Die mittlere Abweichung  $\delta$  beträgt vor der Nacheichung 0.94 keV, danach nur noch 0.16 keV. Die Positionen der  $\gamma$ -Linien sind somit in diesem Bereich des Spektrums nur um durchschnittlich 0.16 keV von ihren Soll-Position verschoben, was eine sehr gute Übereinstimmung ist. Die mittlere Abweichung  $\delta$  wird dabei wie folgt berechnet:

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \frac{|E_i^{mess} - E_i^{lit}|}{(\Delta E_i^{mess})^2} \quad \text{mit} \quad N \equiv \sum_{i=1}^n (\Delta E_i^{mess})^2,$$

wobei  $E^{mess}$  die nach (4.2) bestimmte Energie,  $E^{lit}$  die verwendete Literaturenergie und  $n$  die Anzahl aller Werte ist.

## 4.5 Das Summenspektrum

Es werden zwei Spektren erzeugt, einmal für den Niederenergiebereich bis  $\sim 3000$  keV und einmal für den Hochenergiebereich bis etwa 8000 keV.

Die Entwicklung des Untergrunds, die in Abbildung 4.8 für den Zeitraum von November 1995 bis April 2002 dargestellt ist, ist zeitlich sehr stabil.

### 4.5.1 Niederenergiespektrum

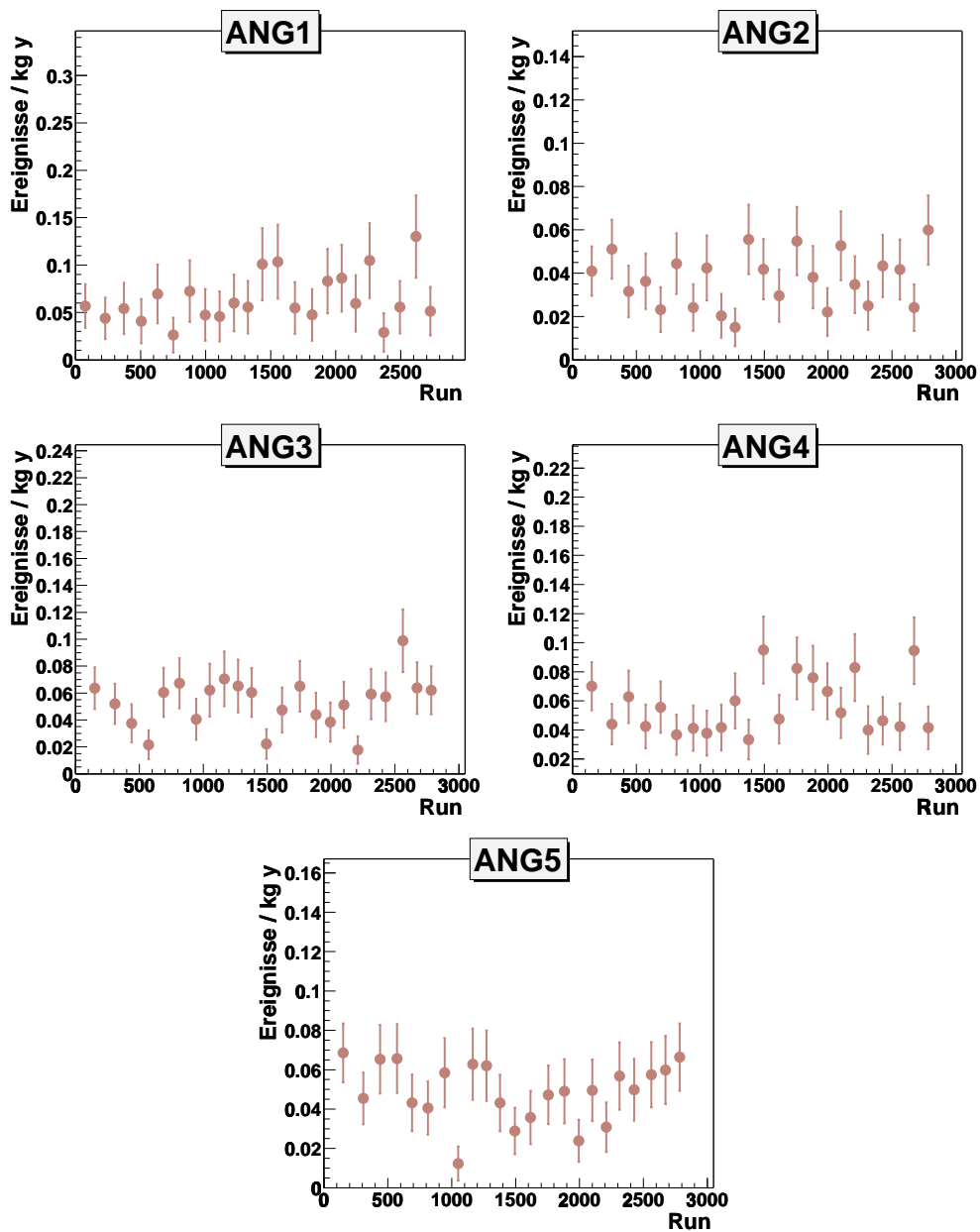
Das mit dem Summationsprogramm erzeugte Gesamtspektrum beinhaltet zunächst nur die ab 1995 gemessenen Daten. In diesem Jahr wurde die gesamte Elektronik des Aufbaus umgestellt, um die Pulsformen der Ereignisse registrieren zu können [Gün97, Hel96]. Die vor diesem Zeitpunkt aufgenommenen Daten enthalten im Wesentlichen nur Daten der Detektoren ANG1 bis ANG3 und besitzen eine statistische Signifikanz von 15.05 kg y. Dieses Spektrum wird dem Summenspektrum ab 1995 aufaddiert, um das Gesamtsummenspektrum zu erhalten. In den Abbildungen 4.9 und 4.10 ist dieses Gesamtsummenspektrum mit einer statistischen Signifikanz von 70.62 kg y auf mehrere Bilder verteilt gezeigt. Die größten Linien sind darin beschriftet und in Tabelle 4.13 Teil 1 aufgeführt. Einige große Linien werden in Abbildung 4.11 dargestellt.

### 4.5.2 Hochenergiespektrum

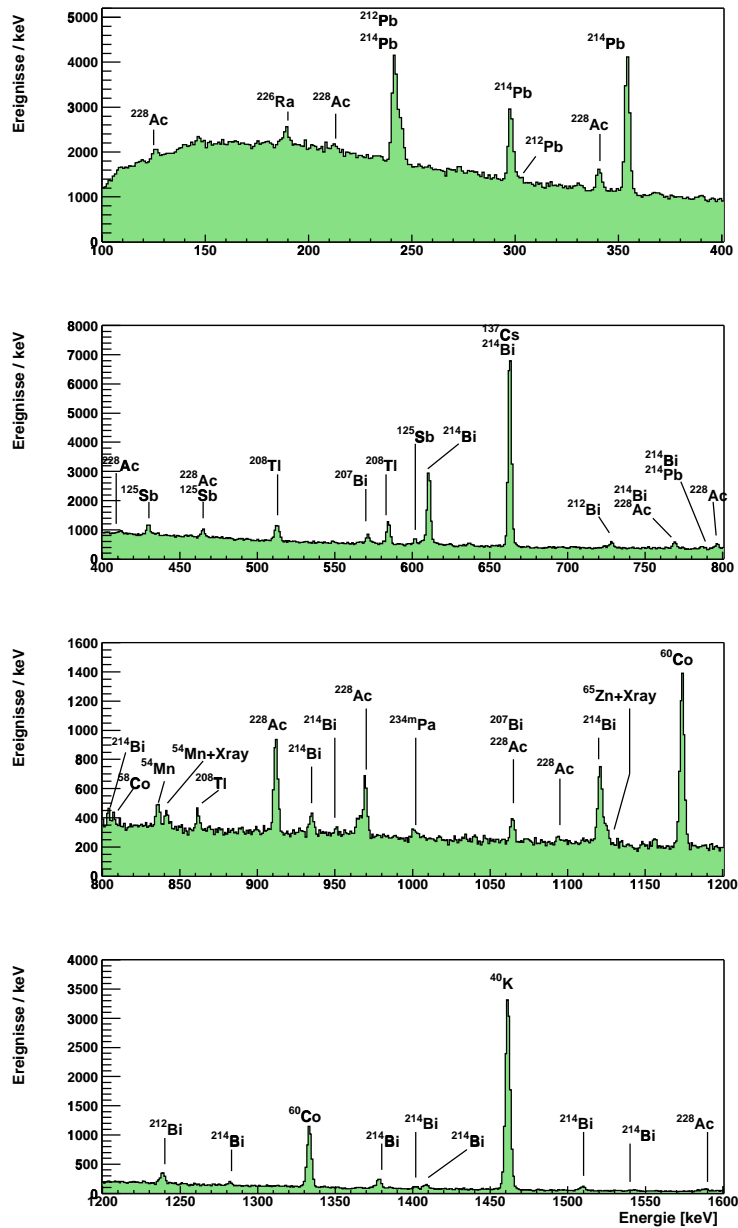
Neben der Erstellung des LE-Summenspektrums mit Ereignissen bis zu einer Energie von etwa 2800 keV wird aus den Daten des Heidelberg-Moskau-Experiments auch ein HE-Spektrum erzeugt mit Ereignissen, die eine Energie bis  $\sim 8000$  keV besitzen. Dieses wird in Abbildung 4.12 und 4.13 für die Daten von November 1995 bis April 2002 gezeigt.

Deutlich ist in den Spektren der Detektoren ANG4 und ANG5 eine Struktur bei 5.2 MeV zu sehen, bei der es sich nur um eine Linie des  $\alpha$ -Zerfalls von  $^{210}\text{Po}$  nach  $^{210}\text{Bi}$  ( $^{238}\text{U}$ -Reihe) handeln kann. Als Mutterisotop für diesen Zerfall kommen nur  $^{210}\text{Pb}$  mit einer Halbwertszeit von 22.3 y oder  $^{210}\text{Bi}$  mit einer Halbwertszeit von 5 Tagen in Frage, da anderenfalls weitere ähnlich starke  $\alpha$ -Linien im Spektrum auftreten müssten. Weil im Vergleich zu früheren Auswertungen [Die99, Mai96] die gemessene Linienzählrate angestiegen ist, kommt als Ursache für die Linie bei  $\sim 5200$  keV nur das Isotop  $^{210}\text{Pb}$  mit einer Halbwertszeit von 22.3 y in Frage. Dieses und die Tochterisotope erzeugen keinen Untergrund im relevanten Energiebereich um 2039 keV.

Die gemessene Energie der Linie ist mit  $\sim 5236$  keV etwas niedriger als die in der Literatur angegebene Energie von 5.31 MeV, weshalb die Verunreinigung

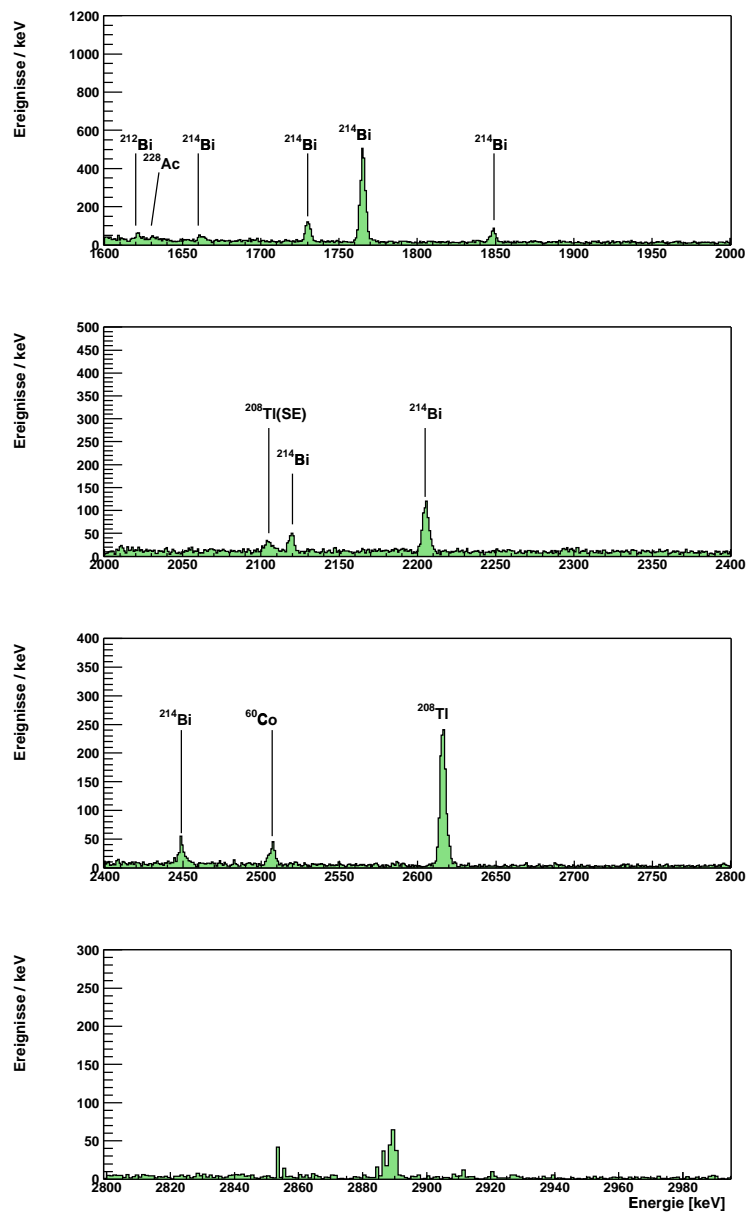


**Abbildung 4.8:** Darstellung der zeitlichen Entwicklung des Untergrunds für den Energiebereich von 2000 bis 2100 keV (Daten von November 1995 bis April 2002). Jeder dargestellte Wert entspricht einem Durchschnitt der Untergrundrate aus den umliegenden 80 Runs.



**Abbildung 4.9:** Gemessenes Spektrum aller fünf Detektoren mit Daten von August 1990 bis 16.4.2002 mit einer zugrundeliegenden statistischen Signifikanz von 70.62 kg y für den Energiebereich von 100 bis 1600 keV. Die identifizierten Linien sind markiert.





**Abbildung 4.10:** Gemessenes Spektrum aller fünf Detektoren mit Daten von August 1990 bis 16.4.2002 mit einer zugrundeliegenden statistischen Signifikanz von 70.62 kg y für den Energiebereich von 1600 bis 3000 keV. Die identifizierten Linien sind markiert.

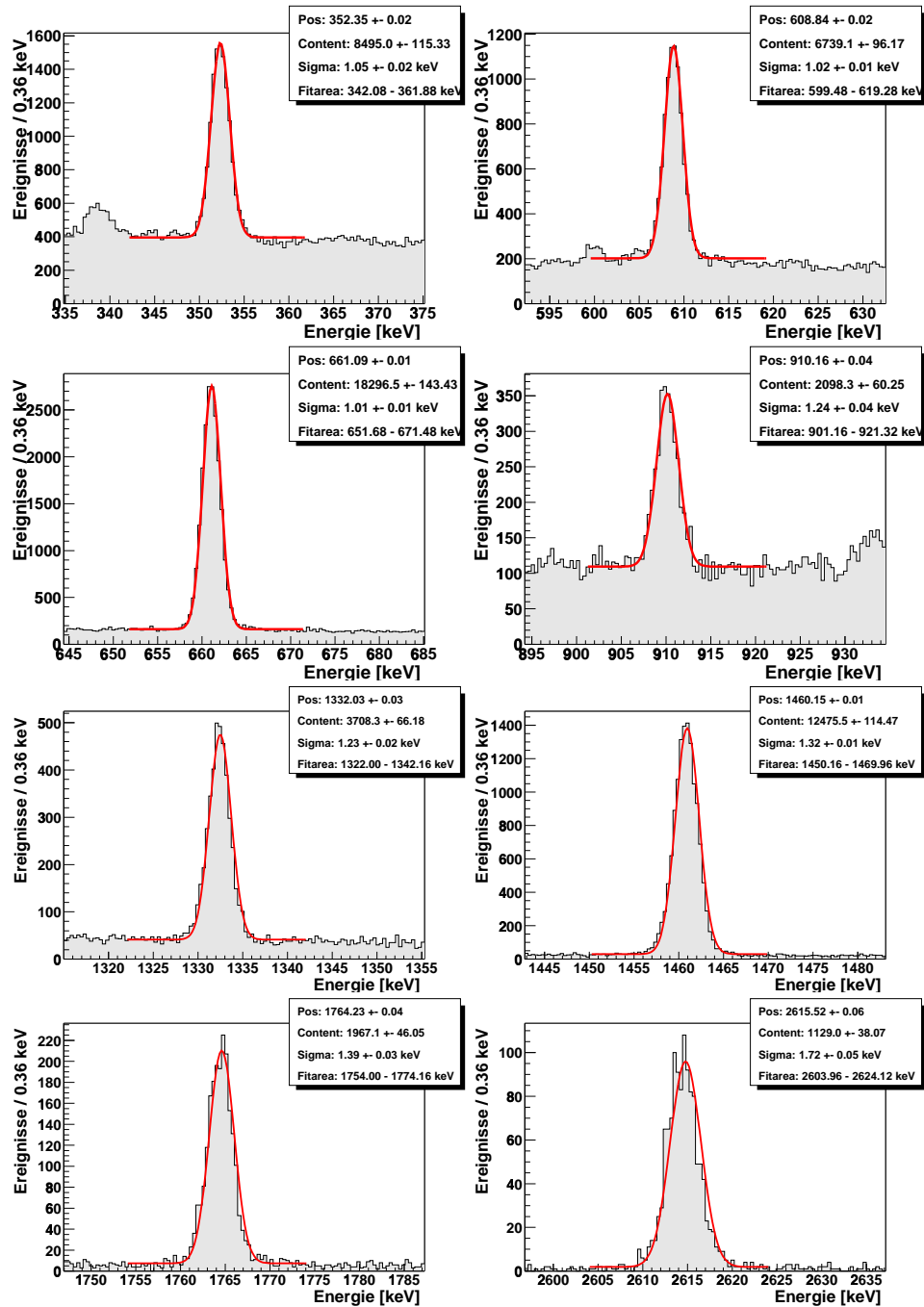
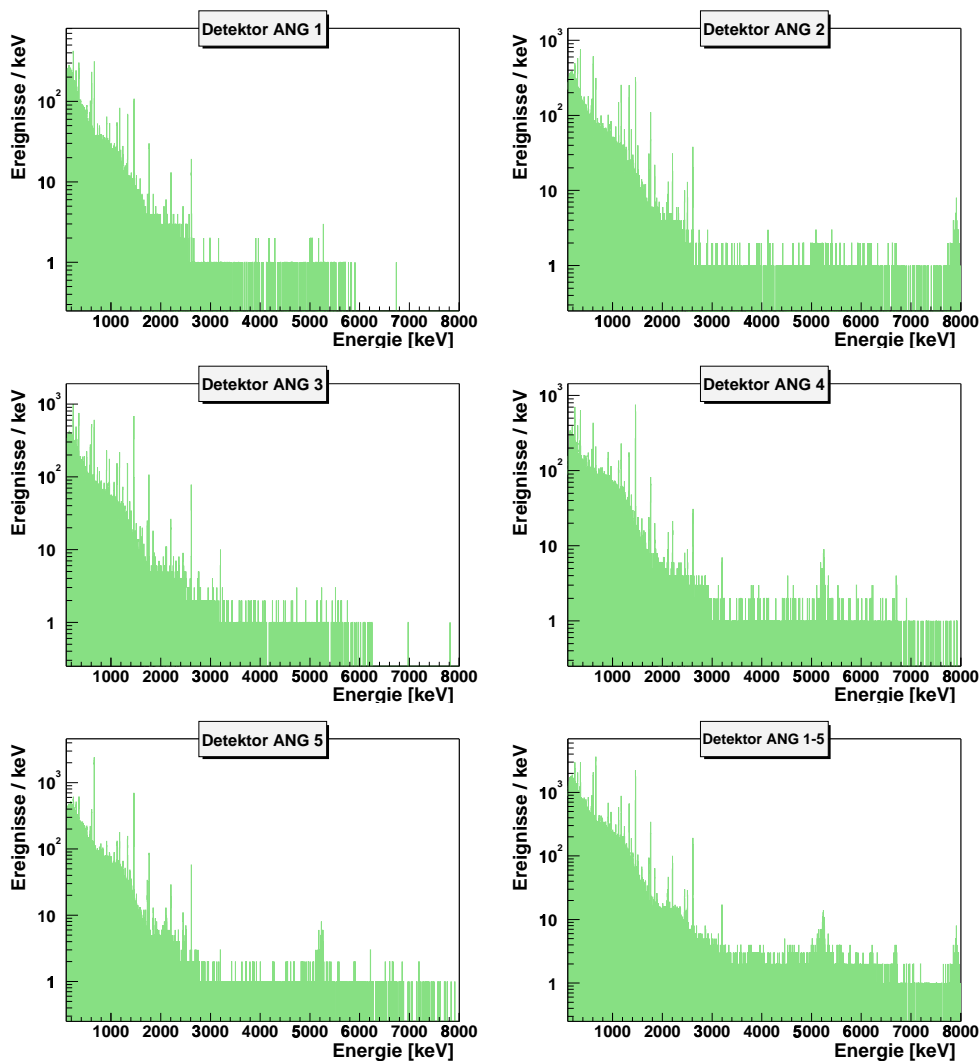


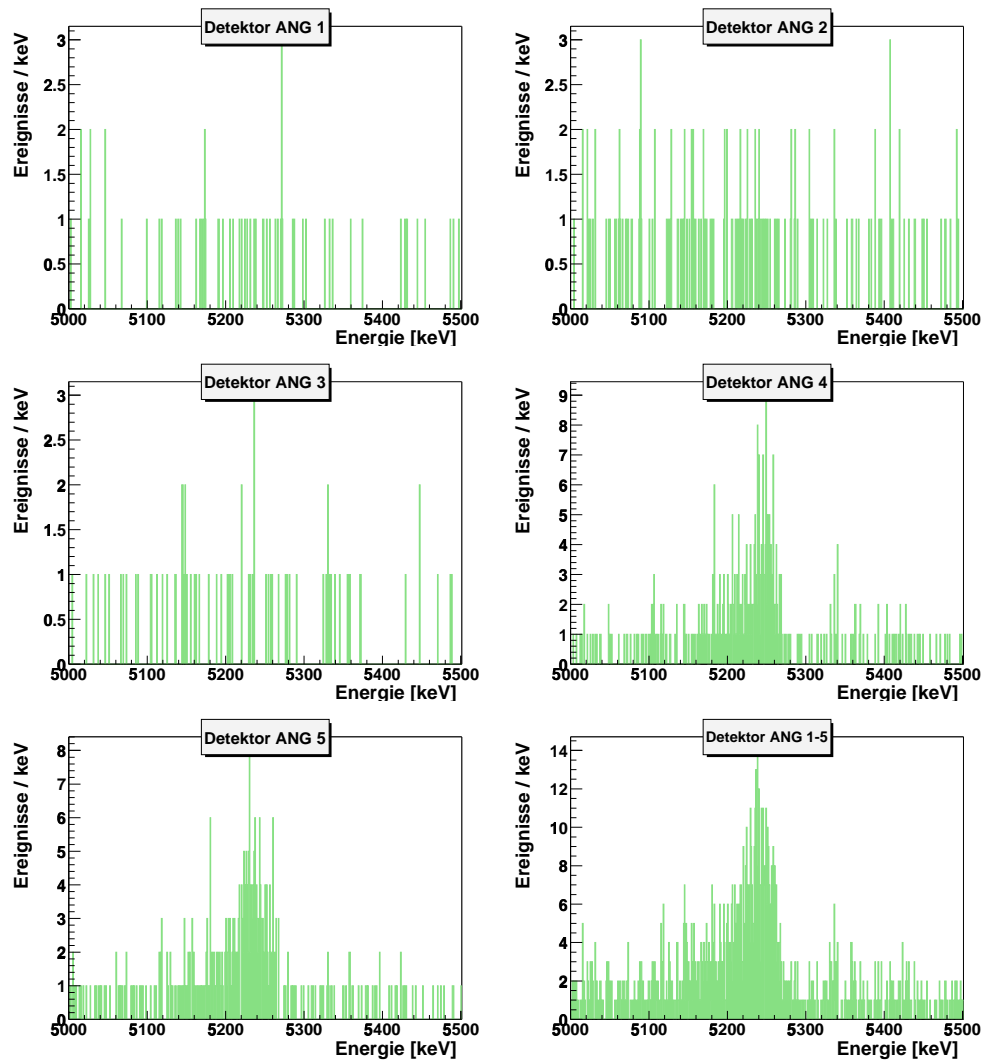
Abbildung 4.11: Abbildungen einiger identifizierter Linien im Gesamtspektrum von August 1990 bis April 2002 mit einem Gaußfit an die Daten.



**Abbildung 4.12:** Darstellung der Hochenergiespektren bis zu einer Energie von 8000 keV für jeden Detektor im Einzelnen und als Summenspektrum für die Daten von November 1995 bis April 2002.

mit großer Wahrscheinlichkeit *auf* dem Germaniumkristall lokalisiert ist. In diesem Fall wird ein Teil der Energie des  $\alpha$ -Teilchens durch die Totschicht auf dem Detektor absorbiert. In Tabelle 4.10 sind die gemessenen Resultate aufgelistet, die gut mit den Resultaten aus [Die99] übereinstimmen.

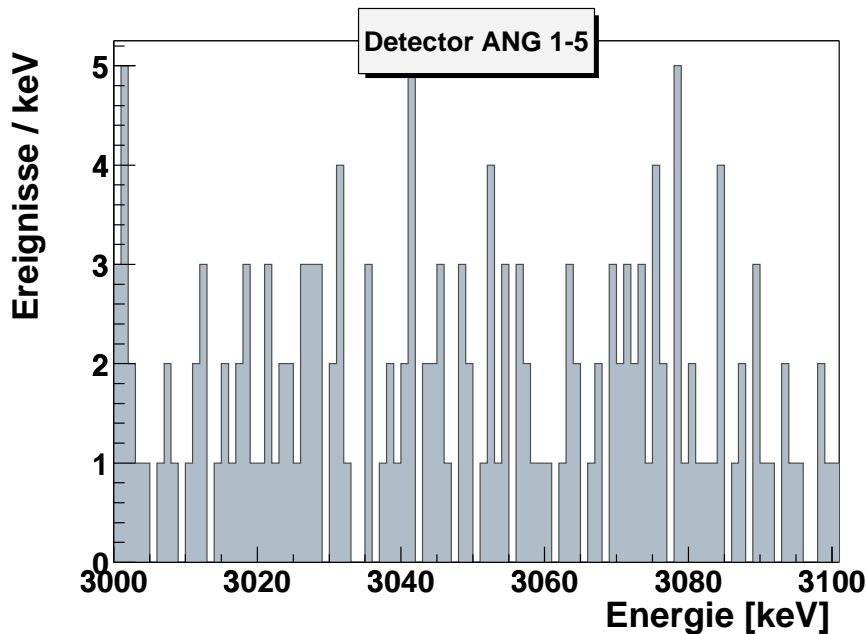
In Abbildung 4.14 ist der Energiebereich um 3061 keV aus dem Hochenergiespektrum dargestellt, in dem offensichtlich keine starke Linie enthalten ist. Aus diesem Grund kann bei einer Energie von 2039 keV keine durch Paarbildung erzeugte double-escape Linie vorhanden sein um die bei diesen Energien



**Abbildung 4.13:** Darstellung der Hochenergiespektren im Energiebereich von 5000 bis 5500 keV im Detail für die Daten von November 1995 bis April 2002. Deutlich ist für die Detektoren ANG4 und ANG5 eine Linie bei  $\sim 5200$  keV zu erkennen.

detektierten SSE zu erklären.

In Abbildung 4.15 ist ein Vergleich des LE- zum HE-Spektrums bis zu einer Energie von  $\sim 3000$  keV gezeigt. Die Übereinstimmung beider Spektren (LE rot, HE blau) ist ausgezeichnet.



**Abbildung 4.14:** Ausschnitt aus dem Hochenergiespektrum im Bereich von 3000 bis 3100 keV für alle fünf Detektoren (Daten von November 1995 bis April 2002).

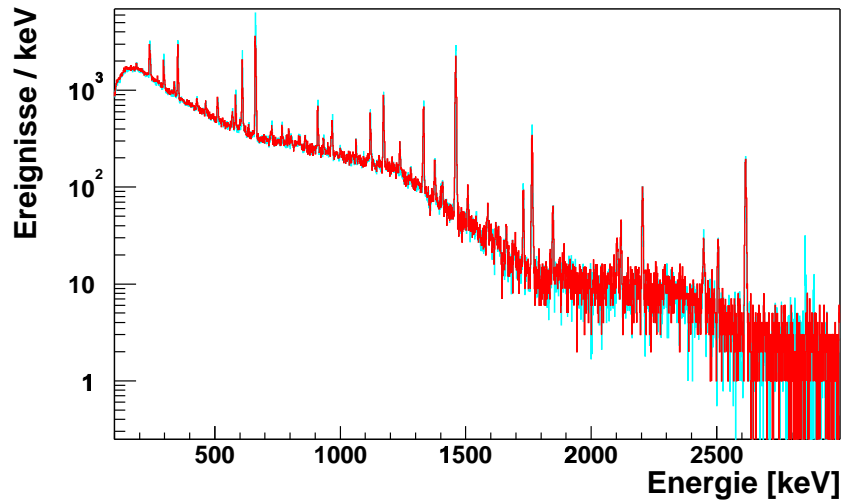
### 4.5.3 Verteilung der Ereignisse

Da die gemessenen Einzelereignisse durch eine Poissonverteilung beschrieben werden können, kann die zeitliche Differenz zwischen zwei Ereignissen durch eine Exponentialverteilung beschrieben werden. Die Wahrscheinlichkeit, zwei Ereignisse innerhalb einer gewissen Zeit  $t$  in zwei verschiedenen Detektoren zu messen, ist somit gegeben durch:

$$P(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t'} dt' = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Werden die Zeitdifferenzen aller gemessenen Ereignisse an eine Exponentialverteilung angepasst, ergibt sich für die Konstante  $\lambda$  ein Wert von  $(5.16 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . In Abbildung 4.16 ist zu sehen, wie gut die angepasste Exponentialverteilung die gemessenen Werte wiedergibt.

Jetzt lässt sich auch klären, wieviele zufällige Koinzidenzen insgesamt in den Daten erwartet werden. Damit zwei Ereignisse als koinzident angesehen werden, müssen sie innerhalb von  $15\mu\text{s}$  detektiert werden [Pet95], was einer Wahrscheinlichkeit von  $P(15\mu\text{s}) = 7.7 \times 10^{-8}$  entspricht. Für die insge-



**Abbildung 4.15:** Vergleich des Niederenergie- zum Hochenergiespektrum für die Daten vom 20.11.1995 bis 16.4.2002 bis zu einer Energie von 3000 keV. Die Übereinstimmung der LE-Daten (hell) zu den HE-Daten (dunkel) ist ausgezeichnet.

samt 835 235 detektierten Ereignisse werden somit nur etwa 0.06 zufällige Koinzidenzen erwartet.

Abbildung 4.17 zeigt die zeitliche Verteilung aller Ereignisse mit einer Energie zwischen 2035 und 2043 keV. Die MSE und die SSE sind durch unterschiedliche Markierungen gekennzeichnet.

Eine detaillierte zeitliche Aufteilung der SSE im Energiebereich von 2035 bis 2043 keV wird in Tabelle 4.11 dargestellt. Dort werden die Anzahl der Ereignisse für jeden Detektor pro Jahr gezeigt. Tabelle 4.12 listet diese 13 Ereignisse mit zusätzlichen Daten auf.

Wie in Tabelle 4.11 zu erkennen ist, scheinen sich die Ereignisse für Detektor ANG4 in den Jahren 1998 und 1999 zu häufen. Werden die Häufigkeiten der Ereignisse unter Doppeljahren zusammengefasst, dann werden bei Gleichverteilung etwa 1.08 Ereignisse pro Doppeljahr und Detektor erwartet. Die Wahrscheinlichkeit, in einem Doppeljahr insgesamt 5 SSE zu messen (so wie für Detektor ANG4 in den Jahren 1998/1999) kann durch die Poissonverteilung berechnet werden und beträgt 0.42%. Ein detailliertes Betrachten der Daten der obigen fünf Ereignisse lässt auf keine Probleme mit diesem Detektor schließen.

Detektor	Zählrate	obere Grenze der Aktivität
	[Ereignisse]	$\left[\frac{\mu\text{Bq}}{\text{kg}}\right]$
ANG1	25±9	0.27
ANG2	66±15	0.21
ANG3	20±11	0.10
ANG4	243±22	0.83
ANG5	267±21	0.78
Summe	621±36	

**Tabelle 4.10:** Obere Grenzen für die  $^{210}\text{Pb}$ -Aktivität auf der Kristalloberfläche der Detektoren sowie die Zählrate der in den Detektoren nachgewiesenen  $^{210}\text{Pb}$ -Zerfälle.

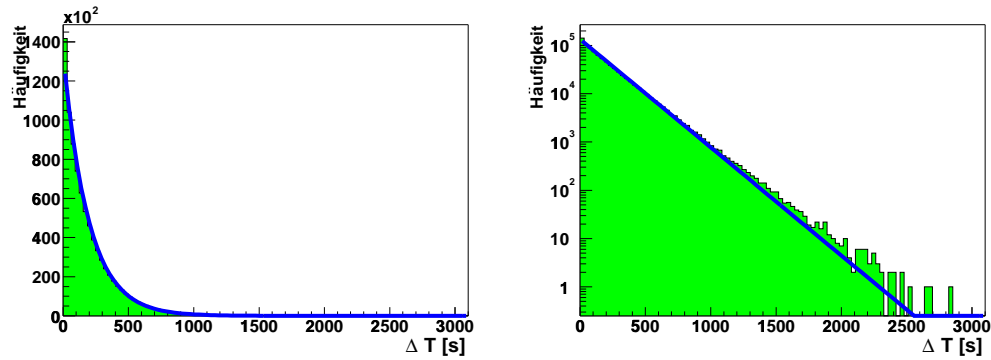
#### 4.5.4 Detektor ANG4

Detektor ANG4 muss separat betrachtet werden, da sich dieser in einem gesonderten Aufbau befindet ohne den Schutz einer aktiven Myonen-Abschirmung und ohne eine vollständige Bor-Polyethylen-Abschirmung zur Reduktion des Neutronenflusses (siehe Kapitel 3). Monte-Carlo Simulationen mit GEANT4 ergeben, dass auch in diesem Aufbau keine von Neutronenreaktionen herrührende Linien im Bereich von 2000 bis 2100 keV zu erwarten sind [Dör02].

Es gibt Hinweise auf eine Verschlechterung der Energieauflösung des Detektors ANG4 in den Jahren 2001 und 2002. Die Ursache für dieses Problem scheint in Instabilitäten des Vorverstärkers zu liegen [Shk03]. Aus diesem Grund werden die Auswertungen vorsorglich sowohl mit als auch ohne die Daten des Detektors ANG4 vorgenommen.

Detektor	1995/96	1997	1998	1999	2000	2001	Summe
ANG2	0	1	0	0	0	0	1
ANG3	1	0	0	2	0	0	3
ANG4	0	0	2	3	0	0	5
ANG5	0	0	1	2	1	0	4
Summe	1	1	3	7	1	0	13

**Tabelle 4.11:** Diese Tabelle zeigt die zeitliche Aufteilung der 13 gemessenen SSE im Energiebereich von 2035 bis 2043 keV für jeden Detektor.

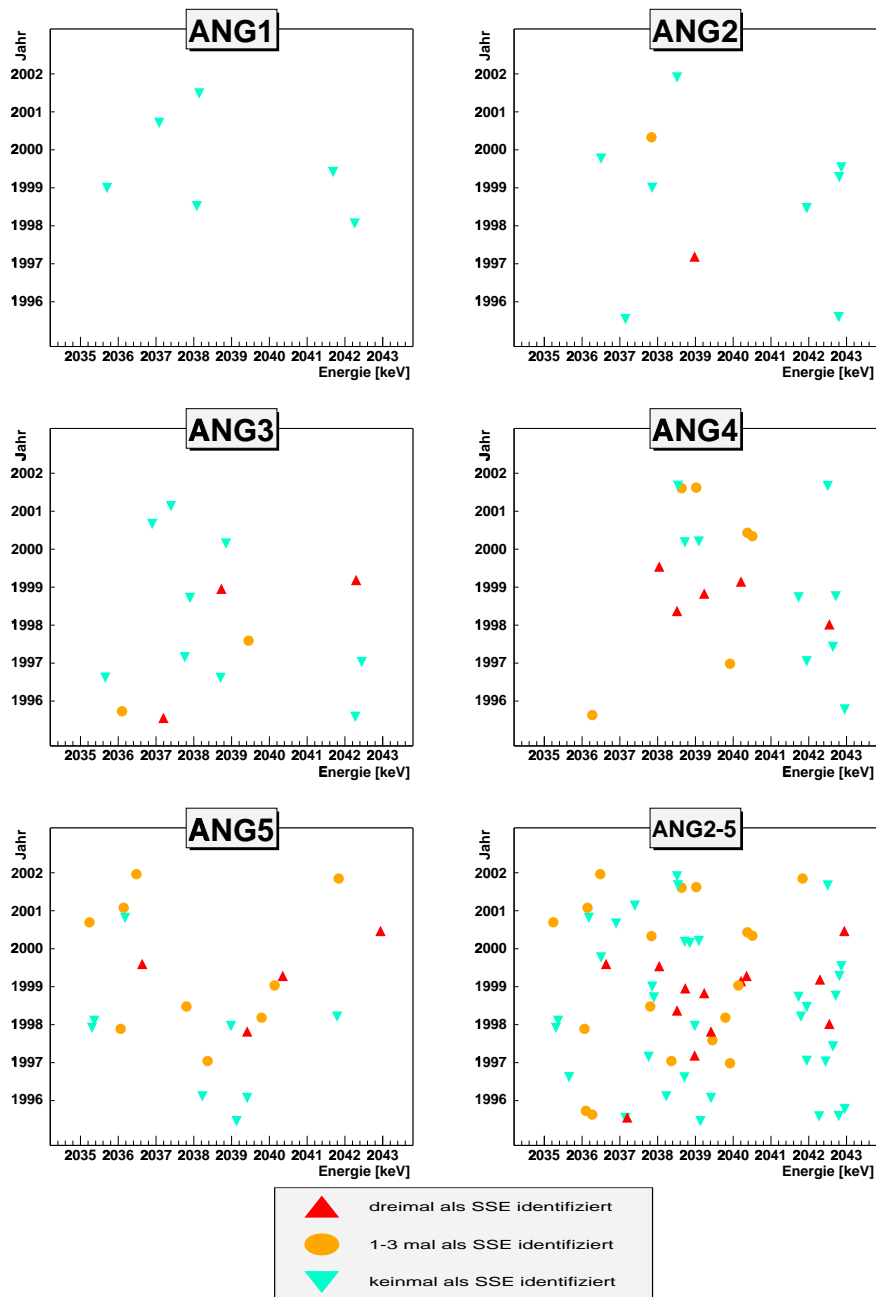


**Abbildung 4.16:** Darstellung der Häufigkeit der zeitlichen Abstände  $\Delta T$  zwischen zwei Ereignissen. Die Linie ist eine Anpassung aller Daten von November 1995 bis April 2002 an eine Exponentialverteilung, aus der sich der Parameter  $\lambda$  zu  $(5.16 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  ergibt.

Nummer Run	Nummer Ereignis	Datum	Zeit	Detektor	Energie [keV]
49	226	28.12.1995	03:10:36	ANG3	2037.19
735	131	29.6.1997	01:28:49	ANG2	2038.98
1036	73	26.1.1998	19:42:20	ANG5	2039.42
1125	296	5.4.1998	12:00:47	ANG4	2042.55
1271	251	1.8.1998	08:17:30	ANG4	2038.52
1465	46	3.1.1999	07:36:35	ANG4	2039.24
1513	342	14.2.1999	01:12:04	ANG3	2038.73
1592	144	18.4.1999	04:07:26	ANG4	2040.21
1610	513	2.5.1999	22:32:56	ANG3	2042.30
1650	206	3.6.1999	10:17:02	ANG5	2040.35
1762	97	28.8.1999	21:45:15	ANG4	2038.04
1787	359	17.9.1999	17:15:12	ANG5	2036.63
2152	176	6.7.2000	23:01:25	ANG5	2042.94

**Tabelle 4.12:** Tabelle mit detaillierten Informationen über jedes SSE im Energiebereich von 2035 bis 2043 keV im Zeitraum von November 1995 bis April 2002. Die angegebenen Zeiten sind in *Universal Time* gegeben und können bis zu 2 Stunden von der realen Zeit abweichen.





**Abbildung 4.17:** Zeitliche Verteilung aller gemessenen Ereignisse mit Energien zwischen 2035 und 2043 keV für jeden Detektor im Einzelnen bzw. für die Detektoren ANG2 bis ANG5 gemeinsam (Zeitraum von November 1995 bis April 2002). Auf der x-Achse ist die Energie und auf der y-Achse der Detektionszeitpunkt der Ereignisse aufgetragen. Die Form und Farbe der Markierungen zeigen an, wie oft ein Ereignis von den drei angewendeten Pulsformanalysemethoden als SSE identifiziert wurde. Detektor ANG1 misst als einziger Detektor keine Pulsformen.

Energie [keV]	Isotop	Ursprung	Bemerkung
99.5	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	? $\cap$ $\mathcal{X}$
129.1	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	?
186.2	$^{226}\text{Ra}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
219.3	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	?
238.6	$^{212}\text{Pb}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $^{214}\text{Pb}$
242.0	$^{214}\text{Pb}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{212}\text{Pb}$
295.2	$^{214}\text{Pb}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{212}\text{Pb}$
300.1	$^{212}\text{Pb}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $^{214}\text{Pb}$
338.3	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
351.9	$^{214}\text{Pb}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
409.5	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	?
427.9	$^{125}\text{Sb}$	anthropogen	
463.4	$^{125}\text{Sb}$	anthropogen	$\cap$ $^{228}\text{Ac}$
463.3	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $^{125}\text{Sb}$
510.8	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $e^+$ , $e^-$
569.7	$^{207}\text{Bi}$	anthropogen	
583.2	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
600.6	$^{125}\text{Sb}$	anthropogen	
606.7	$^{125}\text{Sb}$	anthropogen	? $\cap$ $^{214}\text{Bi}$
609.3	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{125}\text{Sb}$
661.7	$^{137}\text{Cs}$	anthropogen	$\cap$ $^{214}\text{Bi}$
665.5	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{137}\text{Cs}$
727.3	$^{212}\text{Bi}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
769.4	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{228}\text{Ac}$
772.3	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $^{214}\text{Bi}$

**Tabelle 4.13 Teil 1:** Tabelle mit allen bisher identifizierten Linien im Summenspektrum von August 1990 bis April 2002 mit allen Detektoren.  $\cap$  kennzeichnet eine Überlagerungen mit anderen Linien,  $\oplus$  bezeichnet einen Summationspeak, SE kennzeichnet eine single-escape Linie und DE eine double-escape Linie. Nicht sicher zugeordnete Linien sind mit einem '?' markiert und ein  $\mathcal{X}$  kennzeichnet eine Röntgenlinie.

Energie [keV]	Isotop	Ursprung	Bemerkung
786.1	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{214}\text{Pb}$ , $^{212}\text{Bi}$
786.0	$^{214}\text{Pb}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{214}\text{Bi}$
794.9	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
806.2	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	? $\cap$ $^{58}\text{Co}$
810.8	$^{58}\text{Co}$	kosmogen	$\cap$ $^{214}\text{Bi}$
834.8	$^{54}\text{Mn}$	kosmogen	
840.2	$^{54}\text{Mn}$	kosmogen	835 + $\mathcal{X}$
860.6	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
911.2	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
934.1	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
952.2	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	?
964.8	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
969.0	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
1001.0	$^{234m}\text{Pa}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1063.7	$^{207}\text{Bi}$	anthopogen	$\cap$ $^{228}\text{Ac}$
1065.2	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	? $\cap$ $^{207}\text{Bi}$
1095.7	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
1120.1	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	$\cap$ $^{65}\text{Zn}$
1123.6	$^{65}\text{Zn}$	kosmogen	1116 + $\mathcal{X}$
1173.2	$^{60}\text{Co}$	kosmogen	
1238.1	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1281.0	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1332.5	$^{60}\text{Co}$	kosmogen	

**Tabelle 4.13 Teil 2:** Tabelle mit allen bisher identifizierten Linien im Summenspektrum von August 1990 bis April 2002 mit allen Detektoren. Zur Zeichenerklärung siehe Tabelle 4.13 Teil 1.

Energie [keV]	Isotop	Ursprung	Bemerkung
1377.7	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1401.5	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1408.0	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1460.8	$^{40}\text{K}$	primordial	
1509.2	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1543.3	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1588.2	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	$\cap$ $^{208}\text{Tl}$
1592.5	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	DE, $\cap$ $^{228}\text{Ac}$
1620.5	$^{212}\text{Bi}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
1630.6	$^{228}\text{Ac}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	
1661.3	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1729.6	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1764.5	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
1847.4	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
2010.8	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	s. Abschnitt 6
2016.7	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	s. Abschnitt 6
2021.6	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	s. Abschnitt 6
2052.9	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	s. Abschnitt 6
2103.5	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	SE
2118.6	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
2204.2	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
2447.9	$^{214}\text{Bi}$	$^{238}\text{U}$ -Reihe	
2505.7	$^{60}\text{Co}$	kosmogen	$\oplus$
2614.5	$^{208}\text{Tl}$	$^{232}\text{Th}$ -Reihe	

**Tabelle 4.13 Teil 3:** Tabelle mit allen bisher identifizierten Linien im Summenspektrum von August 1990 bis April 2002 mit allen Detektoren. Zur Zeichenerklärung siehe Tabelle 4.13 Teil 1.

# Kapitel 5

## Datenanalyse

Bei der Analyse der erstellten Spektren geht es um die Frage, ob sich bei einer Energie von 2039.006 keV, dem Q-Wert des Doppelbetazerfalls von  $^{76}\text{Ge}$ , eine Linie befindet oder nicht, bzw. wie groß die Wahrscheinlichkeit für die Existenz dieser Linie ist. Zur Beantwortung dieser Frage stehen mehrere statistische Methoden zur Verfügung, insbesondere die weit verbreitete Maximum-Likelihood- und die  $\chi^2$ -Methode. Es kann gezeigt werden, dass die zweitgenannte Methode zur Auswertungen von Daten mit geringer Statistik, so wie in dem hier vorliegenden Fall, nicht gut geeignet ist. Zusätzlich wurde eine Methode entwickelt, die auf der Bayes'schen Statistik beruht und für Fälle mit kleiner Statistik sehr gut geeignet ist.

### 5.1 Die $\chi^2$ - und die Maximum-Likelihood-Methode

Die sicherlich mit Abstand am häufigsten verwendeten Methoden zur Bestimmung unbekannter Parameter sind die  $\chi^2$ - und die Maximum-Likelihood-Methode. Aufgrund ihrer Popularität sind diese beiden Methoden Bestandteil vieler Programmpakete für statistische Auswertungen, wie z.B. des am CERN entwickelten Datenanalysepakets ROOT [ROOT]. Die in diesem Paket enthaltenen Implementierungen dieser beiden Methoden sind für die meisten Zwecke ausreichend, doch kann die  $\chi^2$ -Methode für die hier vorliegenden Spektren nicht verwendet werden. Dieser Sachverhalt und die Grundzüge beider Methoden sollen in den folgenden Abschnitten erläutert werden.

### 5.1.1 Die Maximum-Likelihood-Methode

Eine sehr häufig benutzte Methode zur Bestimmung unbekannter Parameter ist die Maximum-Likelihood-Methode (ML-Methode) [Bra68, Ead77, Pre86]. Dieses Verfahren beruht darauf, die Wahrscheinlichkeit  $L$  dafür zu berechnen, dass die gemessenen Daten von einem theoretischen Modell mit  $G$  unbekanntem Parametern  $a_g$  erklärt werden. An der Stelle der maximalen Wahrscheinlichkeit von  $L$  gilt dann:

$$\frac{dL}{da_g} \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{d \ln L}{da_g} \equiv 0 \quad \forall g = 1, \dots, G. \quad (5.1)$$

Für  $G$  unbekannte Parameter ergeben sich somit  $G$  Gleichungen, die nach den Parametern  $a_g$  aufgelöst werden können. Damit werden diejenigen  $a_g$  bestimmt, mit denen das Modell die vorliegenden Daten am Besten beschreiben kann. Diese Werte werden im Folgenden als *Bestwerte* bezeichnet.

Für das Heidelberg-Moskau-Experiment werden die gemessenen Daten an ein Modell angepasst, das aus einem konstanten Untergrund und einer gaußförmigen Linie besteht. Der Erwartungswert  $\beta_k$  für die Zählrate im Kanal  $k$  ergibt sich somit durch

$$\beta_k = \underbrace{a_0}_{\text{Untergrund}} + \underbrace{\frac{a_1}{\sqrt{2\pi} a_2} \exp\left(-\frac{(k - a_3)^2}{2 a_2^2}\right)}_{\text{Linie}}. \quad (5.2)$$

Der erste Term  $a_0$  beschreibt den konstanten Untergrund und der zweite Term beschreibt die Form der Linie, die in Experimenten mit Halbleiterdetektoren sehr gut durch eine Gaußform angenähert werden können [Kno89]. In diesem Term bedeutet  $a_1$  die Intensität,  $a_2$  die Breite und  $a_3$  die Position der Linie.

Die Likelihood-Funktion ergibt sich dann durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten (mit  $\vec{a} = \{a_0, \dots, a_3\}$ ), wobei eine *Poisson-Verteilung* der Ereignisse vorausgesetzt wird:

$$L(\vec{a}) = \prod_{k=1}^M \frac{\beta_k^{x_k}}{x_k!} e^{-\beta_k}.$$

Das Produkt läuft über die  $M$  betrachteten Kanäle, deren gemessene Zählraten  $x_k$  sind ( $k = 1, \dots, M$ ).

Die Bestwerte der Parameter werden mit der in ROOT implementierten ML-Methode korrekt berechnet, allerdings nicht das dazugehörige Konfidenzintervall. Als Konfidenzintervall (d.h. Fehlerbereich) eines Parameters wird

derjenige Wertebereich bezeichnet, der den wahren Wert des Parameters mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $K$  beinhaltet (z.B.  $K = 90\%$ ).

Zur Berechnung des Konfidenzintervalls wird in ROOT ein Algorithmus verwendet, der eine Normalverteilung der Daten voraussetzt (siehe [MINUIT, Ead77]). Da die im Heidelberg-Moskau-Experiment vorliegenden Daten aber nicht normal- sondern poissonverteilt sind, werden die Konfidenzbereiche nicht korrekt berechnet. So kann sich das mit ROOT berechnete Konfidenzintervall der Linienintensität bis in den negativen Wertebereich erstrecken, obwohl eine Linie immer eine positive Zählrate besitzt.

Im Abschnitt 5.2 über die Bayes'sche Methode wird ein Algorithmus vorgestellt, der diese Probleme vermeidet und stets Konfidenzintervalle liefert, die nicht unphysikalisch sind. Doch zuvor wird auf die  $\chi^2$ -Methode eingegangen und skizziert, warum sie für die Auswertung von Spektren mit geringer Statistik nicht zu gebrauchen ist.

### 5.1.2 Die $\chi^2$ -Methode

Eine weitere häufig benutzte Methode zur Bestimmung unbekannter Parameter ist die  $\chi^2$ -Methode (siehe auch hier [Bra68, Ead77, Pre86]). Diese Methode kann aus der ML-Methode abgeleitet werden, wenn folgende Annahmen vorliegen:

- Die Messfehler aller Daten  $x_k$  sind normalverteilt und schwanken mit unterschiedlichen Varianzen  $\sigma_k$  um den vom Modell vorhergesagten Bestwert  $f(x_k, \vec{a})$ .
- Alle Messfehler sind statistisch unabhängig.

Dann ist die Wahrscheinlichkeit  $L_k$ , einen Messwert  $x_k$  mit einer bestimmten Abweichung  $\sigma_k$  vom vorhergesagten Wert zu finden, gegeben durch die Gaußverteilung:

$$L_k(\vec{a}) \propto \exp\left(-\frac{(x_k - f(x_k, \vec{a}))^2}{2\sigma_k^2}\right).$$

Die ML-Funktion ergibt sich dann durch Bildung des Produktes aller  $L_k(\vec{a})$ , aus der die Bestwerte durch das Maximieren von  $L$  bzw. durch das Minimieren von  $-\ln L$  berechnet werden können:

$$-\ln L(\vec{a}) \propto \sum_{k=1}^M \left(\frac{x_k - f(x_k, \vec{a})}{\sigma_k}\right)^2 \stackrel{!}{=} \text{minimal}. \quad (5.3)$$

Dies ist die schon oben erwähnte  $\chi^2$ -Methode, auch *Least-Squares*-Verfahren genannt. Da diese Methode eine Normalverteilung voraussetzt, kann sie in Fällen mit poissonverteilten Daten nicht angewendet werden. Aus diesem Grund wird sie nicht weiter verwendet.

## 5.2 Die Bayes'sche Methode

Die Bayes'sche Statistik wurde im 18. Jahrhundert von dem englischen Mathematiker Thomas Bayes begründet [Bay1763]. Diese Statistik beruht auf folgendem Theorem über Wahrscheinlichkeitsaussagen (siehe auch [Pre89, Lee97, Koc00]):

$$P(A|BC) = \frac{P(A|C) P(B|AC)}{P(B|C)}$$

Hier bedeuten  $A$  die Aussage über ein unbekanntes Phänomen,  $B$  repräsentiert Aussagen, die Informationen über dieses unbekanntes Phänomen beinhalten und  $C$  bezeichnet eine Aussage über das Hintergrundwissen des unbekanntes Phänomens.  $P(A|C)$  wird als *Prior-Wahrscheinlichkeit* bezeichnet,  $P(A|BC)$  als *Posteriori-Wahrscheinlichkeit* und  $P(B|AC)$  als *Likelihood*. Die Wahrscheinlichkeit  $P(B|C)$  kann als Normierungskonstante interpretiert werden.

Es gibt zahlreiche Publikationen aus jüngster Zeit, die sich der Bayes'schen Methode bedienen. Diese wird zum Beispiel benutzt, um Ereignisse in Neutrinodetektoren zu rekonstruieren [Hil01], zur Analyse beobachteter Neutrinos von der Supernova 1987A [Lor01] oder zur Auswertung von Beschleunigerdaten [Kan00, Kel99]. Auch die ersten Ergebnisse vom WMAP wurden mit der Bayes'schen Methode analysiert [Spe03]. Darüber hinaus gibt es auch Publikationen, die sich rein abstrakt mit der Bayes'schen Methode auseinandersetzen wie [Pro00, Nar00].

In dem hier vorliegenden Fall, der Auswertung eines Spektrums auf die Existenz einer oder mehrerer Linien, entspricht  $A$  den unbekanntes Parametern und  $B$  den gemessenen Daten. Ein Hintergrundwissen  $C$  über die unbekanntes Parameter  $A$  liegt allerdings nicht vor. Es ist nur bekannt, dass das auszuwertende Spektrum ganzzahlige und nicht-negative Zählraten besitzt und dass die Intensität einer Linie ebenfalls nicht negativ werden kann. Diese Tatsache wird aber schon implizit in der Likelihood-Funktion berücksichtigt. Das Theorem nimmt somit die folgende Form an:

$$P(\vec{\xi}|\vec{x}) = \frac{p(\vec{x}|\vec{\xi}) \mu(\vec{\xi})}{\int p(\vec{x}|\vec{\xi}) \mu(\vec{\xi})}. \quad (5.4)$$



In dieser Formel ist  $p(\vec{x}|\vec{\xi})$  die Likelihood-Funktion,  $\mu(\vec{\xi})$  die Prior-Wahrscheinlichkeit und  $P(\vec{\xi}|\vec{x})$  die Posteriori-Wahrscheinlichkeit. Die  $\vec{\xi}$  sind die unbekannt Parameter und die  $\vec{x}$  die gemessenen Daten.

Die Herleitung der Likelihood-Funktion  $p(\vec{x}|\vec{\xi})$  für ein spezielles Problem stellt im Allgemeinen keine Schwierigkeit dar (siehe Abschnitt 5.1.1 und den folgenden Abschnitt). Für die Herleitung der Prior-Wahrscheinlichkeit dagegen existiert bisher keine allgemeingültige Vorgehensweise, insbesondere wenn kein Hintergrundwissen über den unbekannt Parameter vorliegt. In diesem Fall muss ein sogenannter *Non-Information-Prior* (NIP) verwendet werden. Doch bevor darauf näher eingegangen werden soll, wird im folgenden Abschnitt die ML-Funktion für das betrachtete Problem nochmals beschrieben und so weit vereinfacht, dass die nachfolgende Berechnung der Prior-Wahrscheinlichkeit erheblich erleichtert wird.

### 5.2.1 Herleitung der Likelihood-Funktion

Die auszuwertenden Spektren besitzen alle eine geringe Zählrate, so dass der Inhalt eines Kanals  $k$  durch die Poissonstatistik beschrieben werden kann:

$$q(x_k|\beta_k) = \frac{\beta_k^{x_k}}{x_k!} e^{-\beta_k} \quad x_k \in \mathbf{N} .$$

Diese Formel gibt die Wahrscheinlichkeit an,  $x_k$  Ereignisse in einem Kanal  $k$  zu finden, wenn der Erwartungswert  $\beta_k$  ist. Dieser Erwartungswert hängt dabei von den unbekannt Parametern  $\vec{\xi}$  ab.

Die Auswertung erfolgt in der Regel nicht über das gesamte Spektrum, sondern nur über einen relevanten Teil mit  $M$  Kanälen. Die Likelihood-Funktion ist dann gegeben durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten über jeden dieser Kanäle:

$$L \equiv p(\vec{x}|\vec{\xi}) = \prod_{k=1}^M \frac{\beta_k^{x_k}}{x_k!} e^{-\beta_k} . \quad (5.5)$$

Die Erwartungswerte  $\beta_k$  hängen von  $G + 1$  Untergrundkomponenten ab und bestehen aus einem konstanten Untergrund, überlagert von einer oder mehreren gaußförmiger Linien bei einer *festen* Position und mit einer *festen* Breite. Es gilt also:

$$\beta_k = \xi_0 c_0(k) + \xi_1 c_1(k) + \dots + \xi_G c_G(k) = \sum_{g=0}^G \xi_g c_g(k) .$$

Die  $c_g(k)$  sind Funktionen, die die Form der verschiedenen Untergrundkomponenten in Abhängigkeit vom Kanal  $k$  angeben. Die Funktion  $c_0(k)$  beschreibt den konstanten Untergrund während die Funktionen  $c_g(k)$  ( $g > 0$ ) die  $\gamma$ -Linien in Form einer Gaußkurve beschreiben:

$$\begin{aligned} c_0(k) &= \frac{1}{N_0} \\ c_1(k) &= \frac{1}{N_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-k_1)^2}{2\sigma^2}\right) \\ c_2(k) &= \frac{1}{N_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-k_2)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\dots \\ c_G(k) &= \frac{1}{N_G} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(k-k_G)^2}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Die  $k_g$  sind die festen Positionen der angenommenen Untergrundlinien, die die jeweils gleiche, feste Breite  $\sigma$  besitzen. Die  $N_g$  sind Faktoren zur Normierung jeder dieser Funktionen, so dass  $\sum_k c_g(k) = 1$  gilt ( $\forall g$ ).

Um die Rechnungen zu vereinfachen, werden die Parameter  $\xi_g$  wie folgt reparametrisiert:

$$\xi_g \equiv \rho \eta_g \quad \text{mit} \quad \rho = \sum_{g=0}^G \xi_g .$$

Das entspricht einer Normierung des neuen Intensitätsvektors  $\vec{\eta}$ , denn es gilt  $\sum_{g=0}^G \eta_g = 1$ . Der Wert  $\rho$  stellt die Normierung des betrachteten Teil des Spektrums dar. Für die  $\beta_k$  folgt damit:

$$\beta_k \equiv \rho \gamma_k \quad \text{mit} \quad \gamma_k = \sum_{g=0}^G \eta_g c_g(k) .$$

Die  $\eta_g$  sind jetzt nicht mehr unabhängig voneinander;  $\eta_0$  kann durch die anderen Komponenten ausgedrückt werden:

$$\eta_0 = 1 - \sum_{g=1}^G \eta_g . \quad (5.6)$$

Außerdem gilt  $\sum_{k=1}^M \gamma_k = 1$ , da die  $c_g(k)$  normiert sind.

Mit Hilfe dieser Reparametrisierung kann die ML-Funktion (5.5) ebenfalls umgeschrieben und vereinfacht werden:

$$p(\vec{x}|\rho, \vec{\eta}) = \underbrace{\frac{\rho^N}{N!}}_{p^{(1)}} e^{-\rho} \underbrace{N! \prod_{k=1}^M \frac{\gamma_k^{x_k}}{x_k!}}_{p^{(2)}} \quad \text{mit} \quad N \equiv \sum_{k=1}^M x_k .$$

Der erste Term  $p^{(1)}$  enthält ausschließlich die bekannte Gesamtzählrate, weshalb er nicht weiter betrachtet wird. Es ist leicht nachzurechnen und offensichtlich, dass dieser Term ein Maximum für  $\rho = N$  besitzt.

Einzig der zweite Term  $p^{(2)}$  beinhaltet die zu berechnenden Parameter  $\eta_g$  in den  $\gamma_k$ :

$$p^{(2)}(\vec{x}|\vec{\eta}) = N! \prod_{k=1}^M \frac{\gamma_k^{x_k}}{x_k!} . \quad (5.7)$$

Diese Gleichung ist die im Folgenden benutzte Likelihood-Funktion, mit der die Bestwerte  $\eta_g^*$  der Parameter durch Bildung des Maximums bestimmt werden. Der Faktor  $N!$  dient zur Normierung des Ausdrucks  $p^{(2)}$ , so dass  $\int p^{(2)}(\vec{x}|\vec{\eta}) d\eta = 1$  gilt.

Um die ursprünglich eingeführten Parameter  $\xi_g$  zu erhalten, müssen die  $\eta_g$  zurücktransformiert werden:

$$\xi_g = \rho \eta_g \equiv N \eta_g .$$

### 5.2.2 Herleitung der Prior-Wahrscheinlichkeit

Für die Berechnungen des Konfidenzbereiches der Parameter wird die Posteriori-Verteilung  $P(\rho, \vec{\eta}|\vec{x})$  und somit auch die Prior-Verteilung  $\mu(\vec{\eta})$  benötigt. Da in dem hier vorliegenden Problem kein Hintergrundwissen über die unbekannt Parameter  $\vec{\eta}$  vorliegen (insbesondere nicht über die Intensität der Linie bei 2039 keV), wird ein Non-Information-Prior (NIP) benötigt. Da es für einen NIP bisher keinen allgemein gültigen Ansatz gibt, werden im Folgenden verschiedene NIP diskutiert.

Ein konstanter Wert für  $\mu$  stellt den einfachsten Prior dar (*flacher Prior*). Es gibt aber auch oft die Wahl  $\mu(\eta) = (\eta + b)^m$  mit  $0 \leq m \leq 1$  und gegebenenfalls einer Konstanten  $b$  (für Probleme mit vorhandenem und bekanntem Untergrund, siehe z.B. [Nar00]). Daneben gibt es noch viele weitere Möglichkeiten einen NIP zu konstruieren, abhängig vom betrachteten Problem (siehe z.B. [Lee97]). Eine weitere spezielle Konstruktion wird in [Jef61] beschrieben (*Jeffreys Prior*). Das besondere an Jeffreys Prior ist, dass er implizit die in der Likelihood-Funktion angenommene Verteilung der Daten berücksichtigt. Nach [Jef61] gilt für die Prior-Wahrscheinlichkeit:

$$\mu(\vec{\eta}) = \sqrt{\det F}$$

wobei  $F$  die sogenannte Fisher-Matrix mit folgenden Elementen darstellt:

$$F_{ij} = \sum_{\vec{x}} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \sqrt{p(\vec{x}|\vec{\eta})} \frac{\partial}{\partial \eta_j} \sqrt{p(\vec{x}|\vec{\eta})} \quad i, j = 1, \dots, G . \quad (5.8)$$

Nr	Prior $\mu(\eta)$
1	1
2	$1/\eta$
3	$1/\sqrt{\eta}$
4	Jeffreys Prior

**Tabelle 5.1:** Tabelle einiger NIP, die miteinander verglichen werden.

Die Summation läuft dabei über alle Möglichkeiten von  $\vec{x}$ .

Da  $\frac{\partial}{\partial \eta_i} \sqrt{p} = \frac{1}{2} \sqrt{p} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln p$  ist, wird zunächst  $\frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln p$  (mit  $p \equiv p^{(2)}$  aus (5.7)) berechnet:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \eta_i} \ln p &= \frac{\partial}{\partial \eta_i} \sum_{k=1}^M (x_k \ln \gamma_k - \ln(x_k!)) \\
 &= \sum_{k=1}^M \frac{x_k}{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial \eta_i} \gamma_k \\
 &= \sum_{k=1}^M \frac{x_k}{\gamma_k} [c_i(k) - c_0(k)] .
 \end{aligned}$$

Dabei wird die Tatsache genutzt, dass  $\eta_0$  durch die anderen  $\eta_g$  ausgedrückt werden kann (siehe (5.6)). Für ein Element der Fisher-Matrix (5.8) gilt damit

$$\begin{aligned}
 F_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_k \sum_l \sum_{\vec{x}} p x_k x_l \frac{[c_i(k) - c_0(k)] [c_j(l) - c_0(l)]}{\gamma_k \gamma_l} \\
 &= \frac{1}{4} \sum_k \sum_l (N(N-1) \gamma_k \gamma_l + \delta_{kl} N \gamma_k) \frac{[c_i(k) - c_0(k)] [c_j(l) - c_0(l)]}{\gamma_k \gamma_l} \\
 &= \frac{1}{4} N(N-1) \sum_{k,l} [c_i(k) - c_0(k)] [c_j(l) - c_0(l)] \tag{5.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{4} N \sum_k \frac{[c_i(k) - c_0(k)] [c_j(k) - c_0(k)]}{\gamma_k} \\
 &= \frac{1}{4} N \sum_k \frac{[c_i(k) - c_0(k)] [c_j(k) - c_0(k)]}{\gamma_k} . \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

Dies folgt aus

$$\sum_{\vec{x}} p x_k x_l = \overline{x_k x_l} = N(N-1) \gamma_k \gamma_l + \delta_{kl} N \gamma_k , \tag{5.11}$$

dessen Herleitung im Anhang A beschrieben wird, und daraus, dass  $\sum_k c_p(k) = 1$  ist, wodurch der Summand (5.9) verschwindet.

Soll nur eine einzige Linie angepasst werden, dann hängt der Ausdruck (5.10) ausschließlich von  $\eta_1$  ab, so dass für die Priorwahrscheinlichkeit gilt:

$$\mu(\eta_1) \propto \left( \sum_k \frac{(c_1(k) - c_0(k))^2}{(1 - \eta_1) c_0(k) + \eta_1 c_1(k)} \right)^{1/2}. \quad (5.12)$$

Es kann vorkommen, dass  $c_1(k)$  für bestimmte Werte von  $k$  verschwindet. Die dabei auftretende Divergenz für  $\eta_1 \rightarrow 1$  ist zwar integrierbar, jedoch hinderlich bei den praktischen Berechnungen der Prior-Wahrscheinlichkeit.

Mit einer weiteren Variablensubstitution vermöge

$$\eta_1 = \sin^2(\varphi)$$

wird die Prior-Wahrscheinlichkeit nochmals reparametrisiert:

$$\begin{aligned} \mu_T(\varphi) &= \mu(\eta_1) \left| \frac{d\eta_1}{d\varphi} \right| \\ &= |2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)| \left( \sum_k \frac{(c_1(k) - c_0(k))^2}{\cos^2(\varphi) c_0(k) + \sin^2(\varphi) c_1(k)} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Verschwindet jetzt  $c_1(k)$  für bestimmte  $k$ , so ist der entsprechende Summand aus (5.13) proportional zu

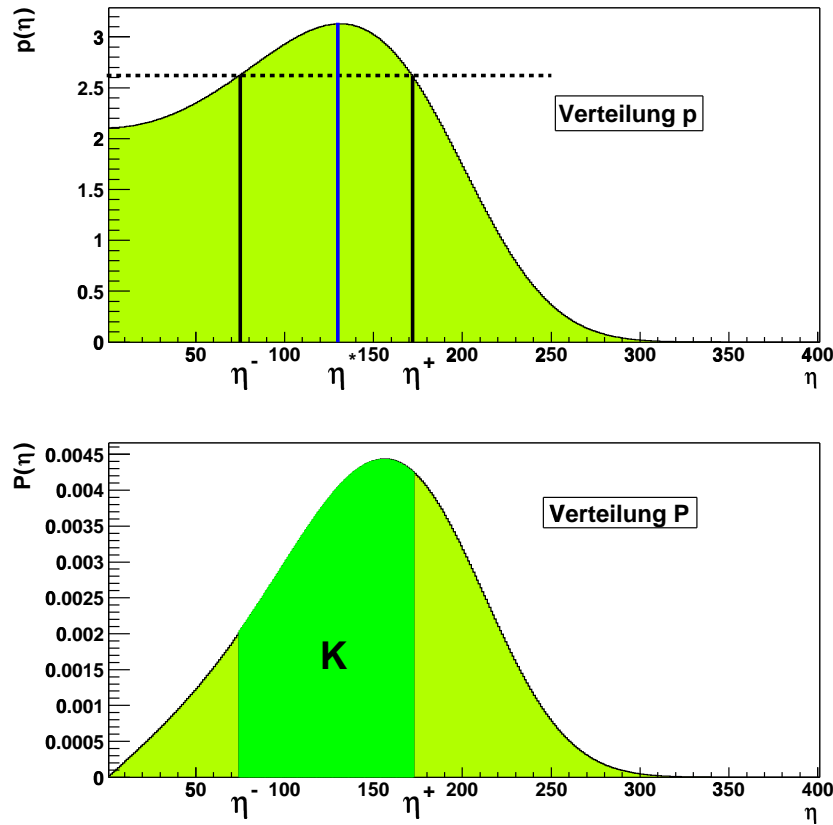
$$\cos(\varphi) \sin(\varphi) \sqrt{\frac{c_0^2(k)}{\cos^2(\varphi) c_0(k)}} = \sin(\varphi) \sqrt{c_0(k)}$$

und somit divergenzfrei für alle Werte von  $\varphi$  zwischen 0 und  $\frac{\pi}{2}$ . Die Prior-Wahrscheinlichkeit kann nun problemlos berechnet werden.

### 5.2.3 Bestimmung des Konfidenzintervalls

Die Bestimmung des Konfidenzintervalls wird zunächst für den Fall mit einem freien Parameter gezeigt und danach auf Fälle mit beliebiger Anzahl von Parametern verallgemeinert. Das Konfidenzintervall für ein bestimmtes Konfidenzniveau  $K$  (z.B. 95%) eines Parameters  $\eta$  sei  $[\eta^-; \eta^+]$ . Diese Werte  $\eta^-$  und  $\eta^+$  müssen folgende Bedingungen erfüllen:

$$\int_{\eta^-}^{\eta^+} P(\eta|\vec{x}) d\eta = K \quad \text{wobei} \quad p(\vec{x}|\eta^-) = p(\vec{x}|\eta^+) = \text{const} = q. \quad (5.14)$$



**Abbildung 5.1:** Abbildungen zur Erläuterung der Bestimmung des Konfidenzintervalls für den Fall eines unbekanntes Parameters  $\eta$ . Im obigen Bild ist die Verteilung  $p(\eta)$  mit der Konstruktionsanleitung für die beiden Werte  $\eta^-$  und  $\eta^+$  aufgetragen. Diese müssen den gleichen Funktionswert bei  $p$  besitzen, was einem horizontalen Schnitt durch  $p$  entspricht (gestrichelte Linie). Im unteren Bild ist die Verteilung  $P(\eta)$  aufgetragen, deren Fläche zwischen  $\eta^-$  und  $\eta^+$  dem Konfidenzintervall  $K$  entspricht. Die Stelle  $\eta^*$  stellt den Bestwert des Parameters  $\eta$  dar.

Das Integral über  $P(\eta|\vec{x})$  von  $\eta^-$  bis  $\eta^+$  muss der Konfidenz  $K$  entsprechen, während gleichzeitig die Funktionswerte von  $p(x|\eta)$  an den Stellen  $\eta = \eta^-$  und  $\eta = \eta^+$  identisch sein müssen. Diese Konstruktion ergibt sich daraus, dass man die Prior-Verteilung  $\mu(\eta)$  zugleich als Maß im Definitionsbereich von  $\eta$  betrachtet und das kürzeste Intervall bestimmt, in welchem  $\eta$  mit einer Wahrscheinlichkeit von  $K$  liegt. Deshalb wird dieses Intervall durch einen horizontalen Schnitt durch die Funktion  $P(\eta|\vec{x})/\mu(\eta) \equiv \text{const} \cdot p(\vec{x}|\eta)$  konstruiert (siehe Abbildung 5.1). Da die Funktion  $p(\eta|\vec{x})$  in der Regel unsymmetrisch in  $\eta$  ist, erstreckt sich auch das daraus abgeleitete Konfidenzintervall in der

Regel unsymmetrisch um den Bestwert.

Bei der praktischen Durchführung dieser Berechnung werden für unterschiedliche und zunächst beliebig gewählte Werte von  $q$  die passenden  $\eta^-$  und  $\eta^+$  bestimmt und danach das Integral berechnet. Die Integration wird dabei mit dem Romberg-Algorithmus [Pre86] durchgeführt. Ist der Wert des Integrals kleiner als  $K$  so wird der Wert von  $q$  erhöht, andernfalls erniedrigt. Dann wird diese Prozedur solange wiederholt, bis der Wert des Integrals innerhalb einer gewissen Genauigkeit mit  $K$  übereinstimmt.

Bei der Berechnung der Fehlerintervalle im Fall mehrerer Parameter wird zur Integration eine Monte-Carlo-Methode benutzt [Wei00]. Dazu werden  $N$  Parametervektoren  $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_G)$  mit zufällig erzeugten Elementen generiert und der Wert  $P(\vec{\eta}|\vec{x})$  zum Integral  $I$  addiert, falls  $p(\vec{x}|\vec{\eta}) > q$  ist. Dieses Integral muss danach mit  $N$  normiert werden ( $N = \mathcal{O}(4)$ ). Als Formel ausgedrückt ergibt sich so folgende Vorschrift:

$$I = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(\vec{\eta}_n|\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{\eta}_n \text{ mit } p(\vec{x}|\vec{\eta}_n) \geq q. \quad (5.15)$$

Dann wird wieder, wie im eindimensionalen Fall, das berechnete Ergebnis dieser Integration mit der vorgegebenen Konfidenz  $K$  verglichen und der Wert von  $q$  entsprechend erhöht oder erniedrigt. Mit diesem veränderten Wert  $q$  wird erneut ein Integral berechnet, bis es mit der Konfidenz  $K$  innerhalb einer gewissen Genauigkeit übereinstimmt. Die Konfidenzbereiche für die Parameter  $\eta_g$  ( $g = 1, \dots, G$ ) ergeben sich dann aus den Maximal- und Minimalwerten derjenigen  $\eta_g$ , die die Bedingung in Gleichung (5.15) erfüllt haben.

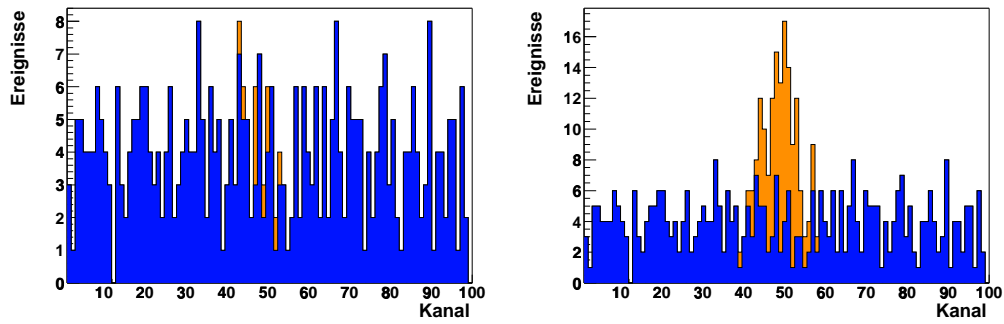
Für eine angemessene Genauigkeit werden sehr viele Berechnungen benötigt, so dass diese Methode nur für eine kleine Zahl von Parametern gut anwendbar ist.

#### 5.2.4 Bestimmung der Existenzwahrscheinlichkeit

Außer dem Bestwert und dem Konfidenzintervall lässt sich auch die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie berechnen. Dies geschieht durch die Berechnung der Wahrscheinlichkeit, mit der sich der Wert Null gerade im Konfidenzintervall befindet.

Dies wird im Folgenden sowohl für die ML-Methode als auch für die Bayes'sche Methode beschrieben.

**ML-Methode** Die in ROOT implementierte ML-Methode liefert bei einer Linienanpassung einen Best-Wert  $b$  und den dazugehörigen Fehler  $\Delta b$



**Abbildung 5.2:** Beispiel eines zufallsgenerierten Spektrums mit poissonverteiletem Untergrund von 4.0 Ereignissen pro Kanal und einer gaußförmigen Linie im Kanal 50 (Linienbreite entspricht einer Standardabweichung von  $\sigma = 4.0$  Kanälen). Das linke Bild zeigt ein Spektrum mit einer Linienintensität von 10 Ereignissen, das rechte ein Spektrum mit einer Linienintensität von 100 Ereignissen. Der Untergrund ist dunkel dargestellt, die Ereignisse der Linie hell.

(für  $1\sigma$ ). Damit lässt sich die Größe des Fehlerintervalls in Einheiten von  $\sigma$  berechnen, welche die Null gerade darin einschließt:

$$S = \frac{b}{\Delta b} .$$

Dieser Wert kann in eine prozentuale Wahrscheinlichkeit umgerechnet werden.

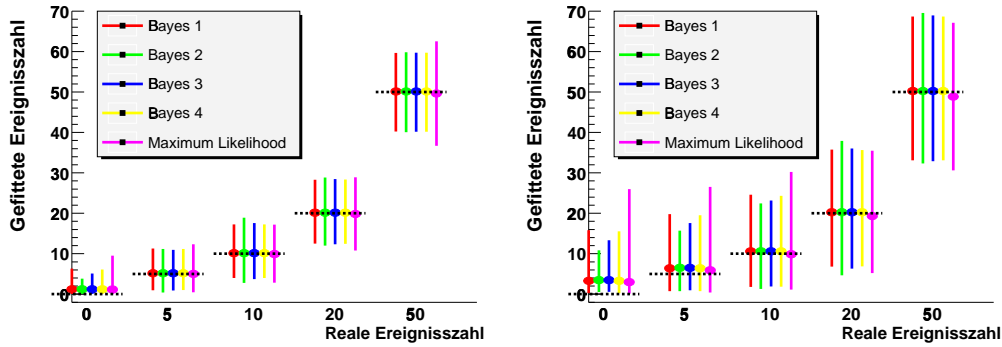
**Bayes-Methode** Mit der Bayes-Methode kann die Existenzwahrscheinlichkeit  $K_E$  berechnet werden, wenn für die Untergrenze des Integrals in (5.14) gerade der Wert *Null* gewählt wird ( $\eta^- \equiv 0$ ). Dann wird genau das Konfidenz-Intervall bestimmt, welches die Null gerade einschließt.

### 5.2.5 Statistische Tests

In diesem Abschnitt werden die Bayes'sche Methode mit den verschiedenen Priors und die ML-Methode miteinander verglichen und getestet. Für diese Tests werden künstliche Spektren erzeugt und anschließend von den Methoden analysiert.

Die künstlichen Spektren werden erzeugt, indem sie zunächst mit einem poissonverteilten Untergrund  $b$  nach dem Zufallsprinzip gefüllt wurden, bevor die  $n$  Ereignisse der Linie mit konstanter Breite nach der Gaußverteilung





**Abbildung 5.3:** Vergleich der verschiedenen Priors untereinander mit der ML-Methode als Ergebnis eines Tests. Für jede auf der x-Achse dargestellte Ereigniszahl wurden je 1000 zufallsgenerierte Spektren mit den fünf angegebenen Methoden ausgewertet. Für das linke Bild wurden Spektren mit einem poissonverteilten Untergrund von 0.5 Ereignissen pro Kanal verwendet und für das rechte Bild Spektren mit einem Untergrund von 4.0 Ereignissen pro Kanal. Jede der hier dargestellten vertikalen Linien zeigt den Mittelwert der berechneten Bestwerte (dicke Punkte) mit ihrem  $1\sigma$ -Fehlerbereichen. Die Mittelwerte der Bestwerte stimmen gut mit den Soll-Werten (schwarze, gestrichelte Linie) überein. Außerdem ist zu erkennen, dass sich die Konfidenzintervalle der verwendeten Methoden kaum unterscheiden.

ebenfalls zufällig ausgewürfelt und zum Spektrum addiert werden. In Abbildung 5.2 ist ein Beispiel eines solchen künstlichen Spektrums mit einer Untergrundrate von  $b = 4.0$  Ereignissen pro Kanal und einer Linie im Kanal 50 mit  $n = 10$  bzw.  $n = 100$  Ereignissen und mit einer Breite von  $\sigma = 4.0$  (Standardabweichung) zu sehen.

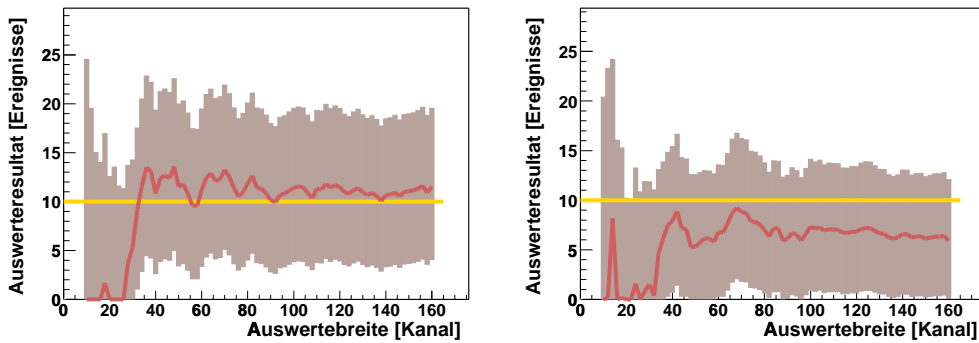
Für die Tests der Methoden und der verschiedenen Priors werden jeweils 1000 Spektren mit gleichem Untergrund  $b$  und gleicher Linienintensität  $n$  erzeugt und ausgewertet. Es werden dabei nur zwei der vier Parameter aus Gleichung (5.2) bestimmt, nämlich die Untergrundrate  $a_0$  und die Intensität der Linie  $a_1$  mit dem dazugehörigen Konfidenzintervall zu 90%  $[a_1^-, a_1^+]$ . Dann wird der Prozentsatz  $R$  der Fälle festgestellt, in denen der bekannte wahre Wert der Linienintensität  $n$  im berechneten 90%-Intervall  $[a_1^-, a_1^+]$  liegt. Diese Zahl sollte nicht kleiner als 90 sein, da sonst das Konfidenzintervall in vielen Fällen falsch berechnet wird, was auf eine fehlerhafte oder für das vorliegende Problem unbrauchbare statistische Methode hinweist.

In Tabelle 5.2 wird dieser Wert  $R$  für verschiedene Ereigniszahlen und Untergrundraten für alle untersuchten Methoden angegeben. Das Ergebnis **0.0** für die Priors 2 und 3 und den Fall  $n = 0$  kommt zustande, weil diese Priors für  $\eta \rightarrow 0$  eine Singularität besitzen (siehe Tabelle 5.1 und 5.2). Damit ist die *Null* stets aus dem Konfidenzintervall ausgeschlossen.

Typ	Ereignisse in Linie $n$				
	0	5	10	20	50
	$b = 0.5$				
Bayes 1	93.0	98.0	97.4	99.2	99.6
Bayes 2	<b>0.0</b>	<b>81.9</b>	97.1	99.5	99.6
Bayes 3	<b>0.0</b>	94.4	96.8	99.4	99.6
Bayes 4	91.7	97.7	97.0	99.4	99.6
Max. Lik.	98.7	99.2	98.5	99.5	99.9
	$b = 4.0$				
Bayes 1	92.0	94.9	94.6	93.3	96.5
Bayes 2	<b>0.0</b>	96.3	<b>78.4</b>	<b>88.1</b>	97.7
Bayes 3	<b>0.0</b>	95.8	92.8	<b>87.8</b>	96.9
Bayes 4	91.3	94.9	94.3	92.6	96.5
Max. Lik.	96.8	95.1	94.6	95.3	96.4

**Tabelle 5.2:** Resultierende Werte für  $R$  (aus jeweils 1000 zufallsgenerierten Spektren) für verschiedene Untergrundraten  $b$  und Linienintensitäten  $n$ . Der Wert  $R$  gibt prozentual an, wie oft der wahre Wert der Linienintensität  $n$  im berechneten 90%-Konfidenzintervall enthalten ist. Da nur endlich viele Testspektren verwendet wurden, können die Werte um  $\pm 3.1\%$  schwanken ( $\frac{\sqrt{1000}}{1000}$ ). Siehe Tabelle 5.1 für eine Beschreibung der unterschiedlichen Prior-Verteilungen.

In Abbildung 5.3 wird gezeigt, wie sich die verschiedenen Methoden unterscheiden. Für jede auf der x-Achse dargestellte Ereigniszahl wurden je 1000 zufallsgenerierte Spektren mit den fünf angegebenen Methoden ausgewertet. Für das linke Bild wurden Spektren mit einem Untergrund von 0.5 Ereignissen pro Kanal verwendet und für das rechte Bild Spektren mit einem Untergrund von 4.0 Ereignissen pro Kanal. Jede der hier dargestellten vertikalen Linien zeigt den Mittelwert der berechneten Bestwerte (dicke Punkte) mit ihrem 90% Konfidenzbereichen (farbige Linie). Die Mittelwerte der Bestwerte stimmen gut mit den Soll-Werten (schwarze, gestrichelte Linie) überein. Außerdem ist zu erkennen, dass sich die Konfidenzintervalle der verwendeten Methoden kaum unterscheiden. Die Ergebnisse in Tabelle 5.2 zeigen, dass die Bayes'sche Methode mit den Prior-Wahrscheinlichkeiten 1 und 4 praktisch identische Ergebnisse mit der ML-Methode ergeben. Für die folgenden Auswertungen wird stets die Bayes'sche Methode mit Jeffreys Prior verwendet (Bayes 4).



**Abbildung 5.4:** In diesem Bild sind die Auswertresultate von zwei Zufallsspektren als Funktion der Auswertbreite dargestellt. Für beide Spektren wurde je eine gaußförmige Linie mit 10 Ereignissen erzeugt (helle Linie) über einem konstanten, poissonverteilten Untergrund von 4 Ereignissen pro Kanal. Der dunkle Bereich entspricht dem 68.3% Konfidenzbereich und die dunkle durchgezogene Linie dem Bestwert. In beiden Abbildungen schwanken die Resultate unterhalb einer Auswertbreite von  $\sim 40$  Kanälen stark. Für einen Bereich ab ca. 40 Kanälen erhält man zuverlässige Ergebnisse.

### 5.2.6 Auswertebereich

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwiefern die Breite des zur Auswertung benutzten Bereichs Auswirkung auf das Fitresultat hat.

Um diese Frage zu beantworten, wurden ebenfalls Tests mit künstlich erzeugten Spektren durchgeführt. Bei der Auswertung dieser Spektren wurde der verwendete Auswertebereich variiert, was in Abbildung 5.4 für zwei Beispiele dargestellt ist. Auf der x-Achse ist der benutzte Auswertebereich angegeben und auf der y-Achse das resultierende Konfidenzintervall für 68.3 % (dunkle Fläche). Wie gut zu erkennen und zu erwarten ist, schwanken die Fitresultate bei kleinen Auswertebereichen sehr stark. Wird der Auswertebereich vergrößert, dann verringern sich diese Schwankungen und die Resultate stabilisieren sich. Zuverlässige Ergebnisse erhält man ab einem Auswertebereich von etwa  $\pm 20$  Kanälen.

In Abbildung 5.5 werden die Ergebnisse von je 100 zufallsgenerierten Spektren gezeigt. Für jedes dieser Spektren, bestehend aus einem konstanten Untergrund und einer Linie mit  $n$  Ereignissen, wurde mit der Bayes'schen Methode der Bestwert für die Linienintensität  $b$  berechnet. Der Mittelwert dieser Abweichungen  $\Delta$  aller 100 Spektren ist in diesen Abbildungen auf der y-Achse aufgetragen, während die Skala auf der x-Achse den Auswertebereich

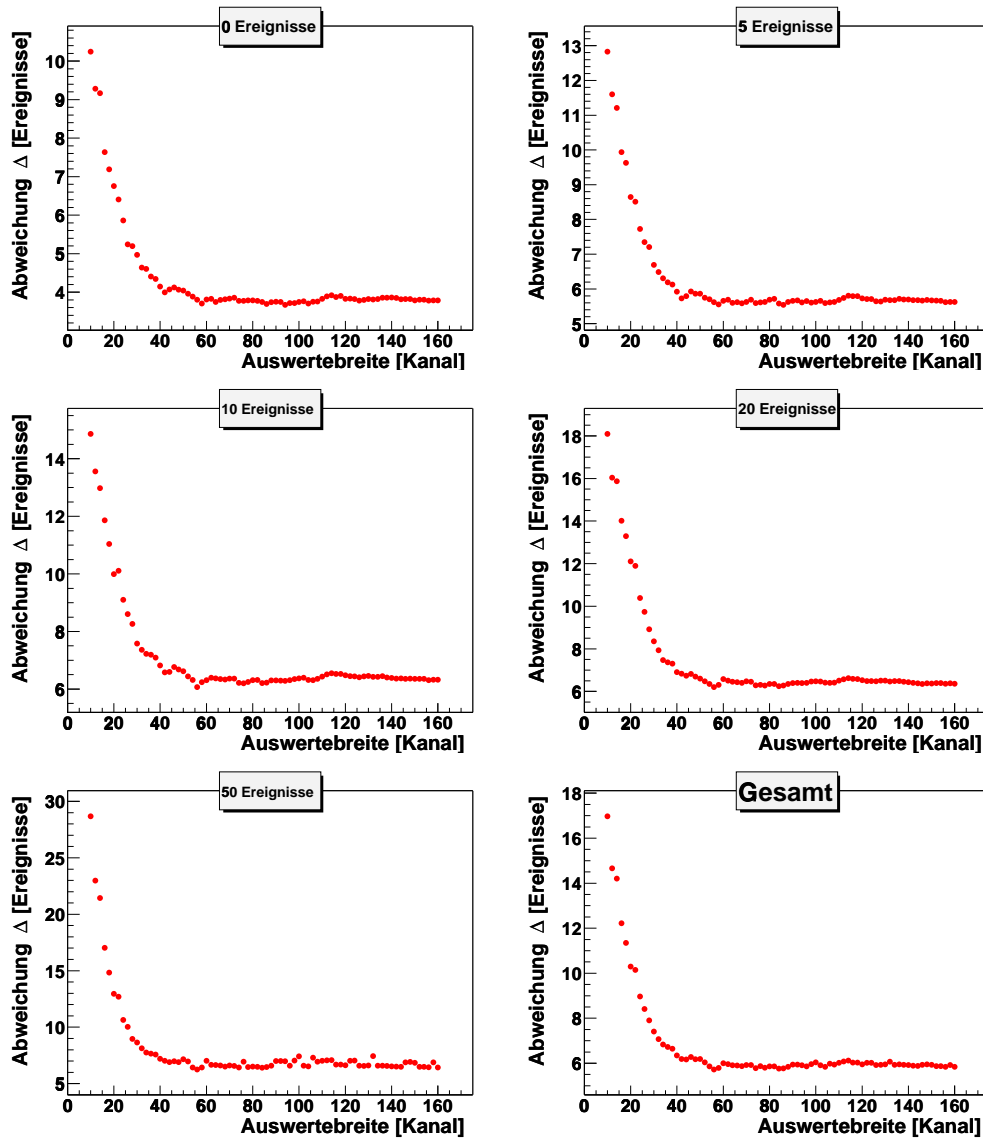
angibt. Der Wert  $\Delta$  wird dabei berechnet wie folgt:

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |n - b_i| \quad N = 100 \quad n = 0, 5, 10, 20, 50 .$$

Das Bild unten rechts zeigt das entsprechende Resultat, wenn alle Spektren zusammen betrachtet werden. Es ist sehr gut zu erkennen, dass der Verlauf dieser Abweichungen für alle verwendeten Intensitäten sehr ähnlich ist und dass ab einer Auswertebreite von  $\sim 40$  Kanälen die mittlere Abweichung nicht weiter abnimmt.

Dieses Ergebnis ist bedeutend, da es wichtig ist, den Auswertebereich so klein wie möglich zu halten, um nicht unnötig Untergrundlinien aus der Umgebung des schwachen Signals mit in den Untergrund einzubeziehen. Damit würde sich der Untergrund vergrößern und dadurch die Empfindlichkeit der Signal-suche herabsetzen.

Das Ergebnis dieser Analyse zeigt, dass Kritiken, wie sie in [Aal02a, Fer02, Zde02] erhoben wurden und in denen sehr große Analysefenster für nötig angesehen wurden, nicht aufrecht erhalten werden können.



**Abbildung 5.5:** Dieses Bild zeigt das Resultat der Auswertungen von je 100 künstlich erzeugten Spektren mit verschiedenen Linienintensitäten bei einem poissongenerierten Untergrund mit 4.0 Ereignissen/Kanal. Auf der x-Achse ist die Auswertebreite aufgetragen und auf der y-Achse die mittlere Abweichung der aus den Zufallsspektren berechneten Bestwerten zu den bekannten Soll-Werten. Wie gut zu erkennen ist, sind diese Abweichungen bei kleinen Auswertebreiten sehr groß, sie nähern sich aber ab einer Auswertebreite von etwa  $\sim 40$  Kanälen einem nahezu konstanten Wert.



# Kapitel 6

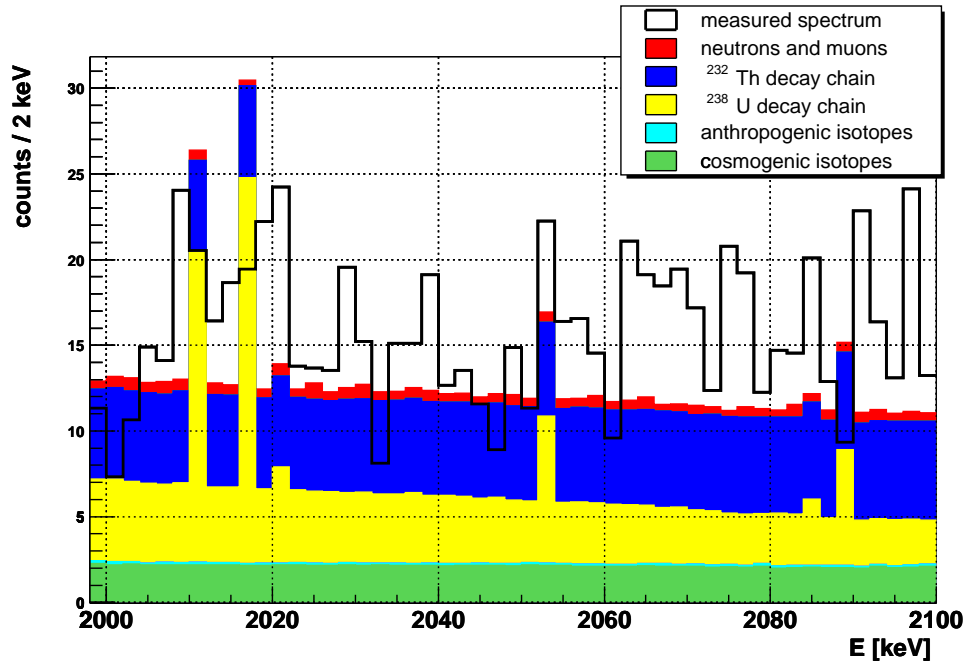
## Ergebnisse

Nachdem aus den Daten des Heidelberg-Moskau-Experiments die Summenspektren erstellt und die statistischen Methoden beschrieben worden sind, erfolgt in diesem Kapitel die Auswertung dieser Daten. Es wird zunächst der Untergrund des Heidelberg-Moskau-Experiments diskutiert, bevor das Gesamt- sowie das SSE-Spektrum ausgewertet werden. Am Schluss dieses Kapitels folgt die Diskussion der Ergebnisse sowie ein Vergleich mit anderen Experimenten, die ebenfalls den neutrinolosen Doppelbetazerfall von  $^{76}\text{Ge}$  untersuchen.

### 6.1 Untergrund

Der Untergrund im Bereich von 2000 bis 2100 keV wird von verschiedenen Komponenten erzeugt: durch Zerfälle radioaktiver Isotope sowie durch myonen- bzw. neutroneninduzierte Reaktionen im Detektor. Abbildung 6.1 zeigt eine Simulation aller bekannter Untergrundkomponenten für den Energiebereich von 2000 bis 2100 keV (aus [Dör02]). Der Untergrund in diesem Bereich setzt sich hauptsächlich aus den Isotopen der natürlichen Zerfallsreihen von  $^{238}\text{U}$  und  $^{232}\text{Th}$  sowie aus dem Zerfall des kosmogenen Isotops  $^{60}\text{Co}$  zusammen. Die Linien in dem simulierten Spektrum stammen alle aus dem Zerfall des Isotops  $^{214}\text{Bi}$  und liegen bei den Energien 2010.89, 2016.7, 2021.6, 2052.94, 2085.1 und 2089.7 keV [Lund]. Das kosmogene Isotop  $^{56}\text{Co}$  besitzt bei den Energien 2034.76 und 2041.16 keV ebenfalls Linien, es ist mit einer Halbwertszeit von nur 77.3 Tagen sehr kurzlebig.

Kosmogene Isotope werden erzeugt, wenn Material der kosmischen Höhenstrahlung ausgesetzt wird. Durch inelastische Kernreaktionen entstehen so viele kurzlebige Isotope, die einen Teil des Untergrunds erzeugen können. Befindet sich das Detektormaterial in einem ausreichend geschützten Unter-



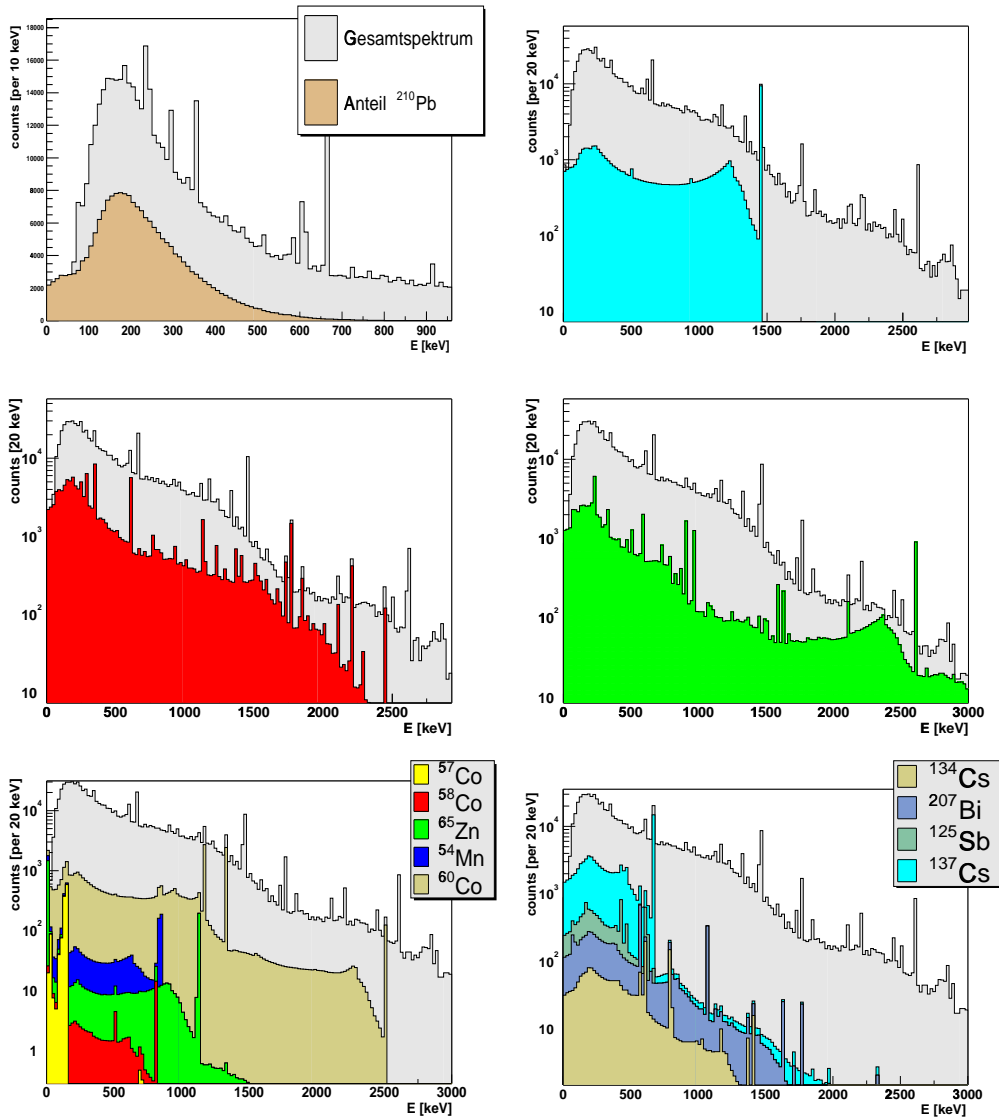
**Abbildung 6.1:** Simulierter Untergrund des Heidelberg-Moskau-Experiments im Bereich 2000-2100 keV mit allen bekannten Untergrundkomponenten. Die schwarze durchgezogene Linie entspricht den gemessenen Daten von November 1995 bis April 2002 (aus [Dör02]).

grundlabor, können keine weiteren kosmogene Isotope mehr produziert werden. Aus diesem Grund werden die Daten der ersten 200 Tage nach Ankunft der Detektoren im Untergrundlabor nicht benutzt, damit die kosmogenen Isotope Zeit haben, ihre Aktivität zu reduzieren. Innerhalb dieser Zeit klingt die Aktivität von  $^{56}\text{Co}$  auf etwa 17% des Anfangswertes ab. Eine Analyse bei den entsprechenden Energien im Spektrum brachte außerdem keinen Hinweis auf eine Aktivität, so dass das Isotop  $^{56}\text{Co}$  im Auswertebereich um 2039 keV keine Rolle spielt.

Es gibt zwar zahlreiche weitere Isotope, die in diesem Energiebereich, Linien erzeugen könnten, doch liefert keines dieser Isotope einen nennenswerten Beitrag zum Untergrund [Kla02]. Auch kann durch Monte-Carlo Rechnungen ein Beitrag von neutron- bzw. myoninduzierten Reaktionen ausgeschlossen werden [Dör02]. Dies betrifft insbesondere Linien aus den Reaktionen  $^{74}\text{Ge} + n \rightarrow ^{75}\text{Ge} + \gamma$  und  $^{76}\text{Ge} + n \rightarrow ^{77}\text{Ge} + \gamma$  [Kla03b]. Befindet sich bei einer Energie von 2039 keV eine  $\gamma$ -Linie, dann muss es sich um eine bisher unbekannte Linie handeln.

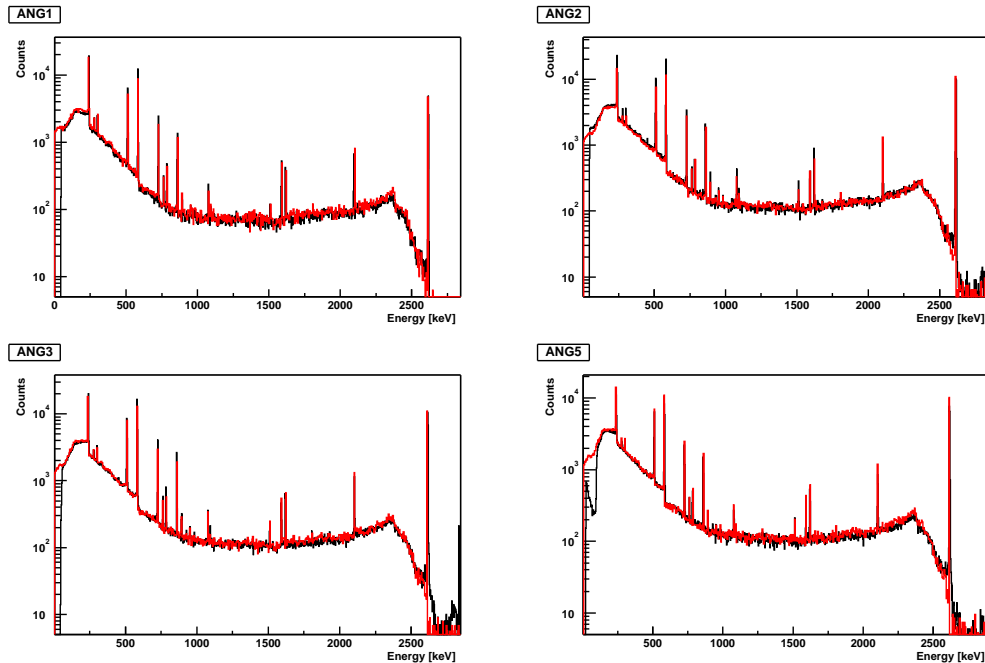
In Abbildung 6.2 werden die simulierten Spektren der verschiedenen Unter-





**Abbildung 6.2:** Darstellung der simulierten Untergrundkomponenten (aus [Dör02]). Oben links: Anteil an  $^{210}\text{Pb}$  aus der Bleiabschirmung; Oben rechts: Anteil des Isotops  $^{40}\text{K}$ ; Mitte links: Anteil der Isotope aus der  $^{238}\text{U}$ -Zerfallsreihe; Mitte rechts: Anteil der Isotope aus der  $^{232}\text{Th}$ -Zerfallsreihe; Unten links: kosmogene Aktivitäten und unten rechts die Anteile der anthropogenen Aktivitäten. Das im Hintergrund befindliche, grau unterlegte Spektrum stellt das Messspektrum mit den Daten aller fünf Detektoren von November 1995 bis April 2002 dar.

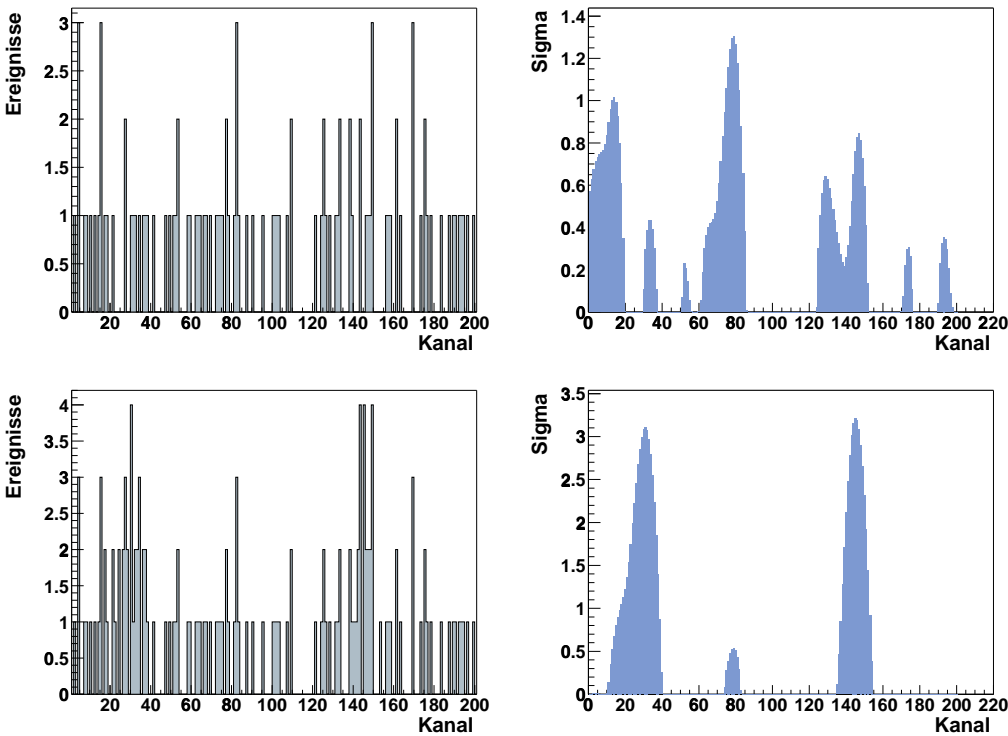
grundkomponenten zusammen mit dem Messspektrum im Detail gezeigt. Es gibt Aktivitäten der natürlichen Zerfallsreihen ( $^{238}\text{U}$  und  $^{232}\text{Th}$ ) sowie von



**Abbildung 6.3:** Diese Abbildungen zeigen einen Vergleich zwischen den gemessenen Daten (schwarze Linie, November 1995 bis April 2002) und den simulierten Spektren (rote Linie) für jeden Detektor im Einzelnen. Außer für Detektor ANG4 ist die Übereinstimmung von Simulation und Messung ausgezeichnet (aus [Dör02]).

<sup>40</sup>K. Außerdem gibt es Aktivitäten einiger kosmogener (<sup>57</sup>Co, <sup>58</sup>Co, <sup>60</sup>Co, <sup>54</sup>Mn und <sup>65</sup>Zn) und einiger anthropogener Isotope (<sup>134</sup>Cs, <sup>137</sup>Cs, <sup>207</sup>Bi und <sup>125</sup>Sb). Neutronen- oder myoneninduzierte Ereignisse erzeugen nur sehr wenig Untergrund in den Detektoren und sind in diesen Abbildungen nicht dargestellt. Zu den durch Myonen und Neutronen verursachten Aktivitäten und für eine detaillierte Diskussion des Untergrunds siehe [Dör02].

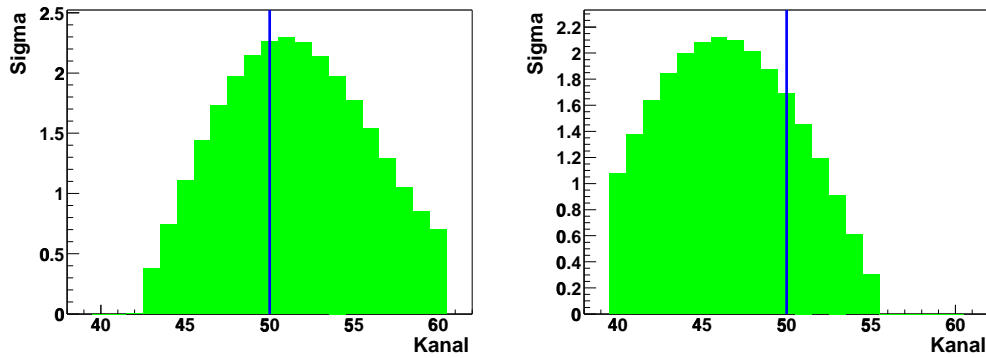
In Abbildung 6.3 werden für jeden Detektor in Aufbau A ein gemessenes und ein simuliertes <sup>228</sup>Th-Eichspektrum gegenübergestellt (aus [Dör02]). Die Übereinstimmung von Messung und Simulation ist praktisch perfekt. Dies ist auch ein Maß für die Zuverlässigkeit der in den Abbildungen 6.1 und 6.2 gezeigten Simulationen.



**Abbildung 6.4:** Die beiden linken Bilder zeigen künstlich erzeugte Spektren mit einem poissonverteilten Untergrund von 0.5 Ereignissen pro Kanal. Das obere Bild besteht nur aus Untergrund, während sich im unteren Bild zwei gaußförmige Linien mit Intensitäten von 20 bzw. 15 Ereignissen in den Kanälen 30 und 145 befinden, jeweils mit einer Breite (Standardabweichung) von 4.0 Kanälen. Die beiden rechten Bilder zeigen die zugehörigen Peakscan-Bilder, berechnet mit der Bayes'schen Methode. Deutlich sind im unteren Bild die beiden simulierten Linien zu erkennen, während das obere Bild nur fake-Linien aufgrund zufälliger statistischer Fluktuationen in den Daten zeigt. Für Details siehe Text.

## 6.2 Peakscan-Verfahren

Um herauszufinden, an welchen Stellen im Spektrum sich Linien befinden können, werden die Spektren einem sogenannten 'Peakscan' unterzogen. Für einen Peakscan wird an jedem Punkt im betrachteten Teil des Spektrums ein Linienfit durchgeführt und berechnet, wie groß die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie an diesem Punkt ist. Der Linienfit passt dabei eine gaußförmige Linie mit gegebener Breite an das Spektrum an, während der Rest des betrachteten Spektrums als konstanter Untergrund angenom-



**Abbildung 6.5:** Darstellung zweier Peakscan-Bilder aus zwei, mit verschiedenen Zufallszahlen erzeugten Spektren. Es handelt sich um Spektren mit einem poissonverteilten Untergrund und einer gaußförmigen Linie mit 15 Ereignissen im Kanal 50 und einer Breite (Standardabweichung) von 4.0 Kanälen. Im linken Bild stimmt das Maximum der Wahrscheinlichkeit gut mit dem erwarteten Wert überein, im rechten Bild hingegen ist die Abweichung ziemlich groß. Entspricht ein Kanal einer Energie von 0.36 keV, so beträgt die Abweichung für das rechte Bild  $\sim 1.44$  keV.

men wird. Werden die Wahrscheinlichkeiten über der Energie oder dem Kanal aufgetragen, ergeben sich wie in Abbildung 6.4 rechts für zwei Beispielspektren dargestellte Bilder.

In den linken Bildern von Abbildung 6.4 sind Spektren mit einem poissonverteilten Untergrund und auf der rechten Seite die daraus berechneten Peakscan-Bilder abgebildet. Das obere Bild besteht nur aus poissonverteiltem Untergrund, das untere Bild dagegen besitzt zwei gaußförmige Linien mit 15 bzw. 20 Ereignissen. Es gibt für beide Spektren einige Regionen (blaue Flächen) an denen die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie nicht verschwindet. Diese sogenannten Regionen mit erhöhter Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie (HPE-Region, *High Probability of Existence*) zeigen die Stellen an, an denen sich Linien befinden könnten.

Besteht das zufallsgenerierte Spektrum ausschließlich aus Untergrund (Abbildung 6.4 oben), so findet diese Methode nur HPE-Regionen, die durch statistische Schwankungen im Untergrund hervorgerufen werden. In diesem Fall befinden sich diese HPE-Regionen an Stellen, an denen keine realen Linien existieren, sie werden durch sogenannte *fake*-Linien verursacht.

Besitzt das Spektrum aber tatsächlich reale Linien, dann werden diese Linien in der Regel mit einer größeren Wahrscheinlichkeit gefunden als die fake-Linien, während die Wahrscheinlichkeiten dieser Linien geringer werden. Wird nämlich an der Position einer fake-Linie die Existenzwahrscheinlich-

Spektrum	Detektoren	Zeitraumen	Signifikanz [kg y]
Gesamt	1,2,3,4,5	2.8.1990-16.5.2000	54.98
Gesamt	1,2,3,5	2.8.1990-16.5.2000	46.50
Gesamt	1,2,3,4,5	2.8.1990-16.4.2002	70.62
Gesamt	1,2,3,5	2.8.1990-16.4.2002	55.57
SSE	2,3,4,5	20.11.1995-16.5.2000	36.53
SSE	2,3,5	20.11.1995-16.5.2000	28.05
SSE	2,3,4,5	20.11.1995-16.4.2002	50.88
SSE	2,3,5	20.11.1995-16.4.2002	39.21

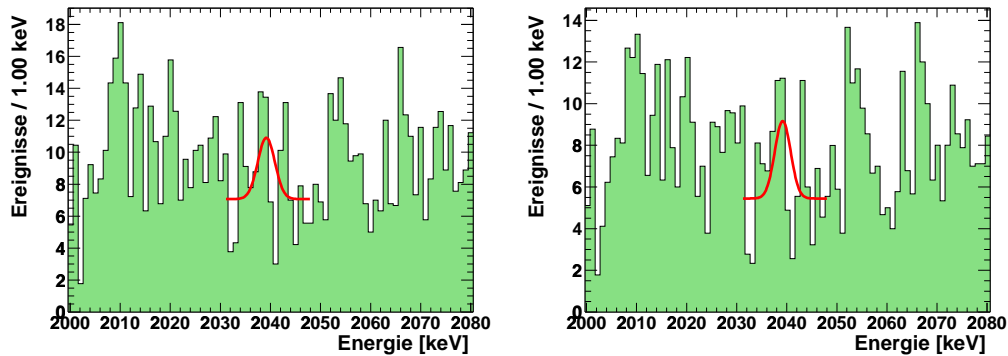
**Tabelle 6.1:** Tabelle mit den Messzeiten und den statistischen Signifikanzen der bislang gemessenen Daten.

keit berechnet, so ist diese geringer, da durch das Vorhandensein der realen Linien der Untergrund erhöht wird. Dies wird in Abbildung 6.4 unten dargestellt. In diesem Fall (es wird exakt der gleiche Untergrund verwendet wie in Abbildung 6.4 oben) werden die beiden künstlich erzeugten Linien in den Kanälen 30 und 145 mit einer Signifikanz von  $3\sigma$  (entsprechend ca. 99.7%) eindeutig gefunden. Alle fake-Linien werden klar unterdrückt und auch die Struktur bei Kanal 75 wird auf etwa  $0.5\sigma$  (entsprechend nur noch 38.3%) abgeschwächt.

Liegen also Spektren mit realen Linien vor, dann muss der Auswertebereich entsprechend eingeschränkt werden, damit der Untergrund nicht unnötig durch diese Linien erhöht wird. Wird im obigen Beispiel nur der Bereich bis zum Kanal 100 zur Auswertung verwendet, dann wird die Linie im Kanal 30 sogar mit einer Signifikanz von  $\sim 4\sigma$  gefunden.

In Abbildung 6.4 ist auch zu erkennen, dass in Fällen mit realen Linien im Spektrum weitaus weniger HPE-Regionen vorhanden sind als in einem Spektrum mit ausschließlich Untergrund. In dem gezeigten Beispiel ohne reale Linien gibt es acht HPE-Regionen, im Spektrum mit zwei realen Linien sind diese praktisch verschwunden.

Die Lage des Maximums der Wahrscheinlichkeiten der so gefundenen Linien muss außerdem nicht unbedingt genau mit der Position der realen Linie übereinstimmen. Durch statistische Fluktuationen liegt dieses Maximum in der Regel leicht verschoben an einer anderen Position, wie in Abbildung 6.5 gezeigt wird. Dort ist ein vergrößerter Bereich eines Peakscan-Bildes dargestellt, das aus zwei künstlich erzeugten Spektren mit unterschiedlichen Zufallszahlen erzeugt wurde, das eine gaußförmige Linie im Kanal 50 mit 15



**Abbildung 6.6:** Darstellung des Summenspektrums mit Daten aller Detektoren (links, 54.98 kg y) bzw. ohne Daten des Detektors ANG4 (rechts, 46.50 kg y) von August 1990 bis Mai 2000. Die eingezeichnete Linie ist ein Fit an eine Gaußlinie an der Stelle 2039.006 keV im Bereich von 2031 bis 2048 keV.

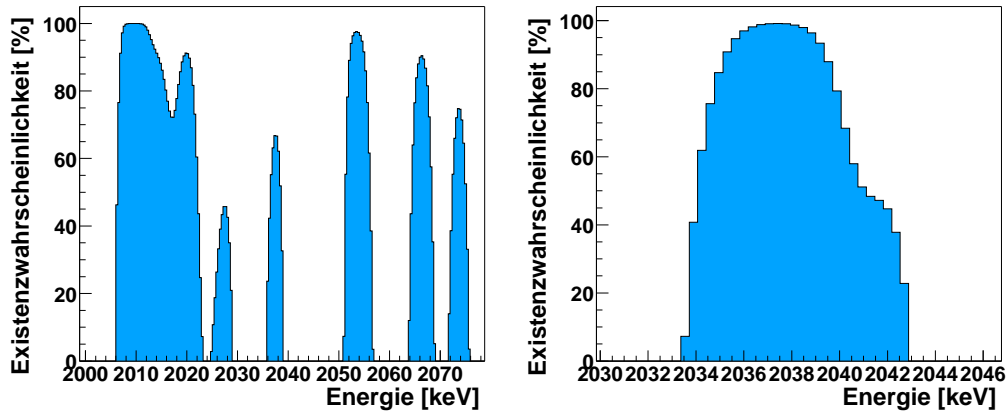
Ereignissen besitzt. Das Maximum des Peakscans liegt im linken Bild ziemlich gut an der realen Position der simulierten Linie (dargestellt durch die schwarze vertikale Linie), während dies im rechten Bild nicht der Fall ist. Hier gibt es eine deutliche Abweichung von mehreren Kanälen, was in einem Spektrum mit  $s = 0.36$  keV/Kanal einer Differenz von 1.44 keV entspricht. Diese Differenz verschwindet natürlich bei Linien mit großer Intensität.

## 6.3 Auswertung der Daten

In dem nun folgenden Abschnitt werden die Daten des Heidelberg-Moskau-Experiments bis zum Mai 2000 ausgewertet. Die Auswertung dieser Daten ist abgeschlossen. Es werden sowohl Peakscan-Bilder des Gesamt- und des SSE-Spektrums gezeigt als auch entsprechende Bilder der Spektren mit den Fits an die erwartete Linie des neutrinolosen Doppelbetazerfalls bei 2039.006 keV. Es folgt zuerst die Auswertung der Gesamtdaten, bevor die mit der PFA gewonnenen SSE-Spektren ausgewertet werden. Einige Daten zu den verwendeten Spektren und deren statistische Signifikanzen sind in Tabelle 6.1 aufgelistet.

### 6.3.1 Gesamtspektrum

Das Gesamtspektrum vom 2.8.1990 bis zum 16.5.2000 enthält Daten mit einer statistischen Signifikanz von 54.98 kg y (bzw. 46.50 kg y für das Spektrum ohne Detektor ANG4). Ein Ausschnitt des relevanten Energiebereiches ist in Abbildung 6.6 gezeigt.

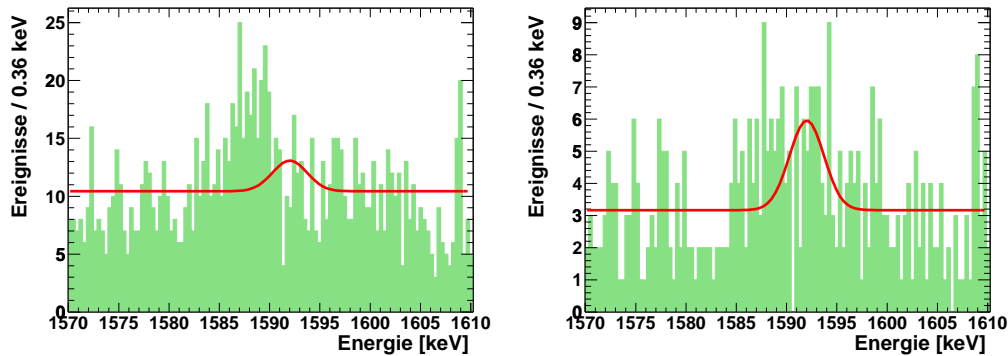


**Abbildung 6.7:** Peakscan-Bilder des Gesamtspektrums mit allen Detektoren und den Daten von August 1990 bis Mai 2000 im Energiebereich von 2000 bis 2100 keV (links) bzw. von 2031 bis 2048 keV (rechts).

Detektoren	Daten	Halbwertszeit [ $10^{25}$ y]	Existenz- wahrsch.
1,2,3,4,5	2.8.1990-16.5.2000	$1.61^{+33.5}_{-0.81}(95.0\%)$	96.5%
		$1.61^{+1.85}_{-0.57}(68.3\%)$	
1,2,3,5	2.8.1990-16.5.2000	$1.50^{+16.8}_{-0.75}(95.0\%)$	97.4%
		$1.50^{+1.55}_{-0.52}(68.3\%)$	
1,2,3,4,5	2.8.1990-16.4.2002	$1.50^{+7.55}_{-0.71}(95.0\%)$	98.8%
		$1.50^{+1.21}_{-0.47}(68.3\%)$	
1,2,3,5	2.8.1990-16.4.2002	$1.53^{+8.64}_{-0.73}(95.0\%)$	98.6%
		$1.53^{+1.30}_{-0.49}(68.3\%)$	

**Tabelle 6.2:** Tabelle mit den Ergebnissen der Linienauswertung für die Gesamtspektren mit bzw. ohne Detektor ANG4, bestimmt mit der Bayes'schen Methode. Hier sind auch die *vorläufigen* Ergebnisse aus den Spektren mit allen Daten bis April 2002 angegeben.

In Abbildung 6.7 links wird zunächst das Peakscan-Bild für den Energiebereich von 2000 bis 2080 keV gezeigt. Auf diesem Bild sind viele HPE-Regionen zu erkennen von denen einige bekannten Linien des Isotops  $^{214}\text{Bi}$  zugeordnet werden können. Es sind dies die HPE-Regionen von 2006 bis 2023 keV (Linien bei 1010, 1060 und 1201 keV) sowie die HPE-Region bei 2054 keV (Linie



**Abbildung 6.8:** Diese Abbildungen zeigen die Leistungsfähigkeit der eingesetzten PFA. Das linke Bild zeigt das Gesamtspektrum im Bereich von 1570 bis 1610 keV (mit den Daten von November 1995 bis April 2002). Die in diesem Bild dargestellte Kurve ist ein Fit an die double-escape Linie bei 1592.5 keV, die allerdings von einer  $\gamma$ -Linie des Isotops  $^{228}\text{Ac}$  bei 1588.2 keV völlig unterdrückt wird. Das rechte Bild hingegen zeigt das Spektrum nach Anwendung aller drei PFA. Hier ist jetzt deutlich die double-escape Linie zu erkennen, während die Untergrundlinie von  $^{228}\text{Ac}$  deutlich abgeschwächt ist.

bei 2052 keV). Die einzige HPE-Region im Energiebereich zwischen 2030 und 2050 keV lässt sich der Linie des neutrinolosen Doppelbetazerfalls zuordnen. Bei den anderen HPE-Regionen muss es sich um  $\gamma$ -Linien und nicht um Fluktuationen handeln, da sie auch in anderen Experimenten gesehen werden (siehe Abschnitt 6.3.3).

Weil im Energiebereich von 2000 bis 2080 keV definitiv Untergrundlinien existieren, muss für eine objektivere Auswertung der Energiebereich eingeschränkt werden (siehe Abschnitt 6.2). Das Peakscan-Bild des kleineren Auswertebereiches ist in Abbildung 6.7 rechts für den Bereich von 2031 bis 2048 keV dargestellt. Dieser Auswertebereich entspricht 47 Kanälen. Auf diesem Bild ist zu erkennen, dass sich bei einer Energie von 2039.006 keV mit großer Wahrscheinlichkeit eine Linie befindet.

Die in Abbildung 6.6 eingezeichnete Kurve stellt einen Fit an eine Gaußlinie im Bereich von 2031 bis 2048 keV dar, deren Position bei 2039.006 keV liegt und die eine Halbwertsbreite von 4.00 keV besitzt. Die Intensität dieser Linie beträgt  $16.4^{+13.6}_{-14.5}$  Ereignisse (95% C.L.), während die Existenzwahrscheinlichkeit 96.5% beträgt. In Abbildung 6.6 rechts wird der gleiche Fit im Gesamtspektrum *ohne* Detektor ANG4 dargestellt. Die Intensität dieser Linie beträgt  $14.8^{+14.6}_{-13.6}$  Ereignisse (95% C.L.) mit einer Existenzwahrscheinlichkeit von 97.4%. Die resultierenden Bestwerte für die Halbwertszeiten für



Linienbereich	Existenzwahrscheinlichkeit			
	mit		ohne	
	Detektor ANG4			
2037.2-2040.8	99.90%	(3.9 $\sigma$ )	99.93%	(3.4 $\sigma$ )
2035.4-2042.6	99.80%	(3.1 $\sigma$ )	99.87%	(3.2 $\sigma$ )
2033.9-2044.0	99.993%	(4.0 $\sigma$ )	99.993%	(4.0 $\sigma$ )

**Tabelle 6.3:** Tabelle mit Existenzwahrscheinlichkeiten für die Linie bei 2039 keV, berechnet mit der FC-Methode aus dem Summenspektrum von August 1990 bis Mai 2000. Es wurden verschiedene Linienbereiche zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten verwendet, während die Bereiche zur Bestimmung des Untergrunds stets gleich gewählt wurden (siehe Text).

den neutrinolosen Doppelbetazerfall sind damit  $1.61_{-0.57}^{+1.88} \times 10^{25}$  y (68.3%) bzw.  $1.50_{-0.52}^{+1.55} \times 10^{25}$  y (68.3%) (siehe auch [Kla01b, Kla02]). In Tabelle 6.2 sind diese Resultate zusammen mit den Ergebnissen aus der vorläufigen Analyse des Summenspektrums von August 1990 bis April 2002 angegeben.

Neben den Auswertungen mit der ML-Methode und der Methode nach Bayes können die gemessenen Daten auch mit der Methode von Feldman und Cousins (FC) [Fel98] ausgewertet werden. Diese Methode berücksichtigt nicht die individuelle Verteilung der einzelnen Ereignisse, sondern berechnet die Konfidenzgrenzen der Linien mit nur zwei Parametern  $n$  und  $\mu$ . Der Parameter  $n$  entspricht dabei der Anzahl der Ereignisse in einem Bereich, der die Linie enthält (*Linienbereich*). Der Parameter  $\mu$  beinhaltet die erwartete Anzahl von Untergründereignissen für diesen Bereich. Wird als Beispiel das Gesamtspektrum und ein Linienbereich von 2035.4 bis 2042.6 keV verwendet ( $\pm 2.0$  Standardabweichungen), so befinden sich in diesem Bereich insgesamt 66 Ereignisse ( $n = 66$ ). Die erwartete Anzahl von Untergründereignissen lässt sich aus umliegenden Bereichen ermitteln, also z.B. aus den Bereichen von 2031.0 bis 2033.9 keV und von 2045.1 bis 2048.0 keV. Dort werden insgesamt 36 Ereignisse gefunden, so dass umgerechnet im Linienbereich 45.0 Untergründereignisse erwartet werden ( $\mu = 45.0$ ). Mit diesen beiden Parametern ergibt sich nach der FC-Methode eine Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie bei 2039.006 keV von 99.80%.

Werden verschiedene Linienbereiche gewählt, dann schwankt die Wahrscheinlichkeit für die Existenz einer Linie bei 2039 keV zwischen 99.04% und 99.996%. Tabelle 6.3 zeigt einige Resultate für verschiedene Linienbereiche.

Detektoren	Daten	Halbwertszeit [ $10^{25}$ y]	Existenz- wahrsch.
2,3,4,5	20.11.1995-16.5.2000 <sup>†</sup>	$1.81^{+111}_{-0.90}$ (90.0%)	91.6%
		$1.81^{+3.61}_{-0.73}$ (68.3%)	
2,3,5	20.11.1995-16.5.2000 <sup>†</sup>	$1.61^{+20.8}_{-0.73}$ (90.0%)	96.8%
		$1.61^{+2.08}_{-0.54}$ (68.3%)	
2,3,4,5	20.11.1995-16.5.2000 <sup>*</sup>	$2.44^{+51.3}_{-1.18}$ (95.0%)	96.5%
		$2.44^{+2.81}_{-0.85}$ (68.3%)	
2,3,5	20.11.1995-16.5.2000 <sup>*</sup>	$3.00^{+43.3}_{-1.29}$ (95.0%)	97.2%
		$3.00^{+3.33}_{-0.96}$ (68.3%)	

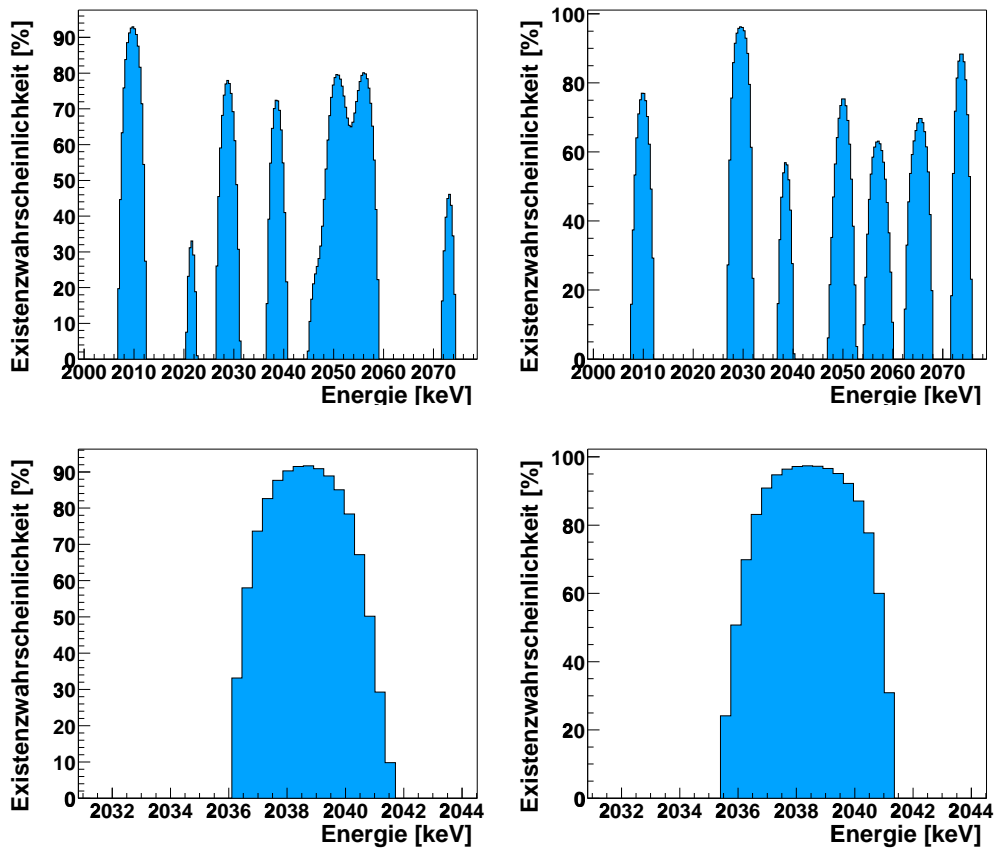
**Tabelle 6.4:** Tabelle mit den Resultaten der Linienauswertung der SSE-Daten (nur Ereignisse, die gleichzeitig von allen drei PFA-Methoden als single site events akzeptiert wurden) mit der trivialen Korrektur (<sup>†</sup>) bzw. mit der neu entwickelten Korrektur (<sup>\*</sup>) mit bzw. ohne Detektor ANG4, bestimmt mit der Bayes'schen Methode.

### 6.3.2 SSE-Spektrum

Da die Elektronik zur Messung der Pulsformen für die Detektoren ANG2, ANG3, ANG4 und ANG5 erst im November 1995 installiert wurde, besitzt das SSE-Spektrum mit 36.53 kg y (bzw. 28.05 kg y ohne Detektor ANG4) eine geringere statistische Signifikanz als das Gesamtspektrum. Diese und andere Werte sind in Tabelle 6.1 aufgelistet.

Bevor das SSE-Spektrum ausgewertet wird, soll ein Beispiel für die Leistungsfähigkeit der Pulsformanalyse gezeigt werden. Dazu wird die double-escape Linie des Isotops  $^{208}\text{Tl}$  bei 1592.5 keV untersucht, welche vollständig aus SSE besteht. Ein Fit an diese Linie im Gesamtspektrum zeigt eine sehr schlechte Linienanpassung (Abbildung 6.8 links), da die double-escape Linie durch eine full-energy  $\gamma$ -Linie des Isotops  $^{228}\text{Ac}$  (bei 1588.2 keV) völlig unterdrückt wird. Wird jetzt die Pulsformanalyse durchgeführt, ergibt sich ein Spektrum, in dem die Ereignisse der  $^{228}\text{Ac}$ -Linie so stark reduziert sind, dass die double-escape Linie von  $^{208}\text{Tl}$  deutlich hervortritt (Abbildung 6.8 rechts).

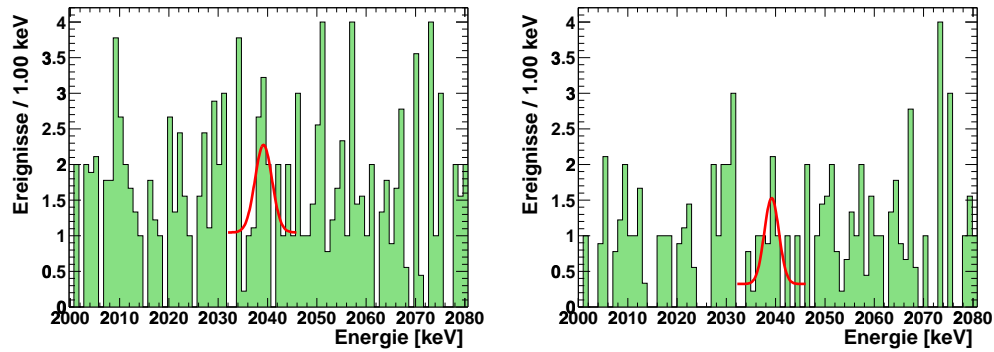
In Abbildung 6.9 ist ein Peakscan des unkorrigierten SSE-Spektrums für die Daten der Detektoren ANG2-5 (linke Bilder), bzw. für die Daten ohne Detektor ANG4 (rechte Bilder) dargestellt. Die Linienanpassungen an diese beiden Spektren im Energiebereich von 2032 bis 2046 keV werden in Abbildung 6.10 gezeigt. Die Intensität der Linie bei 2039.006 keV wird aus dem unkorrigierten



**Abbildung 6.9:** Peakscan-Bilder der SSE-Spektren mit den Daten von November 1995 bis Mai 2000 im Energiebereich von 2000 bis 2080 keV (bzw. von 2032 bis 2046 keV). Die linken Abbildungen zeigen Auswertungen der Spektren mit den Detektoren ANG2, ANG3, ANG4 und ANG5, während die Bilder auf der rechten Seite die Auswertungen der Spektren ohne Detektor ANG4 zeigen.

Spektrum mit den vier Detektoren zu  $5.3^{+5.3}_{-5.1}$  Ereignissen (90.0% C.L.) bestimmt mit einer Existenzwahrscheinlichkeit von 91.6%. Für die Auswertung der Daten ohne Detektor ANG4 ergeben sich  $4.6^{+3.4}_{-4.3}$  Ereignisse (95.0% C.L.) mit 96.8% Existenzwahrscheinlichkeit. Werden diese Werte nach der trivialen Methode korrigiert mit  $p = 0.55 \pm 0.10$  (siehe Abschnitt 4.4.3), dann ergeben sich die Halbwertszeiten zu  $1.81^{+111}_{-0.90} \times 10^{25}$  y (90.0% C.L.) bzw.  $1.61^{+20.8}_{-0.73} \times 10^{25}$  y (90.0% C.L.). Diese und weitere Werte sind in Tabelle 6.4 aufgelistet (siehe auch [Kla01b, Kla02]).

Wird das Spektrum zuerst mit der neu entwickelten Methode korrigiert und dann ausgewertet, ergeben sich für die Halbwertszeiten  $2.44^{+51.3}_{-1.18} \times 10^{25}$  y

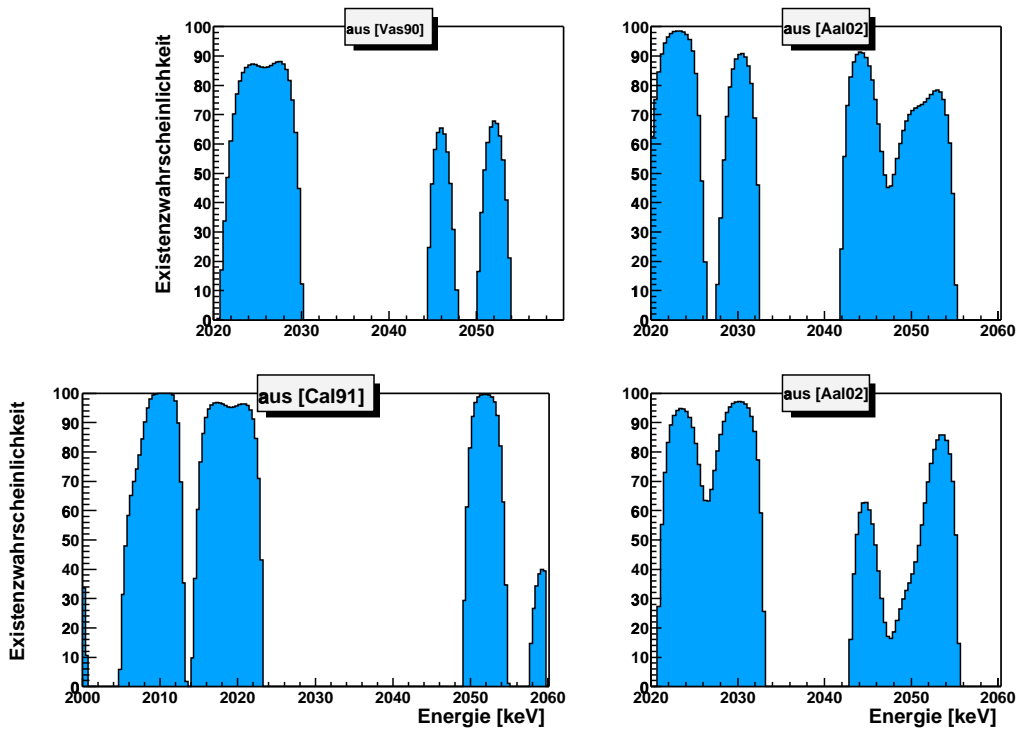


**Abbildung 6.10:** Die linke Abbildung zeigt die Auswertung des unkorrigierten SSE-Spektrums mit den Detektoren ANG2, ANG3, ANG4 und ANG5, während das Bild auf der rechten Seite die Auswertung des unkorrigierten SSE-Spektrums ohne Detektor ANG4 zeigt. In beiden Fällen handelt es sich um Spektren mit Daten von November 1995 bis Mai 2000 mit einem Fit im Energiebereich von 2032 bis 2046 keV (entsprechend 39 Kanäle).

(95.0% C.L.) bzw.  $3.00^{+43.3}_{-1.29} \times 10^{25}$  y (95.0% C.L.). Die Wahrscheinlichkeiten für die Existenz einer Linie liegen in diesen Fällen bei 96.5% bzw. bei 97.2%. Auch die SSE-Spektren wurden mit der FC-Methode untersucht. Wird für den Linienbereich das Intervall von 2036.2 bis 2042.0 keV gewählt ( $\pm 2$  Standardabweichungen) und die Untergrundbereiche von 2032.2 - 2035.5 und 2044.5 - 2046.2 keV, dann ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit für 97.1% für die Existenz einer Linie bei 2039 keV für das SSE-Spektrum ohne Detektor ANG4. Wird der Linienbereich variiert, schwanken die Wahrscheinlichkeiten zwischen 94.9 und 99.2%.

### 6.3.3 $^{214}\text{Bi}$ -Linien

Die oben erwähnten Linien des Isotops  $^{214}\text{Bi}$  bei Energien von 2010.78, 2016.7, 2011.60 und 2052.94 keV im Gesamtspektrum sind nicht nur in den Spektren des Heidelberg-Moskau-Experiments zu erkennen, es gibt auch in anderen Experimenten, die den neutrinolosen Doppelbetazerfall von  $^{76}\text{Ge}$  untersuchen (siehe Tabelle 6.6), Hinweise für diese Linien. Dies wird in Abbildung 6.11 gezeigt, in der Peakscan-Bilder von Daten aus verschiedenen Experimenten miteinander verglichen werden. Die diesen zugrundeliegenden Daten sind den in den Bildern angegebenen Publikationen entnommen. Diese enthalten nur Daten für den Energiebereich von 2020 bis 2060 keV, nur [Ca191] enthält auch Daten ab 2000 keV. Das kontroverse Resultat von [Aa102] überschätzt



**Abbildung 6.11:** Diese Bilder zeigen die aus den Daten diverser Experimente berechnete Peakscan-Bilder (siehe Tabelle 6.6). Es sind Übereinstimmungen zwischen diesen und den in Abbildung 6.7 sowie 6.9 gezeigten Graphiken zu erkennen. Das Spektrum oben rechts zeigt das Peakscan-Bild aus den SSE-Daten von [Aal02] und unten rechts wird das Peakscan-Bild aus den Gesamtdaten von [Aal02] gezeigt.

die abgeleitete Halbwertszeit. Eine konservative Auswertung dieser Daten führt zu  $5 \times 10^{24}$  y [Kla03a].

In allen vier Bildern 6.11 werden übereinstimmend mit Bild 6.7 Linien bei den Energien um  $\sim 2020$  keV und  $\sim 2052$  keV gefunden. Im Bild unten links, das einen größeren Energiebereich zeigt ([Cal91]), gilt diese Übereinstimmung auch für die Linie bei 2010 keV. Außerdem ist auf diesen Bildern zu erkennen, dass in einigen Fällen eine Linie um  $\sim 2028$  keV zu existieren scheint, in Übereinstimmung mit den in dieser Arbeit ausgewerteten Daten (siehe auch Abschnitt 6.5).

Dass die Linien von  $^{214}\text{Bi}$  real sind, wird durch einen Vergleich von berechneten und gemessenen Linienintensitäten bekräftigt. In Tabelle 6.5 werden

Energie [keV]	Intensität [Ereignisse]	Verzweigungs verh. [%]	Erwartete Rate <sup>a</sup>	Erwartete Rate <sup>b</sup>
2010.78(15)	$37.8 \pm 10.2$	0.05(6)	$12.2 \pm 0.6$	$4.1 \pm 0.7$
2016.70(30)	$13.0 \pm 8.5$	0.0058(10)	$15.6 \pm 0.7$	$0.5 \pm 0.1$
2021.80(30)	$16.7 \pm 8.8$	0.020(6)	$1.2 \pm 0.1$	$1.6 \pm 0.5$
2052.94(15)	$23.2 \pm 9.0$	0.078(11)	$4.7 \pm 0.3$	$6.4 \pm 1.0$

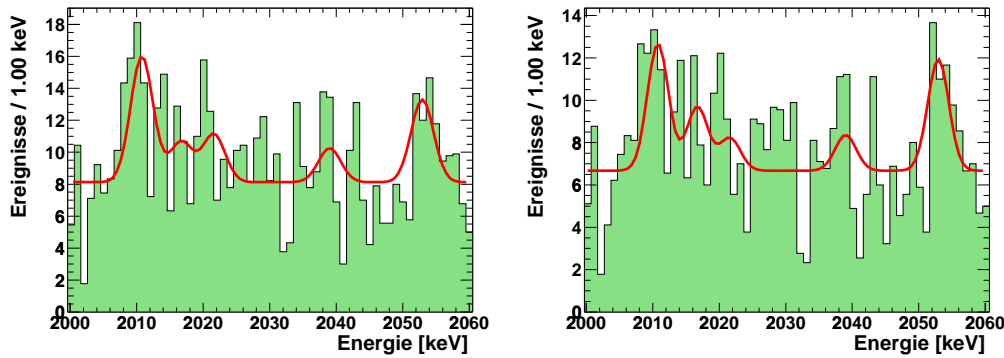
**Tabelle 6.5:** Mit der ML-Methode bestimmte Intensitäten der  $^{214}\text{Bi}$ -Linien im Bereich von 2000 bis 2080 keV im Vergleich zu berechneten, erwarteten Raten. Nur die in Spalte *a* angegebenen Raten berücksichtigen real auftretende Summationseffekte, die Werte in Spalte *b* jedoch nicht. Für mehr Details siehe Text und [Kla01b, Kla02].

Quelle	Statistik kg y	Energieauflösung FWHM [keV]	Halbwertszeitgrenze [y]
[Vas90]	0.87	3.3	$1.3 \times 10^{24}$ (68% C.L.)
[Aal02]	8.9	4.0	} $5.0 \times 10^{24}$ (90% C.L.)*
[Aal02]	4.0 (SSE)	4.0	
[Cal91]	0.94	3.7	$1.2 \times 10^{24}$ (90% C.L.)

**Tabelle 6.6:** Statistische Signifikanzen und Energieauflösungen der in Abbildung 6.11 ausgewerteten Daten von anderen Experimenten zur Untersuchung des neutrinolosen Doppelbetazerfalls von  $^{76}\text{Ge}$ . Der mit \* gekennzeichnete Wert ist eine konservative Auswertung der in [Aal02] angegebenen Daten [Kla03a].

diese Intensitäten für die vier  $^{214}\text{Bi}$ -Linien im Energiebereich von 2000 bis 2060 keV gezeigt (siehe auch [Kla01b, Kla02]). Die Energien dieser Linien sowie die Verzweigungsverhältnisse stammen aus [Lund], und die Intensitäten der Linien wurden aus einem simultanen ML-Fit an die Linien bestimmt (wie in Abbildung 6.12 dargestellt). Für die Skalierung der erwarteten Raten wurden drei der stärksten vier Linien von  $^{214}\text{Bi}$  verwendet. Es sind dies die Linien bei 609.312, 1764.494 und 2204.21 keV (siehe Abbildungen 4.9 und 4.10). Die Linie bei 1120.87 keV kann nicht verwendet werden, da diese zum Teil von einer Linie des Isotops  $^{65}\text{Zn}$  mit einer Energie von 1115.55 keV überlagert ist.

Werden die erwarteten Raten einfach nach den Verzweigungsverhältnissen berechnet, dann ergeben sich systematisch zu kleine Werte (Spalte *b*), da



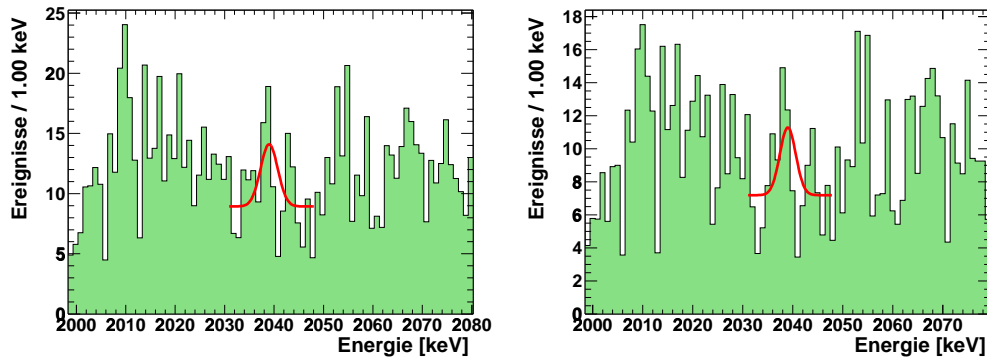
**Abbildung 6.12:** Abbildung des Spektrums von August 1990 bis Mai 2000 im Energiebereich von 2000 bis 2060 keV mit einer Anpassung der Linie bei 2039.006 keV und der erwarteten Linien von  $^{214}\text{Bi}$ . Das linke Bild zeigt das Spektrum mit, das rechte Bild ohne Detektor ANG4.

Summationseffekte nicht berücksichtigt werden. Dieser Effekt kommt zustande, wenn zwei oder mehrere Photonen in einer Kaskade gleichzeitig emittiert werden, und die Summe ihrer Energien sich zu einer Energie des direkten Übergangs addieren (*true coincidence summing*).

Auf diese Weise kann die Linie bei 2010.7 keV durch die Summe zweier Photonen mit 1401.50 und 609.31 keV und die Linie bei 2016.7 keV durch die Summe zweier Photonen mit 1407.98 und 609.31 keV erklärt werden. Diese Summationseffekte sind abhängig von der Entfernung der radioaktiven Quelle zum Detektor. Je näher sich die Quelle am Detektor befindet, umso stärker sind diese Summationseffekte. Da sich die Verschmutzungen von  $^{214}\text{Bi}$  hauptsächlich in dem die Detektoren direkt umgebenden Kupfer befinden [Die99, Dör02], müssen die Summationseffekte berücksichtigt werden. Da es sich bei dem Übergang in  $^{214}\text{Bi}$  mit einer Energie von 2016.7 keV um einen E0-Übergang handelt, kann eine Linie mit dieser Energie überhaupt nur über diese Kaskade gesehen werden und nur bei sehr kleinen Abständen zwischen Quelle und Detektor. Dies wurde durch Messungen mit einer  $^{214}\text{Bi}$ -Quelle bestätigt [Kla03c].

Dafür wurde mit der Monte-Carlo Program GEANT4<sup>1</sup> das Isotop  $^{214}\text{Bi}$  in den Kupferbauteilen des Heidelberg-Moskau-Experiments simuliert [Dör02], eine Simulation mit GEANT 3 [Tom03] gibt praktisch identische Resultate. Die aus der ersten Simulation stammenden skalierten Linienintensitäten sind in Tabelle 6.5, Spalte a, aufgelistet; sie stimmen innerhalb der  $2\sigma$ -Messfehler mit

<sup>1</sup>GEometry ANd Tracking



**Abbildung 6.13:** Darstellung des Summenspektrums mit den Daten von August 1990 bis November 2002 für alle fünf Detektoren (links, 70.62 kg y) und ohne Detektor ANG4 (rechts, 55.57 kg y). Die eingezeichnete Linie ist ein Fit an eine Gaußlinie bei einer Energie von 2039.006 keV im Bereich von 2031 bis 2048 keV.

den experimentellen Werten überein. Diese Übereinstimmung untermauert, dass im Energiebereich zwischen 2000 und 2060 keV tatsächlich einige Linien von  $^{214}\text{Bi}$  stammen. Eine entgegengesetzte Aussage [Aal02a] basiert auf dem Fehler, das *true coincidence summing* (siehe Seite 103) nicht berücksichtigt zu haben (siehe auch [Kla02]). Wie auf Seite 84 ausgeführt und begründet, ist es deshalb notwendig, zur Analyse der Existenz einer Linie bei 2039.006 keV einen kleineren Auswertebereich zu verwenden.

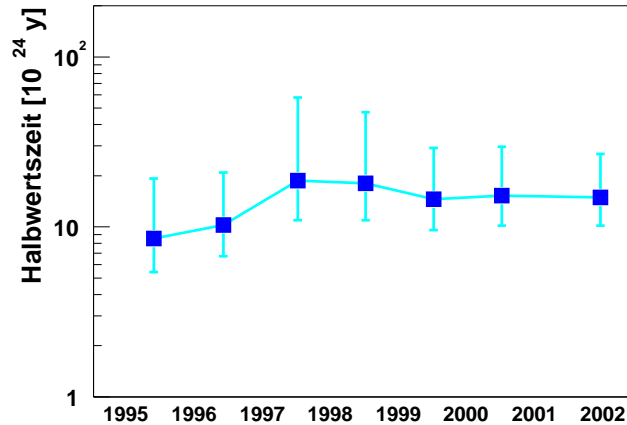
## 6.4 Auswertung der Daten bis 2002

Da die Daten bis zum Jahr 2002 noch nicht vollständig ausgewertet sind, können hier nur sehr vorläufige Resultate abgegeben werden (siehe Abbildung 6.13). Insbesondere sind Anstrengungen im Gange, die Energieauflösung und weitere Parameter zu verbessern.

Wird das Gesamtspektrum analysiert, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine Linie bei 2039.006 keV zu finden, 98.8% bzw. 98.6%, wenn die Daten des Detektors ANG4 nicht verwendet werden. Die berechnete Halbwertszeit ist  $1.5_{-0.7}^{+7.6} \times 10^{25}\text{y}$  (95% C.L.).

Die zeitliche Entwicklung des Signals bei 2039 keV wird in Abbildung 6.14 für 68.3% C.L. gezeigt. Für dieses Bild wurden die Daten der Jahre 1990 bis zu dem auf der x-Achse angegebenen Jahr aufsummiert und mit der Bayes'schen Methode ausgewertet. Das Bild zeigt, dass die errechnete Halbwertszeit über die letzten Jahre betrachtet sehr stabil ist.





**Abbildung 6.14:** Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Halbwertszeit des  $0\nu\beta\beta$ -Zerfalls (für 68.3% C.L.). Für jeden dargestellten Punkt wurden die Daten aller fünf Detektoren der Jahre 1990 bis zu dem auf der x-Achse angegebene Jahr verwendet. Ausgewertet wurde das jeweilige Summenspektrum mit der Bayes'schen Methode.

## 6.5 Zusammenfassung

Für alle durchgeführten Linienauswertungen, insbesondere auch mit den SSE-Daten, wird an der für den neutrinolosen Doppelbetazerfall erwarteten Energie von 2039.006 keV stets eine Linie mit großer Wahrscheinlichkeit gefunden. Wird aus den bestimmten Halbwertszeiten die effektive Majorana-Neutrinomasse berechnet, so ergeben sich die in Tabelle 6.7 angegebenen Werte. Hierbei werden die Matrixelemente aus [Sta90] verwendet. Durch Verwendung anderer Matrixelemente können diese Neutrinomassen bis zu einem Faktor 2 variieren (siehe [Kla02]).

Der doppelte Betazerfall von  $^{76}\text{Ge}$  wurde in weiteren Experimenten untersucht [Vas90, Cal91, Aal02]. Dass diese Experimente keine Hinweise auf eine Linie bei 2039 keV finden, ist konsistent mit den Erwartungen der im Heidelberg-Moskau-Experiment beobachteten Intensität. Diese Intensität von  $\sim 16$  Ereignissen entspricht ca. 0.6 Ereignissen in [Cal91] und ca. 2.6 Ereignissen in [Aal02]. Diese Experimente liefern somit nur Halbwertszeitgrenzen, wie sie in Tabelle 6.6 aufgelistet werden, aber bestätigen mit ihrem größeren Untergrund dieselben Untergrundlinien, wie sie im Heidelberg-Moskau-Experiment gefunden werden.

Spektrum	Detektoren	Daten	effektive Masse [eV]
Gesamt	1,2,3,4,5	2.8.1990-16.5.2000	$0.38_{-0.30}^{+0.16}(95.0\%)$
Gesamt	1,2,3,5	2.8.1990-16.5.2000	$0.39_{-0.28}^{+0.17}(95.0\%)$
SSE <sup>†</sup>	2,3,4,5	20.11.1995-16.5.2000	$0.36_{-0.31}^{+0.15}(90.0\%)$
SSE <sup>†</sup>	2,3,5	20.11.1995-16.5.2000	$0.38_{-0.28}^{+0.13}(90.0\%)$
SSE <sup>*</sup>	2,3,4,5	20.11.1995-16.5.2000	$0.31_{-0.19}^{+0.11}(90.0\%)$
SSE <sup>*</sup>	2,3,5	20.11.1995-16.5.2000	$0.28_{-0.16}^{+0.08}(90.0\%)$

**Tabelle 6.7:** Tabelle mit der effektiven Majorana-Neutrinomasse, berechnet aus den in den Tabellen 6.2 und 6.4 angegebenen, korrigierten Halbwertszeiten. Es bedeuten † die triviale Korrektur und \* die neu entwickelte Korrektur.

# Kapitel 7

## Zusammenfassung

Die Frage nach der Natur der Neutrinos und deren Masse ist gegenwärtig eines der Hauptforschungsgebiete der modernen Teilchenphysik. Durch Messungen des solaren und des atmosphärischen Neutrinoflusses steht praktisch außer Frage, dass die Neutrinos eine Masse besitzen. Doch können solche Experimente nur Massendifferenzen unterschiedlicher Neutrino flavours messen und nicht die absoluten Massenskalen. Dafür werden ergänzende Experimente benötigt wie das in dieser Arbeit beschriebene Heidelberg-Moskau-Experiment, das den neutrinolosen Doppelbetazerfall von  $^{76}\text{Ge}$  untersucht und dessen neueste Resultate vorgestellt wurden.

Im ersten Teil diese Arbeit wurde das Heidelberg-Moskau-Experiment beschrieben, ein Doppelbeta-Experiment unter Verwendung von Detektoren mit angereichertem  $^{76}\text{Ge}$ . Aus diesem, zu etwa 86% angereicherten Germanium wurden fünf Detektoren hergestellt, die zugleich als Quelle für die Doppelbeta-Aktivität dienen. Dadurch wird eine sehr große Nachweiswahrscheinlichkeit erreicht. Der Untergrund wird minimiert durch Verwendung verschiedener Abschirmungen aus Kupfer und Blei. Seit August 1990 wurden bis April 2002 insgesamt 70 kg y an Daten gesammelt, mehr als jedes andere Doppelbeta-Experiment weltweit.

Im zweiten Teil der Arbeit ging es um die Erstellung des Summenspektrums. Die Daten wurden dabei von völlig neuen, unter der Programmiersprache C++ entwickelten Programmen ausgewertet, um das Summenspektrum zu erzeugen. Außerdem wurden die ebenfalls gemessenen Pulsformen der einzelnen Ereignisse analysiert, um auf diese Weise MSE von SSE unterscheiden zu können. Der Untergrund besteht überwiegend aus MSE, während die gesuchten Ereignisse des neutrinolosen Doppelbetazerfalls aus SSE bestehen. Es wurde auch gezeigt, dass alle Parameter des Experiments, bis auf die Energieauflösung von Detektor ANG4, zeitlich sehr konstant sind und kaum Schwankungen unterlegen sind.

Der dritte Teil dieser Arbeit beschäftigte sich mit den Analysemethoden, um eine gaußförmige Linie im Spektrum identifizieren zu können. Es wurde eine auf dem Theorem von Bayes basierende Auswertemethode entwickelt, die die statistische Verteilung der gemessenen Ereignisse berücksichtigt. Mit abschließenden Tests wurde gezeigt, dass die beschriebene Bayes'sche Methode sehr gut funktioniert und besonders für kleine Zählraten geeignet ist, und die korrekten Konfidenzintervalle liefert.

Im letzten Teil der Arbeit wurden schließlich die neuesten Resultate des Heidelberg-Moskau-Experiments vorgestellt, ausgewertet mit der Bayes'schen Methode sowie mit der ML- und der Feldman-Cousins Methode. Es wurden sowohl die Gesamtspektren als auch die SSE-Spektren ausgewertet, die alle einen Hinweis für eine Linie bei einer Energie von 2039.006 keV mit großer Wahrscheinlichkeit zeigen. Die Halbwertszeit wurde zu  $1.50_{-0.75}^{+16.8} \times 10^{25}$  y (95% C.L.) bestimmt. Unter der Annahme, dass der neutrinolose Doppelbetazerfall durch Austausch eines massiven Majorananeutrinos ausgelöst wird, ergibt sich eine effektive Neutrinomasse von ca. 0.35 eV.

# Anhang A

## Herleitung Erwartungswert

In diesem Anhang wird der Erwartungswert (5.11) hergeleitet. Es gilt zunächst:

$$\sum_x p x_k x_l = \overline{x_k x_l} = \sum_x x_k x_l p(x|\eta, N) \quad (1.1)$$

mit  $p$  nach (5.7). Die Funktion  $p(x|\eta, N)$  ist normiert und es gilt:

$$\sum_x p(x|\eta, N) = N! \sum_x \prod_{i=1}^M \frac{\eta_i^{x_i}}{x_i!} = \left( \sum_{i=1}^M \eta_i \right)^N = 1. \quad (1.2)$$

Diese Eigenschaft folgt aus dem polynomischen Lehrsatz [Bro91]. Wie sich leicht nachrechnen lässt, gilt ebenso:

$$\begin{aligned} \overline{x_k x_l} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \rho} \sum_x \xi^{x_k} \rho^{x_l} p(x|\eta, N) \Big|_{\xi=\rho=1} \\ &\equiv \sum_x x_k x_l p(x|\eta, N). \end{aligned}$$

Mit (1.2) gilt nun für  $k \neq l$ :

$$\begin{aligned} \overline{x_k x_l} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_{i \neq k, i \neq l} \eta_i + \xi \eta_k + \rho \eta_l \right)^N \Big|_{\xi=\rho=1} \\ &= N \eta_k \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sum_{i \neq k, i \neq l} \eta_i + \xi \eta_k + \rho \eta_l \right)^{N-1} \Big|_{\xi=\rho=1} \\ &= N(N-1) \eta_k \eta_l \left( \sum_{i \neq k, i \neq l} \eta_i + \xi \eta_k + \rho \eta_l \right)^{N-2} \Big|_{\xi=\rho=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N(N-1) \eta_k \eta_l \left( \sum_i \eta_i \right)^{N-2} \\
&= N(N-1) \eta_k \eta_l .
\end{aligned}$$

Für  $k = l$  hingegen folgt:

$$\begin{aligned}
\overline{x_k^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \sum_x \xi^{x_k} \rho^{x_k} p(x|\eta, N) \Big|_{\xi=\rho=1} \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \sum_{i \neq k} \eta_i + \xi \rho \eta_k \right)^N \Big|_{\xi=\rho=1} \\
&= N \rho \eta_k \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \sum_{i \neq k} \eta_i + \xi \rho \eta_k \right)^{N-1} \Big|_{\xi=\rho=1} \\
&= N(N-1) \rho \xi \eta_k^2 \left( \sum_{i \neq k} \eta_i + \xi \rho \eta_k \right)^{N-2} \Big|_{\xi=\rho=1} \\
&\quad + N \eta_k \left( \sum_{i \neq k} \eta_i + \xi \rho \eta_k \right)^{N-2} \Big|_{\xi=\rho=1} \\
&= N(N+1) \eta_k^2 + N \eta_k
\end{aligned}$$

Für beliebige  $k$  und  $l$  folgt somit:

$$\overline{x_k x_l} = N(N-1) \eta_k \eta_l + \delta_{kl} N \eta_l .$$

# Literaturverzeichnis

- [Aal96] C.E. Aalseth *et al.*, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **48** (1996) 223
- [Aal02] C.E. Aalseth *et al.*, Phys. Rev. **D** **65** (2002) 092007; hep-ex/0201021 (2002); C.E. Aalseth *et al.*, Yad. Fiz. **63** (2000) 129
- [Aal02a] C.E. Aalseth *et al.*, Mod. Phys. Lett. **A** **17** (2002) 1475; hep-ex/0202018 (2002)
- [Agu01] A. Aguilar *et al.*, Phys. Rev. **D** **64** (2001) 112007
- [Ahm01] Q.R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 071301
- [Ale94] A. Alessandrello *et al.*, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **35** (1994) 366
- [Ale00] A. Alessandrello *et al.*, Phys. Lett. **B** **486** (2000) 13
- [Als97] M. Alston-Garnjost *et al.*, Phys. Rev. **C** **55** (1997) 474
- [Arn96] R. Arnold *et al.*, Z. Phys. **C** **72** (1996) 239
- [Arn98] R. Arnold *et al.*, Nucl. Phys. **A** **636** (1998) 209
- [Arn99] R. Arnold *et al.*, Nucl. Phys. **A** **658** (1999) 299
- [Art95] V. Artemiov *et al.*, Phys. Lett **B** **345** (1995) 564
- [Ash01] V.D. Ashitkov *et al.*, JETP Lett. **74** (2001) 529
- [Bah00] J.N. Bahcall, M.H. Pinsonneault and S. Basu, Astrophys. J. **555** (2001) 990
- [Bah00a] J.N. Bahcall, Phys. Rep. **333-334** (2000) 47
- [Bah02] J.N. Bahcall, astro-ph/0209080 (2002)
- [Bal96] A. Balysh *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 5186
- [Ban02] A. Bandyopadhyay *et al.*, Phys. Lett. **B** **540** (2002) 14
- [Bar70] R.K. Bardin, P.J. Gollon, J.D. Ullman und C.S. Wu, Nucl. Phys. **A** **158** (1970) 337

- [Bau97] L. Baudis, J. Hellmig, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, B. Majorovits, Y. Ramachers, H. Strecker, Nucl. Instr. Meth. **A 385** (1997) 265 (Internal Report, Proposal MPI H-V2-1998)
- [Bay1763] Thomas R. Bayes, "An essay towards solving a problem in the doctrine of changes", Phil. Trans. Roy. Soc. London, **53** (1763) 370. Reprinted, with biographical note by G. A. Barnard, in *Biometrika* **45** (1958) 293
- [Bec93] M. Beck *et al.*, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2853
- [Bel89] P. Belli *et al.*, Il Nuovo Cimento **101A** (1989) 959
- [Ber93] T. Bernatowicz *et al.*, Phys. Rev. **C 47** (1993) 806
- [Ber02] R. Bernabei *et al.*, Phys. Lett. **B 527** (2002) 182
- [Bra68] Siegmund Brandt, "Statistische Methoden der Datenanalyse", Bibliographisches Institut Mannheim/Zürich, 1968
- [Bro91] I.N. Bronstein und K.A. Semendiaiew, "Taschenbuch der Mathematik", B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1991, S. 106
- [Bru00] V.B. Brudanin *et al.*, Phys. Lett. **B 495** (2000) 63
- [Buc90] E. Buchner, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 1990, unveröffentlicht
- [Bus96] J. Busto, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **48** (1996) 251
- [Cal91] D.O. Caldwell, J. Phys. **G 17** (1991) S137
- [Cle98] B. Cleveland *et al.*, Astrophys. J. **496** (1998) 505
- [Cow56] C.L. Cowan *et al.*, Science **124** (1956) 103
- [Cri97] M. Cribier (GALLEX-Kollaboration), Astropart. Phys. **6** (1997) 129
- [Cru93] M.T.F. da Cruz *et al.*, Phys. Rev. **C 48** (1993) 3106
- [Dan62] G. Danby *et al.*, Phys. Rev. Lett. **9** (1962) 36
- [Dan00] F.A. Danevich *et al.*, Phys. Rev. **C 62** (2000) 045501
- [Dan01] F.A. Danevich *et al.*, Nucl. Phys. **A 694** (2001) 375
- [Das95] Dassié *et al.* (NEMO Collaboration), Phys. Rev. **D 51** (1995) 2090
- [DeS97] A. DeSilva, M.K. Moe, M.A. Nelson and M.A. Vient, Phys. Rev. **C 56** (1997) 2451
- [Die99] A. Dietz, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 1999, unveröffentlicht



- [Doi85] M. Doi *et al.*, Progr. Theor. Phys. Suppl. **83** (1985) 1
- [Dör02] C. Dörr, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 2002, unveröffentlicht
- [DON01] K. Kodama *et al.* (DONUT Collaboration), Phys. Lett. **B 504** (2001) 218
- [Dou01] G. Douysset *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4259
- [Ead77] W.T. Eadie *et al.*, "Statistical Methods in Experimental Physics", North-Holland Publishing Company, 1977
- [Eji01] H. Ejiri *et al.*, Phys. Rev. **C 63** (2001) 065501
- [Ell92] S.R. Elliot *et al.*, Phys. Rev. **C 46** (1992) 1535
- [Egu03] K. Eguchi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 021802
- [Fel98] G.J. Feldman und R.D. Cousins, Phys. Rev. **D 57** (1998) 3878
- [Fer34] E. Fermi, *Versuch einer Theorie der  $\beta$ -Strahlen*, Z. Phys. **88** (1943) 161
- [Fer02] F. Feruglio *et al.*, Nucl. Phys. **B 637** (2002) 345
- [Fuk01] S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85** (2001) 3999; T. Toshito *et al.* (SuperKamiokande Collaboration), hep-ex/0105023 (2001)
- [Fuk01a] S. Fukuda *et al.* (Super-Kamiokande Collaboration), Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 5651
- [Fus02] K. Fushimi *et al.*, Phys. Lett. **B 531** (2002) 190
- [Gav00] J.M. Gavriljuk *et al.*, Phys. Rev. **C 61** (2000) 035501
- [GEANT] The Geant4 Collaboration, *Release Geant4 4.1*, CERN 2002, <http://wwwinfo.cern.ch/asd/geant4/geant4.html>
- [Gel81] G.B. Gelmini und M. Roncadelli, Phys. Lett. **B 99** (1981) 411
- [Gla61] S.L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579
- [GNO00] GNO Collaboration, Phys. Lett. **B 490** (2000) 16
- [Goe35] M. Goepfert-Mayer, Phys. Rev. **48** (1935) 512
- [Gün96] M. Günther, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 1996, unveröffentlicht
- [Gün97] M. Günther *et al.*, Phys. Rev. **D 55** (1997) 54
- [Hel94] J. Hellmig, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 1994, unveröffentlicht
- [Hel96] J. Hellmig, Dissertation, Universität Heidelberg, 1996

- [Hel00] J. Hellmig and H. V. Klapdor-Kleingrothaus, Nucl. Instr. Meth. **A 455** (2000) 638
- [Hil01] G.C. Hill, astro-ph/0106081 (2001)
- [Hir95] M. Hirsch, S.G. Kovalenko und H. Päs, hep-ph/9511227
- [Hir96] K.S. Hirata *et al.* (Kamiokande Coll.), Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 1683
- [Hir96a] M. Hirsch, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, S.G. Kovalenko und H. Päs, Phys. Lett. **B 372** (1996) 8
- [Jef61] H.S. Jeffreys, "Theory of Probability", Oxford University Press (1939, 1948, 1961)
- [Kan00] G.L. Kane und J.D. Wells, hep-ph/0003249 (2000)
- [Kaw93] A. Kawashima, K. Takahashi, A. Masuda, Phys. Rev. **C 47** (1993) 2452
- [Ke91] You Ke *et al.*, Phys. Lett. **B 265** (1991) 53
- [Kel99] M.L. Kelly, hep-ex/9908044 (1999)
- [Kla87] H.V. Klapdor, Proposal - Internal Report MPI-H-1987-V17 (1987)
- [Kla92] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Proc. III. Int. Symp. on Weak and Electromagnetic Interactions in Nuclei, WEIN'92, Dubna 16-22 June, World Scientific, 1992
- [Kla94] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994) 261
- [Kla95] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Staudt, "Teilchenphysik ohne Beschleuniger", Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1995
- [Kla98] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Int. J. of Mod. Phys. **A 13** (1998) 3953
- [Kla99] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **77** (1999) 357
- [Kla01] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, "Sixty years of double beta decay: from nuclear physics to beyond the standard model", World Scientific, 2001
- [Kla01a] H.V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.* (Heidelberg-Moscow Collaboration), Eur. Phys. J. **A 12** (2001) 147 und hep-ph/0103062
- [Kla01b] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz, H.L. Harney und I.V. Krivosheina, Mod. Phys. Lett. **A 16**, No. 37 (2001) 2409; hep-ph/0201231 (2002)

- [Kla02] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz und I.V. Krivosheina, *Foundations of Physics*, **32** (2002) 1181 and Corrigenda, 2003
- [Kla02a] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, hep-ph/0205228 and in Proc. of DARK2002, Cape Town, South Africa, February 4-9, 2002, Springer, Heidelberg (2002), 404
- [Kla03] H.V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.*, *Astropart. Phys.* **18** (2003) 525
- [Kla03a] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, A. Dietz und I.V. Krivosheina, to be published
- [Kla03b] H.V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.*, to be published
- [Kla03c] H.V. Klapdor-Kleingrothaus, O. Shkvorets, to be published
- [Kno89] G.F. Knoll, *Radiation Detection and Measurement*, John Wiley & Sons, 2. Auflage, New York, 1989
- [Koc00] K.R. Koch, "Einführung in die Bayes-Statistik", Springer Verlag, Heidelberg, 2000
- [Kon66] E.J. Konopinski, *The Theory of Beta Radioactivity*, Clarendon Press, 1966
- [Lee97] P.M. Lee, "Bayesian Statistics, An Introduction", Oxford University Press Inc., New York, 1997
- [Lor01] T.J. Loredo und D.Q. Lamb, *Phys. Rev. D* **56** (2002) 063002
- [Lue98] R. Luescher *et al.*, *Phys. Lett. B* **434** (1998) 407
- [Lund] The Lund/LBNL Nuclear Data Search Version, S.Y.F. Chu, L.P. Ekström und R.B. Firestone, <http://nucleardata.nuclear.lu.se/nucleardata/toi/>
- [Mai96] B. Maier, Dissertation, Universität Heidelberg, 1996
- [Maj99] B. Majorovits und H.V. Klapdor-Kleingrothaus, *Eur. Phys. J. A* **6** (1999) 463
- [Maj00] B. Majorovits, Dissertation, Universität Heidelberg, 2000
- [MINUIT] MINUIT, CERN Program Library Long Writeup D506, F. James, see also <http://wwwinfo.cern.ch/asdoc/minuit/minmain.html>
- [Moo92] K.J. Moody, R.W. Lougheed und E.K. Hulet, *Phys. Rev. C* **46** (1992) 2624
- [Mül93] A. Müller, Dissertation, Universität Heidelberg, 1993, unveröffentlicht
- [Mut88] K. Muto and H.V. Klapdor in "Neutrinos", edited by H.V. Klapdor, Springer Verlag Heidelberg (1988) 183

- [Nar00] Ilya Narsky, hep-ex/0005019 (2000)
- [NEM00] NEMO Collaboration, Nucl. Phys. **A 678** (2000) 341
- [Päs95] H. Päs, Diplomarbeit, Universität Heidelberg, 1995, unveröffentlicht
- [Pau33] W. Pauli, *Aufsätze und Vorträge über Physik und Erkenntnistheorie*, Proc. VII Solvay Congress, Brussel (1933) 324
- [Pet95] F. Petry, Dissertation, Universität Heidelberg, 1995
- [Pon57] B. Pontecorvo, J. Exptl. Theoret. Phys. **33** (1957) 549
- [Pre86] William H. Press *et al.*, “Numerical recipes”, Cambridge University Press, 1986
- [Pre89] S. James Press *et al.*, “Bayesian statistics: Principles, Models, and Applications”, John Wiley & Sons Inc., 1989
- [Pro00] H.B. Prosper, hep-ph/0006356 (2000)
- [ROOT] ROOT: An Object-Oriented Data Analysis Framework, <http://root.cern.ch>
- [Sal68] A. Salam, Proc. 8<sup>th</sup> Nobel Symposium, Stockholm 1968, 367
- [Shk03] O. Shkvorets, H.V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.*, to be published
- [Smi85] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, Yad. Fiz. **42** (1985) 1441 [Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 913]; Nuovo Cimento **9 C** (1986) 17
- [Spe03] D.N. Spergel *et al.*, astro-ph/0302209 (2003)
- [Sta90] A. Staudt, K Muto and H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Europhys. Lett. **13** (1990) 31
- [Tak96] N. Takaoka *et al.*, Phys. Rev. **C 53** (1996) 1557
- [Tom03] C. Tomei, H.V. Klapdor-Kleingrothaus *et al.*, to be published
- [Tur91] A.L. Turkevich, T.E. Economou und G.A. Cowan, Phys. Rev. Lett **67** (1991) 3211
- [Vas90] A.A. Vasenko, Mod. Phys. Lett. **A 5** (1990) 1299
- [Wei67] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett **19** (1967) 1264
- [Wei00] S. Weinzierl, hep-ph/0006269 (2000)
- [Wie01] M.E. Wieser und J.R. De-Laeter, Phys. Rev. **C 64** (2001) 024308
- [Wol78] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D 17** (1978) 2369; Phys. Rev. **D 20** (1979) 2634
- [Zde02] Yu.G. Zdesenko *et al.*, Phys. Lett. **B 546** (2002) 206



An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. H. V. Klapdor-Kleingrothaus für die außerordentlich interessante Themenstellung und die sehr gute Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit,
- Dem Direktorium des Max-Planck-Instituts für Kernphysik, Heidelberg, insbesondere Herrn Prof. Dr. D. Schwalm für die sehr guten Arbeitsbedingungen,
- Frau Dr. I.V. Krivosheina für entscheidende Anregungen zur Auswertung und für zahlreiche Korrekturen,
- Herrn Dr. Sawitzki vom Institut für Angewandte Mathematik der Universität Heidelberg und Herrn H. L. Harney für Diskussionen über die Anwendung der Bayes'schen Methode,
- Herrn Dipl. Phys. C. Dörr und Frau C. Tomei für die Zusammenarbeit bei der Auswertung der  $^{214}\text{Bi}$ -Linien und der Analyse anderer  $\beta\beta$ -Experimente,
- Herrn H. Strecker für zahlreiche nützliche Informationen,
- Herrn Dipl. Phys. C. Dörr und Frau V. Gronewald für die kritische Durchsicht des Manuskripts,
- den aktuellen und ehemaligen Gruppenmitgliedern der Arbeitsgruppe von Prof. H.V. Klapdor-Kleingrothaus, C. Dörr, V. Gronewald, Dr. I.V. Krivosheina, B. Majorovits und E. Zaiti sowie C. Tomei und D. Mazza für das angenehme Arbeitsklima,
- meinen Eltern für ihre moralische und finanzielle Unterstützung
- und ganz besonders meiner Frau *Manuela* und meinen beiden Töchtern *Justine* und *Josephine*.