

Fakultät für Physik und Astronomie

Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik

vorgelegt von

Hans Christian Krahl

aus Konstanz

2004

Über den Zwei-Gluon-Annihilations-Term in einem effektiven Lichtkegel-Hamiltonoperator

Die Diplomarbeit wurde von Hans Christian Krahl ausgeführt am

Max-Planck-Institut für Kernphysik

Saupfercheckweg 1

D-69029 Heidelberg

unter der Betreuung von

Herrn Prof. Dr. Hans-Christian Pauli

Koreferent:

Herr Prof. Dr. Christof Wetterich

Institut für theoretische Physik

Universität Heidelberg

Zusammenfassung

Thema der Arbeit ist die Untersuchung der Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung, die den bislang noch nicht betrachteten Teil des effektiven Lichtkegel-Hamiltonoperators für Mesonen darstellt. Er generiert eine virtuelle Annihilation eines $q\bar{q}$ -Paares zu zwei Gluonen und existiert daher nur für flavor-diagonale Mesonen. Letztendlich verursacht dieser Teil der Wechselwirkung eine Mischung unterschiedlicher flavor-diagonaler Mesonen. Hierzu müssen 17 Graphen 4.Ordnung in hamiltonscher Störungstheorie in der *front form* berechnet werden. In einem ersten Teil werden alle diese 17 Graphen exakt diskutiert. Wegen der enormen Komplexität der exakten Ausdrücke wird in einem zweiten Teil eine sehr ansprechende und hoffentlich nützliche Näherungslösung gesucht und gefunden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Theoretische Grundlagen	9
2.1	Die <i>front form</i>	9
2.2	Der QCD-Hamiltonian in der <i>front form</i>	11
2.3	Energie und Impuls als Fockraum-Operatoren	13
2.4	Hamiltonsche Störungstheorie in der <i>front form</i>	15
2.5	Das Problem gebundener hadronischer Zustände	18
2.6	Die Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung U_{TGA}	23
3	Berechnung der U_{TGA}-Graphen	27
3.1	Farbneutrale Fockzustände	28
3.2	Graph 1: Keine instantanen Linien	30
3.2.1	Energienenner	31
3.2.2	Helizitätssumme	32
3.2.3	Parametrisierung	36
3.3	Graph 2: Ein instantanes Quark	38
3.3.1	Energienenner	38
3.3.2	Helizitätssumme	38
3.4	Graph 3: Ein instantanes Gluon	41
3.4.1	Energienenner	41
3.4.2	Helizitätssumme	42
3.4.3	Parametrisierung	43
3.5	Graph 4: Zwei instantane Quarks	45
3.5.1	Parametrisierung	45
3.5.2	Energienenner	45
3.5.3	Helizitätssumme	46
3.5.4	Das Integral	46
3.6	Graph 5: Zwei instantane Gluonen	48
3.6.1	Parametrisierung	48
3.6.2	Energienenner	48
3.6.3	Helizitätssumme	49
3.6.4	Das Integral	49
3.7	Näherungsbehandlung	51
3.7.1	Melosh-Rotation der Spinoren	51
3.7.2	Die transformierte Helizitätssumme	53

3.7.3	Integration	59
3.7.4	Zusammenfassung der Näherungsergebnisse	62
4	Zusammenfassung und Ausblick	63
A	Konventionen und wichtige Formeln	69
B	Explizite Behandlung der restlichen Graphen	73
B.1	Graph 6	73
B.1.1	Energienenner	74
B.1.2	Helizitätssumme	74
B.1.3	Parametrisierung	76
B.2	Graph 7	78
B.2.1	Energienenner	78
B.2.2	Helizitätssumme	79
B.2.3	Parametrisierung	81
B.3	Graph 8	82
B.3.1	Energienenner	82
B.3.2	Helizitätssumme	83
B.3.3	Parametrisierung	85
B.4	Graph 9	86
B.4.1	Energienenner	86
B.4.2	Helizitätssumme	86
B.4.3	Parametrisierung	87
B.5	Graph 10	88
B.5.1	Energienenner	88
B.5.2	Helizitätssumme	88
B.5.3	Parametrisierung	89
B.6	Graph 11	90
B.6.1	Energienenner	90
B.6.2	Helizitätssumme	90
B.7	Graph 12	92
B.7.1	Energienenner	92
B.7.2	Helizitätssumme	92
B.7.3	Parametrisierung	94
B.8	Graph 13	95
B.8.1	Energienenner	95
B.8.2	Helizitätssumme	95
B.8.3	Parametrisierung	97
B.9	Graph 14	98
B.9.1	Energienenner	98
B.9.2	Helizitätssumme	98
B.9.3	Parametrisierung	100
B.10	Graph 15	101
B.10.1	Energienenner	101
B.10.2	Helizitätssumme	101

B.10.3	Parametrisierung	103
B.11	Graph 16	104
B.11.1	Energienenner	104
B.11.2	Helizitätssumme	104
B.11.3	Parametrisierung	106
B.12	Graph 17	107
B.12.1	Parametrisierung	107
B.12.2	Energienenner	107
B.12.3	Helizitätssumme	108
B.12.4	Das Integral	108

Kapitel 1

Einleitung

Eines der Ziele der Elementarteilchentheorie ist die Aufklärung und das Verständnis der Struktur von Hadronen in Abhängigkeit ihrer fundamentalen Quark- und Gluonfreiheitsgrade. Es wurden hierzu zwei völlig unterschiedliche Bilder entwickelt.

Zum einen gibt es das eng mit der experimentellen Beobachtung verbundene Konstituentenquarkmodell [9, 10]. Zum anderen wird eine Beschreibung mit der Quantenchromodynamik (*QCD*) [1, 5, 6, 7, 12], einer als nicht-abelsche Eichtheorie formulierten Quantenfeldtheorie, versucht.

Diese beiden Ansichten sind nur schwer miteinander in Einklang zu bringen. Ein gangbarer Weg scheint eine Formulierung in der *front form* [1, 2] zu sein und ist auch als Lichtkegel-Quantisierung bekannt. In dieser eichfixierten hamiltonschen Formulierung können einige der schwierigsten, in der konventionellen *instant form* auftretenden Probleme umgangen werden.

Als natürliche und physikalische Eichung wird üblicherweise die sog. Lichtkegel-eichung $A^+ = 0$ [12, 56], verwendet. Durch sie haben die Gluonen nur zwei transversale Freiheitsgrade.

Man erwartet die Existenz einer Vielteilchen-Fockbasis [4], in welcher der Hamiltonoperator theoretisch diagonalisierbar ist und gebundene hadronische Zustände als Eigenlösungen existieren, sowie die Masse dieser Bindungszustände bestimmt werden kann. Es treten hierbei viele schwierige Probleme auf, u.a. Confinement [29], Vakuumstruktur [32], chirale Symmetriebrechung [6], die Schwierigkeiten bei der Behandlung eines derart komplexen Vielteilchenproblems und die nicht-perturbative Renormierung eines Hamiltonoperators.

In der konventionellen Formulierung in der *instant form* wird die Beschreibung in Vielteilchen-Fockzuständen wegen der Komplexität des Quantenvakuums schnell undurchführbar. Das Boosten einer Wellenfunktion vom Ruhesystem in ein bewegtes Bezugssystem ist ebenso kompliziert, wie das erneute Lösen des Problems in dem neuen Bezugssystem. Schließlich sorgt die Wurzeloperation im Hamiltonoperator für weitere Schwierigkeiten mathematischer Natur.

Einige dieser Probleme können durch eine Formulierung in der *front form* erfolgreich umgangen werden. Im Hamiltonoperator taucht hier keine Wurzeloperation mehr auf und die Theorie kann unabhängig vom Bezugssystem formuliert werden. Hinzu kommt, dass das Vakuum eine wesentlich einfachere Struktur hat, da es keine spontane Bildung von massiven Fermionen gibt [1, 13, 14].

In der Tat gibt es also viele Gründe, eine kovariante Feldtheorie nicht wie gewöhnlich zu einer Instant-Zeit t , sondern stattdessen zu einer fixierten Lichtkegel-Zeit $\tau = t + z/c$ zu quantisieren.

Wie gleich zu Beginn der Arbeit diskutiert wird, werden in der *front form* die maximale Anzahl der Poincaré-Generatoren [1, 7] und gewisse Boost-Operatoren unabhängig von der Wechselwirkung. Dies ist von großer Bedeutung und hierin ist die Ursache für einige der oben genannten Besonderheiten zu sehen. Die Unabhängigkeit der Boost-Operatoren von der Wechselwirkung bedeutet, dass die Theorie im Gegensatz zur herkömmlichen *instant form* wirklich unabhängig von einem bestimmten Bezugssystem formuliert werden kann. Dies ist ein großer Vorteil der *front form* [1].

Ausserdem kann ein Lichtkegel-Hamiltonoperator konstruiert werden, dessen Eigenwerte die Quadrate der invarianten Massen zusammengesetzter, physikalischer Teilchen sind. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die gebundenen Zustände mit beliebigem Viererimpuls und aus ihnen können z.B. Streuamplituden und andere dynamische Größen berechnet werden [1, 14]. Ferner ist in vielen Quantenfeldtheorien der Vakuumzustand der freien Theorie auch Eigenzustand des vollen Hamiltonoperators und die auf diesem Vakuum aufgebauten Fockzustände bilden eine vollständige Vielteilchenbasis, in der die volle Theorie diagonalisiert werden kann.

Das Eigenwertproblem des Lichtkegel-Hamiltonoperator führt auf ein System von unendlich vielen gekoppelten Integralgleichungen, die nur sehr schwer zu formulieren geschweige denn zu behandeln sind. Arbeitet man jedoch mit periodischen Randbedingungen, oder mit ‘*Discretized Light-Cone Quantization*’ (*DLCQ*) [15, 38, 39, 40, 41], so werden aus den Integralgleichungen Matrixgleichungen, mit denen wesentlich leichter umzugehen ist. Mit dieser Methode wurden die ersten vollständigen Lösungen von nicht-trivialen Quantenfeldtheorien in $1 + 1$ Dimensionen gefunden [15, 38, 43]. Auch in $3 + 1$ Dimensionen [38, 43, 44] kann prinzipiell analog vorgegangen werden, aber die Dimensionen der auftretenden Matrizen übersteigen schnell die Kapazität jedes Computers in absehbarer Zukunft.

Eine Möglichkeit diesen Schwierigkeiten auszuweichen ist die Einführung einer effektiven Wechselwirkung [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55], die in einem kleineren Matrixraum wirkt und für die es eine wohldefinierte Beziehung zur vollen Wechselwirkung, d.h. zum vollen Problem gibt. Allgemein sind effektiven Wechselwirkungen ein nützliches Hilfsmittel in der Vielkörpertheorie [49]. In diesem Fall wird der Übergang zu einer effektiven Wechselwirkung mit Hilfe der Methode der iterierten Resolventen [45, 46, 47, 48] vollzogen. Im wesentlichen wird dabei die Methode von Tamm [17] und Dancoff [18] iterativ angewendet, um die Gleichung auf einen effektiven Fock-Sektor herunter zu projizieren, wobei die höheren Fockzustände in wohldefinierter Art und Weise iterativ aus den effektiven Zuständen gewonnen werden können. Ein anderer möglicher Zugang ist z.B. in [25, 26] gegeben.

Das bedeutendste Resultat ist die Tatsache, dass es in der Eichtheorie, z.B. in der *QCD* nur zwei strukturell verschiedene Beiträge zu dieser effektiven Wechselwirkung im $q\bar{q}$ -Raum gibt [13, 29]. Es sei noch erwähnt, dass aufgrund weiterer technischer Schwierigkeiten die Hierarchie der auftretenden Propagatoren gebrochen werden muss [13, 29]. Dies bedeutet, dass die Graphen der effektiven Wechselwirkung in Hamiltonscher Störungstheorie in der *front form* berechnet werden können.

Der erste Term beschreibt einen effektiven Ein-Gluon-Austausch und wurde bereits

ausgiebig diskutiert [1, 13].

Der zweite Term, Zwei-Gluon-Annihilationswechselwirkung genannt, besitzt eine deutlich kompliziertere Struktur, er beschreibt die virtuelle Annihilation eines $q\bar{q}$ -Paares in zwei Gluonen und kann Wechselwirkungen zwischen unterschiedlichen Quarkflavors generieren.

Dieser zweite Term des effektiven Lichtkegel-Hamiltonoperators wird in dieser Arbeit erstmals näher diskutiert. Hierzu muss die umfangreiche Arbeit angegangen werden, 17 unterschiedliche Graphen zur vierten Ordnung in Hamiltonscher Störungstheorie in der *front form* [14, 33, 34, 35, 36] zu berechnen. Das es sich dabei um 17 Graphen handelt ist eine noch zu diskutierende Besonderheit der (x^+) -geordneten Hamiltonschen Störungstheorie und rührt zum Teil daher, dass unterschiedliche zeitliche Anordnungen der einzelnen Wechselwirkungen als selbstständige Graphen berücksichtigt werden müssen. Die Tatsache, dass es sich um Graphen vierter Ordnung in der QCD handelt sorgt für eine sehr komplizierte und sehr längliche Struktur der auftretenden Ausdrücke.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil werden alle 17 Graphen exakt untersucht, es werden die exakten Energienenner, welche die Rolle der Propagatoren spielen, und die Helizitätssummen angegeben. Weiter werden alle Integrationen in Verbindung mit den Einschränkungen der Impulse an den Wechselwirkungspunkten in allen Graphen auf jeweils eine Dreier-Integration zurückgeführt. Dazu werden für alle Graphen die expliziten Parametrisierungen der Impulse angegeben.

Mit dieser Arbeit als Grundlage, ist es nun verhältnismäßig einfach zu allen 17 Graphen die allerdings noch zu regularisierenden Integrale anzugeben. Dies wird jedoch, wegen der enormen Länge der Ausdrücke, hier nicht mehr in allen Fällen vorgenommen. Es wäre der nächste Schritt in Richtung einer vollständigen Lösung des Problems.

Im zweiten Teil wird eine Näherungslösung diskutiert. Zunächst werden hier die manifest kovarianten Anteile der Helizitätssummen untersucht. In ihnen werden die Spinoren mittels einer sog. Melosh-Rotation [19] analog zu [21] von der Lepage-Brodsky-Konvention [1, 11, 14] unitär in die Björken-Drell-Konvention [3] transformiert. In dieser anschaulicheren und vertrauteren Darstellung werden dann gewisse Näherungen untersucht. Es wird dabei bewusst schrittweise vorgegangen, um die unterschiedlichen Approximationsstufen aufzuzeigen. Zuletzt wird ein genähertes Integral angegeben, welches Ultraviolettdivergenzen und gewisse Endpunktsingularitäten aufweist und mit einem scharfen Cut-off-Regulator gelöst wird. Diese zuletzt angegebenen Näherungslösung basiert auf drastischen, erst im nach hinein verifizierbaren Annahmen und ist als erster Schritt in Richtung einer besseren Lösung des Problems zu verstehen.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

Obwohl die Grundlagen bekannt sind und in der Literatur [1, 3, 5, 6, 7, 2, 12, 13, 49] ausführlich diskutiert werden, sollen hier noch einmal die für die Arbeit besonders wesentlichen Aspekte kurz beschrieben werden.

Zunächst wird kurz auf die *front form* eingegangen. Im Anschluss daran wird die Ableitung des Lichtkegel-Hamiltonoperators kurz skizziert und seine hier verwendeten Teile explizit angegeben. Ausserdem wird die Hamiltonsche Störungstheorie in der *front form* entwickelt und die Herkunft der effektiven Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung aufgezeigt.

2.1 Die *front form*

Im Jahre 1949 veröffentlichte Dirac einen Artikel mit dem Titel ‘*Forms of Hamiltonian Dynamics*’ [2]. In ihm werden Wege untersucht, Hamiltonsche Dynamik in Einklang mit Einsteins spezieller Relativität zu formulieren. Diese Kombination von Relativität und Hamiltonscher Dynamik führt für jedes dynamische System auf 10 fundamentale Größen P_μ und $M_{\mu\nu}$, welche einer bestimmten Klammerstruktur, der Poincaré-Algebra genügen müssen. Das Problem ein neues dynamisches System zu finden reduziert sich darauf, einen neuen Satz von Poincaré-Generatoren zu finden.

Dirac [2] untersucht drei unterschiedliche Formen relativistischer Dynamik, die herkömmliche *instant form*, die *point form* und die für diese Arbeit wesentliche *front form* (siehe Abb.2.1). Diese Formen können nicht durch Lorentztransformationen ineinander überführt werden. Bei der Untersuchung der Generatoren aller drei Formen fällt auf, dass einige von ihnen speziell einfach und andere kompliziert sind. Die komplizierten werden Hamiltonians genannt, die einfachen sind mit bestimmten Untergruppen der inhomogenen Lorentzgruppe zu assoziieren.

In der gewöhnlichen und am weitesten verbreiteten *instant form* ist die durch einen Zeitpunkt, z.B. $t = 0$, definierte Hyperfläche in der Raumzeit ein flacher dreidimensionaler Raum, welcher nur Richtungen enthält, die außerhalb des Lichtkegels liegen. Diese Fläche ist auch der Raum auf dem die Anfangsbedingungen zur selben Anfangszeit (*instant time*) fixiert und bei der Quantisierung die gleichzeitigen Kommutatoren definiert werden. Es gibt hier sechs speziell einfache Generatoren, die nur Transformationen innerhalb dieser Hyperfläche generieren. Diese sind der Impuls \mathbf{P} und die Komponenten

des totalen Drehimpulses M_{23} , M_{13} und M_{12} , die eine Untergruppe bilden. Die anderen, P_0 , M_{i0} für $i = 1, 2, 3$ sind die im Allgemeinen komplizierten Hamiltonians.

Die Parametrisierung der *front form* folgt gemäß

$$\begin{aligned} x^+ &= ct + z \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^- &= ct - z, \end{aligned} \tag{2.1}$$

aus der *instant form*-Parametrisierung, der nicht diagonale metrische Tensor wird in Gl. (A.3) angegeben. Einer der Vorteile der *front form* ist, dass hier die maximale Anzahl, nämlich sieben Generatoren, speziell einfach sind. Auch sie bilden eine Untergruppe und ihre Hyperfläche ist eine dreidimensionale Fläche tangential an den Lichtkegel. Bei den einfachen Generatoren handelt es sich um P_- , $P_{1/2} \equiv \mathbf{P}_\perp$, M_{+-} , M_{1-} , M_{2-} und M_{12} . Die Hamiltonians sind hier P_+ , M_{+1} und M_{+2} . Eine weitere Untersuchung zeigt, dass in der *front form* sieben miteinander kommutierende Operatoren, M_{+-} , M_{+1} , M_{+2} und P^μ existieren — einer mehr als in der *instant form*. Ausserdem findet man, dass hier gewisse Boost-Operatoren kinematisch, d.h. speziell einfach und nicht von der Wechselwirkung abhängig sind. Genauer gesagt handelt es sich dabei um den transversalen Vektor $\mathbf{B}_\perp = (M_{+1}, M_{+2})$, welcher das System in der xy-Ebene boostet, sowie die Operatoren $M_{12} = J_3$ und $M_{+-} = K_3$, welche das System in der xy-Ebene rotieren, bzw. in die longitudinale Richtung boosten. Andere Rotationsoperatoren sind allerdings kompliziert, man hat daher mit dem Nachteil zu leben, dass eine Theorie in der *front form* nicht manifest rotationsinvariant ist. Aus der Unabhängigkeit obiger Boost-Operatoren von der Wechselwirkung folgt das bedeutende Resultat, dass sowohl der Hamiltonoperator als auch alle Amplituden in der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* (hierzu siehe unten) invariant sind unter folgender großer Klasse von Lorentztransformationen:

$$\begin{aligned} 1. \quad & p^+ \rightarrow C_{\parallel} p^+, \quad \mathbf{p}_\perp \rightarrow \mathbf{p}_\perp, \quad \mathbf{p}_\perp p^- \rightarrow C_{\parallel}^{-1} p^-, \\ 2. \quad & p^+ \rightarrow p^+, \quad \mathbf{p}_\perp \rightarrow \mathbf{p}_\perp + p^+ \mathbf{C}_\perp, \quad p^- \rightarrow \mathbf{p}_\perp + 2\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{C}_\perp + P^+ \mathbf{C}_\perp^2, \\ 3. \quad & p^+ \rightarrow p^+, \quad \mathbf{p}_\perp^2 \rightarrow \mathbf{p}_\perp^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dies gilt für jeden auftretenden Einteilchenimpuls und C_{\parallel} , $C_{\perp 1}$ und $C_{\perp 2}$ sind c-Zahlen. Bei 1. handelt es sich um Boost-Transformationen entlang der 3-Richtung, bei 2. um transversale Boost-Transformationen und bei 3. um Rotationen in der xy-Ebene.

Eine weitere Eigenschaft, die für die *front form* spricht, ist die besondere Einfachheit des Vakuums. Dies liegt daran, dass für die Pluskomponente des Impulses P^+ immer $P^+ > 0$ gilt und P^+ erhalten ist. In vielen Fällen ist der Vakuumzustand der freien Theorie sogar Eigenzustand des vollen Hamiltonoperators.

Diese speziellen Eigenschaften der *front form* sind von großer Bedeutung und es werden in den nächsten Kapitel weitere Konsequenzen diskutiert.

Die *point form* wird hier nicht diskutiert. Die hier erwähnten drei Formen werden in Abb.2.1 anschaulich dargestellt.

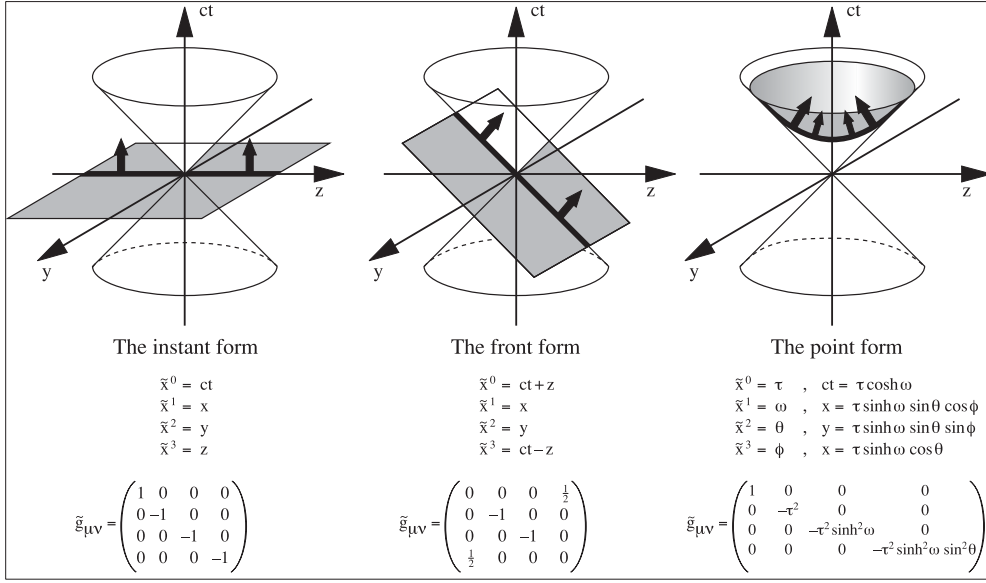


Abbildung 2.1: Diracs drei Formen Hamiltonscher Dynamik. Freundlicherweise zur Verfügung gestellt von H.C. Pauli.

2.2 Der QCD-Hamiltonian in der *front form*

Hier soll die Herleitung des Lichtkegel-Hamiltonoperators H_{LC} kurz skizziert werden, für eine ausführliche Darstellung aller Zwischenschritte sei auf die angegebenen Referenzen verwiesen. Die eichinvariante Lagrange-Dichte der *QCD* (Quantenchromodynamik) oder *SU(N)* [1, 5, 6, 12] ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{2}Tr(\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{F}_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\mathbf{D}_\mu - \mathbf{m})\Psi + h.c.] \\ &= -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}(i\gamma^\mu - \mathbf{m})\Psi + h.c.],\end{aligned}\quad (2.3)$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu\mathbf{A}^\nu - \partial^\nu\mathbf{A}^\mu + ig[\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu], \\ \mathbf{D}_{cc'}^\mu &= \delta_{cc'}\partial^\mu + ig\mathbf{A}_{cc'}^\mu, \\ \text{mit } \mathbf{A}^\mu &= T_{cc'}^a A_a^\mu, \\ \text{und } \mathbf{m} &= m\delta_{cc'}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Hierbei ist c (c') der Color-Index, der von 1 bis n_c läuft und a der Gluon-Index, welcher von 1 bis $n_c^2 - 1$ läuft. Für die *QCD* gilt $n_c = 3$. Die $T_{cc'}^a$ sind im wesentlichen die Gell-Mann-Matrizen, siehe Anhang A. Unter der Matrix $\mathbf{D}_{cc'}^\mu$ versteht man die kovariante Ableitung. Aus der in (2.3) angegebenen Lagrange-Dichte lässt sich der Energie-Impulsstromdichtetensor $T^{\mu\nu}$ ableiten [1, 12]. Man findet

$$T^{\mu\nu} = 2Tr(\mathbf{F}^{\mu\kappa}\mathbf{F}_{\kappa}{}^\nu) + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma^\mu\mathbf{D}^\nu\Psi + h.c.] - g^{\mu\nu}\mathcal{L} - 2\partial_\kappa Tr(\mathbf{F}^{\mu\kappa}\mathbf{A}^\nu).\quad (2.5)$$

Die Vierer-Divergenz wird weggelassen und man erhält einen manifest eichinvarianten Ausdruck:

$$T^{\mu\nu} = 2Tr(\mathbf{F}^{\mu\kappa}\mathbf{F}_{\kappa}{}^\nu) + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma^\mu\mathbf{D}^\nu\Psi + h.c.] - g^{\mu\nu}\mathcal{L}.\quad (2.6)$$

Daraus leitet sich dann der verallgemeinerte Vierer-Impuls ab.

$$\begin{aligned}
P^\nu &= \int_{\Omega} d\omega_0 \left(2\text{Tr}(\mathbf{F}^{0\kappa} \mathbf{F}_\kappa{}^\nu) + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma^0 \mathbf{D}^\nu \Psi + h.c.] - g^{0\nu} \mathcal{L} \right), \\
\text{mit} \quad \int_{\Omega} d\omega_0 &= \int dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Der formale Übergang von der *instant form* zur *front form* ist nun relativ einfach, es muss lediglich die “0” durch ein “+” und die “3” durch ein “-” ersetzt werden. Dies bedeutet für den Vierer-Impuls in der nicht-abelschen Eichtheorie:

$$\begin{aligned}
P^\nu &= \int_{\Omega} d\omega_+ \left(2\text{Tr}(\mathbf{F}^{+\kappa} \mathbf{F}_\kappa{}^\nu) + \frac{1}{2}[\bar{\Psi}i\gamma^+ \mathbf{D}^\nu \Psi + h.c.] - g^{+\nu} \mathcal{L} \right), \\
\text{mit} \quad \int_{\Omega} d\omega_+ &= \int dx^- dx_1 dx_2 = \int dx_+ dx_1 dx_2.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Der *front form*-Hamiltonian unterscheidet sich deutlich von dem in der *instant form*. Gemäß Gl. (2.8) gilt

$$P_+ = \int_{\Omega} d\omega_+ \left(2F_a^{+\kappa} F_{\kappa+}^a + \frac{1}{4}F_a^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}^a + \frac{1}{2}[i\bar{\Psi}\gamma^+ T^a D_+^a \Psi + h.c.] \right). \tag{2.9}$$

Nun werden u.a. die Bewegungsgleichungen, die durch Variation aus der Lagrange-Dichte folgen, verwendet um P_+ als Funktional der freien Felder zu schreiben [1]. Ausserdem wird in der Lichtkegeleichung $A^+ = 0$ (siehe [1]) gearbeitet. Es werden dabei folgende nützlichen Konventionen verwendet:

$$\begin{aligned}
B_a^{\mu\nu} &= f^{abc} A_b^\mu A_c^\nu, \quad \chi_a^\mu = f^{abc} \partial^\mu A_b^\nu A_c^\rho, \\
\tilde{J}_a^\nu(x) &= \tilde{j}_a^\nu(x) + \tilde{\chi}_a^\nu(x), \quad \text{mit} \quad \tilde{j}_a^\nu(x) = \tilde{\Psi}\gamma^\nu T^a \tilde{\Psi},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

wobei die f^{abc} die Strukturkonstanten der $SU(3)$ sind, siehe Anhang A.

So erhält man für den Hamiltonian in der *front form* eine Summe von fünf Termen,

$$\begin{aligned}
P_+ &= \frac{1}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp \left(\tilde{\Psi}\gamma^+ \frac{m^2 + (i\nabla_\perp)^2}{i\partial^+} \tilde{\Psi} + \tilde{A}_a^\mu (i\nabla_\perp)^2 \tilde{A}_\mu^a \right) + g \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{J}_a^\mu \tilde{A}_\mu^a \\
&\quad + \frac{g^2}{4} \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{B}_a^{\mu\nu} \tilde{B}_{\mu\nu}^a + \frac{g^2}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{J}_a^+ \frac{1}{(i\partial^+)^2} \tilde{J}_+^a \\
&\quad + \frac{g^2}{2} \int dx_+ d^2 x_\perp \tilde{\Psi}\gamma^\mu T^a \tilde{A}_\mu^a \frac{\gamma^+}{i\partial^+} (\gamma^\nu T^b \tilde{A}_\nu^b \tilde{\Psi}).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Besonders an diesem Hamiltonian ist die Tatsache, dass er sich additiv [37] in einer kinetischen und einer potentiellen Energie schreibt,

$$H = T + U \rightarrow T, \quad \text{für} \quad g \rightarrow 0. \tag{2.12}$$

Das erinnert einen stark an einen nicht-relativistischen Hamiltonian. In diesem Aspekt unterscheidet er sich von einem konventionellen Hamiltonian in der *instant form*.

Die potentielle Energie U besteht ihrerseits aus vier Summanden

$$U = V + W_1 + W_2 + W_3. \tag{2.13}$$

Ihnen lassen sich, in der selben Reihenfolge in der sie in Gl. (2.11) aufgelistet sind, folgende Wechselwirkungen zuordnen. V ist die Vertex-Wechselwirkung, W_1 ist die Vier-Punkt-Gluon Wechselwirkung, W_2 die instantane Gluon-Wechselwirkung und W_3 die instantane Fermion-Wechselwirkung.

In Gl. (2.11) ist der Hamiltonian in Abhängigkeit der freien Felder dargestellt. Die freien Felder sind [1, 3, 11]

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_{\alpha cf}(x) &= \sum_{\lambda} \int \frac{dp^+ d^2 p_{\perp}}{\sqrt{2p^+(2\pi)^3}} \left(\tilde{b}(q) u_{\alpha}(p, \lambda) e^{-ipx} + \tilde{d}^{\dagger}(q) v_{\alpha}(p, \lambda) e^{+ipx} \right), \\ \tilde{A}_{\mu}^a(x) &= \sum_{\lambda} \int \frac{dp^+ d^2 p_{\perp}}{\sqrt{2p^+(2\pi)^3}} \left(\tilde{a}(q) \epsilon_{\mu}(p, \lambda) e^{-ipx} + \tilde{a}^{\dagger}(q) \epsilon_{\mu}^*(p, \lambda) e^{+ipx} \right),\end{aligned}\quad (2.14)$$

wobei u_{α} und v_{α} im Anhang A gegeben sind und die (Anti-)Vertauschungsrelationen,

$$\begin{aligned}\{\tilde{b}(q), \tilde{b}^{\dagger}(q')\} &= \{\tilde{d}(q), \tilde{d}^{\dagger}(q')\} = \delta(p^+ - p'^+) \delta^{(2)}(\mathbf{P}_{\perp} - \mathbf{P}'_{\perp}) \delta_{\lambda}^{\lambda'} \delta_c^c \delta_f^{f'}, \\ [\tilde{a}(q), \tilde{a}^{\dagger}(q')] &= \delta(p^+ - p'^+) \delta^{(2)}(\mathbf{P}_{\perp} - \mathbf{P}'_{\perp}) \delta_{\lambda}^{\lambda'} \delta_a^{a'},\end{aligned}\quad (2.15)$$

gelten.

Diese freien Felder sind in Gl. (2.11) einzusetzen. Die Ergebnisse dieser technischen Rechnungen sind in [11] zusammengestellt und für die vorliegende Arbeit von großer Wichtigkeit. Es werden allerdings im Folgenden nur die hier benötigten Terme explizit angeben.

2.3 Energie und Impuls als Fockraum-Operatoren

Nun sollen Energie und Impuls als Fockraum-Operatoren diskutiert werden. Die drei raumartigen Operatoren P^+ und \mathbf{P}_{\perp} sind diagonal. Die Summationen über die Color-, Gluon- und Flavor-Indizes werden im folgenden unterdrückt,

$$\begin{aligned}P^+ &= \sum_{\lambda} \int dk^+ d^2 k_{\perp} \left(k_q^+ b_q^{\dagger} b_q + k_q^+ d_q^{\dagger} d_q + k_q^+ a_q^{\dagger} a_q \right), \\ \mathbf{P}_{\perp} &= \sum_{\lambda} \int dk^+ d^2 k_{\perp} \left((\mathbf{k}_{\perp})_q b_q^{\dagger} b_q + (\mathbf{k}_{\perp})_q d_q^{\dagger} d_q + (\mathbf{k}_{\perp})_q a_q^{\dagger} a_q \right).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Für die Eigenwerte von P^+ und \mathbf{P}_{\perp} gilt:

$$P^+ = \sum_{i \in \nu} (k^+)_i, \quad \mathbf{P}_{\perp} = \sum_{i \in \nu} (\mathbf{k}_{\perp})_i, \quad (2.17)$$

wobei i über alle Teilchen in einem Fock-Zustand ν läuft. Aufgrund der Positivität von k^+ und P^+ kann man longitudinale Impulsbruchteile $x_i = k_i^+ / P^+$ einführen, und wegen der Boost-Invarianz, siehe Gl. (2.2), können intrinsische transversale Impulse $\mathbf{k}_{\perp i}$ eingeführt werden, für welche

$$\sum_{i \in \nu} (x)_i = 1, \quad \sum_{i \in \nu} (\mathbf{k}_{\perp})_i = 0, \quad (2.18)$$

gilt. Damit lässt sich ein Lichtkegel-Hamiltonian H_{LC} als

$$P_{\nu} P^{\nu} = P^+ P^- - \mathbf{P}_{\perp}^2 \xrightarrow{\mathbf{P}_{\perp} = 0} P^+ P^- = 2P^+ P_+ \equiv H_{LC} \quad (2.19)$$

definieren. Die Multiplikation von P_+ mit P^+ ist gleichbedeutend mit der Multiplikation mit einer c-Zahl.

Struktur des QCD-Hamiltonoperator in der *front form*

Nun sollen die für die Arbeit wichtigen Anteile des Hamiltonians H_{LC} kurz vorgestellt werden. Alle Anteile sind in [1, 11] gegeben. Die kinetische Energie ist unabhängig von der Kopplungskonstanten und kann als freies invariantes Massenquadrat des Systems interpretiert werden. Sie ist die Summe dreier diagonaler Operatoren

$$T = \int [d^3q] \left(\left(\frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{x} \right)_q b_q^\dagger b_q + \left(\frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{x} \right)_q d_q^\dagger d_q + \left(\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{x} \right)_q a_q^\dagger a_q \right),$$

wobei

$$\int [d^3q] = \int dx_q \int d^2k_{\perp q} \sum_{\lambda_q} \sum_{f_q} \sum_{c_q/a_q} .$$
(2.20)

Der Wechselwirkungsanteil besteht aus einer Vielzahl von unterschiedlichen Operatoren. Sie lassen sich an Hand der Anzahl der ein- bzw. auslaufenden Teilchen (Gluonen, Fermionen) in drei Gruppen einteilen,

$$U = V + F + S .$$
(2.21)

Hier werden nur die Operatoren explizit angegeben, die in der Arbeit benötigt werden.

Die **Vertex-Wechselwirkung** ist eine Summe von vier Operatoren, die jeweils die Teilchenzahl um eins ändern.

$$V = \int [d^3q_1] \int [d^3q_2] \int [d^3q_3] \left(\left[b_1^\dagger b_2 a_3 V_1(1; 2; 3) + h.c. \right] + \dots \right),$$

mit,

$$V_1(1; 2; 3) = \frac{g \Delta_V P^+}{\sqrt{16\pi^3}} \frac{1}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+}} (\bar{u}_1 \gamma^\mu \epsilon_{\mu 3} T^{a_3} u_2),$$
(2.22)

wobei,

$$\Delta_V = \delta(k_1^+ - k_2^+ - k_3^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 1} - \mathbf{k}_{\perp 2} - \mathbf{k}_{\perp 3}).$$

Der zugehörige Graph hat ein Fermion und ein Boson im Anfangszustand und ein Fermion im Endzustand. Beim durch h.c. gekennzeichneten hermitesch konjugierten Anteil ist es genau andersherum.

Die **Fork-Wechselwirkung** ist eine Summe aus sechs Operatoren,

$$F = \int [d^3q_1] \int [d^3q_2] \int [d^3q_3] \int [d^3q_4] \times \left(\left[b_1^\dagger b_2 d_3 b_4 F_1(1; 2; 3; 4) + h.c. \right] + \dots \right),$$

mit

$$F_1(1; 2; 3; 4) = \frac{g^2 \Delta_F P^+}{16\pi^3} \frac{1}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \frac{1}{(k_1^+ - k_2^+)^2} (\bar{u}_1 \gamma^+ T^a u_2) (\bar{v}_3 \gamma^+ T^a u_4),$$
(2.23)

wobei

$$\Delta_F = \delta(k_1^+ - k_2^+ - k_3^+ - k_4^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 1} - \mathbf{k}_{\perp 2} - \mathbf{k}_{\perp 3} - \mathbf{k}_{\perp 4}),$$

die die Teilchenzahl um zwei ändern.

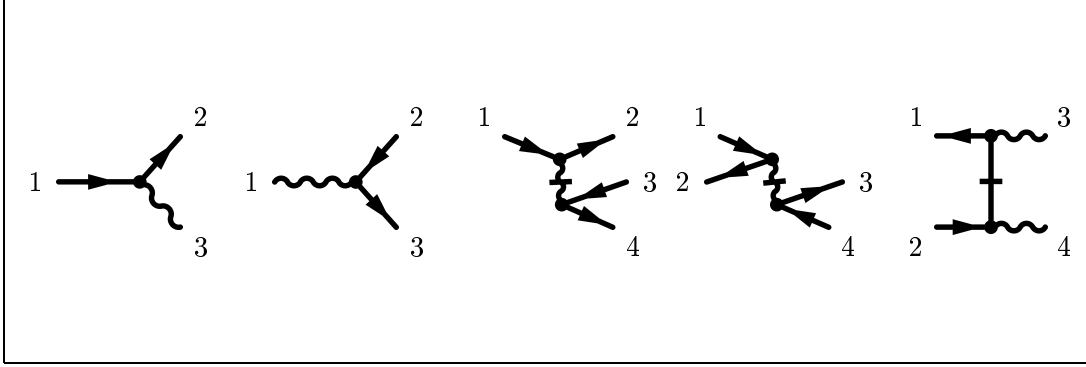


Abbildung 2.2: Die hier abgebildeten Diagramme und ihre hermitesch konjugierten stellen alle im Folgenden wichtigen Diagramme dar. Die ersten beiden Graphen sind Vertex-Wechselwirkungen (Gl. 2.22), der mittlere ist eine Fork-Wechselwirkung (Gl. 2.23) und die letzten beiden sind die benötigten Seagull-Wechselwirkungen in der Reihenfolge wie in Gl. (2.24).

Beim letzten Wechselwirkungstyp handelt es sich um die **Seagull-Wechselwirkung**. Sie besteht aus einer Summe von sieben Operatoren,

$$S = \int [d^3 q_1] \int [d^3 q_2] \int [d^3 q_3] \int [d^3 q_4] \\ \times \left(\dots + \left[b_1^\dagger d_2^\dagger b_3 d_4 S_3(1, 2; 3, 4) + h.c. \right] \right. \\ \left. \dots + \left[b_1^\dagger d_2^\dagger a_3 a_4 S_6(1; 2; 3; 4) + h.c. \right] + \dots \right),$$

mit

$$S_{3,2}(1; 2; 3; 4) = -\frac{g^2 \Delta_S P^+}{16\pi^3} \frac{1}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \frac{1}{(k_1^+ + k_2^+)^2} [\bar{v}_2 T^a \gamma^+ u_1] [\bar{v}_4 \gamma^+ T^a u_3], \quad (2.24)$$

und

$$S_{6,1}(1; 2; 3; 4) = \frac{g^2 \Delta_S P^+}{32\pi^3} \frac{1}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_3^+ k_4^+}} \frac{1}{(k_1^+ - k_3^+)} (\bar{u}_1 T^{a3} \gamma^\rho \epsilon_{\rho 3} \gamma^+ \gamma^\mu \epsilon_{\mu 4} T^{a4} v_2),$$

wobei

$$\Delta_S = \delta(k_1^+ + k_2^+ - k_3^+ - k_4^+) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp 1} + \mathbf{k}_{\perp 2} - \mathbf{k}_{\perp 3} - \mathbf{k}_{\perp 4}).$$

Keine der Seagull-Wechselwirkungen ändert die Teilchenzahl. In den $\Delta_{V,F,S}$ sind die Argumente der Deltafunktionen den Graphen entsprechend anzupassen.

Der Lichtkegel-Hamiltonian setzt sich also aus 23 Operatoren [11] mit unterschiedlicher Struktur zusammen.

2.4 Hamiltonsche Störungstheorie in der *front form*

In dieser Hamiltonschen Störungstheorie [14, 33, 34, 35, 36] wird die Entwicklung des Systems in der Lichtkegel-Zeit durch den Hamiltonoperator P^- generiert.

$$P^- |\Psi\rangle = i \partial^- |\Psi\rangle. \quad (2.25)$$

Wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, ist der Lichtkegel-Hamiltonian additiv in einer kinetischen und einer potentiellen Energie (2.12). Der Vertex-Anteil ist linear, die Fork- und Seagull-Anteile sind quadratisch in der Kopplungskonstanten. Es kann also eine x^+ -geordnete Störungstheorie analog zur nichtrelativistischen Quantenmechanik entwickelt werden, wobei der gesamte Wechselwirkungsanteil des Hamiltonians als Störung betrachtet wird:

$$P^- = P_0^- + P_I^- . \quad (2.26)$$

P_0^- entspricht der kinetischen Energie T und P_I^- entspricht dem Wechselwirkungsanteil. Man macht folgenden Ansatz:

$$|\Psi(x^+)\rangle = e^{-\frac{i}{2}(x^+ - x_0^+)P_0^+} |\Psi(x^+)\rangle_D . \quad (2.27)$$

Für $|\Psi(x^+)\rangle_D$ folgt aus (2.25):

$$\begin{aligned} i\partial^- |\Psi(x^+)\rangle_D &= P_{I,D}^- |\Psi(x^+)\rangle_D , \\ \text{mit } P_{I,D}^- &= e^{\frac{i}{2}(x^+ - x_0^+)P_0^+} P_I^- e^{-\frac{i}{2}(x^+ - x_0^+)P_0^+} . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dies bedeutet, $|\Psi(x^+)\rangle_D$ bewegt sich wie im Schrödingerbild, allerdings gemäß $P_{I,D}^-$. Der Operator $P_{I,D}^-$ ist im Heisenbergbild bezüglich P_0 . Nun führt man einen unitären Zeitentwicklungsoperator ein:

$$|\Psi(x^+)\rangle_D = U(x^+ - x_0^+) |\Psi(x_0^+)\rangle_D . \quad (2.29)$$

Gemäß Gl. (2.28) gilt für $U(x^+ - x_0^+)$

$$i\partial^- U = P_{I,D}^- U . \quad (2.30)$$

Dies wird durch eine Dyson-Reihe gelöst,

$$\begin{aligned} U(x^+ - x_0^+) &= \left\{ \mathbf{1} + \left(\frac{1}{2i} \right) \int_{x_0^+}^{x^+} dx_1^+ P_{I,D}^- (x_1^+) \right. \\ &\quad + \left(\frac{1}{2i} \right)^2 \int_{x_0^+}^{x^+} dx_1^+ \int_{x_0^+}^{x_1^+} dx_2^+ P_{I,D}^- (x_1^+) P_{I,D}^- (x_2^+) \\ &\quad + \dots \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2i} \right)^n \int_{x_0^+}^{x^+} dx_1^+ \dots \int_{x_0^+}^{x_{n-1}^+} dx_n^+ P_{I,D}^- (x_1^+) \dots P_{I,D}^- (x_n^+) + \dots \right\} . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Weiter wird davon ausgegangen, dass der Anfangszustand ein Eigenzustand des freien Hamiltonoperators P_0^- ist und die einfallenden Teilchen somit noch nicht über P_I^- miteinander wechselwirken:

$$P_0^- |\Psi(x^+)\rangle_D = p_0^- |\Psi(x^+)\rangle_D . \quad (2.32)$$

Die Integrale werden im Limes $x_0^+ \rightarrow \infty$ berechnet und die Störung wird adiabatisch eingeschaltet. Ausserdem wird noch ein sehr kleines η eingeführt, damit die Integrale wohldefiniert sind, d.h.

$$P_I^- = e^{-\frac{\eta}{2}x^+} P_{WW}^- . \quad (2.33)$$

Zusätzlich wird auch die Vollständigkeitsrelation in der Basis des freien Hamiltonians P_0^- benutzt,

$$\sum_{\{p\}} |p\rangle\langle p| = \mathbf{1}. \quad (2.34)$$

Hierbei müssen die Zustände $|p\rangle$ richtig symmetrisierte, bzw. antisymmetrisierte Vielteilchenzustände sein [4]. Damit und unter Verwendung von (2.28) ergibt die Integration

$$\begin{aligned} |\Psi(x^+)\rangle_D = & \left\{ \mathbf{1} + \sum_{\{p_1\}} \frac{|p_1\rangle\langle p_1| P_{WW}^-}{p_0^- - p_1^- + i\eta} \right. \\ & \left. + \sum_{\{p_1\}\{p_2\}} \frac{|p_1\rangle\langle p_1| P_{WW}^- |p_2\rangle\langle p_2| P_{WW}^-}{(p_0^- - p_1^- + i\eta)(p_0^- - p_2^- + i\eta)} + \dots \right\} |\Psi(x_0^+)\rangle_D. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dies ist formal die volle Lösung des Problems. Zur Störungstheorie gelangt man mit der Annahme, dass die Störung P_I^- klein gegen P_0^- ist. Das heisst, wenn man sich auf die ersten Glieder der Dyson-Reihe beschränken kann.

Der Wechselwirkungsanteil des Lichtkegel-Hamiltonoperators besteht aus den oben genannten Vertex-, Fork- und Seagullwechselwirkungen.

Es gelten also in der Hamiltonschen Störungstheorie (auf dem Lichtkegel) andere Regeln als in einer konventionellen Lagrangeschen Störungstheorie.

Diese werden nun kurz zusammengefasst.

Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie

Diese Regeln [11, 14, 37] sind:

1. Zeichne alle Diagramme, die zur betreffenden Ordnung Störungstheorie gehören. Dabei sind alle Teile des Hamiltonians P_I^- einzuschließen. Es ist sinnvoll, erst einmal die Diagramme zu zeichnen die nur Vertexwechselwirkungen enthalten und dann jede Linie als Summe einer dynamischen und einer instantanen Linie zu betrachten. Es können keine zwei instantanen Linien unmittelbar aufeinander folgen, da ein solcher Beitrag direkt als eigener Anteil im Hamiltonian stehen müsste.

2. Ordne jeder Linie einen Vierer-Impuls k^μ , eine Helizität λ , Farben und Flavors zu. Fermionen (Elektronen, Quarks) werden die Spinoren $u_\alpha(k, \lambda)$, Antifermionen werden die Spinoren $v_\alpha(k, \lambda)$ zugeordnet. Zu den Vektorbosonen (Photonen, Gluonen) gehört ein Polarisationsvektor $\epsilon_\mu(k, \lambda)$. Für alle Teilchen gilt die Massenschalenbedingung $k^\mu k_\mu = m^2$.

3. Füge für jede Wechselwirkung das entsprechende Matrixelement ein.

4. Jedem Zwischenzustand wird ein Energienenner zugeordnet, d.h. für jeden Zwischenzustand ist ein Faktor

$$\frac{1}{p_{in}^- - \sum_j p_j^- + i\eta} \quad (2.36)$$

einzufügen, wobei über alle Teilchen des jeweiligen Zwischenzustandes summiert wird.

5. Summiere über alle Farben, Flavors und Helizitäten der Zwischenzustände.

6. Integriere über die Impulse aller inneren Linien unter Beachtung, dass in der *front form* generell $k^+ > 0$ gilt, d.h.

$$\int dk^+ \int d^2 k_{\perp} \frac{\Theta(k^+)}{(2\pi)^3}. \quad (2.37)$$

Man hat ausserdem zu beachten, dass an den einzelnen Wechselwirkungspunkten nur der Dreier-Impuls erhalten ist. Dies liegt daran, dass hier nur die dreidimensionale Ortsintegrale des Hamiltonoperators vorkommen. Somit ist die Energie also nicht erhalten, dafür gilt für die Teilchen aber die Massenschalenbedingung. Die Energie ist demnach keine freie Variable, sondern kann als Abkürzung für

$$k^- = \frac{m^2 + k_{\perp}^2}{k^+}$$

angesehen werden. In einer eher wirkungsorientierten Lagrangeschen Störungstheorie gilt Viererimpulserhaltung, die inneren Teilchen unterliegen aber keiner Massenschalenbedingung. Ferner sei hier an die Boost-Eigenschaften, siehe Gl. (2.2), erinnert.

Ein anderer Zugang wäre, die Resolvente des vollen Hamiltonians zu betrachten, dort den Hamiltonian wie oben aufzuspalten in einen freien Teil und in eine Wechselwirkung und dann diese Resolvente um die freie Lösung zu entwickeln. Man erhält dann eine Operatorreihe in der die freie Resolvente in ihrer Spektraldarstellung einzusetzen ist.

2.5 Das Problem gebundener hadronischer Zustände

Hadronen müssen in Termen relativistischer Quarks und Gluonen, die einem Confinement unterliegen, beschrieben werden. Eine intuitive Herangehensweise an das Problem relativistischer gebundener Zustände wäre die Betrachtung des Eigenwertproblems des Hamiltonoperators in der *instant form*,

$$H|\Psi\rangle = \sqrt{M^2 + \mathbf{P}^2}|\Psi\rangle. \quad (2.38)$$

$|\Psi\rangle$ ist hier eine Entwicklung in Vielteilchen-Fock-Zustände, H und \mathbf{P} sind Heisenberg-Operatoren in der Zweiten Quantisierung.

Leider wird diese Methode durch die nicht-kovariante Form der Gleichung und die unverständene Vakuumsstruktur verkompliziert. Ausserdem sorgt die Wurzeloperation für weitere Schwierigkeiten mathematischer Natur. Selbst wenn man die Lösung dieser Gleichung im Schwerpunktssystem $\mathbf{P} = 0$ hätte, wäre die Angabe der Lösung in einem beliebigen System $\mathbf{P} \neq 0$ ein genauso kompliziertes Problem. Der Grund hierfür ist, dass die entsprechenden Boost-Operatoren hier nicht kinematisch sind.

Einige dieser Probleme können umgangen werden, in dem man sich dem Problem in der *front form* nähert. Gleichung (2.38) schreibt sich in der *front form* als

$$H|\Psi\rangle = \frac{M^2 + \mathbf{P}_{\perp}^2}{P^+}|\Psi\rangle, \quad (2.39)$$

wobei der Wurzeloperator nicht mehr vorkommt und P^+ immer positiv ist im Gegensatz zu P_z . Ein weiterer großer Vorteil ist, wie eingangs diskutiert, dass gewisse Boost-Operatoren hier kinematisch sind. Hat man also die Wellenfunktion in irgend einem

schreiben. Mit diesen Resultaten und Konventionen schreibt sich die Eigenwertgleichung (2.39) als ein unendlicher Satz gekoppelter Integralgleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{n'} \int [d\mu'_{n'}] \langle n : x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i | H P^+ - \mathbf{P}_{\perp}^2 | n' : x'_i, \mathbf{k}'_{\perp i}, \lambda'_i \rangle \Psi_{n'/h}(x'_i, \mathbf{k}'_{\perp i}, \lambda'_i) \\ = M^2 \Psi_{/h}(x_i, \mathbf{k}_{\perp i}, \lambda_i) \quad \text{für } n = 1, 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Offensichtlich lässt sich dies mit dem in Gl. (2.19) definierten Lichtkegel-Hamiltonian, in Analogie zu Gl. (2.39), als

$$H_{LC}|\Psi\rangle = M^2|\Psi\rangle, \quad (2.47)$$

schreiben.

Dieses System kann nun in der Tat kovariant in ein intrinsisches Bezugssystem mit $\mathbf{P}_{\perp} = 0$ geboostet werden. Der Lichtkegel-Hamiltonoperator hat dort die Form $H_{LC} = P^+ P^-$ und die Transformation in ein beliebiges Bezugssystem mit $\mathbf{P}_{\perp} \neq 0$ kann dann trivial durchgeführt werden. Genauer gesagt hängen die Wellenfunktionen gar nicht vom totalen Impuls ab, sondern nur von den longitudinalen und den intrinsischen transversalen Impulsbruchteilen, die beide unabhängig vom Bezugssystem sind.

Auf der Suche nach einer Lösung von Gleichung (2.47) stößt man auf eine Reihe von Schwierigkeiten. Eine davon ist, dass die Gleichungen (2.47) Divergenzen für große transversale Impulse (Ultraviolett-Divergenzen) und für longitudinale Impulse in der Nähe der Endpunkte $x \sim 0$ und $x \sim 1$ (Endpunkt-Singularitäten) enthalten [1]. Es müssen also Regulatoren eingeführt und die Abhängigkeit von diesen Regulatoren muss durch Renormierung entfernt werden. Aber selbst wenn ein funktionierendes Regularisierungsschema verfügbar ist, bleibt die große (unendliche) Anzahl gekoppelter Integralgleichungen. An Gleichung (2.46) kann man die Kerne der Integralgleichungen ablesen:

$$\langle n | H_{LC} | n' \rangle \equiv \langle n : x_i, \mathbf{k}_i, \lambda_i | H_{LC} | n' : x'_i, \mathbf{k}'_i, \lambda'_i \rangle. \quad (2.48)$$

Die hierdurch gegebene, sehr komplizierte Struktur ist typisch für ein Vielkörperproblem, siehe Fig.2 Seite 333 in [1].

Diskretisierte Lichtkegel-Quantisierung (DLCQ)

Eine nützliche Methode an ein solches Problem heranzugehen ist die Diskretisierte Lichtkegel-Quantisierung [15, 38, 39, 40, 41]. Es werden periodische Randbedingungen eingeführt, dadurch werden aus den gekoppelten Integralgleichungen gekoppelte Matrixgleichungen, die viel einfacher zu behandeln sind. Diese Methode soll hier nur kurz erläutert werden. Die kinetische Energie eines Vielkörper-Hamiltonians ist gewöhnlich ein Ein-Teilchen-Operator, bei der potentiellen Energie hingegen handelt es sich mindestens um einen Zwei-Teilchen-Operator. Zur Lösung des Problems besorge man sich einen vollständigen Satz von Lösungen eines beliebigen Ein-Teilchen-Operators. Man bilde richtig symmetrisierte, bzw. antisymmetrisierte (Slater-Determinanten) Produkte aus diesen Ein-Teilchen-Wellenfunktionen, dann bilden z.B. im Falle antisymmetrisierter Zustände alle Slater-Determinanten mit fixierter Teilchenzahl ein vollständiges Set (im Raum der Zustände mit dieser Teilchenzahl). Der Hilbert-Raum wird bei einer bestimmten Teilchenzahl abgeschnitten und die mit dieser Methode gefundene endliche

Matrix kann, z.B. mit Hilfe eines Computers, diagonalisiert werden. Am Ende muss dann überprüft werden, ob alle physikalischen Resultate unempfindlich in den Cut-off(s) und anderen Parametern sind.

In der Tat wurden mit dieser Methode die ersten kompletten Lösungen von nichttrivialen Quantenfeldtheorien in 1+1 Dimensionen [15, 38, 43] gefunden. In 3+1 Dimensionen [38, 43, 44] ist im Prinzip genauso vorzugehen wie in 1+1 Dimensionen. Periodische Randbedingungen für \mathcal{L} können durch periodische Randbedingungen für die Vektorpotentiale A_μ und antiperiodische Randbedingungen für die Spinorfelder Ψ_α , da \mathcal{L} bilinear in den Ψ_α 's ist, realisiert werden [1]. Zum Problem wird aber, dass die Dimension der hamiltonschen Matrix exponentiell mit dem Cut-off anwächst. Z.B. im Sektor 13 in Fig.2 Seite 333 in [1], der aus acht Teilchen besteht, sind 10^{21} verschiedene Fock-Zustände enthalten. Das übersteigt in absehbarer Zukunft die Kapazität jedes Computers.

Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen, wäre eine effektive Wechselwirkung [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55] einzuführen, die in einem kleineren Matrixraum wirkt und für die es eine wohldefinierte Beziehung zur vollen Wechselwirkung gibt. Eine solche effektive Wechselwirkung kann auch einen tieferen Einblick in die stattfindenden physikalischen Vorgänge ermöglichen.

Methode der iterierten Resolventen

Nun soll die Methode der iterierten Resolventen [45, 46, 47, 48] kurz vorgestellt werden, die angewendet wird, um aus dem vollen Lichtkegel-Hamiltonoperator einen effektiven Hamiltonoperator zu gewinnen, der die effektive Wechselwirkung für Mesonen generiert [13]. Diese effektive Wechselwirkung wirkt im Falle von Mesonen nur noch zwischen einem Quark und einem Anti-Quark, also den Konstituenten-Quarks des Mesons. Das besondere an dieser Methode ist, dass die zu lösende effektive Gleichung die exakten (Massen-) Eigenwerte liefert und die höheren Fock-Zustände aus den effektiven Lösungszuständen iterativ gewonnen werden können. Es findet also ein Übergang von der vollen Eigenwertgleichung zu einer effektiven Gleichung statt:

$$\begin{aligned} H_{LC}|\Psi\rangle &= M^2|\Psi\rangle \\ &\Downarrow \\ H_{eLC}|\Psi_{q\bar{q}}\rangle &= M^2|\Psi_{q\bar{q}}\rangle. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Dies entspricht dem Schritt von Gl.(1) nach Gl.(2) in [16].

Im Prinzip wird die Methode von Tamm [17] und Dancoff [18] iterativ angewendet, um die Dimension der hamiltonschen Matrix von einem gewählten N schrittweise von $N \rightarrow N - 1 \rightarrow N - 2 \dots$ zu reduzieren. Dabei bleiben, wie oben erwähnt, die Eigenwerte unverändert und die höheren Fock-Zustände können auf wohldefinierte Art und Weise aus den Lösungs-Fock-Zuständen der effektiven Gleichung exakt gewonnen werden. Ausserdem wird die Eichinvarianz nicht verletzt. Als effektiven Hamiltonian erhält man mit dieser Methode [13]

$$H_1 = T_1 + \underbrace{VG_3V}_{U_{OGE}} + \underbrace{VG_3VG_2VG_3V}_{U_{TGA}}. \tag{2.50}$$

Dieser effektive Hamiltonian lediglich scheint zunächst nur aus VertexWechselwirkungen aufgebaut zu sein. Dies ist aber nur eine formale Schreibweise,

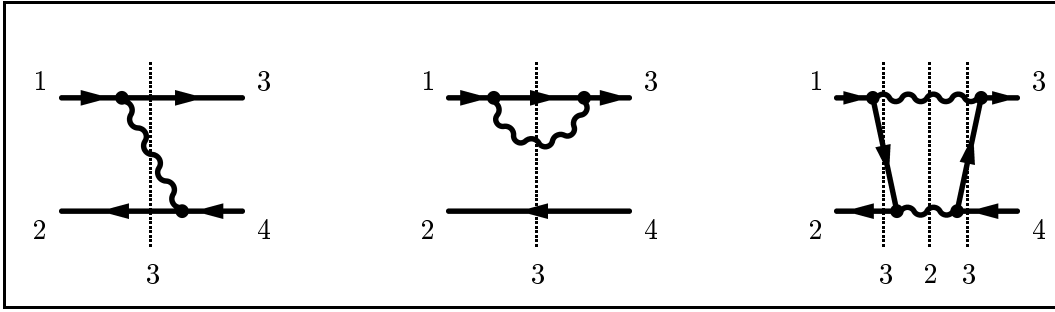


Abbildung 2.3: Hier sind die drei Diagrammtypen der effektiven Wechselwirkung im $q\bar{q}$ -Raum dargestellt. Die ersten beiden sind vom Typ U_{OGE} , der letzte ist ein U_{TGA} -Graph. Die vertikalen, gepunkteten Linien deuten die Energienenner an.

denn am Ende werden alle Linien, entsprechend den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form*, als Summe aus einer dynamischen und einer instantanen Linie angesehen. So werden auch die anderen Wechselwirkungen aus Abb.2.2 wieder eingefügt. Der Anteil $U_{OGE} = VG_3V$ entspricht den ersten beiden Graphen in Abb.2.3 und wurde schon in das Mesonen-Modell eingefügt. Für Mesonen, die aus Quarks mit unterschiedlichem Flavor bestehen ist das auch schon ausreichend, da für sie der zweite Wechselwirkungsteil $U_{TGA} = VG_3VG_2VG_3V$ verschwindet. Dieser zweite Anteil beschreibt eine Annihilation der zwei Quarks in zwei Gluonen, aus denen wieder zwei Quarks mit im Allgemeinen anderem Flavor werden, siehe [23] und [24]. Hierfür müssen natürlich beide Quarks im Meson, jeweils vor und nach der Wechselwirkung, von identischem Flavor sein. Siehe Abb.2.3. Eine ausführliche Diskussion unter Einschluß von Effekten wie ‘Propagation im Medium’, etc. würde den Rahmen sprengen. Hierfür sei erneut auf [13] verwiesen.

Ein bedeutendes Resultat jedenfalls ist die Tatsache, dass es nur zwei strukturell unterschiedliche Beiträge zur effektiven Wechselwirkung gibt, siehe Gl. (2.50).

Am Ende bleibt jedenfalls noch das Problem, dass zur Berechnung von beispielsweise G_3 auch die höheren Propagatoren G_6 , G_5 und G_4 benötigt werden und zur Berechnung von G_6 wird G_{10} , G_9 und G_7 benötigt, usw.. Das bedeutet, um wirklich konkret werden zu können, muss noch diese Hierarchie der Propagatoren gebrochen werden. Dies geschieht dadurch, dass alle Propagatoren durch freie Propagatoren ersetzt werden und die wechselwirkenden Teilchen sich somit (zwischen den Wechselwirkungspunkten) wie freie Teilchen bewegen [13].

Die Wechselwirkungsgraphen können nun nach den Regeln der gewöhnlichen Hamiltonschen Störungstheorie auf dem Lichtkegel berechnet werden.

In der Theorie für Mesonen, in denen die Quarks gleichen Flavor tragen, muss also die Wechselwirkung U_{TGA} mitberücksichtigt werden. Dieses schwierige Problem wird in der vorliegenden Arbeit angegangen.

Bevor nun die U_{TGA} -Wechselwirkung näher diskutiert wird, soll noch explizit angegeben werden, wie die einzelnen Beiträge in die effektive Gleichung eingehen. Das Quark mit der Helizität λ_q und dem Vierer-Impuls $p = (xP^+, \mathbf{k}_\perp + x\mathbf{P}_\perp, p^-)$ und das entsprechende Anti-Quark werden in einen Zustand mit Helizität λ'_q und Vierer-Impuls

$p' = (x'P^+, \mathbf{k}'_{\perp} + x'\mathbf{P}_{\perp}, p'^{-})$ und das dazugehörige Anti-Quark gestreut.

Die effektive Gleichung $H_{eLC}|\Psi_{q\bar{q}}\rangle = M^2|\Psi_{q\bar{q}}\rangle$ wird zur Integralgleichung, siehe [13],

$$\begin{aligned}
M_i^2 \langle x, \mathbf{k}_{\perp}; \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} | \Psi_i \rangle &= \left[\frac{\bar{m}_q^2 + \mathbf{k}_{\perp}^2}{x} + \frac{\bar{m}_{\bar{q}}^2 + \mathbf{k}_{\perp}^2}{1-x} \right] \langle x, \mathbf{k}_{\perp}; \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} | \Psi_i \rangle \\
&+ \sum_{\lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}}} \int dx' d^2 k'_{\perp} R(x', \mathbf{k}'_{\perp}) \langle x, \mathbf{k}_{\perp}; \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} | U_{OGE} | x', \mathbf{k}'_{\perp}; \lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}} \rangle \langle x', \mathbf{k}'_{\perp}; \lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}} | \Psi_i \rangle \\
&+ \sum_{\lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}}} \int dx' d^2 k'_{\perp} R(x', \mathbf{k}'_{\perp}) \langle x, \mathbf{k}_{\perp}; \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} | U_{TGA} | x', \mathbf{k}'_{\perp}; \lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}} \rangle \langle x', \mathbf{k}'_{\perp}; \lambda'_q, \lambda'_{\bar{q}} | \Psi_i \rangle,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

wobei die Funktion $R(x', \mathbf{k}'_{\perp})$ ein Regulator ist und die Wellenfunktion $\langle x, \mathbf{k}_{\perp}; \lambda_q, \lambda_{\bar{q}} | \Psi_i \rangle$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude ist, im $q\bar{q}$ -Zustand ein Quark mit longitudinalem Impulsbruchteil x , intrinsischem transversalen Impuls \mathbf{k}_{\perp} und Helizität λ_q und das entsprechende Anti-Quark mit $1-x$, $-\mathbf{k}_{\perp}$ und $\lambda'_{\bar{q}}$ zu finden.

2.6 Die Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung U_{TGA}

In dieser Arbeit soll der zweite Teil dieser effektiven Wechselwirkung, die Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung U_{TGA} , untersucht werden. Durch sie werden, wie schon erwähnt, zwei Quarks von gleichem Flavor zu zwei Gluonen annihiliert, aus denen dann wieder zwei Quarks mit gleichem, aber i.a. vom Anfangszustand verschiedenem Flavor, entstehen. Es ist zu beachten, dass alle Zustände farbneutral sind.

In Abb.2.4 sind alle möglichen Graphen dargestellt. Alle Graphen sind vierten Ordnung in der Kopplungskonstanten! Ferner sind sie aus den in Abb.2.2 angegebenen Wechselwirkungen und ihrer hermitesch konjugierten aufgebaut.

In der oberen Zeile in Abb.2.4 sind die vier möglichen rein dynamischen, d.h. nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebauten Graphen eingezeichnet. Nach den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* ist aber jede Linie als eine Summe aus einer dynamischen und einer instantanen Linie zu verstehen, wobei zu beachten ist, dass zwei aufeinanderfolgende instantane Linien verboten sind. Somit existieren auch Graphen mit ein oder zwei instantanen inneren Gluonen oder Fermionen, siehe Abb.2.4.

In den mittleren drei Zeilen in Abb.2.4 sind die Graphen mit einer instantanen Linie abgebildet. Unten stehen die drei Graphen mit zwei instantanen inneren Fermionen oder Gluonen.

Um die Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung U_{TGA} in die Gl. (2.51) einbauen zu können, muss also die sehr umfangreiche Arbeit in Angriff genommen werden, alle 17 in Abb.2.4 aufgelisteten Diagramme nach den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* zu berechnen. Alle Graphen enthalten einen Loop. Dies führt dazu, dass am Ende eine Dreier-Integration über bestimmte Parametrisierungsvariable durchgeführt werden muss. Die einzelnen Schritte werden in den konkreten Rechnungen genauer erläutert.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich, wie in der Einleitung erwähnt, in zwei Teile. Im ersten Teil werden alle Graphen untersucht und es werden alle Helizitätssummen ausgearbeitet, sämtliche Energienenner angegeben und für alle Graphen eine mögliche Parametrisierung der Impulse abgeleitet, durch welche die Dreier-Impulserhaltung an

den einzelnen Wechselwirkungspunkten berücksichtigt wird. Durch diese Parametrisierungen werden die Integrationen über alle inneren Linien auf eine Dreier-Integration zurückgeführt. Wegen ihrer Länge werden hier nicht mehr alle Integrale explizit angegeben, sie können aber verhältnismäßig leicht aus dieser Arbeit gewonnen werden.

Im zweiten Teil wird dann die Spinstruktur in den Helizitätssummen untersucht und eine Näherungslösung ähnlich wie die des *Singlet-Triplet models* [21] vorgestellt. Dies ist aufgrund der sehr komplizierten Struktur der Helizitätssummen und Energienenner und der Tatsache, dass alle diese Integrale in die effektive Integralgleichung (2.51) eingehen notwendig.

In sehr ähnlicher Art und Weise wurde auch bei der Behandlung des ersten Teils der effektiven Wechselwirkung, der Ein-Gluon-Austauschwechselwirkung, siehe Gl. (2.50) vorgegangen. Hier sei auf [21] verwiesen.

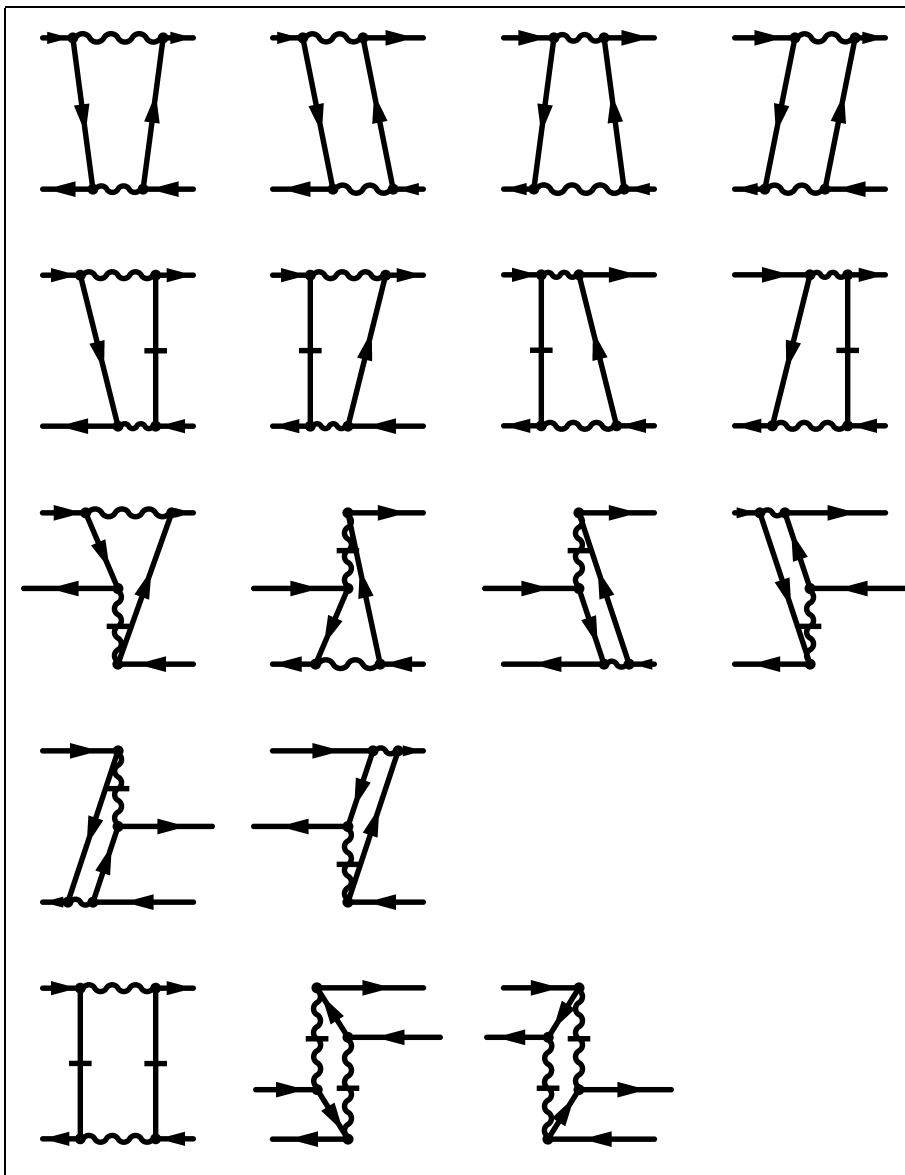


Abbildung 2.4: Diese Abbildung zeigt alle 17 Graphen die zur Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung U_{TGA} gehören. In der obersten Zeile sind die vier Graphen dargestellt, die nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebaut sind. Sie werden als rein dynamische Graphen bezeichnet. In der zweiten Zeile stehen alle Graphen mit einem instantanen inneren Fermion. Die Graphen in den nächsten beiden Zeile enthalten ein instantanes Gluon und unten befinden sich die Graphen mit zwei instantanen inneren Fermionen bzw. Gluonen.

Kapitel 3

Berechnung der U_{TGA} -Graphen

Im zweiten Kapitel wird die Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung vorgestellt, es wird dort gezeigt, dass zur Lösung dieser Wechselwirkung 17 Graphen in vierter Ordnung in Hamiltonscher Störungstheorie in der *front form* berechnet werden müssen. Dies stellt eine schwierige Aufgabe dar und ist nicht nur eine Fleissarbeit. Hier soll kurz erläutert werden, wie dabei vorgegangen wird. Die Graphen lassen sich, wie schon diskutiert, in unterschiedliche Klassen einordnen. Es gibt vier dynamische Graphen, die nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebaut sind. Weiter gibt es Graphen mit einem oder zwei instantanen Fermionen oder Gluonen. Die oben diskutierte Regel, dass keine zwei instantanen Linien aufeinander folgen können, verhindert das Auftreten einer instantanen Gluon- und einer instantanen Fermionlinie in einem Graphen. In diesem Kapitel wird ein Repräsentant jeder dieser Klassen ausgewählt und sehr explizit untersucht. Die übrigen Graphen werden, ebenfalls explizit, im Anhang behandelt.

An allen Graphen kann in Verbindung mit den Matrixelementen der einzelnen Wechselwirkungen Gl. (2.22-2.24) die Helizitätssummen nach den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* direkt vom Graphen abgelesen werden. Dies gilt auch für die Energienenner. In einem ersten Schritt werden dann die Summationen über die Helizitäten der inneren Gluonen durchgeführt. Dabei wird die Helizitätssumme über die Polarisationsvektoren Gl. (A.13) in der Lichtkegel-Eichung verwendet. Dies alleine sorgt schon für recht längliche Ausdrücke. Eine deutliche Vereinfachung dieser Ausdrücke gelingt mit einem Trick. Es werden zunächst gewisse l -Vektoren eingeführt die proportional zum Null-Vektor sind und individuell für jeden Vertex definiert werden. In einem nächsten Schritt kann gezeigt werden, dass alle über die Polarisationssumme Gl. (A.13) eingeführten Gluonenimpulse durch die entsprechenden l -Vektoren ersetzt werden können. Dadurch gelingt vergleichsweise anschaulich eine deutliche Vereinfachung der Helizitätssummen. Nun können die Summen über die Helizitäten der inneren Fermionen durchgeführt werden und ebenfalls dank des obigen Tricks kann in einigen Fällen die Abhängigkeit der Spinorfaktoren von den inneren Impulsen eliminiert werden. Dies ist ein großer Vorteil, da von den inneren Impulsen unabhängige Spinorfaktoren vor dem Integral gezogen werden können.

Gemäß den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* muss über alle Impulse der inneren Linien integriert werden. Die Matrixelemente der einzelnen Wechselwirkungen liefern aber einschränkende Bedingungen, da der Dreier-Impuls an allen Wechselwirkungspunkten erhalten ist. Es zeigt sich, dass in allen Graphen nach

der Auswertung der Integrationen unter Berücksichtigung der Impulserhaltungen eine Dreier-Integration übrig bleibt. Es wird für alle Graphen eine für die *front form* typische Parametrisierung der Impulse angegeben, so dass am Ende nur alle inneren Impulse durch diese Parametrisierungen ausgedrückt zu werden brauchen und die Integration dann über Parametrisierungsvariablen $(y, \mathbf{1}_\perp)$ läuft.

In dieser Arbeit wird dies alles bereit gestellt, die Endintegrale werden aber wegen ihrer Länge und Komplexität hier nicht mehr in allen Fällen explizit angegeben. Sie können aber verhältnismässig leicht aus dieser Arbeit gewonnen werden.

In einem zweiten Teil der Arbeit wird eine Näherungslösung für den Zwei-Gluon-Annihilations-Term angegeben. Diese Näherung ist als erster Schritt in Richtung einer Lösung dieses sehr komplizierten und aufwendigen Problems zu verstehen. Dabei wird von den manifest kovarianten Anteilen der Helizitätssummen ausgegangen. Dieser Schritt basiert auf der Erwartung, dass sich alle anderen Terme am Ende durch entsprechende Gegenterme anderer Graphen wegheben [1, 14]. Dies zeigt auch die Erfahrung mit ähnlichen Problemen [1, 14, 31].

Es sind nur die rein dynamischen, d.h. aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebauten Graphen die solche manifest kovarianten Anteile enthalten. Wie schon erwähnt wurde und später explizit diskutiert wird, werden diese Anteile unitär von der Lepage-Brodsky-Konvention in die Björken-Drell-Konvention transformiert. Diese Terme werden dann sehr explizit untersucht und es werden schrittweise Näherungen durchgeführt, wobei das Vorgehen dabei eng an die Näherungsbehandlung des Helizitätssumme des Ein-Gluon-Austauschterms der effektiven Wechselwirkung [21] angelehnt wird. Die Hauptannahme der Näherungen ist, dass alle eingehenden Impulse klein gegenüber allen auftretenden Massen sind. Es wird z.B. davon ausgegangen, dass die Wellenfunktionen der äusseren Zustände für höhere Impulse ziemlich schnell abfallen [30] und die höhere Impulse dadurch unterdrückt werden. Durch die Regularisierung werden auch nur kleine innere Impulse eingehen. Alle Schritte werden später noch genauer diskutiert werden.

Jedenfalls gelingt unter diesen Annahmen eine erste Lösung des Integrals.

3.1 Farbneutrale Fockzustände

Als erster Schritt werden nun die im weiteren zu verwendenden farbneutralen und normierten Fockzustände angegeben. Die Form dieser Zustände ist auch für die Berechnung der Colorfaktoren der Graphen von Bedeutung.

Es tauchen vier verschiedene Typen von Fockzuständen auf, die alle farbneutral und normiert sein müssen. Alle Zustände müssen sich wie Singulettts unter unitären Transformationen im Farbraum verhalten.

Der erste wird durch die Anfangs- und Endzustände der Graphen gegeben und enthält lediglich zwei Quarks. Man findet z.B. für den Anfangszustand

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{c=1}^3 b_c^\dagger(k_1) d_c^\dagger(k_2) |0\rangle, \quad (3.1)$$

wobei die Bezeichnung $k_{1/2}$ stellvertretend auch für alle weiteren Quantenzahlen steht. Der Normierungsfaktor ist hier einfach abzulesen und wurde gleich mit angegeben.

Ein weiterer Zustand mit nur zwei Teilchen ist der Zwei-Gluonenzustand. Er wird ganz ähnlich wie der aus zwei Quarks bestehende Zustand behandelt,

$$|q_1, q_2\rangle = N \sum_{a=1}^8 a_a^\dagger(q_1) a_a^\dagger(q_2) |0\rangle. \quad (3.2)$$

Dieser Zustand ist noch korrekt zu normieren:

$$1 \equiv \langle q_1, q_2 | q_1, q_2 \rangle = N^2 \sum_{a, \bar{a}=1}^8 \underbrace{\langle 0 | a_{\bar{a}} a_{\bar{a}}^\dagger a_a^\dagger a_a | 0 \rangle}_{2\delta^{a\bar{a}} \langle 0 | 0 \rangle = 2\delta^{a\bar{a}}} = N^2 \cdot 2 \cdot 8 = 16N^2. \quad (3.3)$$

Somit lautet der auf eins normierte Zwei-Gluonenzustand

$$|q_1, q_2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 a_a^\dagger(q_1) a_a^\dagger(q_2) |0\rangle. \quad (3.4)$$

Ebenfalls von Bedeutung ist der Zustand, welcher zwei Quarks und ein Gluon enthält. Einer dieser Zustände ist beispielsweise,

$$|q_1, p_1, k_2\rangle = N \sum_{a=1}^8 \sum_{c=1}^3 \sum_{c'=1}^3 T_{cc'}^a a_a^\dagger(q_1) b_c^\dagger(p_1) d_{c'}^\dagger(k_2) |0\rangle. \quad (3.5)$$

Hier werden die beiden Quarks über die Fundamentaldarstellung zu einem Oktett gekoppelt, welches wiederum mit dem Gluon zu einem Singulett koppelt. Nun wird der Normierungsfaktor N bestimmt:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \langle q_1, p_1, k_2 | q_1, p_1, k_2 \rangle = N^2 \sum_{a, \bar{a}=1}^8 \sum_{c, \bar{c}=1}^3 \sum_{c', \bar{c}'=1}^3 T_{\bar{c}\bar{c}'}^{\bar{a}} T_{c'c}^a \underbrace{\langle 0 | d_{\bar{c}'} b_{\bar{c}} a_{\bar{a}}^\dagger a_a^\dagger b_c^\dagger d_{c'}^\dagger | 0 \rangle}_{\delta^{\bar{a}a} \delta^{\bar{c}c} \delta^{\bar{c}'c'}} \\ &= N^2 \sum_{c=1}^3 \left(\sum_{a=1}^8 \sum_{c'=1}^3 T_{cc'}^a T_{c'c}^a \right) = N^2 \sum_{c=1}^3 \frac{4}{3} = 4N^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Im vorletzten Schritt wurde Gl. (A.16) verwendet. Der Normierungsfaktor beträgt somit $N = \frac{1}{2}$ und der korrekt normierte Fockzustand lautet

$$|q_1, p_1, k_2\rangle = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^8 \sum_{c=1}^3 \sum_{c'=1}^3 T_{cc'}^a a_a^\dagger(q_1) b_c^\dagger(p_1) d_{c'}^\dagger(k_2) |0\rangle. \quad (3.7)$$

Der letzte vorkommende Fockzustand beinhaltet vier Quarks. Er erscheint in Diagrammen, die die Fork-Wechselwirkungen enthalten. Ein möglicher Zustand ist hier

$$|p_1, k_2, k_1', p_2\rangle = N \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 \delta_{c_3}^{c_1} \delta_{c_4}^{c_2} b_{c_1}^\dagger(k_1') b_{c_2}^\dagger(p_1) d_{c_3}^\dagger(p_2) d_{c_4}^\dagger(k_2) |0\rangle. \quad (3.8)$$

Für den Normierungsfaktor gilt:

$$\begin{aligned}
1 &\equiv \langle p_1, k_2, k'_1, p_2 | p_1, k_2, k'_1, p_2 \rangle \\
&= N^2 \sum_{\substack{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3, \tilde{c}_4=1 \\ c_1, c_2, c_3, c_4=1}}^3 \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 \delta_{c_3}^{\tilde{c}_1} \delta_{c_4}^{\tilde{c}_2} \delta_{c_3}^{c_1} \delta_{c_4}^{c_2} \langle 0 | d_{\tilde{c}_4} d_{\tilde{c}_3} b_{\tilde{c}_2} b_{\tilde{c}_1} b_{c_1}^\dagger b_{c_2}^\dagger d_{c_3}^\dagger d_{c_4}^\dagger | 0 \rangle \\
&= N^2 \left(2 \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 \delta_{c_3}^{c_1} \delta_{c_4}^{c_2} - 2 \sum_{c_1, c_2=1}^3 \delta_{c_2}^{c_1} \right) = 2N^2(9 - 3) = 12N^2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Man liest in diesem Fall, $N = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, ab und schreibt den korrekt normierten Fockzustand,

$$|p_1, k_2, k'_1, p_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 \delta_{c_3}^{c_1} \delta_{c_4}^{c_2} b_{c_1}^\dagger(k'_1) b_{c_2}^\dagger(p_1) d_{c_3}^\dagger(p_2) d_{c_4}^\dagger(k_2) |0\rangle. \tag{3.10}$$

Damit haben wir uns alle in der vorliegenden Arbeit benötigten Fockzustände besorgt.

3.2 Graph 1: Keine instantanen Linien

Die Untersuchung der Graphen wird mit einem rein dynamischen Graphen begonnen, welcher nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebaut ist und drei Energienenner enthält. Wie auch schon im ersten Kapitel werden die Energienenner durch vertikale gepunktete Linien in Abb. (3.1) angedeutet. Die Anzahl der Teilchen in den einzelnen Fockzuständen wird jeweils mitangegeben.

Allgemein können gemäß den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* die Energienenner angegeben und unter Verwendung der im ersten Kapitel aufgelisteten Matrixelemente der einzelnen Wechselwirkungstypen die Helizitätssumme abgelesen werden. Dies ist für alle Graphen möglich. Dann folgt eine längere Rechnung die hier explizit durchgeführt wird.

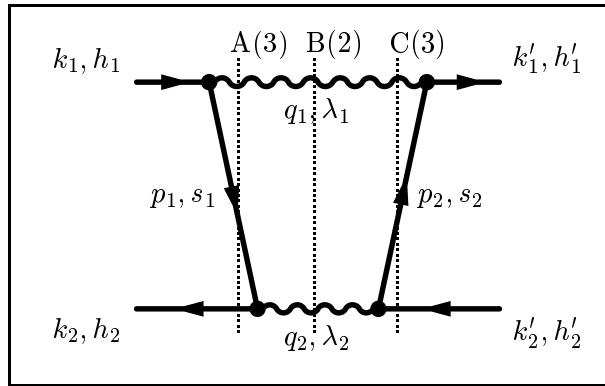


Abbildung 3.1: Graph 1. Hier ist eine mögliche dynamische Zeitordnung eines U_{TGA} -Diagramms dargestellt. Hier gibt es, wie durch die vertikalen gepunkteten Linien angedeutet, drei Energienenner Δ_A , Δ_B und Δ_C .

3.2.1 Energienenner

In Abb. (3.1) ist die Existenz dreier Energienenner abzulesen, die sich gemäß den oben diskutierten Regeln, folgendermaßen berechnen lassen,

$$\begin{aligned}\Delta_A &= E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_1^- + k_2^-) = E + k_1^- - q_1^- - p_1^- \\ &= E - \frac{m_g^2 + \mathbf{q}_{1\perp}^2}{q_1^+} + k_1^- - p_1^- = E + \frac{1}{q_1^+} (-m_g^2 - \mathbf{q}_{1\perp}^2 + q_1^+ (k_1^- - p_1^-)) .\end{aligned}\quad (3.11)$$

Nun wird die Dreier-Impulserhaltung am ersten Vertex ausgenutzt, d.h. $q_1^+ = k_1^+ - p_1^+$ und $\mathbf{q}_{1\perp} = \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{p}_{1\perp}$. Damit erhält man

$$\Delta_A = E + \frac{1}{q_1^+} (-m_g^2 + (k_1^+ - p_1^+)(k_1^- - p_1^-) - (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{p}_{1\perp})^2) .\quad (3.12)$$

In der Klammer erkennt man ein inneres Produkt, siehe Gl. (A.4). Man findet

$$\Delta_A = E - \frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} ,\quad (3.13)$$

mit dem Feynmanschen Vierer-Impulsübertrag

$$Q_1^2 = -(k_1 - p_1)^2 = -(k_1^+ - p_1^+)(k_1^- - p_1^-) + (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{p}_{1\perp})^2 .\quad (3.14)$$

Die anderen beiden Energienenner werden ähnlich behandelt,

$$\begin{aligned}\Delta_B &= E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-) = E + (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) \\ &= \Delta_A + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) = \Delta_A + \frac{1}{q_2^+} (-m_g^2 - (\mathbf{q}_{2\perp})^2 + q_2^+ (k_2^- + p_1^-)) .\end{aligned}\quad (3.15)$$

Hier wird die Dreier-Impulserhaltung am zweiten Vertex verwendet, dort gilt $q_2^+ = k_2^+ + p_1^+$ und $\mathbf{q}_{2\perp} = \mathbf{k}_{2\perp} + \mathbf{p}_{1\perp}$. Dies führt zu

$$\begin{aligned}\Delta_B &= \Delta_A + \frac{1}{q_2^+} (-m_g^2 + (k_2^+ + p_1^+)(k_2^- + p_1^-) - (\mathbf{k}_{2\perp} + \mathbf{p}_{1\perp})^2) \\ &= E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} ,\end{aligned}\quad (3.16)$$

wobei im letzten Schritt wieder Gl. (A.4) verwendet wurde. Der letzte Energienenner wird analog behandelt,

$$\begin{aligned}\Delta_C &= E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= E + (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) + (q_2^- - p_2^- - k_2'^-) \\ &= \Delta_B + (q_2^- - p_2^- - k_2'^-) = \Delta_B + \frac{1}{q_2^+} (m_g^2 + (\mathbf{q}_{2\perp})^2 - q_2^+ (p_2^- + k_2'^-)) .\end{aligned}\quad (3.17)$$

Die Dreier-Impulserhaltung am dritten Vertex liefert, $q_2^+ = p_2^+ + k_2'^+$ und $\mathbf{q}_{2\perp} = \mathbf{k}'_{2\perp} + \mathbf{p}_{2\perp}$. In der obigen Klammer erkennt man erneut ein inneres Produkt und man findet

$$\begin{aligned}\Delta_C &= E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{q_2^+} \\ &= E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{(p_2 + k_2')^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} .\end{aligned}\quad (3.18)$$

Die Energienenner wurden hiermit weitgehend durch Invarianten ausgedrückt.

3.2.2 Helizitätssumme

Zur Berechnung der Helizitätssumme benötigt man die Matrixelemente der einzelnen Vertex-Wechselwirkungen.

Das (zeitlich) erste Matrixelement, siehe Gl. (2.22), lautet

$$\langle q_1, p_1, k_2 | V_1 | k_1, k_2 \rangle = C_1 \frac{g\Delta_V K^+ [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p_1^+} \sqrt{2q_1^+} \sqrt{2k_1^+}}, \quad (3.19)$$

wobei C_1 für den zugehörigen Colorfaktor steht. Dieser Colorfaktor berechnet sich mit den in Gl. (3.1) und (3.7) angegebenen farbneutralen und normierten Fockzuständen zu

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \sum_{a, \bar{a}=1}^8 \sum_{\tilde{c}_1, \tilde{c}_2=1}^3 \sum_{c_1, c_2=1}^3 T_{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2}^{\bar{a}} T_{c_2 c_1}^a \underbrace{\langle 0 | d_{\tilde{c}_2} b_{\tilde{c}_1} a_{\bar{a}} a_a^\dagger b_{c_1}^\dagger b_{c_2} b_c^\dagger d_c^\dagger | 0 \rangle}_{\delta^{\bar{a}a} \delta^{\tilde{c}_2 c} \delta^{\tilde{c}_1 c_1} \delta^{c_2 c}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \sum_{c, c_1=1}^3 \sum_{a=1}^8 (T_{c_1 c}^a T_{c c_1}^a) = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \sum_{c_1=1}^3 \frac{4}{3} = \sqrt{\frac{4}{3}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Im vorletzten Schritt wurde Gl. (A.16) verwendet. Damit gilt für den ersten Vertex

$$\langle q_1, p_1, k_2 | V_1 | k_1, k_2 \rangle = \frac{2g\Delta_V K^+ [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]}{\sqrt{3}(2\pi)^3 \sqrt{2p_1^+} \sqrt{2q_1^+} \sqrt{2k_1^+}}. \quad (3.21)$$

Für den zweiten Vertex liest man

$$\langle q_1, q_2 | V_2 | q_1, p_1, k_2 \rangle = C_2 \frac{g\Delta_V K^+ [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) u(p_1, s_1)]}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2k_2^+} \sqrt{2q_2^+} \sqrt{2p_1^+}} \quad (3.22)$$

mit den Matrixelementen aus Gl. (2.22) ab. Hier berechnet sich der Colorfaktor C_2 mit den farbneutralen und normierten Zuständen aus der Gl. (3.7) und (3.4) zu

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \sum_{a, \bar{a}, a'=1}^8 \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 T_{\tilde{c}_1 \tilde{c}_2}^{\bar{a}} T_{c_1 c_2}^a \underbrace{\langle 0 | a_{a'} a_a' a_{\bar{a}}^\dagger d_{\tilde{c}_2} b_{\tilde{c}_1} a_a^\dagger b_{c_1}^\dagger d_{c_2}^\dagger | 0 \rangle}_{2\delta^{a' \bar{a}} \delta^{a' a} \delta^{\tilde{c}_2 c_1} \delta^{\tilde{c}_1 c_2}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{c_1, c_2=1}^3 \sum_{a=1}^8 (T_{c_2 c_1}^a T_{c_1 c_2}^a) = \frac{1}{4} \sum_{c_2=1}^3 \frac{4}{3} = 1, \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei wieder Gl. (A.16) verwendet wurde. Für den zweiten Vertex gilt also insgesamt

$$\langle q_1, q_2 | V_2 | q_1, p_1, k_2 \rangle = \frac{g\Delta_V K^+ [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) u(p_1, s_1)]}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2k_2^+} \sqrt{2q_2^+} \sqrt{2p_1^+}}. \quad (3.24)$$

Der dritte Vertex hat den selben Colorfaktor wie der eben behandelte Vertex, er wird hier gleich vollständig angegeben:

$$\langle q_1, p_2, k_2' | V_3 | q_1, q_2 \rangle = \frac{g\Delta_V K^+ [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')]}{\sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2p_2^+} \sqrt{2q_2^+} \sqrt{2k_2'^+}}. \quad (3.25)$$

Der vierte und letzte Vertex hat schließlich den selben Colorfaktor wie der zuerst behandelte Vertex. Man findet

$$\langle k'_1, k'_2 | V_4 | q_1, p_2, k'_2 \rangle = \frac{2g\Delta_V K^+}{\sqrt{3}(2\pi)^3} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1)u(p_2, s_2)]}{\sqrt{2k_1^+} \sqrt{2q_1^+} \sqrt{2p_2^+}}. \quad (3.26)$$

Zusammengefasst ergibt sich also ein Colorfaktor von

$$C = C_1 C_2 C_3 C_4 = \frac{4}{3}. \quad (3.27)$$

Als nächster Schritt werden nun die Summen über die Helizitäten der inneren vier Teilchen durchgeführt. Generell werden hier alle Faktoren die nicht direkt in die Rechnung eingehen unterdrückt.

Man erhält für die gesamte Helizitätssumme,

$$N_1 = \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1)u(p_2, s_2)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2)v(k'_2, h'_2)] \\ \times [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2)u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1)u(k_1, h_1)], \quad (3.28)$$

wobei über die inneren vier Helizitäten summiert wird.

Zuerst wird die Summe über die Gluon-Helizitäten ausgeführt. Hierzu wird die Identität

$$\sum_\lambda \epsilon_\mu(q, \lambda)\epsilon_\nu^*(q, \lambda) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right), \quad (3.29)$$

siehe Gl. (A.13), mit der sich die Summe zu

$$N_1 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ [\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu u(k_1, h_1)][\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^\nu u(p_2, s_2)] \right. \\ \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \\ \times [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^\rho u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \\ \left. \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right) \right\}, \quad (3.30)$$

vereinfacht. Daraus ergibt sich weiter

$$N_1 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu u(k_1, h_1)][\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma_\mu u(p_2, s_2)] \right. \\ + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu \eta_\mu u(k_1, h_1)][\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^\nu q_{1\nu} u(p_2, s_2)] \\ + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)][\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^\nu \eta_\nu u(p_2, s_2)] \left. \right\} \\ \times \left\{ -[\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^\rho u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\ + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^\rho \eta_\rho u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] \\ + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^\rho q_{2\rho} u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^\sigma \eta_\sigma v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}. \quad (3.31)$$

Zur weiteren Berechnung der Helizitätssumme wird erneut die Dreier-Impulserhaltung an den Vertizes, siehe Gl. (2.22), ausgenutzt. Mit ihr gelingt nämlich eine kompaktere Schreibweise und eine erhebliche Vereinfachung der Helizitätssumme. Dafür werden nützliche, wegen der Dreier-Impulserhaltung an den Vertizes zum Null-Vektor $\eta^\mu = (0, \mathbf{0}_\perp, 2)$ proportionale Vierer-Vektoren eingeführt. Der untere Index an diesen l -Vektoren gibt an zu welchem Gluon dieser l -Vektor gehört. Die l -Vektoren der ersten beiden Vertizes sind ungestrichen, die der letzten beiden sind gestrichen.

$$\begin{aligned}
l_1^\mu &= (q_1 + p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
l_2^\mu &= (q_2 - p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 - (p_1 + k_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
\bar{l}_1^\mu &= (q_1 + p_2 - k'_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1'^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
\text{und } \bar{l}_2^\mu &= (q_2 - p_2 - k'_2)^\mu = \frac{m_g^2 - (k'_2 + p_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Hier werden weitere Feynmansche Vierer-Impulsüberträge,

$$\begin{aligned}
Q_1^2 &= -(p_1 - k_1)^2, \\
\text{und } Q_1'^2 &= -(k'_1 - p_2)^2,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

eingeführt. Die letzten Gleichheitszeichen von jeweils l_1 , l_2 und \bar{l}_2 wurden im Wesentlichen schon bei der Berechnung der Energienenner gezeigt. Das von \bar{l}_1 folgt analog.

Nun werden die Eigenschaften der Dirac-Spinoren,

$$\begin{aligned}
(p_1 - k_1)^\mu [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] &= 0, \\
(k_2 + p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1)] &= 0, \\
(k'_1 - p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] &= 0, \\
\text{und } (p_2 + k'_2)^\mu [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] &= 0,
\end{aligned} \tag{3.34}$$

ausgenutzt, um zu zeigen, dass die Gluonen-Viererimpulse in Gl. (3.31) durch die entsprechenden l -Vektoren aus Gl. (3.32) ersetzt werden können, welche proportional zum Null-Vektor sind.

Damit und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ schreibt sich die Helizitätssumme zu

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] \left. \right\} \\
&\times \left\{ -[\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 - (k'_2 + p_2)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Dies stellt schon eine erhebliche Vereinfachung gegenüber Gl. (3.28) dar. Der nächste Schritt ist, diese Gleichung auszumultiplizieren und so zu schreiben, dass dann die Summe über die Helizitäten der inneren Quarks durchgeführt werden kann.

Ausmultipliziert ergibt dies

$$\begin{aligned}
N_1 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ \right. & [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 - (k'_2 + p_2)2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 - (k'_2 + p_2)2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \left. \right\}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Wie angekündigt wird nun die Summation über die Helizitäten der internen Quarks unter Verwendung von $\sum_{s_i} u(p_i, s_i) \bar{u}(p_i, s_i) = \not{p}_i + m$ durchgeführt. Wie anhand von Gl. (3.36) ersichtlich ist, stößt man dabei auf Terme der Gestalt $\gamma^+ (\gamma^\mu p_\mu + m) \gamma^+$. Sie werden unter Verwendung von $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$, wie folgt behandelt.

$$\begin{aligned}
\gamma^+ (\gamma^\mu p_\mu + m) \gamma^+ &= \gamma^+ \gamma^\mu p_\mu \gamma^+ = \gamma^+ \left(\frac{1}{2} (p^+ \gamma^- + p^- \gamma^+) - \mathbf{p}_\perp \cdot \boldsymbol{\gamma}_\perp \right) \gamma^+ \\
&= \frac{1}{2} p^+ \gamma^+ \gamma^- \gamma^+ - \mathbf{p}_\perp \cdot \gamma^+ \boldsymbol{\gamma}_\perp \gamma^+ \\
&= 2p^+ \gamma^+ + \mathbf{p}_\perp \cdot \boldsymbol{\gamma}_\perp \gamma^+ \gamma^+ = 2p^+ \gamma^+. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

Somit findet man für 3.36 mit vereinfachter Notation $(k, h) \rightarrow (k)$ etc.,

$$\begin{aligned}
N_1 &= [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu u(k_1)] \\
&- \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 + m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 + m) \gamma^+ u(k_1)] \\
&- \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu u(k_1)] \\
&+ \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\times 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)]. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

In diesem (Gl. 3.38), durch Anwendung des Tricks mit den l -Vektoren schon deutlich vereinfachten Resultat erkennt man, dass nur der erste Summand manifest lorentz-kovariant ist. Alle anderen Summanden sind es nicht. Die physikalischen (End-)Resultate müssen aber natürlich auch in der *front form* lorentz-kovariant sein. Man erwartet, dass sich am Ende alle problematischen Teile durch entsprechende Gegenterme anderer Graphen wegheben.

3.2.3 Parametrisierung

Wie schon erwähnt, muss nach den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form*, über die Dreier-Impulse aller innerer Linien integriert werden. Diese Integrationen unterliegen aber den Einschränkungen, dass der Dreier-Impuls an allen Wechselwirkungspunkten erhalten ist. Dies wird durch die Deltafunktionen in den einzelnen Matrixelementen erzwungen. Ausserdem gilt für alle Linien $k^+ > 0$.

Alle vorliegenden Graphen enthalten einen Loop, dies bedeutet, dass nach der Eliminierung der Deltafunktionen noch eine Dreier-Integration übrig bleibt.

Es gibt mehrere Möglichkeiten die inneren Linien unter Berücksichtigung aller dieser Einschränkungen zu parametrisieren. Eine sehr nahe liegende ist

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(yk_1^+, y\mathbf{k}_{1\perp} + \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_{1\perp} + \mathbf{1}_\perp)^2}{yk_1^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left((1-y)k_1^+, (1-y)\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{1}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{1}_\perp)^2}{(1-y)k_1^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left(K^+ - yk_1^+, -y\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_{1\perp} + \mathbf{1}_\perp)^2}{K^+ - yk_1^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left(k_1'^+ - yk_1^+, \mathbf{k}'_{1\perp} - y\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{1}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}'_{1\perp} - y\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{1}_\perp)^2}{k_1'^+ - yk_1^+} \right).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Auch für die äußeren Impulse können longitudinale Impulsbruchteile x und x' gewählt werden, man erhält

$$\begin{aligned}
k_1^\mu &= \left(xK^+, \mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{xK^+} \right), \\
k_2^\mu &= \left((1-x)K^+, -\mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)K^+} \right), \\
k_1'^\mu &= \left(x'K^+, \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp^2}{x'K^+} \right), \\
\text{und } k_2'^\mu &= \left((1-x')K^+, -\mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp^2}{(1-x')K^+} \right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Diese Parametrisierung der äusseren Impulse kann nun auch in die Impulsparametrisierung der inneren Teilchen eingesetzt werden. Auf diese Art und Weise hängen alle vorkommenden Impulse nur von der totalen longitudinalen Impulskomponente K^+ , den longitudinalen Impulsbruchteilen x und x' , den intrinsichen äusseren Transversalimpulsen \mathbf{k}_\perp und \mathbf{k}'_\perp , sowie den drei Integrationsvariablen y und $\mathbf{1}_\perp$ ab. Man findet für die

inneren Impulse

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(xyK^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{xyK^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left(x(1-y)K^+, (1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{x(1-y)K^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left((1-xy)K^+, -y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-xy)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((x' - xy)K^+, \mathbf{k}'_\perp - y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}'_\perp - y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{(x' - xy)K^+} \right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Diese Form der Parametrisierung wird im Prinzip bei allen Graphen angewendet und ist typisch für die Lichtkegelformulierung.

Nun sind alle Bauteile vorhanden und können im Prinzip zum vollständigen Integral über y und \mathbf{l}_\perp dieses Graphen zusammengesetzt werden.

Hierfür müssen nun lediglich noch alle Impulse in den Energienennern und in der Helizitätssumme durch z.B. die oben angegebenen Parametrisierungen ausgedrückt werden. Auf diese Art und Weise können am Ende für alle Graphen alle Integrale verhältnismäßig leicht angegeben werden. Diese Integrale sind aber so länglich, dass dies hier nicht mehr in allen Fällen durchgeführt wird.

3.3 Graph 2: Ein instantanes Quark

Dies ist das erste Diagramm (Abb.3.2), welches nicht nur aus Vertex-Wechselwirkungen besteht. Die ersten beiden Vertices sind zeitlich genauso angeordnet wie im vorherigen Fall, aber das zweite innere Fermion ist instantan. Dies wird durch den kleinen Querstrich in der Mitte der Linie angedeutet. Der rechte Teil des Diagramms wird durch den Seagull-Anteil (Gl.2.24) im Hamiltonoperator erzeugt.

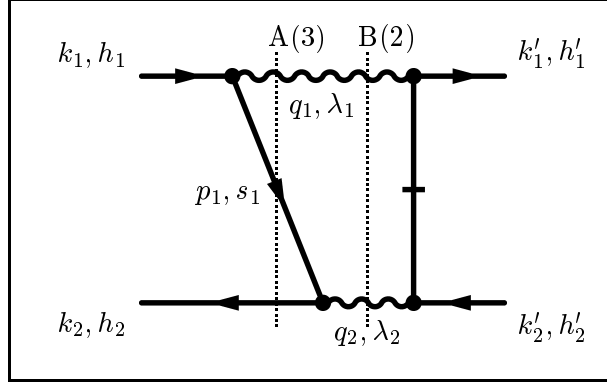


Abbildung 3.2: Graph 2. In diesem Diagramm ist die zweite innere Fermionlinie instantan. Es gibt hier nur zwei Energienenner Δ_A und Δ_B .

Auch hier lassen sich die Energienenner wie üblich nach den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie direkt vom Graphen ablesen.

3.3.1 Energienenner

Die ersten beiden Energienenner sind identisch zu den ersten beiden in Graph 1. Sie werden der Vollständigkeit halber noch einmal angegeben.

$$\begin{aligned}\Delta_A &= E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_1^- + k_2^-) = E + k_1^- - q_1^- - p_1^- \\ &= E - \frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+},\end{aligned}\quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}\Delta_B &= E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-) \\ &= E + (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) \\ &= E - \frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+},\end{aligned}\quad (3.43)$$

wiederum mit der Definition des Feynmanschen Vierer-Impulsübertrags

$$Q_1^2 = -(p_1 - k_1)^2. \quad (3.44)$$

3.3.2 Helizitätssumme

Um zur Helizitätssumme zu gelangen, muss neben den Matrixelementen für die ersten beiden Vertices, die im vorherigen Abschnitt angegeben wurden, siehe Gl. (3.21)

und (3.24), das Matrixelement für die Seagull-Wechselwirkung nach Gl. (2.24) eingefügt werden. Für dieses Matrixelement gilt

$$\langle k'_1, k'_2 | S | q_1, q_2 \rangle = C_3 \frac{K^+ \Delta_S g^2}{32\pi^3} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) \gamma^+ \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)]}{(k_2^{+'} - q_2^+) \sqrt{q_1^+ q_2^+ k_1^{+'} k_2^{+'}}}, \quad (3.45)$$

wobei C_3 hier wieder für den Colorfaktor steht. Man erhält mit Gl. (2.24), (3.1) und (3.4) für C_3 ,

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{a, \bar{a}=1}^8 \sum_{c, c_1, c_2=1}^3 \sum_{\bar{c}_1, \bar{c}_2=1}^3 T_{c_1 c}^{\bar{a}} T_{c c_2}^{\bar{a}} \underbrace{\langle 0 | d_{\bar{c}_2} b_{\bar{c}_1} b_{c_1}^\dagger d_{c_2}^\dagger a_{\bar{a}} a_{\bar{a}} a_a^\dagger a_a^\dagger | 0 \rangle}_{2\delta^{\bar{a}a} \delta^{\bar{c}_1 c_1} \delta^{\bar{c}_2 c_2}} \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{3}} 2 \sum_{a=1}^8 Tr(T^a T^a) = \sqrt{\frac{4}{3}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Somit ist das Matrixelement dieser Seagull-Wechselwirkung,

$$\langle k'_1, k'_2 | S | q_1, q_2 \rangle = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{K^+ \Delta_S g^2}{32\pi^3} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) \gamma^+ \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)]}{(k_2^{+'} - q_2^+) \sqrt{q_1^+ q_2^+ k_1^{+'} k_2^{+'}}}. \quad (3.47)$$

Der Colorfaktor des ganzen Graphen ist wieder $C = C_1 C_2 C_3 = \frac{4}{3}$.

Man erhält hier

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) \gamma^+ \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)], \end{aligned} \quad (3.48)$$

wobei auch hier alle für die folgenden Rechenschritte unwesentlichen Faktoren unterdrückt wurden und über die inneren Helizitäten summiert wird.

Man verwendet wieder die Identität (A.13) und findet

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{s_1} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \gamma^+ \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ &\quad \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

was ausmultipliziert zu

$$\begin{aligned} N_2 &= \sum_{s_1} \left\{ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ &\quad - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ &\quad - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ &\quad \left. + \frac{1}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2, h'_2)] \right. \\ &\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

führt. Nun verwendet man noch $\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m$ und findet mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. nach der Durchführung der Summation

$$\begin{aligned}
N_2 = & [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu\gamma^+\gamma_\rho v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
& - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu\gamma^+\gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^+(\not{p}_1 + m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
& - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1)\gamma^\mu q_{1\mu}\gamma^+\gamma_\rho v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 + m)\gamma^+ u(k_1)] \\
& + \frac{2p_1^+}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1)\gamma^\mu q_{1\mu}\gamma^+\gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Dieser Ausdruck enthält ebenfalls nur noch äußere Spinoren und hat eine andere Struktur als der zuerst behandelte.

Als Parametrisierung kann in diesem Fall für p_1, q_1 und q_2 dieselbe wie im ersten Graphen verwendet werden. An der Seagull-Wechselwirkung ist der Dreier-Impuls der beiden Gluonen zusammen gleich groß wie der der beiden Quarks im Endzustand, siehe Gl. (2.24).

3.4 Graph 3: Ein instantanes Gluon

Nachdem nun ein Graph mit instantanem inneren Fermion behandelt wurde, handelt dieser Abschnitt von einem Diagramm mit instantanem unterem (zweiten) Gluon. Der Teil des Hamiltonians, der diese neue Wechselwirkung generiert, wird ebenfalls zum Seagull-Wechselwirkungsteil gezählt.

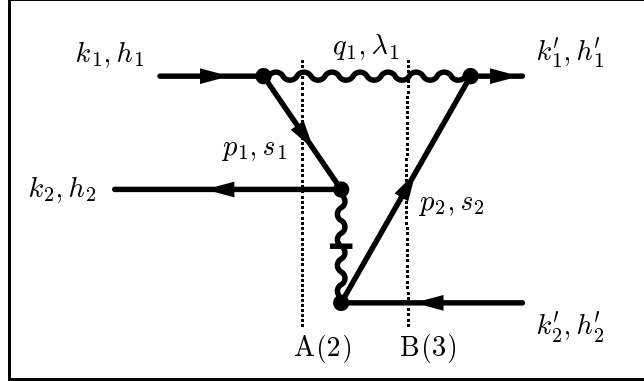


Abbildung 3.3: Graph 3. Hier ist das untere Gluon instantan. Auch hier gibt es wieder zwei Energienenner.

Wie immer lässt sich auch hier die Form der Energienenner und die Zusammensetzung der Helizitätssumme direkt vom Diagramm ablesen. Für diese neue Art von Seagull-Wechselwirkung muss das entsprechende Matrixelement aus Gl. (2.24) eingesetzt werden.

3.4.1 Energienenner

Der erste Energienenner ist

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_1^- + k_2^-) = k_1^- - q_1^- - p_1^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+}\end{aligned}\quad (3.52)$$

und ist gleich wie in den beiden zuerst behandelten Graphen. Der zweite lautet

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1 + p_2^- + k_2'^-) \\ &= (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- + p_1^- - p_2^- - k_2'^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} + (k_2^- + p_1^- - p_2^- - k_2'^-).\end{aligned}\quad (3.53)$$

Auch hier wurde der Feynmanschen Vierer-Impulsübertrag

$$Q_1^2 = -(k_1 - p_1)^2, \quad (3.54)$$

verwendet.

3.4.2 Helizitätssumme

Die Matrixelemente für die beiden Vertex-Wechselwirkungen entnimmt man Gl. (3.21) und (3.26).

Das Matrixelement für diesen Typ der Seagull-Wechselwirkung lautet

$$\langle q_1, p_2, k_2' | S | q_1, p_1, k_2 \rangle = -C_S \frac{K^+ \Delta_F g^2}{16\pi^3} \frac{[\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)]}{(p_1^+ + k_2^+)^2 \sqrt{p_2^+ k_2'^+ k_2^+ p_1^+}}, \quad (3.55)$$

Unter Verwendung dieser Matrixelemente findet man nun für die Helizitätssumme ohne Vorfaktoren,

$$N_3 = \sum_{\lambda_1; s_1, s_2} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]. \quad (3.56)$$

Hier ist nur für das erste (obere) Gluon Gl. (A.4) anzuwenden, was zu

$$N_3 = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right)$$

führt. Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ erhält man

$$N_3 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ \begin{aligned} & -[\bar{u}(k_1', h_1') \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ & + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu q_{1\nu} u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ & + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \end{aligned} \right\}. \quad (3.57)$$

Wieder verwenden wir nützliche Vierer-Vektoren:

$$l_1^\mu = (q_1 + p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1^2}{2q_1^+} \eta^\mu \quad (3.58)$$

und $l_1'^\mu = (q_1 + p_2 - k_1')^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1'^2}{2q_1^+} \eta^\mu$

mit dem weiteren Feynmanschen Vierer-Impulsübertrag,

$$Q_1'^2 = -(k_1' - p_2)^2. \quad (3.59)$$

Man erkennt weiter, dass mit Hilfe von $(p_1 - k_1)^\mu [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] = 0$ und $(k_1' - p_2)^\mu [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma_\mu u(p_2, s_2)] = 0$ die Gluonimpulse in Gl. (3.57) auch hier durch die entsprechenden obigen l -Vektoren ersetzt werden können.

Dies führt erneut zu einer Vereinfachung der Helizitätssumme.

$$\begin{aligned}
N_3 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ \right. & -[\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma_\mu u(p_2, s_2)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^+ u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 + Q_1'^2}{2q^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^+ u(p_2, s_2)][\bar{u}(p_2, s_2)\gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^+ u(p_1, s_1)][\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}. \tag{3.60}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\sum_{s_i} u(p_i, s_i)\bar{u}(p_i, s_i) = \not{p}_i + m$, $\gamma^+\gamma^-\gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+\gamma^+ = 0$ findet man mit vereinfachter Notation $(k, h) \rightarrow (k)$, etc.

$$\begin{aligned}
N_3 = & - [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu (\not{p}_2 + m)\gamma^+ v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^+ (\not{p}_1 + m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1)\gamma^+ v(k'_2)\bar{v}(k_2)\gamma^+ u(k_1)]. \tag{3.61}
\end{aligned}$$

Nun soll noch der Colorfaktor berechnet werden. Man findet

$$\begin{aligned}
C_S &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sum_{\tilde{a}, a'=1}^8 \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 \sum_{c'_1, c'_2, c'_3, c'_4=1}^3 T_{c_4 c_3}^{\tilde{a}} T_{c'_3 c'_4}^{a'} T_{c'_2 c'_1}^{a'} T_{c_1 c_2}^a \\
&\times \langle 0 | d_{c_4} b_{c_3} a_{\tilde{a}} b_{c'_3}^\dagger d_{c'_4}^\dagger b_{c'_2} d_{c'_1} a_a^\dagger b_{c_1}^\dagger d_{c_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{a, a'=1}^8 \sum_{c_1, c_2, c_3, c_4=1}^3 T_{c_4 c_3}^a T_{c_3 c_4}^{a'} T_{c_2 c_1}^{a'} T_{c_1 c_2}^a \\
&= \frac{1}{4} \sum_{a, a'=1}^8 Tr(T^a T^{a'}) Tr(T^{a'} T^a) = \frac{1}{16} \sum_{a, a'=1}^8 \delta^{aa'} = \frac{1}{2}, \tag{3.62}
\end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt Gl. (A.16) verwendet wurde. Der Gesamtcolorfaktor von Graph 3 lautet mit den anderen beiden Faktoren aus Gl. (3.21) und Gl. (3.26):

$$C = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}. \tag{3.63}$$

Dieser Faktor gilt auch für einen weiteren im Anhang behandelten Graphen.

3.4.3 Parametrisierung

Für die äußeren Impulse wird, wie in allen Graphen, die in Gl. (3.40) angegebene Parametrisierung verwendet. Die inneren Impulse können folgendermassen parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(xyK^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{xyK^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left(x(1-y)K^+, (1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{x(1-y)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((x' - xy)K^+, \mathbf{k}'_\perp - y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}'_\perp - y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{(x' - xy)K^+} \right). \tag{3.64}
\end{aligned}$$

Somit kann auch in diesem Fall das vollständige Integral angegeben werden, indem die Energienenner und die Helizitätssumme durch die in Gl. (3.64) angegebene Parametrisierung ausgedrückt werden.

3.5 Graph 4: Zwei instantane Quarks

Nun wird das erste Diagramm mit zwei instantanen Linien betrachtet. Genauer gesagt sind die beiden inneren Fermionlinien instantan. Das Diagramm hat nur einen Energienenner.

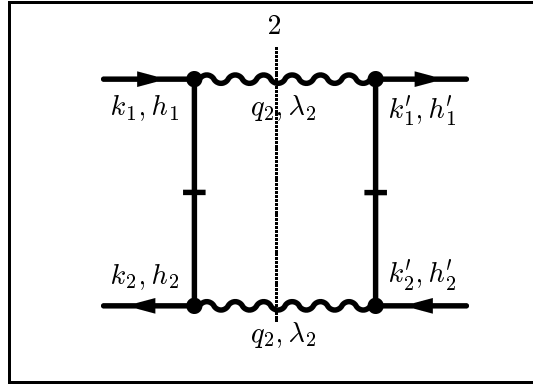


Abbildung 3.4: Graph 4. Dies ist der erste Graph mit zwei instantanen Linien (Fermionlinien) und mit nur einem Energienenner.

Es wird wie schon zuvor bei Graph 2 auf die im ersten Kapitel beschriebenen Seagull-Wechselwirkungen zurückgegriffen.

3.5.1 Parametrisierung

Aufgrund der in den Matrixelementen (Gl. 2.24) gegebenen Dreier-Impulserhaltungen wird folgende Parametrisierung eingeführt:

$$\begin{aligned} q_1^\mu &= \left(yK^+, \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{yK^+} \right), \\ q_2^\mu &= \left((1-y)K^+, -\mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{(1-y)K^+} \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Auch hier wurde wieder das intrinsische Bezugssystem gewählt.

3.5.2 Energienenner

Wie oben erwähnt, gibt es hier nur einen Energienenner, der sich folgendermaßen nach den allgemeinen Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie berechnen lässt,

$$\Delta = E + k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-), \quad (3.66)$$

was sich mit der Parametrisierung als

$$\Delta = E + k_1^- + k_2^- - \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{y(1-y)K^+} \quad (3.67)$$

schreiben lässt.

3.5.3 Helizitätssumme

Um die Helizitätssumme anzugeben werden nur Seagull-Matrixelemente, siehe Gl. (2.24) benötigt. Das zweite Matrixelement wurde schon berechnet, Gl. (3.47). Das erste Matrixelement hat den selben Colorfaktor und lautet

$$\langle q_1, q_2 | S | k_1, k_2 \rangle = \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{K^+ \Delta_S g^2}{32\pi^3} \frac{[\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) \gamma^+ \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]}{(k_1^+ - q_1^+) \sqrt{q_1^+ q_2^+ k_1'^+ k_2'^+}}. \quad (3.68)$$

Der Colorfaktor des ganzen Graphen ist auch hier wieder

$$C = \frac{4}{3}. \quad (3.69)$$

Die Helizitätssumme schreibt sich ohne im Moment unwesentliche Vorfaktoren als

$$N_4 = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \left\{ \begin{aligned} & [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) \gamma^+ \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) \gamma^+ \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)] \end{aligned} \right\}. \quad (3.70)$$

Die Summation über die Helizitäten ergibt

$$N_4 = [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \gamma^+ \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right), \quad (3.71)$$

woraus sich weiter mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$

$$N_4 = [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)], \quad (3.72)$$

ergibt. Die Helizitätssumme ist nun unabhängig von den inneren Impulsen und damit auch von y und \mathbf{l}_\perp . Dies bedeutet, dass sie vor das Integral gezogen werden kann.

3.5.4 Das Integral

Das Integral wird hier gleich mit voll ausintegrierten Deltafunktionen angegeben. Das heisst die Dreier-Impulserhaltung an den Wechselwirkungspunkten wird gleich in Form der obigen Parametrisierung, Gl. 3.65, verwirklicht. Man erhält

$$\langle f | U_{TGA,4} | i \rangle = \frac{K^{+2}}{3} \left(\frac{g^2}{16\pi^3} \right)^2 \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)]}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_1'^+ k_2'^+}} \\ \times K^+ \int_0^1 dy \int d\mathbf{l}_\perp^2 \frac{R(y, \mathbf{l}_\perp)}{y(1-y)K^{+2}} \frac{1}{(k_1^+ - yK^+)} \frac{1}{(k_2'^+ - (1-y)K^+)} \\ \times \frac{1}{E + k_1^- + k_2^- - \frac{m_g^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(1-y)K^+}}, \quad (3.73)$$

wobei $|i\rangle$ bzw. $|f\rangle$ der Anfangs- bzw. Endzustand sind. Dieses Integral ist divergent und muss noch geeignet regularisiert werden, hierfür wird die Regulatorfunktion $R(y, \mathbf{l}_\perp)$ eingesetzt.

Ausserdem werden auch noch für die äußeren Impulse longitudinale Impulsbruchteile eingeführt,

$$\begin{aligned}
k_1^\mu &= \left(xK^+, \mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{xK^+} \right), \\
k_2^\mu &= \left((1-x)K^+, -\mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)K^+} \right), \\
k'_1{}^\mu &= \left(x'K^+, \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp{}^2}{x'K^+} \right), \\
k'_2{}^\mu &= \left((1-x')K^+, -\mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp{}^2}{(1-x')K^+} \right).
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Schließlich schreibt sich Gl. 3.73 zu

$$\begin{aligned}
\langle f | U_{TGA,4} | i \rangle &= \frac{4}{3} \left(\frac{g^2}{32\pi^3} \right)^2 \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)]}{K^{+2} \sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\
&\int_0^1 dy \int d\mathbf{l}_\perp^2 \frac{R(y, \mathbf{l}_\perp)}{y(1-y)(x-y)(y-x')} \frac{1}{E + \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{x} + \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)} - \frac{m_g^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(1-y)}}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Am Ende fallen in Gl. 2.51 alle K^+ heraus.

3.6 Graph 5: Zwei instantane Gluonen

Hier wird der erste Graph mit zwei instantanen Gluonen und nur einem Energienenner behandelt. Der zweite solche Graph wird im Anhang diskutiert. Dieser ist aus zwei Fork-Wechselwirkungen zusammengesetzt.

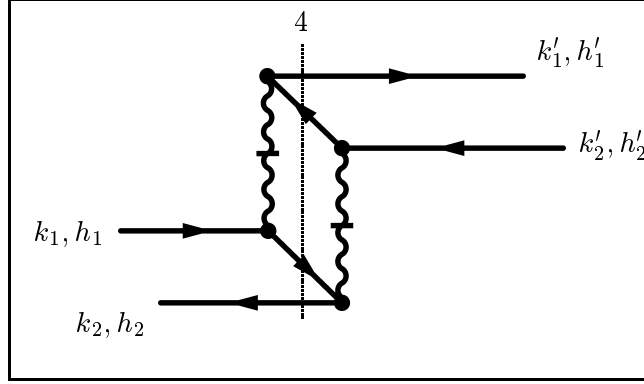


Abbildung 3.5: Graph 5. Dies ist der zweite Graph mit zwei instantanen Gluonlinien. Auch er enthält nur einen Energienenner.

3.6.1 Parametrisierung

Die Parametrisierung ist in diesem Fall analog zum Beispiel zuvor, es muss wieder die Dreier-Impulserhaltung an den Wechselwirkungspunkten berücksichtigt werden. Man erhält hier:

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= \left(y(k_1^+ - k_1'^+), \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(k_1^+ - k_1'^+)} \right), \\ p_2^\mu &= \left((1-y)(k_1^+ - k_1'^+), \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)} \right); \end{aligned} \quad (3.76)$$

auch hier werden sich y und \mathbf{l}_\perp als die Integrationsvariablen erweisen.

3.6.2 Energienenner

Wieder gibt es nur einen Energienenner

$$\Delta = E + k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + p_1^- + k_2^-) = E + k_1^- - k_1'^- - p_2^- - p_1^- \quad (3.77)$$

welcher mit eingesetzter Parametrisierung folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} \Delta &= E + k_1^- - k_1'^- - \frac{m^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(k_1^+ - k_1'^+)} - \frac{m'^2 + (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)} \\ &= E + k_1^- - k_1'^- - \frac{m^2 + y(m'^2 - m^2) + (1-y)\mathbf{l}_\perp^2 + y(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)}. \end{aligned} \quad (3.78)$$

3.6.3 Helizitätssumme

Um die Helizitätssumme angeben zu können, werden hier die Matrixelemente der Fork-Wechselwirkung, siehe Gl. (2.23), gebraucht.

Das erste Matrixelement lautet

$$\langle k'_1, p_2, p_1, k_2 | F | k_1, k_2 \rangle = C_F \frac{K^+ \Delta_F g^2}{16\pi^3} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)]}{(p_1^+ - k_1^+)^2 \sqrt{k_1^+ p_2^+ p_1^+ k_1^+}}, \quad (3.79)$$

Das andere Matrixelement hat den selben Colorfaktor und ergibt sich zu

$$\langle k'_1, k'_2 | F | k'_1, p_2, p_1, k_2 \rangle = C_F \frac{K^+ \Delta_F g^2}{16\pi^3} \frac{[\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)]}{(p_2^+ - k_2^+)^2 \sqrt{p_2^+ k_2^+ k_2^+ p_1^+}}. \quad (3.80)$$

Nun kann die Helizitätssumme des gesamten Graphen angegeben werden. Es werden auch hier wieder alle Faktoren weggelassen, die nicht unmittelbar in die Rechnung eingehen.

$$N_5 = \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)]. \quad (3.81)$$

Zur Durchführung der Summe über die inneren Helizitäten werden wieder die Beziehungen $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m$ und $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$ verwendet. Mit $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ erhält man schließlich

$$N_5 = 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(k_1, h_1)]. \quad (3.82)$$

Auch hier kann der Anteil mit den Spinoren vors Integral gezogen werden.

3.6.4 Das Integral

Auch hier ist wieder über alle inneren Impulse, unter Beachtung der Deltafunktionen, die für die Dreier-Impulserhaltung stehen, zu integrieren. Dies wird auch hier wieder über obige Parametrisierung (3.76) erreicht. Man findet

$$\begin{aligned} \langle f | U_{TGA,5} | i \rangle &= \frac{CK^+ g^4}{(16\pi^3)^2} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(k_1, h_1)]}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_1^+ k_2^+}} \\ &\times \int_0^1 dy \int d^2 l_\perp \frac{R(y, \mathbf{l}_\perp)}{(k_1^+ - y(k_1^+ - k_1^+))^2} \frac{1}{(k_2^+ - (1-y)(k_1^+ - k_1^+))^2} \\ &\times \frac{E + k_1^- - k_1'^- - \frac{m^2 + y(m'^2 - m^2) + (1-y)\mathbf{l}_\perp^2 + y(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)}}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Auch dieses Integral ist divergent und muss geeignet regularisiert werden, deswegen wird wiederum eine Regulatorfunktion $R(y, \mathbf{l}_\perp)$ eingeführt.

Ausserdem wird auch hier wieder die Parametrisierung für die äußeren Impulse verwendet,

$$\begin{aligned}
k_1^\mu &= \left(xK^+, \mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{xK^+} \right), \\
k_2^\mu &= \left((1-x)K^+, -\mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)K^+} \right), \\
k'_1{}^\mu &= \left(x'K^+, \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp{}^2}{x'K^+} \right), \\
k'_2{}^\mu &= \left((1-x')K^+, -\mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp{}^2}{(1-x')K^+} \right).
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Damit ergibt sich für Gl. (3.83)

$$\begin{aligned}
\langle f | U_{TGA,5} | i \rangle &= \frac{Cg^4}{(16\pi^3)^2} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^+ v(k'_2, h'_2)][\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^+ u(k_1, h_1)]}{K^{+2} \sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\
&\times \int_0^1 dy \int d^2l_\perp \frac{R(y, \mathbf{l}_\perp)}{(x - (x-x')y)^2 (1-x - (x-x')y)^2} \\
&\times \frac{E + \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{x} - \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp{}^2}{x'} - \frac{m^2 + y(m'^2 - m^2) + (1-y)\mathbf{l}_\perp^2 + y(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-y)(x-x')}}{y(1-y)(x-x')}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Der zweite Graph dieser Struktur wird im Anhang behandelt, er liefert ein sehr ähnliches Resultat.

Zum Schluss wird auch hier noch der Colorfaktor berechnet. Man findet für die erste Wechselwirkung,

$$\begin{aligned}
C_F &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \sum_{a=1}^8 \sum_{\tilde{c}_1, c_3=1}^3 \sum_{c_1=1}^3 \sum_{c'_1, c'_2, c'_3, c'_4=1}^3 T_{c'_3 c'_4}^a T_{c'_2 c'_1}^a \\
&\times \langle 0 | d_{\tilde{c}_1} d_{c_3} b_{\tilde{c}_1} b_{c_3} b_{c'_3}^\dagger d_{c'_4}^\dagger b_{c'_2}^\dagger b_{c'_1}^\dagger b_{c'_1}^\dagger d_{c'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{6} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1, c_3=1}^3 \sum_{c'_1, c'_2, c'_3=1}^3 T_{c'_3 c_3}^a T_{c'_2 c'_1}^a \langle 0 | b_{c_1} b_{c_3} b_{c'_3}^\dagger b_{c'_2}^\dagger b_{c'_1}^\dagger b_{c'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&\quad - \frac{1}{6} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1, \tilde{c}_1=1}^3 \sum_{c'_1, c'_2, c'_3=1}^3 T_{c'_3 \tilde{c}_1}^a T_{c'_2 c'_1}^a \langle 0 | b_{\tilde{c}_1} b_{c_1} b_{c'_3}^\dagger b_{c'_2}^\dagger b_{c'_1}^\dagger b_{c'_1}^\dagger | 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1, c=1}^3 \sum_{c'_2, c'_3=1}^3 T_{c'_3 c}^a T_{c'_2 c_1}^a \langle 0 | b_c b_{c_1} b_{c'_3}^\dagger b_{c'_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{3} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1, c=1}^3 T_{c_1 c}^a T_{cc_1}^a = -\frac{4}{3},
\end{aligned} \tag{3.86}$$

wobei im letzten Schritt Gl. (A.16) verwendet wurde. Die zweite Wechselwirkung führt analog behandelt auf das gleiche Resultat, somit ergibt sich für den Gesamtcolorfaktor dieses Graphens,

$$C = C_F^2 = \frac{16}{9}. \tag{3.87}$$

Nun wurde von allen Graphentypen ein Beispielgraph vorgestellt. Alle weiteren 12 Graphen werden im Anhang B diskutiert und dort werden auch die Resultate angegeben.

3.7 Näherungsbehandlung

Im vorangegangenen Kapitel und im Anhang werden alle Graphen soweit diskutiert, dass im Prinzip alle Integrale angegeben werden können. Alle diese Integrale werden in Gl. (2.51) benötigt. Es zeigt sich, dass die Anzahl dieser Integrale sehr groß ist und die einzelnen Integrale nicht kovariant sind. Erst die physikalischen Endergebnisse sind unabhängig vom Bezugssystem.

Der Aufwand, alle diese Integrale zu berechnen und mit diesen Resultaten dann Gl. (2.51) zu lösen ist immer noch enorm.

Die Untersuchung aller Graphen und die Angabe der exakten Energienenner und Helizitätssummen, wie es in den vorangegangenen Abschnitten bzw. im Anhang getan wird, ist als Hauptteil dieser Arbeit anzusehen.

Im jetzt folgenden zweiten Teil soll nun eine Näherungslösung diskutiert werden, wobei der erste Schritt ist, dass hier nur manifest kovariante Anteile aller Helizitätssummen betrachtet werden. Dieser Schritt wird von der Erwartung getragen, dass sich alle nicht kovarianten Anteile am Ende wegheben werden, wie es die Erfahrung zeigt [1, 14, 31]. Es sind in Abb.2.4 die obersten vier, also die rein dynamischen und nur aus Vertizes aufgebauten Graphen, welche manifest kovariante Anteile in der Helizitätssumme haben.

Wir beginnen mit der Untersuchung des manifest kovarianten Anteils der Helizitätssumme des ersten Graphens. Man entnimmt Gl. (3.36), dass

$$N_{LB} = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu u(p_2) \bar{u}(p_2) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho u(p_1) \bar{u}(p_1) \gamma^\mu u(k_1)]. \quad (3.88)$$

Die Spinoren $u(k, s)$ und $v(k, s)$ sind hier in der Lepage-Brodsky-Konvention [11] gegeben und die Summe über die Helizitäten der inneren Fermionen ist noch nicht ausgeführt. Um einen besseren Einblick in die Struktur zu gewinnen ist es hilfreich die Spinoren in die Bjørken-Drell-Darstellung zu transformieren. Dies geschieht durch eine unitäre Transformation, die Melosh-Rotation [19, 20] genannt wird, aber keine Rotation im eigentlichen Sinne darstellt.

3.7.1 Melosh-Rotation der Spinoren

Eine solche Transformation ist möglich, da sowohl Lepage-Brodsky-Spinoren als auch Bjørken-Drell-Spinoren Lösungen der selben linearen Gleichung, der freien Diracgleichung sind. In der Impulsdarstellung bedeutet dies $(\not{p} - m)u(p, s) = 0$ für die u -Spinoren, bzw. $(\not{p} + m)v(p, s) = 0$ für die v -Spinoren. Daraus folgt insbesondere, dass jeweils eine Darstellung als Superposition von Lösungen der anderen Darstellung ausgedrückt werden kann. Die u -Spinoren in der Lepage-Brodsky-Darstellung lassen sich somit durch

$$u_\alpha^{LB}(k, h) = \sum_s u_\alpha^{BD}(k, s) \langle s | \omega | h \rangle \quad (3.89)$$

darstellen und die v -Spinoren durch

$$v_\alpha^{LB}(k, h) = \sum_s v_\alpha^{BD}(k, s) \langle s | \tilde{\omega} | h \rangle, \quad (3.90)$$

siehe Anhang A.

Um die Transformation nun wirklich unitär zu machen muss noch die Normierung der Lepage-Brodsky-Spinoren geändert werden, d. h.

$$\bar{u}^{LB}(k, h)u^{LB}(k, h') = \delta_{hh'} \quad (3.91)$$

für die u -Spinoren und

$$\bar{v}^{LB}(k, h)v^{LB}(k, h') = -\delta_{hh'} \quad (3.92)$$

für die v -Spinoren. Die Transformation für die u -Spinoren wird in [20] gezeigt, und ergibt die Transformationsmatrix,

$$\langle s|\omega|h\rangle_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2k^+(E+m)}} \begin{pmatrix} m+k^+ & -k_l \\ k_r & m+k^+ \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Für die v -Spinoren wird die Transformation hier explizit durchgeführt. Die Koeffizienten der Entwicklung in Gl. (3.90) sind bestimmt durch:

$$\langle s|\tilde{\omega}|h\rangle = -\sum_{\alpha} \bar{v}_{\alpha}^{BD}(k, s)v_{\alpha}^{LB}(k, h). \quad (3.94)$$

In der Lepage-Brodsky-Konvention lauten die auf eins normierten v -Spinoren gemäß [11], bzw. Gl. (A.8):

$$v^{LB}(k, h) = \frac{1}{\sqrt{4mk^+}} \begin{pmatrix} h:\uparrow & h:\downarrow \\ -k_l & k^+ - m \\ k^+ - m & k_r \\ k_l & k^+ + m \\ -k^+ - m & k_r \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

mit $k_r = k_x + ik_y$ und $k_l = k_x - ik_y$. In der Bjørken-Drell-Konvention hingegen gilt nach [3]:

$$v^{BD}(k, s) = \frac{1}{\sqrt{2m(E+m)}} \begin{pmatrix} s:\uparrow & s:\downarrow \\ k_z & k_l \\ k_r & -k_z \\ E+m & 0 \\ 0 & E+m \end{pmatrix}. \quad (3.96)$$

Damit folgt für die Transformationsmatrix,

$$\langle s|\tilde{\omega}|h\rangle_{2,2} = \frac{1}{\sqrt{2k^+(E+m)}} \begin{pmatrix} k_l & m+k^+ \\ -(m+k^+) & k_r \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

Diese Matrix ist tatsächlich unitär, wie folgende kurze Rechnung zeigt,

$$\begin{aligned} \sum_h \langle s|\tilde{\omega}|h\rangle_{2,2} \langle h|\tilde{\omega}^\dagger|s'\rangle_{2,2} &= \frac{1}{2k^+(E+m)} \\ &\times \begin{pmatrix} k_l & m+k^+ \\ -(m+k^+) & k_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_r & -(m+k^+) \\ m+k^+ & k_l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Im letzten Schritt wurde $k_l k_r + (m+k^+)^2 = 2k^+(E+m)$ verwendet.

3.7.2 Die transformierte Helizitätssumme

Nun werden alle in Gl. (3.88) auftauchenden Spinoren mit Hilfe von Gl. (3.93) und Gl. (3.97) in die Björken-Drell-Darstellung [3] transformiert. Man erhält ohne die Transformationsmatrizen

$$N_{BD} = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)]. \quad (3.99)$$

Dies wird folgendermaßen abgekürzt:

$$N_{BD} = \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | S_{q1} | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | S_{q2} | h'_2, s_1 \rangle, \quad (3.100)$$

wobei die Matrixelemente jeweils für die vollständig kontrahierten Viererströme stehen. Die Björken-Drell-Spinoren sind im Allgemeinen, Gl. (A.9),

$$u(p, \lambda) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad v(p, \lambda) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

wobei $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Pauli-Spinoren sind.

Nun werden die Vierer-Ströme $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ an den Vertizes eingeführt. Die Ströme an den Enden des oberen Gluons sind

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^0 u(p_2, s_2)]}{\sqrt{\frac{(k_1^{\prime 0} + m') (p_2^0 + m')}{2m' 2m'}} \left\langle h'_1 \left| 1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}'_1}{(k_1^{\prime 0} + m')} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2}{(p_2^0 + m')} \right| s_2 \right\rangle \\ \mathbf{j}_1 &= \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \boldsymbol{\gamma} u(p_2, s_2)]}{\sqrt{\frac{(k_1^{\prime 0} + m') (p_2^0 + m')}{2m' 2m'}} \left\langle h'_1 \left| \frac{\boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2)}{(p_2^0 + m')} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}'_1) \boldsymbol{\sigma}}{(k_1^{\prime 0} + m')} \right| s_2 \right\rangle \\ \rho_2 &= \frac{[\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^0 u(k_1, h_1)]}{\sqrt{\frac{(p_1^0 + m) (k_1^0 + m)}{2m 2m}}} \left\langle s_1 \left| 1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{(p_1^0 + m)} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1}{(k_1^0 + m)} \right| h_1 \right\rangle \\ \mathbf{j}_2 &= \frac{[\bar{u}(p_1, s_1) \boldsymbol{\gamma} u(k_1, h_1)]}{\sqrt{\frac{(p_1^0 + m) (k_1^0 + m)}{2m 2m}}} \left\langle s_1 \left| \frac{\boldsymbol{\sigma} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1)}{(k_1^0 + m)} + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1) \boldsymbol{\sigma}}{(p_1^0 + m)} \right| h_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Beide Ströme miteinander kontrahiert ergeben

$$\begin{aligned} \langle h'_1, s_1 | S_{q1} | s_2, h_1 \rangle &= \sqrt{\frac{(k_1^{\prime 0} + m') (p_2^0 + m') (p_1^0 + m) (k_1^0 + m)}{2m' 2m' 2m 2m}} \\ &\times \left\langle h'_1, s_1 \left| \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}'_1}{(k_1^{\prime 0} + m')} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(p_2^0 + m')} \right) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{(p_1^0 + m)} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{(k_1^0 + m)} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1 (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{(p_2^0 + m')} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}'_1) \boldsymbol{\sigma}_1}{(k_1^{\prime 0} + m')} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_2 (\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}_1)}{(k_1^0 + m)} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_1) \boldsymbol{\sigma}_2}{(p_1^0 + m)} \right) \right| s_2, h_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Nun wird die *lokale Approximation* [21] angewendet, sie bedeutet die Ersetzung,

$$p^0(k) \implies m. \quad (3.104)$$

Ob diese Approximation gerechtfertigt ist, lässt sich erst *a posteriori*, also am Ende in der Lösung sagen. Alle Brüche unter der Wurzel in Gl. (3.103) kürzen sich dadurch und die Wurzel wird durch eine eins ersetzt. Insgesamt erhält man für Gl. (3.103)

$$\begin{aligned} S_{q_1} &\equiv \langle h'_1, s_1 | S_{q_1} | s_2, h_1 \rangle \\ &\times \left\langle h'_1, s_1 \left| \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}'_1}{2m'} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{2m'} \right) \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{2m} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{2m} \right) \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{2m'} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}'_1)\boldsymbol{\sigma}_1}{2m'} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_2(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}_1)}{2m} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{p}_1)\boldsymbol{\sigma}_2}{2m} \right) \right| s_2, h_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Die in den gleichen σ 's bilinearen Ausdrücke können mit Hilfe folgender Identitäten umgeformt werden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{k} + i(\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{k}), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) &= \mathbf{k}' - i(\boldsymbol{\sigma} \wedge \mathbf{k}'), \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}') &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Unter Verwendung dieser Identitäten erhält man für Gl. (3.106)

$$\begin{aligned} S_{q_1} &= \left\langle h'_1, s_1 \left| \left[\left(1 + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 + i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m')^2} \right) \right. \right. \\ &\times \left(1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2} \right) \\ &\left. - \left(\frac{\mathbf{p}_2 - i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{2m'} + \frac{(\mathbf{k}'_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{k}'_1))}{2m'} \right) \right. \\ &\left. \times \left(\frac{(\mathbf{k}_1 - i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{k}_1))}{2m} + \frac{(\mathbf{p}_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{p}_1))}{2m} \right) \right] \right| s_2, h_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Weiter ausmultipliziert findet man

$$\begin{aligned} S_{q_1} &= \left\langle h'_1, s_1 \left| \left[1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 + i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m')^2} \right. \right. \\ &+ \left(\frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 + i\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m')^2} \right) \left(\frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + i\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2} \right) \\ &- \left(\frac{\mathbf{p}_2 - i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{2m'} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{k}_1 - i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m} \right) \\ &- \left(\frac{\mathbf{p}_2 - i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{2m'} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m} \right) \\ &- \left(\frac{\mathbf{k}'_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{k}'_1)}{2m'} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{k}_1 - i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m} \right) \\ &\left. - \left(\frac{\mathbf{k}'_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{k}'_1)}{2m'} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}_1 + i(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m} \right) \right] \right| s_2, h_1 \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Zur weiteren Umformung werden noch die bekannten Vektoridentitäten

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}, \\
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}, \\
(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})
\end{aligned} \tag{3.109}$$

verwendet. Dies führt zu

$$\begin{aligned}
S_{q_1} &= \left\langle h'_{1, s_1} \left[\left[1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + i\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2 + i\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m')^2} \right. \right. \right. \\
&+ \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} + i \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1)\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \\
&+ i \frac{(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2)\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2(2m')^2} - \frac{\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \\
&- \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1 - (\sigma_1 \wedge \mathbf{p}_2)(\sigma_2 \wedge \mathbf{k}_1) - i(\sigma_1 - \sigma_2)(\mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} \\
&- \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + (\sigma_1 \wedge \mathbf{p}_2)(\sigma_2 \wedge \mathbf{p}_1) - i(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \\
&- \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1 + (\sigma_1 \wedge \mathbf{k}'_1)(\sigma_2 \wedge \mathbf{k}_1) + i(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} \\
&\left. \left. \left. - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1 - (\sigma_1 \wedge \mathbf{k}'_1)(\sigma_2 \wedge \mathbf{p}_1) + i(\sigma_1 - \sigma_2)(\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \right] \right] \right|_{s_2, h_1} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Nun werden die Terme noch in einen Teil ohne und einen Teil mit Bahndrehimpuls umgeordnet. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
S_{q_1} &= \left\langle h'_{1, s_1} \left\{ \left[\left[1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(2m')^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \right. \right. \right. \\
&- \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1 - (\sigma_1 \wedge \mathbf{p}_2)(\sigma_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + (\sigma_1 \wedge \mathbf{p}_2)(\sigma_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \\
&- \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1 + (\sigma_1 \wedge \mathbf{k}'_1)(\sigma_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1 - (\sigma_1 \wedge \mathbf{k}'_1)(\sigma_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \left. \right] \\
&+ \left[i \frac{\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2} + i \frac{\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m')^2} + i \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1)\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \right. \\
&+ i \frac{(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2)\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{(2m)^2(2m')^2} - \frac{\sigma_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_1)\sigma_1 \cdot (\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \\
&+ i \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} + i \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \\
&\left. \left. \left. - i \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)(\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{k}_1)}{2m'2m} - i \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)(\mathbf{k}'_1 \wedge \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \right] \right] \right\} \right|_{s_2, h_1} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Die Terme in der zweiten eckigen Klammer von Gl. (3.111) lassen sich, analog zu [21], in einzelne Wechselwirkungstypen einordnen. Der 1., 2., 6., 7., 8. und 9. Term stellen Spin-Bahn-Wechselwirkungen dar. Der 3., 4. und 5. Term sind Darwin-Spin-Bahn Wechselwirkungen. Alle Terme dieser Klammer involvieren Drehimpulse und verschwinden, da im Folgenden nur s -Zustände betrachtet werden.

Im nächsten Schritt werden die Terme in der ersten eckigen Klammer der Gl. (3.111) mit Hilfe der Hyperfeinnäherung [3]

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{k}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{k}_2) &\implies \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \\ (\boldsymbol{\sigma}_1 \wedge \mathbf{k}_1)(\boldsymbol{\sigma}_2 \wedge \mathbf{k}_2) &\implies \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2) \end{aligned} \quad (3.112)$$

umgeformt. Dadurch wird die Struktur der verbleibenden Wechselwirkungen, welche die Spins involvieren ersichtlicher. Man findet

$$\begin{aligned} S_{q_1} = & \left\langle h'_1, s_1 \left| \left\{ \left[1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(2m')^2} + \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1)(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{(2m)^2(2m')^2} \right. \right. \right. \\ & - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1 - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1)}{2m'2m} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 + \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \\ & - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1 + \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1)}{2m'2m} \\ & \left. \left. \left. - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1 - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1)}{2m'2m} \right] \right\} \right| s_2, h_1 \rangle . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Als nächster Approximationsschritt werden alle Terme proportional zu $\frac{1}{m^4}$ weggelassen und die Terme werden noch etwas umgeordnet. Das erste Matrixelement in Gl. (3.100) ergibt nach den durchgeführten Näherungen

$$\begin{aligned} \langle h'_1, s_1 | S_{q_1} | s_2, h_1 \rangle = & \left\langle h'_1, s_1 \left| \left\{ \left[1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(2m')^2} \right. \right. \right. \\ & - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} \left. \right] - \frac{2}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \times \\ & \left. \left. \left. \left[\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} \right] \right\} \right| s_2, h_1 \rangle . \end{aligned} \quad (3.114)$$

Nun wird der andere Faktor in Gl. (3.100) behandelt. Hierzu benötigt man die beiden Ströme an den Enden des unteren Gluons. Sie lauten:

$$\begin{aligned} \rho_3 &= [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^0 v(k'_2, h'_2)] \\ &= \sqrt{\frac{(p_2^0 + m')}{2m'} \frac{(k_2'^0 + m')}{2m'}} \left\langle s_2 \left| \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2}{k_2'^0 + m'} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2}{p_2^0 + m'} \right| h'_2 \right\rangle \\ \mathbf{j}_3 &= [\bar{u}(p_2, s_2) \boldsymbol{\gamma} v(k'_2, h'_2)] \\ &= \sqrt{\frac{(p_2^0 + m')}{2m'} \frac{(k_2'^0 + m')}{2m'}} \left\langle s_2 \left| \boldsymbol{\sigma} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_2}{p_2^0 + m'} \right) \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2}{k_2'^0 + m'} \right) \right| h'_2 \right\rangle \\ \rho_4 &= [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^0 u(p_1, s_1)] \\ &= \sqrt{\frac{(k_2^0 + m)}{2m} \frac{(p_1^0 + m)}{2m}} \left\langle h_2 \left| \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^0 + m} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{p_1^0 + m} \right| s_1 \right\rangle \\ \mathbf{j}_4 &= [\bar{v}(k_2, h_2) \boldsymbol{\gamma} u(p_1, s_1)] \\ &= \sqrt{\frac{(k_2^0 + m)}{2m} \frac{(p_1^0 + m)}{2m}} \left\langle h_2 \left| \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^0 + m} \right) \boldsymbol{\sigma} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_1}{p_1^0 + m} \right) + \boldsymbol{\sigma} \right| s_1 \right\rangle . \end{aligned} \quad (3.115)$$

Man findet völlig analog zum ersten Fall

$$\begin{aligned}
S_{q_2} &\equiv \langle s_2, h_2 | S_{q_2} | h'_2, s_1 \rangle = \sqrt{\frac{(p_2^0 + m')}{2m'} \frac{(k_2'^0 + m')}{2m'} \frac{(k_2^0 + m)}{2m} \frac{(p_1^0 + m)}{2m}} \\
&\times \left\langle s_2, h_2 \left| \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2}{k_2'^0 + m'} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2}{p_2^0 + m'} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^0 + m} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1}{p_2^0 + m} \right) \right. \right. \\
&- \left. \left(\boldsymbol{\sigma}_3 + \frac{\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2}{p_2^0 + m'} \right) \boldsymbol{\sigma}_3 \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2}{k_2'^0 + m'} \right) \right. \\
&\times \left. \left. \left(\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2}{k_2^0 + m} \right) \boldsymbol{\sigma}_4 \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1}{p_1 + m} \right) + \boldsymbol{\sigma}_4 \right) \right| h'_2, s_1 \right\rangle. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Hier werden wieder die selben Approximationen wie beim ersten Fall durchgeführt. Ausmultiplizieren und Anwenden der *lokalen Approximation* führt zu

$$\begin{aligned}
S_{q_2} &= \left\langle s_2, h_2 \left| \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2)(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2)}{2m'2m} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2)(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1)}{2m'2m} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2)(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2)}{2m'2m} \right. \right. \right. \\
&+ \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2)(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1)}{2m'2m} - \frac{\boldsymbol{\sigma}_3(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2)\boldsymbol{\sigma}_4(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1)}{(2m)^2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2)\boldsymbol{\sigma}_3(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2)\boldsymbol{\sigma}_4}{(2m')^2} \\
&\left. \left. \left. - (\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{p}_2)\boldsymbol{\sigma}_3(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \mathbf{k}'_2)(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{k}_2)\boldsymbol{\sigma}_4(\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \mathbf{p}_1)}{(2m')^2(2m)^2} \right] \right| h'_2, s_1 \right\rangle. \tag{3.117}
\end{aligned}$$

Dies wird nun völlig analog zum ersten Fall schrittweise umgeformt und es werden die gleichen Näherungen durchgeführt. Hier wird nur noch das Zwischenresultat

$$\begin{aligned}
S_{q_2} &= \left\langle s_2, h_2 \left| \left\{ \left[-(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2)}{12m'm} + \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}_1)}{12m'm} \right. \right. \right. \\
&+ \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_2)}{12m'm} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1)}{12m'm} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2)}{12m^2} \\
&- \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{p}_2)}{12m'^2} - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{3(2m')^2(2m)^2} \\
&- \left. \left. \left. \frac{2(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2)(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{9(2m')^2(2m)^2} \right] \right. \right. \\
&+ \left[i \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)\boldsymbol{\sigma}_4 \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k}_2)}{3(2m)^2} - i \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot (\mathbf{p}_2 \wedge \mathbf{k}'_2)}{3(2m')^2} \right. \\
&\left. \left. + i \frac{(\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2)(\boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_4) \cdot (\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_2)}{3(2m')^2(2m)^2} \right] \right\} \left| h'_2, s_1 \right\rangle \tag{3.118}
\end{aligned}$$

angegeben. Auch hier werden wieder nur s -Zustände betrachtet, somit fällt die zweite eckige Klammer in Gl. (3.118) weg. Ausserdem werden Terme proportional zu $\frac{1}{m^4}$ weggelassen.

Somit verbleibt hier lediglich

$$\begin{aligned}
\langle s_2, h_2 | S_{q_2} | h'_2, s_1 \rangle &= \left\langle s_2, h_2 \left| \left\{ (\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) \left[-1 + \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2}{12m'm} + \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}_1}{12m'm} \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_2}{12m'm} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{12m'm} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{12m^2} - \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}_2}{12m'^2} \right] \right\} \right| h'_2, s_1 \right\rangle. \tag{3.119}
\end{aligned}$$

Zunächst werden noch Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \langle h'_1, s_1 | S_{q1} | s_2, h_1 \rangle &= \langle h'_1, s_1 | \{A \cdot 1 + B \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)\} | s_2, h_1 \rangle \\ &\text{und} \\ \langle s_2, h_2 | S_{q2} | h'_2, s_1 \rangle &= \langle s_2, h_2 | C \cdot (\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | h'_2, s_1 \rangle, \end{aligned} \quad (3.120)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_1}{(2m)^2} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_2}{(2m')^2} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m}, \\ B &= \frac{2}{3} \left[\frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} + \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{k}_1}{2m'2m} - \frac{\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{p}_1}{2m'2m} \right], \\ C &= -1 + \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{k}_2}{12m'm} + \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}_1}{12m'm} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{k}_2}{12m'm} + \frac{\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1}{12m'm} - \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k}_2}{12m^2} - \frac{\mathbf{k}'_2 \cdot \mathbf{p}_2}{12m'^2}. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Mit diesen Abkürzungen schreibt sich N als

$$\begin{aligned} N_{BD} &= \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | S_{q1} | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | S_{q2} | h'_2, s_1 \rangle \\ &= AC \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | 1 | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | (\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | h'_2, s_1 \rangle \\ &+ BC \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | (\boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) | h'_2, s_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.122)$$

Für einen ersten Schritt werden die Faktoren A, B und C noch weiter genähert:

$$A \approx 1, \quad B \approx 0 \quad \text{und} \quad C \approx -1. \quad (3.123)$$

Das bedeutet $AC \approx -1$ und $BC \approx 0$. Damit erhält man schließlich

$$N_{BD} \approx - \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | 1 | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4 | h'_2, s_1 \rangle. \quad (3.124)$$

Im Prinzip wurde angenommen, dass alle beitragenden Impulse klein im Vergleich zu den vorkommenden Massen sind [21, 30].

Der andere trapezförmige, nur aus Vertizes aufgebaute Graph, siehe Abb.2.4, berechnet sich völlig analog. Man transformiert den manifest kovarianten Anteil der Helizitätssumme in die Björken-Drell-Konvention und schreibt analog zum ersten Graphen

$$N_{BD} = \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | S_{q1} | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | S_{q2} | h'_2, s_1 \rangle. \quad (3.125)$$

Unter den selben Näherungen findet man in diesem Fall für Gl. (3.125)

$$N_{BD} = - \sum_{s_1, s_2} \langle h'_1, s_1 | \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | 1 | h'_2, s_1 \rangle. \quad (3.126)$$

Die beiden anderen rein dynamischen Graphen sind die beiden parallelogrammförmigen Graphen in der obersten Zeile von Abb.2.4. Sie liefern keinen Beitrag unter diesen Näherungen.

Die hier durchgeführten Näherungen sind sicher drastisch und werden möglicherweise zu keinem quantitativen Ergebnis führen. Sie sind als allererster Schritt in Richtung zu einer besseren Lösung zu verstehen. Bei der Entwicklung des *Singlet-Triplet model* [21, 22] wurde sehr ähnlich vorgegangen.

3.7.3 Integration

Näherung der Energienenner

Für die Energienenner findet man unter Verwendung der Parametrisierungen (3.41) und (3.40)

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = -\frac{y^2 m^2 + (1-y)m_g^2 + l_\perp^2}{K^+ xy(1-y)}, \\
\Delta_B &= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} \\
&\approx \Delta_A - \frac{q_1^+}{m_g^2 - 4m^2}, \\
\Delta_C &= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} - \frac{(p_2 + k_2')^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} \\
&\approx \Delta_A + \frac{4(m^2 - m'^2)}{K^+(1-xy)}.
\end{aligned} \tag{3.127}$$

Hier wird der erste Energienenner zunächst exakt angegeben, in den anderen wird wieder angenommen, dass die in die Integration eingehenden Impulse klein gegenüber den Massen sind [30]. Die Masse $m \equiv m_f$ ist die Masse der einfallenden Quarks, $m' \equiv m_{f'}$ die der ausfallenden Quarks. Mit der Annahme, dass $-(k_1 - p_1)^2 \ll m_g^2$ gilt, wird Δ_A zu

$$\Delta_A \approx -\frac{m_g^2}{q_1^+} = -\frac{m_g^2}{K^+ xy}. \tag{3.128}$$

Diese Annahme ist dadurch gerechtfertigt, dass die Gluonmasse als die größte Masse (Gluballmasse) des Systems angenommen wird [27]. Genau genommen stellt diese eine Erweiterung der effektiven Wechselwirkung dar, denn durch diese Gluballmasse werden in einer eher qualitativen Art und Weise Wechselwirkungen der zwei inneren Gluonen miteinander berücksichtigt. Wie diese Berücksichtigung am besten geschieht muss noch genauer aufgeklärt werden. Wichtig ist an dieser Stelle, dass durch diese Annahme den Energienennern eine besonders einfache Form gegeben werden kann. Dadurch wird die Integration erheblich vereinfacht. Damit gilt für die beiden anderen Energienenner

$$\begin{aligned}
\Delta_B &= -\frac{m_g^2 - 4m^2 xy}{K^+ xy(1-xy)}, \\
\Delta_C &= \frac{(4(m^2 - m'^2) + m_g^2)xy - m_g^2}{K^+ xy(1-xy)}.
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Das Produkt aller drei Energienenner lautet somit

$$\Delta_A \Delta_B \Delta_C = -\frac{m_g^2(m_g^2 - 4m^2 xy) ((4(m'^2 - m^2) - m_g^2)xy + m_g^2)}{K^{+3}(xy)^3(1-xy)^2}. \tag{3.130}$$

Hier werden nur die Energienenner des ersten trapezförmigen Graphens behandelt. Unter diesen Näherungen ergeben sich für den anderen Trapezgraphen am Ende die gleichen Ausdrücke.

Das Integral:

Nun sind alle Bauteile vorhanden um nach den im zweiten Kapitel diskutierten Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* das Integral angeben zu können. Man erhält

$$\begin{aligned} \langle f|U_{TGA_{1,3}}|i\rangle &= C \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{K^{+3}}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_1'^+ k_2'^+}} \\ &\times \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} d^2 l_{\perp} \frac{1}{q_1^+ q_2^+ p_1^+ p_2^+} \frac{N R(y, l_{\perp})}{\Delta_A \Delta_B \Delta_B}, \end{aligned} \quad (3.131)$$

wobei alle Impulse schon als Funktion der Parametrisierung zu verstehen sind und die Zustände $|i\rangle$ und $|f\rangle$ für den Anfangs- und den Endzustand stehen, siehe Gl. (2.51). Hierbei steht N für die oben ausgewertete Spinsummen und C für den Colorfaktor. Es gilt $C = \frac{4}{3}$. Unter Verwendung von Gl. (3.130), (3.41) und (3.40) findet man

$$\begin{aligned} \langle f|U_{TGA_{1,3}}|i\rangle &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{-N}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ &\times \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} d^2 l_{\perp} \frac{1}{K^{+4} xy(1-xy)x(1-y)(x'-xy)} \\ &\times \frac{1}{K^{+4} (xy)^3 (1-xy)^2} \\ &\times \frac{1}{m_g^2 (m_g^2 - 4m^2 xy) ((4(m'^2 - m^2) - m_g^2) + m_g^2)} \\ &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{1}{m_g^2} \frac{-N}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ &\times \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{\infty} d^2 l_{\perp} \frac{xy^2}{(1-y)(x'-xy)(m_g^2 - 4m^2 xy)} \\ &\times \frac{1}{(1-xy) ((4(m'^2 - m^2) - m_g^2) xy + m_g^2)}. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Da das Integral über l_{\perp} quadratisch divergent ist und das Integral über y an den Integrationsgrenzen divergent ist, muss regularisiert werden. Es wird hier ein scharfer cut-off [29, 28] gewählt:

$$\Theta(y, l_{\perp}) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq l_{\perp}^2 \leq l_{\Lambda}^2(y), \epsilon_l \leq y \leq 1 - \epsilon_u, \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.133)$$

Das limitierende $l_{\Lambda}^2(y)$ beschreibt einen Halbkreis:

$$l_{\Lambda}^2(y) = a \left[\left(\frac{c}{2} \right)^2 - \left(y - \frac{b}{2} \right)^2 \right], \quad (3.134)$$

mit

$$\begin{aligned} a &= \Lambda^2 + (m_1 + m_2)^2, \\ b &= \frac{\Lambda^2 + 2m_1(m_1 + m_2)}{\Lambda^2 + (m_1 + m_2)^2} \\ \text{und} & \\ c &= \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + (m_1 + m_2)^2} \frac{\Lambda^2 + 4m_1 m_2}{\Lambda^2 + (m_1 + m_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Dies liefert mit

$$\epsilon_l = \frac{b-c}{2} \quad \text{und} \quad \epsilon_u = 1 - \frac{b+c}{2} \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \langle f|U_{TGA_{1,3}}|i\rangle &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{2\pi}{m_g^2} \frac{N}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ &\times \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_u} dy \frac{xy^2 l_\Lambda^2(y)}{(1-y)(x'-xy)(m_g^2 - 4m^2xy)} \\ &\times \frac{(1-xy)}{(4(m'^2 - m^2) - m_g^2)xy + m_g^2}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Weiter wird zunächst nur die Flavor $SU(2)$, d.h. $m_f \equiv m = m' \equiv m_{f'}$ betrachtet. Ausserdem wird noch der Faktor $16m^2m'^2$ wiedereingeführt, er trägt der in Gl. (3.92) geänderten Normierung der Spinoren Rechnung.

$$\begin{aligned} \langle f|U_{TGA_{1,3}}|i\rangle &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{16\pi m^4}{m_g^4} \frac{-N_{gesamt}}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ &\times \int_{\epsilon_l}^{\epsilon_u} dy \frac{xy^2 a \left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 \right]}{(1-y)(x'-xy)(m_g^2 - 4m^2xy)}. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Hier wurde die l_\perp^2 -Integration ausgeführt und es wurde $l_\Lambda^2(y)$ gleich eingesetzt. Zum Schluss wird auch noch die y -Integration durchgeführt. Man erhält

$$\begin{aligned} \langle f|U_{TGA_{1,3}}|i\rangle &= \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{16\pi m^4 a}{m_g^4} \frac{-N_{gesamt}}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ &\times \left\{ \frac{(2c-1)(b-1)}{16m^2x} - \frac{m_g^2 + 4m^2x'(4c-4)}{64m^4x^2} \right. \\ &- \frac{m_g^4(m_g^4 - 4bm^2m_g^2x + 4(b^2 - c^2)m^4x^2)}{64m^6x^3(m_g^2 - 4m^2x)(m_g^2 - 4m^2x')} \\ &\times \ln \left[\frac{m_g^2 + 2(c-b)m^2x}{m_g^2 + 2(b+c-2)m^2x} \right] \\ &+ \frac{x(4b-4-b^2+c^2)}{4(m_g^2 - 4m^2x)(x-x')} \ln \left[\frac{b+c}{c-b+2} \right] \\ &+ \frac{x'^2((b^2-c^2)x^2 - 4bxx' + 4x'^2)}{4x^3(x-x')(m_g^2 - 4m^2x')} \\ &\times \left. \ln \left[\frac{(2-b-c)x - 2x'}{(b-c)x - 2x'} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.139)$$

mit $a = \Lambda^2 + 4m^2$, $b = 1$ und $c = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + 4m^2}$.

Das Ergebnis hängt also nur noch von den Massen, dem Cut-off-Parameter Λ und den äußeren Impulsbruchteilen x und x' ab.

3.7.4 Zusammenfassung der Näherungsergebnisse

Hier sollen die Resultate der eben diskutierten Näherung kurz zusammengefasst werden.

Die oben diskutierten Näherungen an den durch die Melosh-Rotation transformierten Helizitätssummen, die ich nach dieser unitären Transformation Spinsummen nenne, ergeben

$$N_{gesamt} = - \sum_{s_1, s_2} \left\{ \langle h'_1, s_1 | 1 | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4 | h'_2, s_1 \rangle \right. \\ \left. + \langle h'_1, s_1 | \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 | s_2, h_1 \rangle \langle s_2, h_2 | 1 | h'_2, s_1 \rangle \right\}. \quad (3.140)$$

Diese Struktur stellt eine beträchtliche Vereinfachung im Vergleich zu den vollen Helizitätssummen dar. Der größte Vorteil ist, dass diese Summe vor das Integral gezogen werden kann, da sie nicht mehr von den (inneren) Impulsen und damit von den Integrationsvariablen abhängt.

Konsequenterweise wurden die Energienenner ebenfalls genähert und das divergente Integral wurde durch einen scharfen Cut-off und die Gluonmasse regularisiert. Nach all diesen Schritten lautet das Endergebnis,

$$\langle f | U_{TGA_{1,3}} | i \rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{g}{\sqrt{2}(2\pi)^3} \right)^4 \frac{16\pi m^4 a}{m_g^4} \frac{-N_{gesamt}}{\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\ \times \left\{ \frac{(2c-1)(b-1)}{16m^2 x} - \frac{m_g^2 + 4m^2 x'(4c-4)}{64m^4 x^2} \right. \\ - \frac{m_g^4(m_g^4 - 4bm^2 m_g^2 x + 4(b^2 - c^2)m^4 x^2)}{64m^6 x^3(m_g^2 - 4m^2 x)(m_g^2 - 4m^2 x')} \\ \times \ln \left[\frac{m_g^2 + 2(c-b)m^2 x}{m_g^2 + 2(b+c-2)m^2 x} \right] \\ + \frac{x(4b-4-b^2+c^2)}{4(m_g^2 - 4m^2 x)(x-x')} \ln \left[\frac{b+c}{c-b+2} \right] \\ + \frac{x'^2((b^2-c^2)x^2 - 4bxx' + 4x'^2)}{4x^3(x-x')(m_g^2 - 4m^2 x')} \\ \left. \times \ln \left[\frac{(2-b-c)x - 2x'}{(b-c)x - 2x'} \right] \right\}, \quad (3.141)$$

und hängt nur noch von den Massen, dem Cut-off-Parameter Λ und den longitudinalen Impulsbruchteilen x und x' ab. Es wird hier der Übersichtlichkeit halber darauf verzichtet die oben angegebenen Parameter a , b und c auch noch einzusetzen. Es sei noch erwähnt, dass die Einschränkung auf $m_f = m_{f'} = m$ sehr leicht wieder aufgehoben werden kann, da sich in der Integration lediglich die Koeffizienten des Polynoms in y ändern. Aber als erster Schritt ist eine Lösung unter dieser Einschränkung ausreichend.

Kapitel 4

Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wird erstmals der Zwei-Gluon-Annihilations-Term eines effektiven Hamiltonoperators auf dem Lichtkegel untersucht. Dieser Teil des effektiven Hamiltonoperators wirkt nur im $q_f \bar{q}_f$ -Sektor und beschreibt eine virtuelle Annihilation eines $q_f \bar{q}_f$ -Paares in zwei Gluonen. Durch ihn wird eine Mischung unterschiedlicher flavor-diagonaler Mesonen generiert.

Durch die Einführung einer effektiven Wechselwirkung wird eine Vielzahl von nur schwer überwindbaren Problemen umgangen. Beispielsweise sind in $3 + 1$ Dimensionen die mittels der *DLCQ* gefundenen Matrizen schnell zu groß, um numerisch diagonalisiert werden zu können.

Eine Möglichkeit, diese effektive Wechselwirkung abzuleiten stellt die Methode der iterierten Resolventen dar und es zeigt sich, dass nur zwei strukturell unterschiedliche Beiträge existieren. Der erste Teil ist der Ein-Gluon-Austausch-Term und wurde bereits ausgiebig untersucht. Zur Lösung der Zwei-Gluon-Annihilations-Wechselwirkung, welche den zweiten Teil dieser Wechselwirkung darstellt, müssen 17 Graphen (Abb.2.4) vierter Ordnung in Hamiltonscher Störungstheorie in der *front form* berechnet werden.

Diese umfangreiche Arbeit wird hier erstmals begonnen. Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil, Kapitel 3.1-3.6 und Anhang B, werden alle 17 Graphen exakt untersucht. im zweiten Teil, Kapitel 3.7, werden schrittweise gewisse Näherungen eingeführt und es wird am Ende eine Näherungslösung angegeben.

Zunächst werden die Helizitätssummen, Energienenner und Colorfaktoren von allen 17 Graphen berechnet. In den Helizitätssummen werden mit Hilfe gewisser Tricks die Summationen über die Helizitäten der inneren Quarks und Gluonen ausgeführt. Das Ziel hierbei ist, die Abhängigkeiten von den inneren und äusseren Freiheitsgraden dieser Summe so weit wie möglich in zwei Faktoren zu separieren. Dies geschieht, um den Teil, welcher die Spinoren der äusseren Fermionen enthält, am Ende als Faktor vor die Integration ziehen zu können.

Die Integration rührt daher, dass gemäß den Regeln der Hamiltonschen Störungstheorie in der *front form* über alle inneren Freiheitsgrade zu integrieren bzw. zu summieren ist, wobei die Integration über die inneren Impulse gewissen Einschränkungen unterliegt. Diese Einschränkungen sind auf die Dreier-Impulserhaltungen an den unterschiedlichen Wechselwirkungspunkten zurückzuführen. Für alle Graphen wird eine für die *front form* typische Parametrisierung der Impulse eingeführt, mit der sich am Ende alle Integrationen auf eine Dreier-Integration über gewisse Parametrisierungsva-

riable (y, \mathbf{l}_\perp) reduzieren. Es wird dabei so weit gegangen, dass in einem nächsten Schritt nun alle vorkommenden Integrale, die in allen Fällen nur noch über diese drei Variablen laufen, angegeben werden können. Dazu müssen nun lediglich alle Impulse durch die explizit angegebenen Parametrisierungen ausgedrückt werden. Dies wird wegen der enormen Länge aller Ausdrücke hier nicht mehr durchgeführt, kann mit dieser Arbeit als Grundlage jedoch verhältnismässig leicht getan werden.

Hier werden somit die bedeutendsten Schritte zur Angabe aller Integrale durchgeführt. Diese Integrale müssen dann noch geeignet regularisiert werden. Dies kann entweder durch einen scharfen Cut-off wie in der hier ausgearbeiteten Näherung oder auf andere Art und Weise, siehe z.B. [1, 29], geschehen und wäre der nächste Schritt in Richtung einer exakten Lösung des Problems.

Die expliziten Resultate für die Energienenner, Helizitätssummen und Parametrisierungen sind den einzelnen Kapiteln und Anhang B direkt zu entnehmen, sie werden hier nicht erneut aufgelistet.

Nach diesem langen Teil mit den exakten Rechnungen hat man vor allem gelernt, dass es sich um ein komplexes, nur mit sehr grossem Aufwand vollständig exakt zu lösendes Problem handelt.

Dies motiviert die Näherungslösung, welche in einem zweiten Teil dieser Arbeit durchgeführt wird. Mit dieser Näherungslösung, deren Resultate am Ende des Kapitels 3.7 zusammengefasst sind (3.7.4), ist man nun in der Lage die Grösse und die Spinabhängigkeit dieser flavor-mischenden Wechselwirkung anzugeben. Dies kann z.B. über $\langle \Psi_b | U_{TGA} | \Psi_b \rangle$ geschehen und ist u.a. im Kontext von [24, 30] von Bedeutung.

In Zukunft könnten jetzt auch flavor-diagonale Mesonen betrachtet und in das Modell [24] eingefügt werden.

Die wesentlichen Annahmen die zur angegebenen Näherung führen seien hier noch einmal kurz skizziert.

Am Anfang steht die Annahme, dass nur die manifest kovarianten Anteile der Helizitätssummen von Bedeutung sind. Es wird davon ausgegangen, dass sich alle anderen Summanden durch entsprechende Gegenterme anderer Graphen wegheben. Dies zeigt auch die Erfahrung mit ähnlichen Problemen [1, 14, 31] und insbesondere dem Ein-Gluon-Austausch-Term.

Diese manifest kovarianten Terme stammen aus den rein dynamischen Graphen (Graph 1-4 in Abb.2.4) und werden mit einer sog. Melosh-Rotation unitär von der Lepage-Brodsky-Konvention in die Björken-Drell-Konvention transformiert. Bei dem Ein-Gluon-Austausch-Term wurde dieser Schritt auch durchgeführt und in dieser vertrauteren Darstellung gelingt ein besserer Einblick in die Struktur dieser Summen. Man erkennt insbesondere, dass die jeweils über ein Gluon verbundenen Ströme miteinander kontrahieren. In einem nächsten Schritt werden die Spinoren in der Björken-Drell-Konvention explizit eingesetzt. Die erste Vereinfachung gelingt mit der *lokalen Approximation* analog zu [21]. Dadurch fallen die komplizierten Wurzelausdrücke, die aus der Definition der Spinoren kommen, weg.

Durch die am Ende vorzunehmende Regularisierung und durch die Erkenntnis, dass die Wellenfunktionen der äusseren Teilchen für grosse Impulse rasch abfallen [30] wird die Annahme begründet, dass die eingehenden Impulse klein gegenüber den auftretenden Massen sind. Ausserdem wird der Wechselwirkung der inneren Gluonen untereinander eher qualitativ durch die Annahme Rechnung getragen, dass die Gluonmasse die grösste

der Massen ist. Dies stellt eine Korrektur der effektiven Wechselwirkung dar und muss noch näher untersucht werden. Jedenfalls gelingt dadurch eine deutliche Vereinfachung der Energienenner und die Integration am Ende wird stark erleichtert.

Dies sind natürlich alles drastische und einschränkende Massnahmen, sie werden hier aber als erster Schritt zu einem besseren Verständnis dieser komplizierten Wechselwirkung durchgeführt. Bei der Ableitung des erfolgreichen *Singlet Triplet Model* wurde in ähnlicher Art und Weise vorgegangen [21].

Die auf diesen Annahmen basierenden Approximationsschritte der Spinsummen werden bewusst schrittweise eingeführt, um andere, eventuell bessere Näherungsmöglichkeiten bereit zu stellen. Es könnten z.B. hier vernachlässigte Beiträge später wieder eingefügt werden.

Interessant ist, auf welche Art und Weise aus der Atomphysik bekannte und weitere Wechselwirkungen der Spins und Drehimpulse auftauchen, siehe auch [21].

Nach der letzten Stufe der an den Spinsummen vorgenommenen Approximationen sind diese unabhängig von den Integrationsvariablen, sie enthalten nun lediglich eine noch näher zu untersuchende Spinstruktur und können vor das Integral gezogen werden.

Wie schon erwähnt, werden unter diesen Annahme auch die Energienenner genähert.

Das Integral enthält gewisse Endpunktsingularitäten ($y \rightarrow 0, 1$), die typisch für den Lichtkegel sind und die den Infrarot-Divergenzen in der konventionellen Formulierung entsprechen. Üblicherweise werden diese Divergenzen über eine kleine kinematische Gluonmasse regularisiert. Ausserdem ist das Integral auch für grosse Transversalimpulse divergent. Als Regulator wird hier ein scharfen Cut-off verwendet. Das Endergebnis wird in der Zusammenfassung am Ende des letzten Kapitels (3.7.4) angegeben (Gl. 3.141) und hängt nur noch von den Massen, dem Cut-off-Parameter Λ und den longitudinalen Impulsbruchteilen der ein- bzw. auslaufenden Zustände ab.

Die hier durchgeführten Annahmen und Approximationen müssen sich allerdings noch bewähren. Es wurde ziemlich ähnlich zu [21] vorgegangen. Das wichtigste Anliegen dieser Näherungslösung ist, zunächst ein Verständnis für die physikalischen Prozesse und die Grössenordnung dieser Zwei-Gluon-Annihilationswechselwirkung zu entwickeln. Der Grund für dieses Vorgehen ist die enorme Komplexität einer exakten Lösung und diese Arbeit ist ein erster Schritt in Richtung eines gründlicheren Verständnisses dieses zweiten Teils der effektiven Wechselwirkung.

Literaturverzeichnis

- [1] S.J. Brodsky, H.C. Pauli, and S.S. Pinsky, Phys.Lett. C (Physics Reports) **301** (1998) 299.
- [2] P.A.M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [3] J.D. Bjørken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [4] J.D. Bjørken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [5] O. Nachtmann *Elementary Particle Physics*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- [6] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books Cambridge, Massachusetts.
- [7] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer, 1997.
- [8] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1985.
- [9] S. Godfrey and N. Isgur, Phys. Rev. D **32** (1985) 189.
- [10] W. Lucha, F.F. Schoberl, D. Gromes, Phys.Rept.200:127-240, 1991.
- [11] H.C. Pauli, *A Compendium of Light-Cone Quantization*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **90** (2000) 259. hep-ph/0103253.
- [12] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamic: Lecture Notes in Physics*, v0l. 5, World Scientific, Singapore, 1987.
- [13] H.C. Pauli, CP494 *New Directions in Quantum Chromodynamics*, edited by C.-R. Ji and D.-P. Min, 1999 American Institute of Physics.
- [14] G.P. Lepage and S.J. Brodsky, Phys. Rev. **D22**, 2157 (1980).
- [15] H.C. Pauli, S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **32** (1985) 1993.
- [16] H.C. Pauli, *Solution to the non-perturbative renormalization of gauge theories* arXiv: hep-ph/0312290 v1 20 Dec 2003.
- [17] I. Tamm, J. Physics (USSR) **9** (1945).

- [18] S.M. Dancoff, Phys. Rev. **78**, 382 (1950).
- [19] H.J. Melosh, Phys. Rev. **D9** (1974) 1095.
- [20] A. Krassnigg and H.C. Pauli, *On helicity and spin on the light cone*, Nucl. Phys. B (Proc. Supp.) **108** (2002) 251.
- [21] H.C. Pauli, *Fine and hyperfine interaction on the light cone*, arXiv: hep-ph/0312298 v1 20Dec 2003.
- [22] H.C. Pauli, arXiv: hep-ph/0310294, submitted to *Triest 2003 Proceedings*.
- [23] H.C. Pauli, *On the effective Hamiltonian for QCD: An overview and status report*, Published in Nucl.Phys.Proc.Supp.108:273-280, 2002 e-Print Archive: hep-ph/020179.
- [24] H.C. Pauli, *On flavor mixing by an effective Light-Cone QCD-Hamiltonian*, Feb 2002 Submitted to Nucl.Phys.B, hep-ph/0202187.
- [25] F. Wegner, Ann. Phys. (Leipzig) **3** (1994) 77.
- [26] H.C. Pauli, *Applying the flow equation to QCD*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **90** (2000) 147-153.
- [27] A. Hart, M. Teper, Phys. Rev. D **65** (2002) 034502.
- [28] H.C. Pauli, *On the effective interaction in the light cone QCD Hamiltonian*, Jul 1997, e-Print Archive: hep-ph/9707361.
- [29] H.C. Pauli *On confinement in a light-cone Hamiltonian for QCD* Eur. Phys. J. C **7**, 289-303 (1999).
- [30] D. Ashery, H.C. Pauli, *Experimental Tests of Non-Perturbative Pion Wave Functions*, arXiv: hep-ph/0301113 v1 16 Jan 2003.
- [31] J. Raufeisen, *Die Einschleifen-Korrekturen zum Quark-Gluon-Vertex in Hamiltonscher Störungstheorie*. Diplomarbeit, Universität Heidelberg 1997.
- [32] T. Maskawa, K. Yamawaki, Prog. Theor. Phys. **56** (1976) 270.
- [33] J.D. Björken, J.B. Kogut and D.E. Soper, Phys. Rev. **D3**, (1971), 1382.
- [34] S.J. Brodsky, R. Roskies and R. Suaya, Phys. Rev. **D8**, (1973), 4574.
- [35] S.J. Chang, T.M. Yan, Phys. Rev. **D7**, (1973) 1147.
- [36] S.D. Drell, D. Levy and T.M. Yan, Phys. Rev. **187**, (1969), 2159.
- [37] J.B. Kogut, D.E. Soper, Phys. Rev. D **1** (1970) 2901.
- [38] T. Eller, H.C. Pauli, S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **35** (1987) 1493.
- [39] T. Eller, H.C. Pauli, Z. Physik **42 C** (1989) 59.

- [40] S. Elser, Hadron Structure '94, Kosice, Slovakia, 1994; Diplomarbeit, U. Heidelberg, 1994.
- [41] S. Elser, A.C. Kalloniatis, Phys. Lett. B375 (1996) 285-291.
- [42] H.C. Pauli, S.J. Brodsky, Phys. Rev. D **32** (1985) 2001.
- [43] K. Hornbostel, S.J. Brodsky, H.C. Pauli, Phys. Rev. D 41 (1990) 3814.
- [44] S. Glazek (Ed.), Theory of Hadrons and Light-front *QCD*, World Scientific, Singapore, 1995.
- [45] P. Grangé, A. Neveu, H.C. Pauli, S. Pinsky, E. Werner, (Eds.), New Non-perturbative Methods and Quantization on the Light Cone, "Les Houches Series", Vol. 8, Springer, Berlin, 1997; Proc. Workshop at Centre de Physique des Houches, France, 24 February–7 March 1997.
- [46] H.C. Pauli, in: B. Geyer, E.M. Ilgenfritz (Eds.), Quantum Field Theoretical Aspects of High Energy Physics, Naturwissenschaftlich Theoretisches Zentrum der Universität, Leipzig, 1993.
- [47] H.C. Pauli, Solving gauge field theory by discretized light-cone quantization, Heidelberg Preprint MPIH-V25 1996, hep-th/9608035.
- [48] H.C. Pauli, in: B.N. Kursunoglu, S. Mintz, A. Perlmutter (Eds.), New York, 1996, pp. 183-204.
- [49] P.M. Morse, H. Feshbach, Methods of theoretical Physics, 2 Vols., McGraw-Hill, New York, 1953.
- [50] S. Glazek, A. Harindranath, S. Pinsky, J. Shigemitsu, K. Wilson, Phys. Rev. D 47 (1993) 1599.
- [51] J.J. Wivoda, J.R. Hiller, Phys. Rev. D47 (1993) 4647.
- [52] L.C.L. Hollenberg, K. Higashijima, R.C. Warner, B.H.J. McKellar, Prog. Theor. Phys. 87 (1991) 3411.
- [53] A.C. Kalloniatis, D.G. Robertson, Phys. Rev. D 50 (1994) 5262.
- [54] M. Krautgärtner, H.C. Pauli, F. Wölz, Phys. Rev. D 45 (1992) 3755.
- [55] U. Trittman, H.C. Pauli, Heidelberg preprint MPI H-V4-1997, Jan. 1997, hep-th/9704215.
- [56] A. Bassetto, G. Nardelli, R. Soldati, Yang-Mills Theories in Algebraic Noncovariant Gauges, World Scientific, Singapore, 1991.

Alle Graphen wurden mit feynMF von Thorsten Ohl erstellt.

Anhang A

Konventionen und wichtige Formeln

Hier sollen nur einige wichtigen Konventionen und Formeln angegeben werden, die häufiger verwendet werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf die jeweils in der Arbeit angegebenen Referenzen, insbesondere auf [1, 3, 5, 6, 11, 12, 14] verwiesen.

Die **kontravarianten Lorentzvektoren** werden folgendermaßen dargestellt:

$$x^\mu = (x^+, x^1, x^2, x^-) = (x^+, \mathbf{x}_\perp, x^-), \quad (\text{A.1})$$

wobei für die Koordinaten x^+ und x^- ,

$$x^+ = x^0 + x^3 \quad \text{und} \quad x^- = x^0 - x^3 \quad (\text{A.2})$$

gilt. Der **metrische Tensor** lautet

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Somit lautet das **innere Produkt** zweier Vierervektoren

$$x^\mu y_\mu = \frac{1}{2} (x^+ y^- + x^- y^+) - \mathbf{x}_\perp \cdot \mathbf{y}_\perp. \quad (\text{A.4})$$

Die **Diracmatrizen** werden in der Dirac-Darstellung [3] verwendet. Für γ^+ und γ^- gelten folgende, in der Arbeit häufig verwendete Relationen,

$$\gamma^+ \gamma^+ = \gamma^- \gamma^- = 0 \quad (\text{A.5})$$

sowie

$$\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+ \quad \text{und} \quad \gamma^- \gamma^+ \gamma^- = 4\gamma^-. \quad (\text{A.6})$$

Die Darstellungen für die **Spinoren** in der **Lepage-Brodsky-Konvention** sind

$$u^{LB}(k, h) = \frac{1}{\sqrt{2k^+}} \begin{pmatrix} h : \uparrow & h : \downarrow \\ k^+ + m & -k_l \\ kr & k^+ + m \\ k^+ - m & k_l \\ k_r & -k^+ + m \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

für die u -Spinoren und

$$v^{LB}(k, h) = \frac{1}{\sqrt{2k^+}} \begin{pmatrix} h : \uparrow & h : \downarrow \\ -k_l & k^+ - m \\ k^+ - m & kr \\ k_l & k^+ + m \\ -k^+ - m & k_r \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

für die v -Spinoren. In der **Bjørken-Drell-Darstellung** lauten die Spinoren kompakt notiert,

$$u(p, \lambda) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_\lambda \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi_\lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v(p, \lambda) = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{p_0 + m} \chi_\lambda \\ \chi_\lambda \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

wobei $\chi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\chi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Pauli-Spinoren sind.

In beiden Darstellungen sind die vollständigen und orthonormalen Spinoren jeweils Lösung der selben linearen Gleichung, der freien Diracgleichung

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(p, s) = (\gamma^\mu p_\mu + m) v(p, s) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Sie sind aber unterschiedlich normiert. Die Bjørken-Drell-Spinoren sind auf eins normiert, die Lepage-Brodsky-Spinoren hingegen gemäß

$$\bar{u}^{LB}(k, h) u(k, h') = -\bar{v}^{LB}(k, h) v(k, h') = 2m \delta^{hh'}. \quad (\text{A.11})$$

In der ganzen Arbeit wird die **Lichtkegelequation** $A_a^+ = 0$ [1, 14, 56] verwendet.

Die Polarisationsvektoren genügen den Beziehungen

$$\begin{aligned} \epsilon^\mu(q, \lambda) \epsilon_\mu^*(q, \lambda') &= -\delta_{\lambda\lambda'} \\ q^\mu \epsilon_\mu(q, \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Für die Auswertung der Summen über die Gluonhelizitäten in den Helizitätssummen ist die Gleichung [14]

$$\sum_{\lambda_q} \epsilon_\mu(q, \lambda_q) \epsilon_\nu^*(q, \lambda_q) = -g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_\nu + \eta_\nu q_\mu}{q \cdot \eta}, \quad (\text{A.13})$$

von großem Nutzen, wobei

$$\eta^\mu = (0, \mathbf{0}_\perp, 2) \quad \text{mit} \quad \eta^\mu \eta_\mu = 0, \quad (\text{A.14})$$

der **Nullvektor** ist.

Gruppenkonstanten. Als Generatoren der $SU(3)$ werden die Gell-Mann-Matrizen multipliziert mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ verwendet. Sie stellen eine Basis der spurfrei hermiteschen 3×3 -Matrizen dar und erfüllen folgende Kommutationsrelation:

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T_c, \quad (\text{A.15})$$

wobei die f^{abc} als Strukturkonstanten [5, 8, 12] der $SU(3)$ -Gruppe bezeichnet werden. Man findet die Gell-Mann-Matrizen, die Strukturkonstanten und weitere nützliche Relationen z.B. in [5]. Hier werden noch folgende Beziehungen angegeben:

$$T_{c_1}^{a c} T_c^{a c_2} = \frac{4}{3} \delta_{c_1}^{c_2}, \quad \text{und} \quad Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{A.16})$$

sowie

$$T_{c_1}^{a c_2} T_{c_3}^{a c_4} = \frac{1}{2} \left(\delta_{c_1}^{c_4} \delta_{c_3}^{c_2} - \frac{1}{3} \delta_{c_1}^{c_2} \delta_{c_3}^{c_4} \right), \quad (\text{A.17})$$

wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird.

Anhang B

Explizite Behandlung der restlichen Graphen

In Kapitel 3 wurde ein Beispielgraph von jedem der unterschiedlichen Graphentypen vorgestellt. Hier sollen nun die verbleibenden Graphen explizit behandelt werden. Es werden alle wesentlichen Zwischenschritte mitangegeben, aber sie werden nicht mehr so ausführlich erläutert, da alle notwendigen Tricks schon im Hauptteil diskutiert werden.

B.1 Graph 6

Zunächst wird der zweite rein dynamische, d.h. nur aus Vertex-Wechselwirkungen bestehende Graph untersucht, Abb. B.1. Die Vertices sind in diesem Fall anders in der Zeit angeordnet als im ersten Graphen. Man spricht also von einer anderen Zeitordnung.

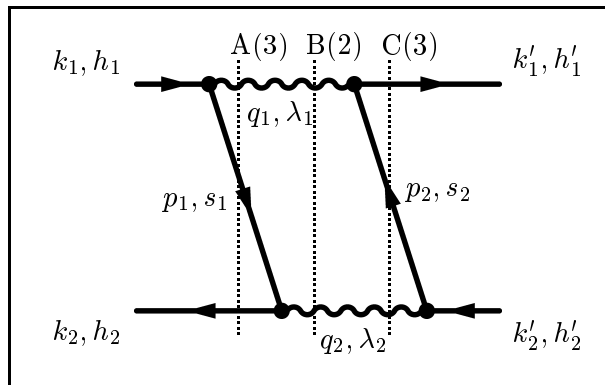


Abbildung B.1: Graph 6. Hier ist eine weitere mögliche dynamische Zeitordnung eines U_{TGA} -Diagramms dargestellt. Auch hier gibt es, wie durch die vertikalen gepunkteten Linien angedeutet, drei Energienenner.

Hier werden die Vertices aufgrund der anderen Zeitordnung in anderer Reihenfolge zur Helizitätssumme zusammengesetzt. Auch die Energienenner sind zu modifizieren.

B.1.1 Energienenner

Es gibt drei Energienenner, wobei die ersten beiden identisch zu denen von Graph 1 sind.

$$\begin{aligned}
\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_1^- + k_2^-) = k_1^- - q_1^- - p_1^- \\
&= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+}, \\
\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-) = (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) \\
&= -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+}.
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Der dritte unterscheidet sich von Graph 1, da die zeitlich letzten beiden Vertizes in anderer Reihenfolge auftreten. Man findet

$$\begin{aligned}
\Delta_C &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + q_2^-) \\
&= (k_1^- - q_1^- - p_1^-) + (k_2^- - q_2^- + p_1^-) + (q_1^- - p_2^- - k_1'^-) \\
&= \Delta_B + \frac{m_g^2 + \mathbf{q}_{1\perp}^2}{q_1^+} - p_2^- - k_1'^- = \Delta_B + \frac{1}{q_1^+} \left(m_g^2 + \mathbf{q}_{1\perp}^2 - q_1^+ (p_2^- + k_1'^-) \right) \\
&= \Delta_B + \frac{1}{q_1^+} \left(m_g^2 + (\mathbf{p}_{2\perp} + \mathbf{k}'_{1\perp})^2 - q_1^+ (p_2^- + k_1'^-) \right) \\
&= -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} - \frac{m_g^2 - (k_2 + p_1)^2}{q_2^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_1')^2}{q_1^+},
\end{aligned} \tag{B.2}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen wieder Gl. (A.4) verwendet wird.

B.1.2 Helizitätssumme

Der Colorfaktor ist für diesen Graphen, völlig analog zu Graph 1, $C = -\frac{4}{3}$. Es wird hier gleich die Helizitätssumme ohne die für die Ausführung der Summen über die inneren Helizitäten unwesentlichen Vorfaktoren angegeben. Mit den Matrixelementen aus Gl. (2.22) findet man,

$$\begin{aligned}
N_6 &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) v(p_2, s_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)].
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Zur Ausführung der Summe über die Gluonhelizitäten verwendet man wieder (A.13) und erhält

$$\begin{aligned}
N_6 &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu v(p_2, s_2)] \\
&\quad \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k_2', h_2')] \\
&\quad \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{1\sigma} + \eta_\sigma q_{1\rho}}{q_2^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Dies ergibt ausmultipliziert und unter Verwendung von $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$

$$\begin{aligned}
N_6 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ \right. & -[\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] \\
& + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu \eta_\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu q_{1\nu} v(p_2, s_2)] \\
& + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \eta_\nu v(p_2, s_2)] \left. \right\} \\
\times \left\{ \right. & -[\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \eta_\rho u(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] \\
& + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} u(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \eta_\sigma v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Auch hier werden wieder folgende Vierer-Vektoren eingeführt:

$$\begin{aligned}
l_1^\mu &= (q_1 + p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
l_2^\mu &= (q_2 - p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 - (p_1 + k_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
l_1'^\mu &= (q_1 - p_2 - k'_1)^\mu = \frac{m_g^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu \\
\text{und } l_2'^\mu &= (q_2 + p_2 - k'_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2'^2}{2q_1^+} \eta^\mu. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
Q_1^2 &= -(p_1 - k_1)^2, \\
Q_2'^2 &= -(p_2 - k'_2)^2 \\
\text{und } \eta^\mu &= (0, \mathbf{0}_\perp, 2), \tag{B.7}
\end{aligned}$$

sowie mit $(p_1 - k_1)^\mu [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] = 0$, $(k_2 + p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1)] = 0$, $(k'_1 + p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] = 0$ und $(p_2 - k'_2)^\mu [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] = 0$, gelangt man analog zu Graph 1 zum Zwischenergebnis

$$\begin{aligned}
N_6 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ \right. & -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \left. \right\} \\
\times \left\{ \right. & -[\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] \left. \right\}. \tag{B.8}
\end{aligned}$$

Auch hier gelingt also wieder eine deutliche Vereinfachung.

Ausmultipliziert ergibt dies

$$\begin{aligned}
N_6 = & \sum_{s_1, s_2} \left\{ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] \\
& - \left. \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \right. \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\rho u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
& - \left. \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \right. \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] \\
& + \left. \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \right. \\
& \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

es verbleiben lediglich die Summen über die Helizitäten der inneren Fermionen, hierfür verwendet man $\sum_{s_1} u(p_1, s_1) \bar{u}(p_1, s_1) = \not{p}_1 + m$, $\sum_{s_2} v(p_2, s_2) \bar{v}(p_2, s_2) = \not{p}_2 - m$. Ausserdem benutzt man $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$, und findet mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc.

$$\begin{aligned}
N_6 = & [\bar{u}(k'_1) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma_\rho (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu u(k_1)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 - m) \gamma^\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma_\rho (\not{p}_1 + m) \gamma^+ u(k_1)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{u}(k'_1) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ (\not{p}_1 + m) \gamma_\mu u(k_1)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)]. \tag{B.10}
\end{aligned}$$

Dier hier gefundene Struktur ist, wie es zu erwarten war, sehr ähnlich wie im ersten Graphen, da nur die zeitlich Reihenfolge zweier Vertizes verändert wurde. Diese Struktur wird auch bei zwei weiteren Graphen auftauchen.

Nun soll auch für diesen Graphen eine Parametrisierung angegeben werden, die der Dreier-Impulserhaltung an den Vertizes gerecht wird und y und \mathbf{I}_\perp als Integrationsvariable einführt.

B.1.3 Parametrisierung

Die äußeren Impulse werden wie üblich, gemäß (3.40) parametrisiert, für die inneren Impulse gilt im intrinsischen System, $\mathbf{K}_\perp = 0$:

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(xyK^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{xyK^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left(x(1-y)K^+, (1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{x(1-y)K^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left((1-xy)K^+, -y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-xy)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((xy-x')K^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(xy-x')K^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.11}$$

Auch hier sind nun alle Bauteile vorhanden, und können prinzipiell zum Integral zusammengesetzt werden.

B.2 Graph 7

Nun wird der dritte Graph, welcher nur aus dynamischen Linien besteht und ebenfalls nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebaut ist, untersucht.

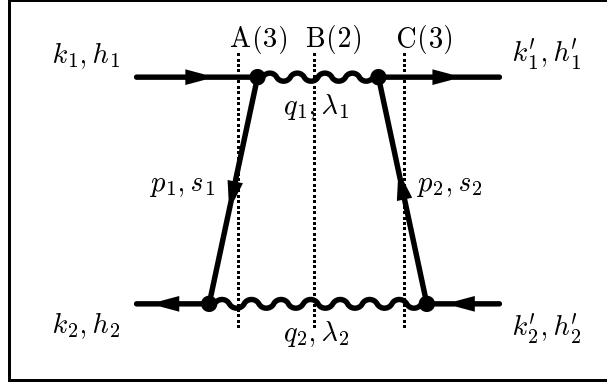


Abbildung B.2: Graph 7. Auch dies ist eine weitere mögliche dynamische Zeitordnung eines U_{TGA} -Diagramms. Hier gibt es erneut, wie durch die vertikalen gepunkteten Linien angedeutet, drei Energienenner.

Die Energienenner und die Helizitätssumme können wieder am Diagramm abgelesen werden.

B.2.1 Energienenner

Auch hier gibt es, wie bei allen rein dynamischen Graphen, drei Energienenner. Es werden hier nicht mehr alle Zwischenschritte zur Berechnung dieser Energienenner angegeben. Man findet völlig analog zu Graph 1 und Graph 6

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + q_2^-) = k_2^- - p_1^- - q_2^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_2 - p_1)^2}{q_2^+} = -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+}\end{aligned}\quad (\text{B.12})$$

mit dem Feynman-Impulsübertrag $Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2$,

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- - q_2^-) = (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (k_1^- + p_1^- - q_1^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+}\end{aligned}\quad (\text{B.13})$$

und

$$\begin{aligned}\Delta_C &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + q_2^-) \\ &= (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (k_1^- + p_1^- - q_1^-) + (q_1^- - p_2^- - k_1'^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_1')^2}{q_1^+}.\end{aligned}\quad (\text{B.14})$$

Hier geht ein anderer Vierer-Impulsübertrag, als in den zuvor diskutierten Fällen ein.

B.2.2 Helizitätssumme

Die Zusammensetzung der Helizitätssumme ist in Verbindung mit den Matrixelementen aus Gl. (2.22) an der Abb. B.2 abzulesen. Der Colorfaktor lautet wieder $C = \frac{4}{3}$. Man findet für die Helizitätssumme

$$N_7 = \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) v(p_2, s_2)] \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) v(p_1, s_1)]. \quad (\text{B.15})$$

Dies ergibt mit Gl. (A.13)

$$N_7 = \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu v(p_2, s_2)] \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{2\mu}}{q_1^+} \right) \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right). \quad (\text{B.16})$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ findet man

$$N_7 = \left\{ - [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] + \frac{1}{q_1^+} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu q_{1\nu} v(p_2, s_2)] + \frac{1}{q_1^+} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] \right\} \times \left\{ - [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \right\}. \quad (\text{B.17})$$

Nun soll auch hier wieder die Dreier-Impulserhaltung an den Vertizes ausgenutzt werden, hierfür erweisen sich wieder folgende Vierer-Vektoren als hilfreich:

$$l_1^\mu = (q_1 - p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \quad l_2^\mu = (q_2 + p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \quad l_1'^\mu = (q_1 - p_2 - k_1')^\mu = \frac{m_g^2 - (k_1' + p_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \quad \text{und } l_2'^\mu = (q_2 + p_2 - k_2')^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2'^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \quad (\text{B.18})$$

mit den Definitionen

$$Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2, \quad Q_2'^2 = -(p_2 - k_2')^2, \quad \text{und } \eta^\mu = (0, \mathbf{0}_\perp, 2). \quad (\text{B.19})$$

Aufgrund der Eigenschaften

$$\begin{aligned}
(p_1 + k_1)^\mu [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] &= 0, \\
(k_2 - p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu v(p_1, s_1)] &= 0, \\
(k'_1 + p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] &= 0, \\
\text{und } (p_2 - k'_2)^\mu [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] &= 0
\end{aligned} \tag{B.20}$$

können die Gluonimpulse durch die entsprechenden, zu den Nullvektoren proportionalen, obigen l -Vektoren ersetzt werden. Damit lässt sich die Helizitätssumme zu

$$\begin{aligned}
N_7 = \sum_{s_1, s_2} & \left\{ -[\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] \right. \\
& + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] \left. \right\} \\
& \times \left\{ -[\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
& + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}
\end{aligned} \tag{B.21}$$

zusammenfassen. Dies ergibt ausmultipliziert

$$\begin{aligned}
N_7 = \sum_{s_1, s_2} & \left\{ [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] \right. \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& - \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
& \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Nun verbleibt noch die Summe über die Helizitäten der inneren Fermionen. Man findet unter Verwendung von $\sum_{s_i} v(p_i, s_i) \bar{v}(p_i, s_i) = \not{p}_i - m$ und den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$,

etc. folgendes deutlich vereinfachtes Resultat.

$$\begin{aligned}
N_7 &= [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma_\rho v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 - m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
&- \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1)\gamma^+(\not{p}_2 - m)\gamma_\rho v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 - m)\gamma^+ u(k_1)] \\
&- \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu(\not{p}_2 - m)\gamma^+ v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+(\not{p}_1 - m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
&+ \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\times 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1)\gamma^+ v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.23}$$

Dieses Resultat unterscheidet sich aufgrund der ähnlichen Struktur aller rein dynamischer Graphen ebenfalls wenig vom ersten und vom sechsten Graphen.

Zum Schluss wird auch hier eine Parametrisierung der inneren Impulse angegeben, die äußeren Impulse sind gemäß Gl. (3.40) parametrisiert.

B.2.3 Parametrisierung

Eine mögliche Parametrisierung dieses Graphens lautet

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left((1 - y(1 - x))K^+, y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{(1 - y(1 - x))K^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left((1 - y)(1 - x)K^+, -(1 - y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m^2 + ((1 - y)\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{(1 - y)(1 - x)K^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left(y(1 - x)K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{y(1 - x)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((1 - x' - y + xy)K^+, y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(1 - x' - y + xy)K^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Auch hier wurde wieder die Parametrisierung Gl. (3.40) für die äusseren Impulse eingesetzt.

B.3 Graph 8

Nun wird der letzte rein dynamische, d.h. nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebaute Graph untersucht.

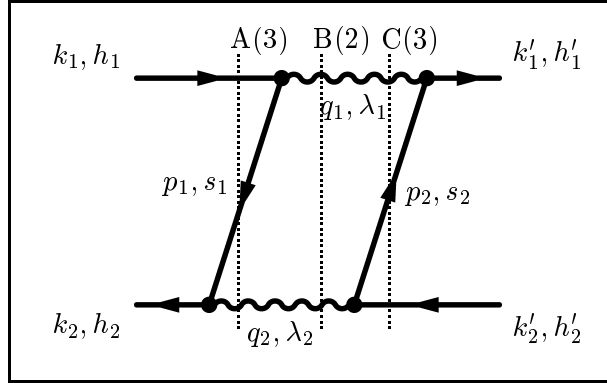


Abbildung B.3: Graph 8. Auch hier ist eine dynamische Zeitordnung, die nur aus Vertex-Wechselwirkungen besteht, dargestellt. Hier gibt es wieder drei Energienenner.

Alle hier durchzuführenden Rechenschritte sind denen der anderen rein dynamischen Graphen sehr ähnlich. Sie werden hier der Vollständigkeit halber nochmals durchgeführt.

B.3.1 Energienenner

Es gibt wieder drei Energienenner, die ersten beiden sind identisch zu denen im vorherigen Graphen.

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + q_2^-) = k_2^- - p_1^- - q_2^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_2 - p_1)^2}{q_2^+} = -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+}\end{aligned}\quad (\text{B.25})$$

mit dem Feynman-Impulsübertrag $Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2$.

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- - q_2^-) = (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (k_1^- + p_1^- - q_1^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+},\end{aligned}\quad (\text{B.26})$$

und für den dritten findet man

$$\begin{aligned}\Delta_C &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (k_1^- + p_1^- - q_1^-) + (q_2^- - p_2^- - k_2'^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{q_2^+}.\end{aligned}\quad (\text{B.27})$$

B.3.2 Helizitätssumme

Der Colorfaktor lautet wieder $C = -\frac{4}{3}$ und mit den Matrixelementen aus Gl. (2.22) entnimmt man Abbildung B.3

$$N_8 = \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)] \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) v(p_1, s_1)]. \quad (\text{B.28})$$

Die Summation über die Gluonhelizitäten ergibt mit der Relation (A.13)

$$N_8 = \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu u(p_2, s_2)] \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right). \quad (\text{B.29})$$

Mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ findet man

$$N_8 = \sum_{s_1, s_2} \left\{ - [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] + \frac{1}{q_1^+} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu \eta_\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu q_{1\nu} u(p_2, s_2)] + \frac{1}{q_1^+} [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \eta_\nu u(p_2, s_2)] \right\} \times \left\{ - [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \eta_\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] + \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \eta_\sigma v(k'_2, h'_2)] \right\}. \quad (\text{B.30})$$

Nun werden, zur Auswertung der Vierer-Impulserhaltung an den Vertizes, wieder folgende Vierer-Vektoren nützlich:

$$l_1^\mu = (q_1 - p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \quad l_2^\mu = (q_2 + p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \quad l_1'^\mu = (q_1 + p_2 - k_1')^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1'^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \quad \text{und } l_2'^\mu = (q_2 - p_2 - k_2')^\mu = \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \quad (\text{B.31})$$

mit den Definitionen

$$Q_1^2 = -(p_1 - k_1)^2, \quad Q_1'^2 = -(k_1' - p_2)^2, \quad \text{und } \eta^\mu = (0, \mathbf{0}_\perp, 2). \quad (\text{B.32})$$

Wie bei den anderen nur aus Vertex-Wechselwirkungen aufgebauten Graphen, können wir mit

$$\begin{aligned}
(p_1 + k_1)^\mu [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] &= 0, \\
(k_2 - p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu v(p_1, s_1)] &= 0, \\
(k'_1 - p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] &= 0, \\
\text{und } (p_2 + k'_2)^\mu [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] &= 0,
\end{aligned} \tag{B.33}$$

die inneren Gluonimpulse durch obige l -Vektoren ersetzen und erhalten dann, unter Verwendung von $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$

$$\begin{aligned}
N_8 &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ - [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] \left. \right\} \\
&\quad \times \left\{ - [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (k_2 - p_1)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{B.34}$$

Ausmultipliziert ergibt dies

$$\begin{aligned}
N_8 &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad - \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad - \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (k_2 - p_1)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (k_2 - p_1)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{B.35}$$

Nun soll noch die Summation über die Helizitäten der inneren Fermionen durchgeführt werden.

Hierzu verwendet man erneut $\sum_{s_i} v(p_i, s_i) \bar{v}(p_i, s_i) = \not{p}_i - m$, $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$, $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ und $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$.

Mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. findet man schließlich

$$\begin{aligned}
N_8 &= [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma_\rho v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 - m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
&\quad - \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{u}(k'_1)\gamma^+(\not{p}_2 + m)\gamma_\rho v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^\rho(\not{p}_1 - m)\gamma^+ u(k_1)] \\
&\quad - \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (k_2 - p_1)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma^+ v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+(\not{p}_1 - m)\gamma^\mu u(k_1)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1'^2}{2q_1^{+2}} \right] \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (k_2 - p_1)^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1)\gamma^+ v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.36}$$

Man stellt somit fest, dass sich die Helizitätssummen aller vier rein dynamischen Graphen nur wenig unterscheiden.

Zum Schluss wird auch für diesen Graphen noch eine Parametrisierung angegeben.

B.3.3 Parametrisierung

Die äusseren Impulse sind wie üblich durch Gl. (3.40) parametrisiert, von den inneren Impulsen weicht nur p_2 von der Parametrisierung des zuletzt behandelten Graphen ab. Eine Möglichkeit ist somit

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left((1 - y(1 - x))K^+, y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{(1 - y(1 - x))K^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left((1 - y)(1 - x)K^+, -(1 - y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m^2 + ((1 - y)\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{(1 - y)(1 - x)K^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left(y(1 - x)K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{y(1 - x)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((y - xy - 1 + x')K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp + \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp + \mathbf{k}'_\perp)^2}{(y - xy - 1 + x')K^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Nun sind auch in diesem Fall alle Bausteine zur Angabe des Integrals vorhanden.

B.4 Graph 9

Nun wird ein Diagramm betrachtet, in dem die erste innere Fermionlinie instantan ist. Die erste Wechselwirkung ist wieder eine Seagull-Wechselwirkung und es gibt zwei Energienenner. Die Matrixelemente sind wieder Gl.(2.24) und Gl.(2.22) zu entnehmen,

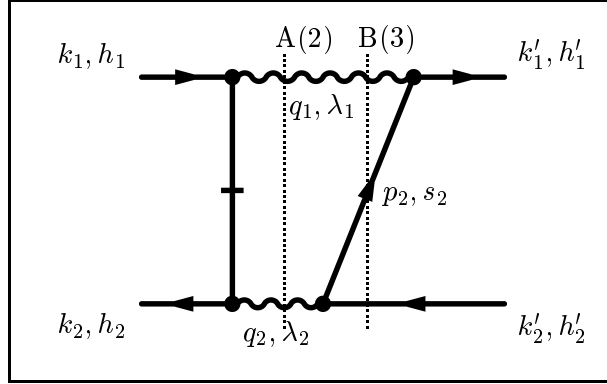


Abbildung B.4: Graph 9. In diesem Graphen ist die erste innere Fermionlinie instantan und er enthält zwei Energienenner.

alles weitere ist direkt am Graphen abzulesen.

B.4.1 Energienenner

Für die beiden Energienenner, liest man

$$\Delta_A = k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-), \quad (\text{B.38})$$

und

$$\begin{aligned} \Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-) + (q_2^- - p_2^- - k_2'^-) \\ &= \Delta_A + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{q_2^+}, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

am Diagramm ab.

B.4.2 Helizitätssumme

Die Helizitätssumme ist das hermitesch konjugierte des Resultats Gl. (3.51), wenn man die Impulse und äusseren Quantenzahlen entsprechend abändert. Die Rechnung wird hier aber nochmals kurz skizziert. Man findet $C = \frac{4}{3}$ für den Colorfaktor und mit den entsprechenden Matrixelementen aus Gl. (2.22) und Gl. (2.24)

$$\begin{aligned} N_9 = \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_2} & [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) \gamma^+ \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]. \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Auch hier werden im Moment unwesentliche Vorfaktoren unterdrückt. Man verwendet wieder die Identität Gl. (A.13) und erhält

$$\begin{aligned}
N_9 &= \sum_{s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.41}$$

Ausmultipliziert findet man

$$\begin{aligned}
N_9 &= \sum_{s_2} \left\{ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&- \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \\
&- \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&+ \frac{1}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Nun verwendet man noch $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m$, $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$, $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$, $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ und die Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$ und findet nach der Durchführung der Summation über die Helizitäten des zweiten inneren Fermions

$$\begin{aligned}
N_9 &= [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1)] \\
&- \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 + m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1)] \\
&- \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 + m) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1)] \\
&+ \frac{2p_2^+}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.43}$$

Wie erwartet, ist dieses Ergebnis sehr ähnlich zum Ergebnis des dritten Graphens, siehe Gl. (3.51).

B.4.3 Parametrisierung

Die Parametrisierung der äusseren Helizitäten erfolgt wie in Gl. (3.40). Es müssen nur noch die drei dynamischen inneren Linien parametrisiert werden:

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(yK^+, \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{yK^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left((1-y)K^+, -\mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{(1-y)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((x'-y)K^+, \mathbf{k}'_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}'_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{(x'-y)K^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.44}$$

B.5 Graph 10

Dieser Graph unterscheidet sich von seinem Vorgänger nur dadurch, dass die beiden Vertex-Wechselwirkungen zeitlich vertauscht auftreten.

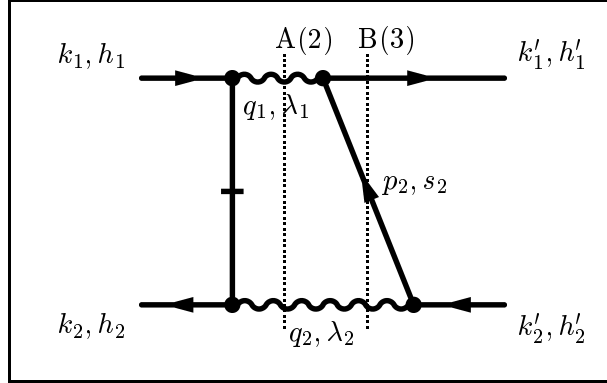


Abbildung B.5: Graph 10. Dies ist die andere mögliche Zeitordnung mit instantaner erster Fermionlinie, auch hier sind zwei Energienenner vorhanden.

Auch hier sind die Matrixelemente wieder Gl. (2.24) und (2.22) zu entnehmen und die Energienenner und die Helizitätssumme können am Graphen abgelesen werden.

B.5.1 Energienenner

Es gibt hier wieder zwei Energienenner, für die gilt:

$$\Delta_A = k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-), \quad (\text{B.45})$$

$$\begin{aligned} \text{und } \Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + q_2^-) \\ &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + q_2^-) + (q_1^- - k_1'^- - p_2^-) \\ &= \Delta_A + \frac{m_g^2 - (k_1' + p_2)^2}{q_1^+}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

B.5.2 Helizitätssumme

Mit den entsprechenden Matrixelementen erhält man

$$\begin{aligned} N_{10} &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) v(p_2, s_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) \gamma^+ \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)]. \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Die Summation über die Gluonhelizitäten führt wie üblich, mit der Relation (A.13) zu

$$\begin{aligned} N_{10} &= \sum_{s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k_2', h_2')] [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu v(p_2, s_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\ &\quad \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right) \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
N_{10} = \sum_{s_2} \left\{ \right. & [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
& - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \\
& - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
& + \frac{1}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
& \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \right\}. \tag{B.49}
\end{aligned}$$

Nun verwendet man noch $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$, $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und erneut auch $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$, $\gamma^+ \gamma^+ = 0$. Mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. findet man schließlich

$$\begin{aligned}
N_{10} = & [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1)] \\
& - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 - m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1)] \\
& - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma_+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu u(k_1)] \\
& + \frac{2p_2^+}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho q_{2\rho} \gamma^+ \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1)]. \tag{B.50}
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist dem vorherigen strukturell wieder sehr ähnlich. Es tauchen lediglich die Massen in den Vollständigkeitsrelationen mit einem anderen Vorzeichen auf und in der letzten Zeile sind die Gluonimpulse ausgetauscht. Der Colorfaktor lautet völlig analog zu den anderen Fällen $C = -\frac{4}{3}$.

B.5.3 Parametrisierung

Auch hier soll noch die Parametrisierung der inneren Impulse angegeben werden:

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(yK^+, \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{yK^+} \right), \\
q_2^\mu &= \left((1-y)K^+, -\mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + \mathbf{1}_\perp^2}{(1-y)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((y-x')K^+, \mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(x'-y)K^+} \right). \tag{B.51}
\end{aligned}$$

Der einzige Unterschied zur Parametrisierung des vorherigen Graphens ist, dass die ersten drei Komponenten von p_2^μ ein anderes Vorzeichen haben.

B.6 Graph 11

Dies ist der zweite Graph, in dem die zweite innere Fermionlinie instantan ist. Auch hier werden wieder die Matrixelemente aus Gl. (2.22) und (2.24) benötigt.

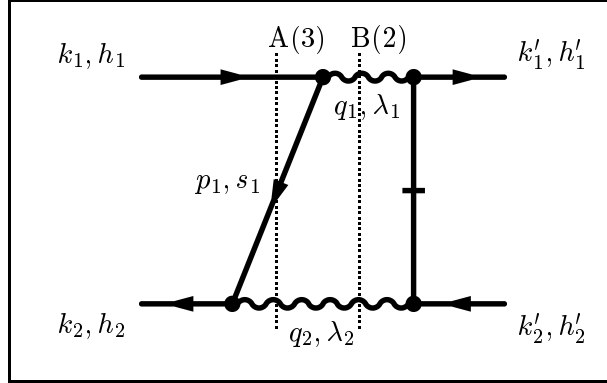


Abbildung B.6: Graph 11. Hier ist die zweite Zeitordnung abgebildet, bei der die zweite innere Fermionlinie instantan ist. Es gibt zwei Energienenner.

Die Energienenner und die Helizitätssumme berechnen sich analog zu den anderen Graphen dieses Aufbaus.

B.6.1 Energienenner

Es gibt zwei Energienenner:

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + q_2^-) = k_2^- - p_1^- - q_2^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_2 - p_1)^2}{q_2^+} = -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+},\end{aligned}\quad (\text{B.52})$$

mit dem Feynman-Impulsübertrag $Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2$ und

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- - q_2^-) = (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (k_1^- + p_1^- - q_1^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+}.\end{aligned}\quad (\text{B.53})$$

B.6.2 Helizitätssumme

Die Helizitätssumme ist hier wieder, von den Bezeichnungen der Impulse und Quantenzahlen abgesehen, das hermitesch konjugierte von Gl. (B.50). Der Colorfaktor lautet erneut $C = -\frac{4}{3}$ und anhand von Abb.B.6 ist folgende Zusammensetzung abzulesen:

$$\begin{aligned}N_{11} &= \sum_{\lambda_1, \lambda_2; s_1} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) \gamma^+ \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k'_2, h'_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) v(p_1, s_1)].\end{aligned}\quad (\text{B.54})$$

Nun wird die Summe über die Gluonhelizitäten mit Hilfe von Gl. (A.13) durchgeführt und man erhält

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \sum_{s_1} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu \gamma^+ \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] \\
&\quad \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right). \tag{B.55}
\end{aligned}$$

Dies ergibt ausmultipliziert und unter Verwendung von $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$

$$\begin{aligned}
N_{11} &= \sum_{s_1} \left\{ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\quad - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\quad - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \frac{1}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}. \tag{B.56}
\end{aligned}$$

Nun verwendet man noch $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$, $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und auch wieder $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$. Ausserdem werden erneut die Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. eingeführt, man findet

$$\begin{aligned}
N_{11} &= [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) \gamma^\mu u(k_1)] \\
&\quad - \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu \gamma^+ \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ (\not{p}_1 - m) \gamma^\mu u(k_1)] \\
&\quad - \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) \gamma^+ u(k_1)] \\
&\quad + \frac{2p_1^+}{q_1^+ q_2^+} [\bar{u}(k'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} \gamma^+ \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)]. \tag{B.57}
\end{aligned}$$

Die drei inneren dynamischen Linien werden gemäß Gl. (B.24) parametrisiert.

Somit sind wieder alle Bauteile aufgelistet und das Integral kann im Prinzip angegeben werden.

B.7 Graph 12

Dieser Graph enthält einen anderen Seagull-Wechselwirkungstyp. Im Gegensatz zu Graph 3 ist das obere Gluon instantan.

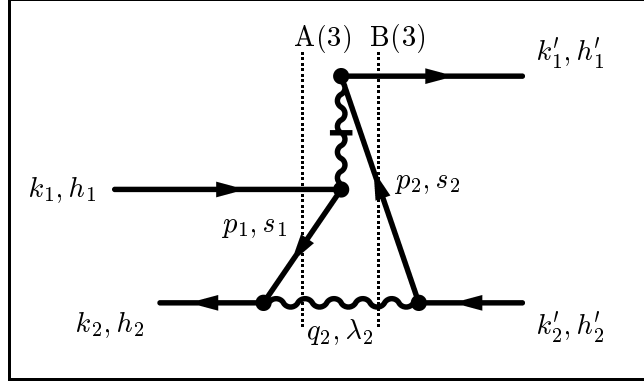


Abbildung B.7: Graph 12. Hier ist eine mögliche Zeitordnung mit instantaner oberer Gluonlinie dargestellt. Es gibt wieder zwei Energienenner.

Die benötigten Matrixelemente sind auch in diesem Fall den Gleichungen (2.22) und (2.24) zu entnehmen.

B.7.1 Energienenner

Wie an Abb.B.7 ersichtlich, gibt es zwei Energienenner. Der erste ist

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + q_2^-) = k_2^- - p_1^- - q_2^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_2 - p_1)^2}{q_2^+} = -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+},\end{aligned}\quad (\text{B.58})$$

mit dem Feynmanschen Vierer-Impulsübertrag, $Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2$. Der zweite lautet

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + q_2^-) \\ &= -(q_2^- + p_1^- - k_2^-) + (k_1^- - k_1'^- + p_1^- - p_2^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} + (k_1^- - k_1'^- + p_1^- - p_2^-).\end{aligned}\quad (\text{B.59})$$

B.7.2 Helizitätssumme

Mit den entsprechenden Matrixelementen liest man an Abb.B.7,

$$\begin{aligned}N_{12} &= \sum_{\lambda_2; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^+ v(p_2, s_2)] \\ &\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) v(p_1, s_1)],\end{aligned}\quad (\text{B.60})$$

ohne zunächst unwesentliche Faktoren, ab.

Die Summation über die Helizität des dynamischen Gluons ergibt mit Gl. (A.13)

$$\begin{aligned}
N_{12} &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] \\
&\quad \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.61}$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ erhält man

$$\begin{aligned}
N_{12} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.62}$$

Nun werden wieder folgende Vierer-Vektoren nützlich:

$$\begin{aligned}
l_2^\mu &= (q_2 + p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \\
\text{und } l_2'^\mu &= (q_2 + p_2 - k'_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2'^2}{2q_2^+} \eta^\mu,
\end{aligned} \tag{B.63}$$

mit der Definition

$$\begin{aligned}
Q_2'^2 &= -(p_2 - k'_2)^2, \\
\text{und } \eta^\mu &= (0, \mathbf{0}_\perp, 2).
\end{aligned} \tag{B.64}$$

Mit $(k_2 - p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu v(p_1, s_1)] = 0$ und $(p_2 - k'_2)^\mu [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] = 0$, sieht man ferner, dass der Gluonimpuls durch obige l -Vektoren an den entsprechenden Stellen ersetzt werden kann. Man erhält dann

$$\begin{aligned}
N_{12} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] \\
&\quad \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\},
\end{aligned} \tag{B.65}$$

was schon eine merkliche Vereinfachung bedeutet.

Dies ergibt ausmultipliziert und unter der Verwendung der Relationen $\sum_{s_i} v(p_i, s_i) \bar{v}(p_i, s_i) = \not{p}_i - m$ und $(k, h) \rightarrow (k)$ etc.,

$$\begin{aligned}
N_{12} &= - [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 - m) \gamma_\rho v(k'_2)] [\bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) \gamma^+ u(k_1)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2)] [\bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.66}$$

Der Colorfaktor berechnet sich völlig analog zu Graph 3. Es ergibt sich $C = \frac{2}{3}$.

Auch hier soll zum Schluss noch eine Parametrisierung angegeben werden.

B.7.3 Parametrisierung

Die Parametrisierung der äusseren Impulse erfolgt gemäß Gl. (3.40), für die inneren findet man,

$$\begin{aligned}
 p_1^\mu &= \left((1-y)(1-x)K^+, -(1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(1-x)K^+} \right), \\
 q_2^\mu &= \left(y(1-x)K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-x)K^+} \right), \\
 \text{und } p_2^\mu &= \left((1-x'-y+xy)K^+, y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(1-x'-y+xy)K^+} \right).
 \end{aligned} \tag{B.67}$$

Jetzt kann im Prinzip auch hier das Integral angegeben werden.

B.8 Graph 13

In diesem Graphen ist das untere Gluon instantan. Auch hier liegt neben den Vertex-Wechselwirkungen eine Fork-Wechselwirkung vor.

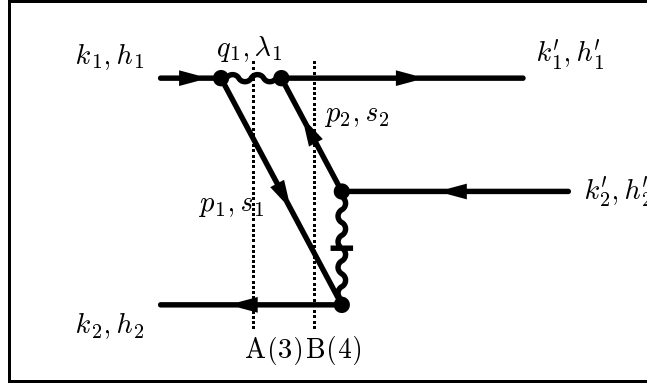


Abbildung B.8: Graph 13. Diese Abbildung zeigt ein weiteres Diagramm mit instantanem unterem Gluon, das auch zwei Energienenner enthält.

B.8.1 Energienenner

Die Summen in den beiden Energienennern laufen hier über drei, bzw. vier innere Teilchen, wie man anhand der Abb.B.8 einfach erkennen kann. Der erste ist

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_1^- + k_2^-) = k_1^- - q_1^- - p_1^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_1 - p_1)^2}{q_1^+} = -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+},\end{aligned}\quad (\text{B.68})$$

wobei $Q_1^2 = -(k_1 - p_1)^2$ der Feynmansche Vierer-Impulsübertrag ist. Der zweite ist

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + p_1^- + k_2^-) \\ &= k_1^- - q_1^- - p_1^- + (q_1^- - p_2^- - k_1'^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_1^2}{q_1^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_1')^2}{q_1^+} = -\frac{Q_1^2 + (p_2 + k_1')^2}{q_1^+}.\end{aligned}\quad (\text{B.69})$$

B.8.2 Helizitätssumme

Um die Helizitätssumme angeben zu können, benötigt man erneut die passenden Matrixelemente der Vertex- und der Fork-Wechselwirkungen, man erhält,

$$\begin{aligned}N_{14} &= \sum_{\lambda_1; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2)\gamma^+ v(k_2', h_2')] [\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^+ u(p_1, s_1)] \\ &\quad \times [\bar{u}(k_1', h_1')\gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)].\end{aligned}\quad (\text{B.70})$$

Nun müssen die Summen über die Helizitäten der inneren Teilchen durchgeführt werden.

Die Summe über das dynamische Gluon wird auch hier wieder mit der Relation (A.13) ausgeführt, man findet

$$\begin{aligned}
N_{14} &= \sum_{\lambda_1; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.71}$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ findet man,

$$\begin{aligned}
N_{14} &= \sum_{s_1; s_2} \left\{ -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&+ \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \\
&+ \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\mu q_{1\mu} v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.72}$$

Wir führen wieder die Vierer-Vektoren

$$\begin{aligned}
l_1^\mu &= (q_1 + p_1 - k_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1^2}{2q_1^+} \eta^\mu, \\
\text{und } l_1'^\mu &= (q_1 - p_2 - k'_1)^\mu = \frac{m_g^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^+} \eta^\mu.
\end{aligned} \tag{B.73}$$

Mit $(p_1 - k_1)^\mu [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] = 0$, und $(k'_1 + p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] = 0$ erkennt man auch hier, dass der Gluonimpuls an den entsprechenden Stellen durch die passenden l -Vektoren ersetzt werden kann. Man erhält damit

$$\begin{aligned}
N_{14} &= \sum_{s_1; s_2} \left\{ -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&+ \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{2+}} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.74}$$

Dies stellt schon eine deutliche Vereinfachung dar.

Nun muss noch die Summe über die Helizitäten der inneren Fermionen durchgeführt werden.

Man erhält mit der Hilfe von $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m$, $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$, und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ und $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$

$$\begin{aligned}
N_{14} &= - [\bar{u}(k'_1) \gamma_\mu (\not{p}_2 - m) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ (\not{p}_1 + m) \gamma^\mu u(k_1)] \\
&+ \left[\frac{2m_g^2 + Q_1^2 - (k'_1 + p_2)^2}{2q_1^{2+}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.75}$$

Im nächsten Schritt soll auch hier noch der Colorfaktor berechnet werden. Der Faktor der zweiten Wechselwirkung, der Fork-Wechselwirkung, wird bei Graph 5 berechnet und ergibt $C_F = -\frac{4}{3}$. Der erste Vertexfaktor ist auch bekannt, er lautet $C_{V_1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$, und für den der zweiten Vertex-Wechselwirkung findet man,

$$\begin{aligned}
C_V &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{a,a'=1}^8 \sum_{\bar{c}_1,c_3=1}^3 \sum_{c_1,c_2=1}^3 \sum_{c'_1,c'_2=1}^3 T_{c'_2 c'_1}^{a'} T_{c_1 c_2}^a \\
&\quad \times \langle 0 | d_{\bar{c}_1} d_{c_3} b_{\bar{c}_1} b_{c_3} b_{c'_1}^\dagger d_{c'_2}^\dagger a_{a'} a_a^\dagger b_{c_1}^\dagger d_{c_2}^\dagger | 0 \rangle \\
&= -\frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1,c_3=1}^3 T_{c_3 c_3}^a T_{c_1 c_1}^a + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_2,c_3=1}^3 T_{c_3 c_2}^a T_{c_3 c_3}^a \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1,c_2=1}^3 T_{c_2 c_1}^a T_{c_1 c_2}^a - \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{a=1}^8 \sum_{c_1,c'_1=1}^3 T_{c'_1 c'_1}^a T_{c_1 c_1}^a \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{4\sqrt{3}} 4 + 0 = \frac{1}{\sqrt{3}},
\end{aligned} \tag{B.76}$$

wobei im vorletzten Schritt Gl. (A.16) und Gl. (A.17) verwendet werden. Der Gesamtcolorfaktor lautet somit,

$$C = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{8}{9}. \tag{B.77}$$

Auch hier wird zum Schluss noch eine Parametrisierung der inneren Impulse unter Berücksichtigung der Parametrisierung der äusseren Impulse, siehe Gl. (3.40) angegeben.

B.8.3 Parametrisierung

Eine mögliche Parametrisierung der inneren drei dynamischen Impulse ist durch

$$\begin{aligned}
q_1^\mu &= \left(xyK^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp)^2}{xyK^+} \right), \\
p_1^\mu &= \left(x(1-y)K^+, (1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{1}_\perp)^2}{x(1-y)K^+} \right), \\
\text{und } p_2^\mu &= \left((xy - x')K^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{1}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(xy - x')K^+} \right)
\end{aligned} \tag{B.78}$$

gegeben.

Damit sind alle Bestandteile vorhanden, um das Integral anzugeben.

B.9 Graph 14

Auch bei diesem Graph ist das obere Gluon instantan, die zugehörige Wechselwirkung ist hier auch eine Fork-Wechselwirkung.

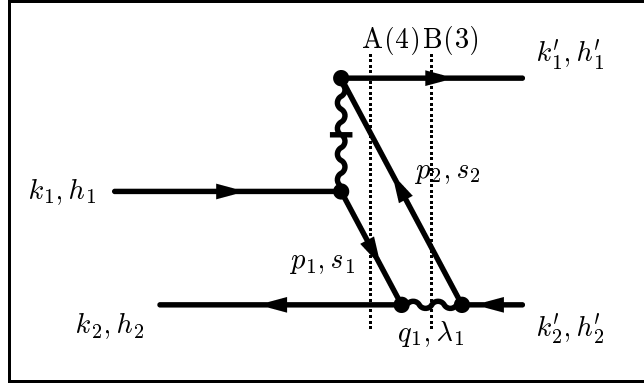


Abbildung B.9: Graph 14. Diese Abbildung stellt einen Graphen mit instantaner oberer Gluonlinie dar. Es handelt sich um einen Graphen mit einer Fork-Wechselwirkung.

B.9.1 Energienenner

Ab Abb.B.9 ist die Existenz von zwei Energienennern abzulesen. Der Energienenner Δ_A enthält vier Fermionen. Man findet

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + p_1^- + k_2^-) \\ &= k_1^- - k_1'^- - p_2^- - p_1^-, \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

für ihn und

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (k_1'^- + p_2^- + q_2^-) \\ &= k_1^- - k_1'^- - p_2^- - p_1^- - (q_2^- - p_1^- - k_2^-) \\ &= \Delta_A - \frac{m_g^2 - (p_1 + k_2)^2}{q_2^+} \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

für den zweiten.

B.9.2 Helizitätssumme

Zur Berechnung der Helizitätssumme benötigt man in diesem Fall das Matrixelement der Fork-Wechselwirkung, siehe Gl. (2.23). Man liest auch hier am Diagramm ab und erhält

$$\begin{aligned}N_{13} &= \sum_{\lambda_1; s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) u(p_1, s_1)] \\ &\quad \times [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)]. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Zur Ausführung der Summe über die Helizität des dynamischen Gluons wird wieder Gl. (A.13) verwendet. Dies liefert

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.82}$$

Ausmultipliziert erhält man hier mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] \right. \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&+ \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^\sigma q_{2\sigma} v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&+ \frac{1}{q_2^+} [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} u(p_1, s_1)] \\
&\left. \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.83}$$

Es ist wieder sinnvoll folgende Vierer-Vektoren einzuführen:

$$\begin{aligned}
l_2^\mu &= (q_2 - p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 - (p_1 + k_2)^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \\
\text{und } l_2'^\mu &= (q_2 + p_2 - k_2')^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2'^2}{2q_2^+}
\end{aligned} \tag{B.84}$$

mit der Definition

$$Q_2'^2 = -(p_2 - k_2')^2. \tag{B.85}$$

Mit $(k_2 + p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1)] = 0$ und $(p_2 - k_2')^\mu [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k_2', h_2')] = 0$, kann auch hier der Impuls des dynamischen Gluons an den passenden Stellen durch die l -Vektoren ersetzt werden. Dies liefert

$$\begin{aligned}
N_{13} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&+ \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^+} \right] \\
&\times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(p_1, s_1)] [\bar{u}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\},
\end{aligned} \tag{B.86}$$

was wieder eine deutliche Vereinfachung mit sich bringt. Nun soll noch die Summe über die Helizitäten der inneren Fermionen durchgeführt werden.

Man verwendet $\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m$, $\sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m$, $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ und findet schließlich mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc.

$$N_{13} = -[\bar{u}(k_1')\gamma^+ (\not{p}_2 - m) \gamma_\rho v(k_2')\bar{v}(k_2)\gamma^\rho (\not{p}_1 + m) \gamma^+ u(k_1)] \\ + \left[\frac{2m_g^2 - (p_1 + k_2)^2 + Q_2'^2}{2q_2^{+2}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k_1')\gamma^+ v(k_2')\bar{v}(k_2)\gamma^+ u(k_1)]. \quad (\text{B.87})$$

Der Colorfaktor berechnet sich völlig analog zu dem von Graph 13, man erhält $C = \frac{8}{9}$.

Zum Schluss wird noch eine Parametrisierung der inneren Impulse angegeben, welche die Impulserhaltung auch an der Fork-Wechselwirkung berücksichtigt.

B.9.3 Parametrisierung

Die inneren Impulse können unter Beachtung der Parametrisierung der äusseren Impulse, siehe Gl. (3.40), folgendermaßen parametrisiert werden:

$$p_1^\mu = \left(x(1-y)K^+, (1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{x(1-y)K^+} \right), \\ p_2^\mu = \left((xy - x')K^+, y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp - \mathbf{k}'_\perp)^2}{(xy - x')K^+} \right), \quad (\text{B.88}) \\ \text{und } q_2^\mu = \left((1-xy)K^+, -y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-xy)K^+} \right).$$

Damit kann nun auch hier das Integral angegeben werden.

B.10 Graph 15

Abbildung (B.10) zeigt einen weiteren Graphen mit oberem instantanem Gluon, welcher neben den beiden Vertizes eine Fork-Wechselwirkung enthält.

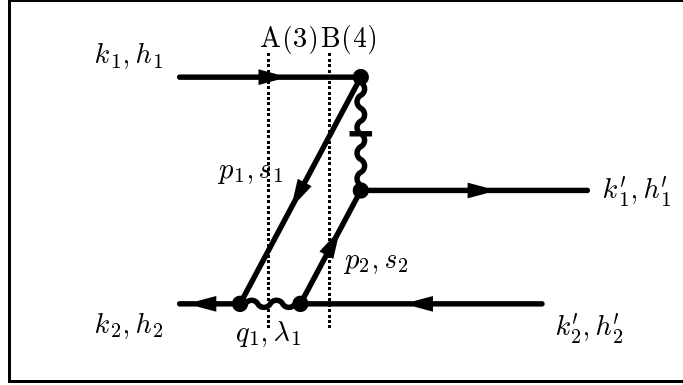


Abbildung B.10: Graph 15. Dies stellt ein weiteres Diagramm dar, in dem die obere Gluonlinie instantan ist und es zwei Energienenner gibt.

B.10.1 Energienenner

Es gibt wieder zwei Energienenner, in denen über drei bzw. vier innere Teilchen summiert wird. Der erste ist

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + q_2^-) = k_2^- - p_1^- - q_2^- \\ &= -\frac{m_g^2 - (k_2 - p_1)^2}{q_2^+} = -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+},\end{aligned}\quad (\text{B.89})$$

mit dem Feynman-Impulsübertrag $Q_2^2 = -(k_2 - p_1)^2$, und für den zweiten erhält man

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= (k_2^- - p_1^- - q_2^-) + (q_2^- - p_2^- - k_2'^-) \\ &= -\frac{m_g^2 + Q_2^2}{q_2^+} + \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{q_2^+} = -\frac{Q_2^2 + (p_2 + k_2')^2}{q_2^+}.\end{aligned}\quad (\text{B.90})$$

B.10.2 Helizitätssumme

Mit den passenden Matrixelementen der Vertex- und der Fork-Wechselwirkung, siehe Gl. (2.22) und (2.23), liest man hier

$$\begin{aligned}N_{15} &= \sum_{\lambda_2; s_1, s_2} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma \epsilon_\sigma(q_2, \lambda_2) v(k_2', h_2')] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho \epsilon_\rho^*(q_2, \lambda_2) v(p_1, s_1)],\end{aligned}\quad (\text{B.91})$$

an Abb.B.10 ab. Nun müssen wieder die Summen über die inneren Helizitäten durchgeführt werden.

Die Summe über das dynamische Gluon ergibt hier mit der Relation (A.13)

$$\begin{aligned}
N_{15} &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\sigma v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] \\
&\quad \times \left(-g_{\rho\sigma} + \frac{\eta_\rho q_{2\sigma} + \eta_\sigma q_{2\rho}}{q_2^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.92}$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ findet man

$$\begin{aligned}
N_{15} &= \left\{ \begin{aligned} & -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ & + \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho q_{2\rho} v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ & + \frac{1}{q_2^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^\rho q_{2\rho} v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)]. \end{aligned} \right.
\end{aligned} \tag{B.93}$$

Nun werden wieder folgende Vierer-Vektoren nützlich:

$$\begin{aligned}
l_2^\mu &= (q_2 + p_1 - k_2)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_2^2}{2q_2^+} \eta^\mu, \\
l_2'^\mu &= (q_2 - p_2 - k_2')^\mu = \frac{m_g^2 - (p_2 + k_2')^2}{2q_2^+} \eta^\mu,
\end{aligned} \tag{B.94}$$

mit $\eta^\mu = (0, \mathbf{0}_\perp, 2)$.

Mit $(k_2 - p_1)^\mu [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma_\mu v(p_1, s_1)] = 0$ und $(p_2 + k_2')^\mu [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(k'_2, h'_2)] = 0$ erkennt man auch hier, dass der Gluonimpuls an den jeweiligen Stellen durch den passenden l -Vektor ersetzt werden kann. Dies führt in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}
N_{15} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ \begin{aligned} & -[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma_\rho v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^\rho v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ & + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (p_2 + k_2')^2}{2q_2^{+2}} \right] \\ & \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\ & \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \end{aligned} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.95}$$

Jetzt wird noch über die Helizitäten der inneren Fermionen summiert. Dazu verwendet man $\sum_{s_1} v(p_1, s_1) \bar{v}(p_1, s_1) = \not{p}_1 - m$, $\sum_{s_2} u(p_2, s_2) \bar{u}(p_2, s_2) = \not{p}_2 + m$ und $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. und findet

$$\begin{aligned}
N_{15} &= - [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ (\not{p}_2 + m) \gamma_\rho v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) \gamma^+ u(k_1)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 + Q_2^2 - (p_2 + k_2')^2}{2q_2^{+2}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1) \gamma^+ v(k'_2) \bar{v}(k_2) \gamma^+ u(k_1)].
\end{aligned} \tag{B.96}$$

Damit wurde die Helizitätssumme deutlich vereinfacht. Der Colorfaktor berechnet sich analog zu Graph 13 zu $C = \frac{8}{9}$.

Auch hier wird wieder eine Parametrisierung der Impulse der inneren Teilchen angegeben, wobei die äusseren gemäß Gl. (3.40) parametrisiert sind.

B.10.3 Parametrisierung

Eine Möglichkeit die inneren Impulse zu parametrisieren ist durch

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= \left((1-y)(1-x)K^+, -(1-y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1-y)\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(1-x)K^+} \right), \\ q_2^\mu &= \left(y(1-x)K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-x)K^+} \right), \\ \text{und } p_2^\mu &= \left((y - xy - 1 + x')K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp + \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp + \mathbf{k}'_\perp)^2}{(y - xy - 1 + x')K^+} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.97})$$

gegeben.

B.11 Graph 16

Hier ist ein Graph mit unterem instantanem Gluon abgebildet. Neben den zwei Vertex-Wechselwirkungen gibt es wieder eine Fork-Wechselwirkung.

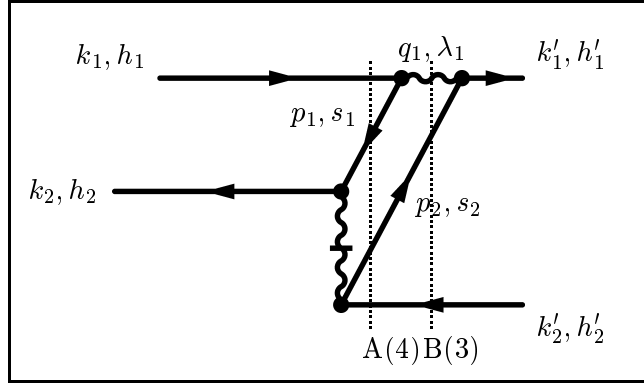


Abbildung B.11: Graph 16. Hier wird ein Graph mit unterem instantanen Gluon dargestellt. Er enthält zwei Energienenner.

B.11.1 Energienenner

Es gibt wieder zwei Energienenner, der erste propagiert vier Teilchen und lautet

$$\begin{aligned}\Delta_A &= k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= k_2^- - p_1^- - p_2^- - k_2'^- .\end{aligned}\quad (\text{B.98})$$

Der zweite propagiert nur drei Teilchen und schreibt sich als

$$\begin{aligned}\Delta_B &= k_1^- + k_2^- - (q_1^- + p_2^- + k_2'^-) \\ &= k_2^- - p_1^- - p_2^- - k_2'^- - (q_1^- - k_1 - p_1) \\ &= \Delta_A - \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+} .\end{aligned}\quad (\text{B.99})$$

B.11.2 Helizitätssumme

Zur Berechnung der Helizitätssumme werden wieder die entsprechenden Matrixelemente aus Gl. (2.22) und Gl. (2.23) benötigt. Die Zusammensetzung der Helizitätssumme kann dann Abb.B.11 entnommen werden:

$$\begin{aligned}N_{16} &= \sum_{\lambda_1; s_1, s_2} [\bar{u}(k_1', h_1') \gamma^\nu \epsilon_\nu(q_1, \lambda_1) u(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu \epsilon_\mu^*(q_1, \lambda_1) u(k_1, h_1)] \\ &\quad \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k_2', h_2')] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] .\end{aligned}\quad (\text{B.100})$$

Nun müssen wieder die Summen über die Helizitäten der inneren Teilchen ausgeführt werden.

Zuerst wird wieder die Summe über die Helizität des dynamischen Gluons mit Hilfe von Gl. (A.13) durchgeführt. Man findet

$$\begin{aligned}
N_{16} &= \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu u(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\quad \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] \\
&\quad \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{\eta_\mu q_{1\nu} + \eta_\nu q_{1\mu}}{q_1^+} \right).
\end{aligned} \tag{B.101}$$

Ausmultipliziert und mit $\gamma^\mu \eta_\mu = \gamma^+$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
N_{16} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ - [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^\nu q_{1\nu} u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \frac{1}{q_1^+} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu q_{1\mu} u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.102}$$

Wiederum ist es nützlich folgende Vierer-Vektoren einzuführen:

$$\begin{aligned}
l_1^\mu &= (q_1 - k_1 - p_1)^\mu = \frac{m_g^2 - (k_1 + p_1)^2}{q_1^+} \eta^\mu \\
\text{und } l_1'^\mu &= (q_1 + p_2 - k'_1)^\mu = \frac{m_g^2 + Q_1'^2}{q_1^+} \eta^\mu,
\end{aligned} \tag{B.103}$$

mit der Definition

$$Q_1'^2 = -(k'_1 - p_2)^2. \tag{B.104}$$

Mit $(k_1 + p_1)^\mu [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma_\mu u(k_1, h_1)] = 0$ und $(k'_1 - p_2)^\mu [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] = 0$ sieht man, dass auch hier die Gluonimpulse an den passenden Stellen durch die l -Vektoren ersetzt werden können. Dadurch vereinfacht sich die Helizitätssumme zu

$$\begin{aligned}
N_{16} &= \sum_{s_1, s_2} \left\{ - [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma_\mu u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \right. \\
&\quad \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^\mu u(k_1, h_1)] \\
&\quad + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + q_1^2}{2q_1^+} \right] \\
&\quad \times [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] \\
&\quad \left. \times [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \right\}.
\end{aligned} \tag{B.105}$$

Schliesslich muss auch noch über die Helizitäten der inneren Fermionen summiert werden.

Dies geschieht wie üblich unter Verwendung von $\sum_s u(p, s)\bar{u}(p, s) = \not{p} + m$ und $\sum_s v(p, s)\bar{v}(p, s) = \not{p} - m$, $\gamma^+\gamma^-\gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+\gamma^+ = 0$. Mit den Abkürzungen $(k, h) \rightarrow (k)$, etc. findet man schließlich

$$N_{16} = -[\bar{u}(k'_1)\gamma_\mu(\not{p}_2 + m)\gamma^+v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+(\not{p}_1 - m)\gamma^\mu u(k_1)] + \left[\frac{2m_g^2 - (k_1 + p_1)^2 + Q_1^2}{2q_1^{+2}} \right] 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1)\gamma^+v(k'_2)][\bar{v}(k_2)\gamma^+u(k_1)]. \quad (\text{B.106})$$

Der Colorfaktor berechnet sich wieder analog zu dem von Graph 13. Man findet $C = -\frac{8}{9}$.

Um die Iteration über y und \mathbf{l}_\perp wirklich konkret hinschreiben zu können, muss auch hier noch eine Parametrisierung angegeben werden.

B.11.3 Parametrisierung

Unter Einbeziehung der Parametrisierung der äusseren Impulse, siehe Gl. (3.40), stellt

$$q_1^\mu = \left((1 - y(1 - x))K^+, y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m_g^2 + (y\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp)^2}{(1 - y(1 - x))K^+} \right),$$

$$p_1^\mu = \left((1 - y)(1 - x)K^+, -(1 - y)\mathbf{k}_\perp - \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + ((1 - y)\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp)^2}{(1 - y)(1 - x)K^+} \right), \quad (\text{B.107})$$

und $p_2^\mu = \left((y - xy - 1 + x')K^+, -y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp + \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + (-y\mathbf{k}_\perp + \mathbf{l}_\perp + \mathbf{k}'_\perp)^2}{(y - xy - 1 + x')K^+} \right)$

eine mögliche Parametrisierung dar.

B.12 Graph 17

Nun wird noch der zweite der beiden auftretenden Graphen mit zwei instantanen Gluonlinien untersucht. Hier gibt es nur einen Energienenner und das Diagramm ist aus zwei Fork-Wechselwirkungen aufgebaut.

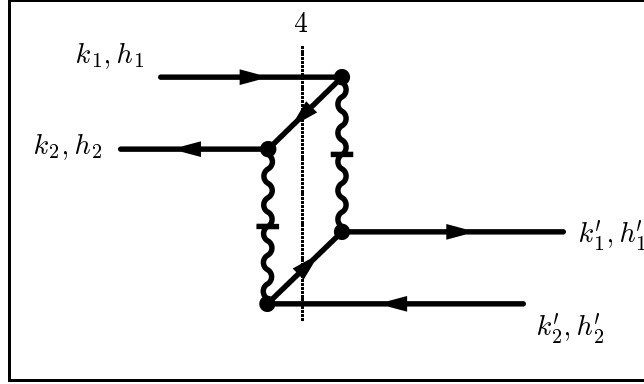


Abbildung B.12: Graph 17. Dies ist ein Graph mit zwei instantanen Gluonlinien. Er enthält zwei Fork-Wechselwirkungen und nur einen Energienenner.

B.12.1 Parametrisierung

Hier muss die Dreier-Impulserhaltung an den (Zeit-)Punkten der Forkwechselwirkungen berücksichtigt werden. Für die internen Quarks ergibt sich somit folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= \left(y(k_1^+ - k_1'^+), \mathbf{l}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(k_1^+ - k_1'^+)} \right), \\ p_2^\mu &= \left((1-y)(k_1^+ - k_1'^+), \mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp, \frac{m'^2 + (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.108})$$

wobei sich y und \mathbf{l}_\perp als die Integrationsvariablen erweisen werden.

B.12.2 Energienenner

Für den einzigen vorkommenden Energienenner ergibt sich nach den allgemeinen Regeln

$$\Delta = E + k_1^- + k_2^- - (k_1^- + p_1^- + p_2^- + k_2^-) = E + k_2^- - k_2'^- - p_1^- - p_2^-, \quad (\text{B.109})$$

und dies lässt sich mit obiger Parametrisierung als

$$\begin{aligned} \Delta &= E + k_2^- - k_2'^- - \frac{m^2 + \mathbf{l}_\perp^2}{y(k_1^+ - k_1'^+)} - \frac{m'^2 + (\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)} \\ &= E + k_2^- - k_2'^- - \frac{m^2 + y(m'^2 - m^2) + (1-y)\mathbf{l}_\perp^2 + y(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - \mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)} \end{aligned} \quad (\text{B.110})$$

schreiben.

B.12.3 Helizitätssumme

Für die Helizitätssumme findet man mit den Fork-Wechselwirkungen

$$N_{17} = \sum_{s_1, s_2} [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ u(p_2, s_2)] [\bar{v}(p_1, s_1) \gamma^+ u(k_1, h_1)] \\ \times [\bar{u}(p_2, s_2) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ v(p_1, s_1)].$$

Nun werden wieder die üblichen Beziehungen $\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m$ und $\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m$ verwendet. Mit $\gamma^+ \gamma^- \gamma^+ = 4\gamma^+$ und $\gamma^+ \gamma^+ = 0$ erhält man schließlich

$$N_{17} = 4p_1^+ p_2^+ [\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(k_1, h_1)]. \quad (\text{B.111})$$

Hier ist die Helizitätssumme nur über den Faktor $p_1^+ p_2^+$ von den inneren Impulsen abhängig. Der nur von den äußeren Spinoren abhängige Teil kann also vor das Integral gezogen werden. Der Colorfaktor ergibt völlig analog zu Graph 5 $C = \frac{16}{9}$.

B.12.4 Das Integral

Auch hier muss wieder über alle inneren Impulse, unter Beachtung der Deltafunktionen, die für die Dreier-Impulserhaltung stehen, integriert werden. Dies wird auch hier wieder über obige Parametrisierung (B.108) erreicht. Man findet

$$\langle f | U_{TGA,12} | i \rangle = \frac{16 K^{+3} g^4}{9 (8\pi^3)^2} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1) \gamma^+ v(k'_2, h'_2)] [\bar{v}(k_2, h_2) \gamma^+ u(k_1, h_1)]}{\sqrt{k_1^+ k_2^+ k_1'^+ k_2'^+}} \\ \times \int_0^1 dy \int d^2 l_\perp \frac{1}{(k_2^+ - y(k_1^+ - k_1'^+))^2} \frac{1}{(k_1'^+ - (1-y)(k_1^+ - k_1'^+))^2} \\ \times \frac{1}{E + k_2^- - k_2'^- - \frac{m^2 + y(m'^2 - m^2) + (1-y)l_\perp^2 + y(\mathbf{k}_{1\perp} - \mathbf{k}'_{1\perp} - l_\perp)^2}{y(1-y)(k_1^+ - k_1'^+)}} \quad (\text{B.112})$$

wobei alle Impulse schon als Funktion der entsprechenden Parametrisierung zu verstehen sind. Auch dieses Integral ist divergent und muss geeignet regularisiert werden, deswegen wird wiederum eine Regulatorfunktion $R(y, \mathbf{l}_\perp)$ eingeführt.

Ausserdem wird auch hier wieder die Parametrisierung für die äußeren Impulse verwendet:

$$k_1^\mu = \left(xK^+, \mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{xK^+} \right), \\ k_2^\mu = \left((1-x)K^+, -\mathbf{k}_\perp, \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)K^+} \right), \\ k_1'^\mu = \left(x'K^+, \mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp^2}{x'K^+} \right), \\ k_2'^\mu = \left((1-x')K^+, -\mathbf{k}'_\perp, \frac{m'^2 + \mathbf{k}'_\perp^2}{(1-x')K^+} \right). \quad (\text{B.113})$$

Damit ergibt sich für Gl. (B.112)

$$\begin{aligned}
\langle f|U_{TGA,12}|i\rangle &= \frac{g^4}{(3\pi^3)^2} \frac{[\bar{u}(k'_1, h'_1)\gamma^+v(k'_2, h'_2)][\bar{v}(k_2, h_2)\gamma^+u(k_1, h_1)]}{K^{+2}\sqrt{x(1-x)x'(1-x')}} \\
&\times \int_0^1 dy \int d^2l_\perp \frac{R(y, \mathbf{l}_\perp)}{(1-x-(x-x')y)^2(x-2x'-(x-x')y)^2} \\
&\times \frac{1}{E + \frac{m^2+\mathbf{k}_\perp^2}{(1-x)} - \frac{m'^2+\mathbf{k}'_\perp^2}{(1-x')} - \frac{m^2+y(m'^2-m^2)+(1-y)\mathbf{l}_\perp^2+y(\mathbf{k}_\perp-\mathbf{k}'_\perp-\mathbf{l}_\perp)^2}{y(1-y)(x-x')}}.
\end{aligned} \tag{B.114}$$

Auch hier findet man also ein Integral mit ziemlich komplizierter Struktur.

Erklärung:

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Heidelberg, 05.04.04