Zeitschrift für Physik, Bd. 143, S. 239—248 (1955)

Von der Forschungsprofessur für Theoretische Physik der Universität Hamburg

Beiträge zur Theorie der statischen Vakuumfelder in der klassischen und der erweiterten relativistischen Gravitationstheorie

Von

JÜRGEN EHLERS

(Eingegangen am 25. September 1955)

Im Anschluß an eine frühere Arbeit[1] wird gezeigt, daß die Bestimmung gewisser Lösungen der Vakuumfeldgleichungen in der EINSTEINschen, der EINSTEIN-MAXWELLschen und der JORDAN-THIRYschen Theorie im wesentlichen zurückgeführt werden kann auf die Berechnung einer bestimmten Klasse dreidimensionaler, definiter RIEMANNscher Räume, die differentialgeometrisch gekennzeichnet werden. Die kugelsymmetrischen Felder sowie die MAJUMDARschen[2] und WEYLschen[3] Lösungen sind als Spezialfälle darin enthalten. Die MAJUMDARschen und die WEYLschen Lösungen haben Analoga in der JORDAN-THIRYschen Theorie.

I. Einleitung

In einer früheren Arbeit (s. oben) habe ich zwei Lösungsklassen der EINSTEIN-MAXWELLschen Feldgleichungen im statischen Fall behandelt. Die eine von ihnen enthält diejenigen axialsymmetrischen Felder, bei denen das „Gravitationspotential" $\psi = \frac{1}{2} \log g_{00}$ und das elektrische Potential Φ voneinander abhängig sind: WEYLsche Lösungen. Die andere enthält diejenigen Lösungen, bei denen der durch

$$d s^2 = e^{2\psi} c^2 d t^2 - e^{-2\psi} d l^2 \tag{1}$$

definierte dreidimensionale Raum R mit der positiv definiten Metrik $d l^2$ euklidisch ist, wofür ja

$$\overline{G}_{\mu\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \tag{2}$$

kennzeichnend ist ($\overline{G}_{\mu\nu} \equiv$ RICCI-Tensor zu $d l^2$). Es lassen sich dann ψ und Φ in einfacher Weise durch eine Hilfsfunktion V ausdrücken, die in R der Potentialgleichung

$$\Delta V = 0 \tag{3}$$

genügt (s. Abschnitt IV meiner oben genannten Arbeit). Leider war mir bei Abfassung dieser Arbeit entgangen, daß diese Lösungsklasse

[1] EHLERS, J.: Z. Physik **140**, 394 (1955).
[2] MAJUMDAR, S. D.: Phys. Rev. **72**, 390 (1947).
[3] WEYL, H.: Ann. Phys. **54**, 117 (1917); **59** (1919).

schon früher von S. D. MAJUMDAR (siehe [2]) und A. PAPAPETROU[4] gefunden worden war. In der schönen Arbeit MAJUMDARs, dessen Priorität hervorgehoben werden muß, wurde gezeigt: Die genannten Lösungen sind genau diejenigen, bei denen zwischen Φ und ψ eine Relation der Form

$$e^{2\psi} = \eta^2 (\Phi - B)^2 \tag{4}$$

$\left(\eta = \sqrt{\frac{\varkappa}{2c^2}},\ \varkappa \equiv \text{relativistische Gravitationskonstante}, B \text{ eine willkürliche Konstante}\right)$ besteht. Durch Vereinigung dieses Resultates mit der anderen Charakterisierung (2) ergibt sich also, daß die Forderung (4) mit der geometrischen Aussage (2) für R äquivalent ist. Nun hat MAJUMDAR weiter bewiesen, daß die allgemeinste mögliche Abhängigkeit der Funktionen Φ, ψ die Form

$$\eta^2 (\Phi - B)^2 = e^{2\psi} + \frac{a}{\eta^2} \tag{5}$$

(a ist eine weitere willkürliche Konstante) hat, von dieser Art sind die WEYLschen Lösungen. Es liegt daher die Frage nahe, ob sich nicht (2) so verallgemeinern läßt, daß es zu (5) äquivalent wird wie (2) zu (4). Die Verfolgung dieser Frage führte zu einigen Sätzen, die im folgenden besprochen werden sollen und mir aus zwei Gründen interessant erscheinen:

A. Sie ermöglichen eine wesentliche Vereinfachung der Berechnung der betreffenden Felder, z.B. wird die Berechnung des SCHWARZSCHILD-Feldes eine fast ebenso leichte Aufgabe wie die Bestimmung des analogen NEWTONschen Feldes.

B. Sie stellen eine enge Verbindung zwischen Feldern der EINSTEINschen, der EINSTEIN-MAXWELLschen und der JORDAN-THIRYschen Theorie her, so daß man alle drei Typen mit derselben Methode behandeln kann.

Die Vereinfachung wird erzielt dadurch, daß einerseits die Feldgleichungen im Hilfsraum R formuliert werden, andererseits gewisse Feldgrößen als abhängige Funktionen vorausgesetzt werden.

II. Statische Gravitationsfelder in der EINSTEINschen Theorie

Formuliert man die EINSTEINschen Feldgleichungen

$$G_{kl} = 0 \tag{6}$$

als Tensorgleichungen in R [siehe (1)], so erhält man[5]

$$\overline{G}_{\mu\nu} + 2\psi_{|\mu}\psi_{|\nu} = 0. \tag{7}$$

[4] PAPAPETROU, A.: Proc. Roy. Ir. Acad. **51**, 191 (1947).

[5] JORDAN, P.: Schwerkraft und Weltall, 2. Aufl., S. 211, Gl. (27). Braunschweig 1955.

Dies ist wohl die einfachste Form, auf die man die Gln. (6) im statischen Fall bringen kann. Aus (7) folgt[6] durch Anwendung des Erhaltungssatzes des Ricci-Tensors

$$\psi^{|\nu}{}_{||\nu} = 0. \tag{8}$$

III. Elektrostatische Felder in der Einstein-Maxwellschen Theorie

Jetzt lauten die Feldgleichungen in R[7]

$$\overline{G}_{\mu\nu} = -2\psi_{|\mu}\psi_{|\nu} + 2\eta^2 e^{-2\psi}\Phi_{|\mu}\Phi_{|\nu}, \tag{9}$$

$$\psi^{|\nu}{}_{||\nu} = \eta^2 e^{-2\psi}\Phi_{|\nu}\Phi^{|\nu} \quad \text{(a)}, \qquad (e^{-2\psi}\Phi^{|\nu})_{||\nu} = 0 \quad \text{(b)}. \tag{10}$$

Nun folgt aus (9)

$$\left.\begin{aligned} \overline{G}^{\mu}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\overline{G} = &-2\psi^{|\mu}\psi_{|\nu} + 2\eta^2 e^{-2\psi}\Phi^{|\mu}\Phi_{|\nu} + \\ &+ \delta^{\mu}_{\nu}(\psi^{|\varrho}\psi_{|\varrho} - \eta^2 e^{-2\psi}\Phi^{|\varrho}\Phi_{|\varrho}), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

also wegen der Identität $(\overline{G}^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\overline{G})_{||\mu} = 0$:

$$(\psi^{|\nu}{}_{||\nu} - \eta^2 e^{-2\psi}\Phi_{|\nu}\Phi^{|\nu})\,\psi_{|\mu} - \tfrac{1}{2}(e^{-2\psi}\Phi^{|\nu})_{||\nu}\Phi_{|\mu} = 0. \tag{12}$$

Aus (12) folgt der

Satz 1. Wenn ψ und Φ unabhängig voneinander sind, so folgen die Gln. (10) aus (9). Die Bestimmung elektrostatischer Felder mit unabhängigen ψ, Φ ist also gleichbedeutend mit der Konstruktion dreidimensionaler Räume, deren Ricci-Tensor aus zwei Skalaren nach (9) aufgebaut ist. [Man könnte ψ und Φ als zwei der Koordinaten wählen, dann wird (9) besonders einfach.]

Wenn ψ und Φ voneinander abhängig sind und wir den trivialen Fall $\Phi = \text{const}$ (reines Gravitationsfeld, Abschnitt II) ausschließen, können wir

$$e^{2\psi} = \eta^2 g(\Phi) \tag{13}$$

ansetzen, dann wird

$$2e^{2\psi}\psi_{|\nu} = \eta^2 g'\Phi_{|\nu}, \qquad \psi^{|\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^2 e^{-2\psi}\Phi^{|\nu} g',$$

also

$$\psi^{|\nu}{}_{||\nu} = \tfrac{1}{2}\eta^2 (e^{-2\psi}\Phi^{|\nu})_{||\nu} g' + \tfrac{1}{2}\eta^2 e^{-2\psi}\Phi^{|\nu}\Phi_{|\nu} g'',$$

und dann folgt aus (10) $g'' = 2$, also der von Majumdar zuerst erkannte

Satz 2. Die allgemeinste mögliche Abhängigkeit der Funktionen ψ, Φ lautet

$$e^{2\psi} + \frac{a}{\eta^2} = \eta^2(\Phi - B)^2. \tag{14}$$

Setzen wir in diesem Falle

$$e^{-2\psi}\,d\Phi = dV, \tag{15}$$

---

[6] Jordan, P.: a. a. O., S. 211.

[7] Ehlers, J.: Z. Physik **140**, 394 (1955), Abschnitt II, Gln. (15), (16).

so können wir (9) so umformen unter Benutzung von (14) und der daraus folgenden Gleichung $d\psi = \eta^2(\Phi - B)\,dV$:

$$\begin{aligned}\overline{G}_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu &= -2(d\psi^2 - \eta^2 e^{-2\psi} d\Phi^2)\\ &= -2(\eta^4(\Phi - B)^2 - \eta^2 e^{2\psi})\,dV^2 = -2a\,dV^2,\end{aligned}$$

d.h. aus (9) wird

$$\overline{G}_{\mu\nu} = -2a\, V_{|\mu} V_{|\nu}. \tag{16}$$

(10b) ist wegen (15) gleichbedeutend mit

$$V^{|\nu}{}_{||\nu} = 0, \tag{17}$$

und (10a) ist wegen (12) von selbst erfüllt, wenn (16), (17) erfüllt sind. Aus (14), (15) folgt weiter elementar (C, d sind Konstanten):

$$\left.\begin{aligned}
&a = 0: \quad e^{-\psi} = \pm\eta(V + C), \qquad \Phi = \frac{-1}{\eta^2(V+C)} + B, && \text{(a)}\\
&\left.\begin{aligned}a > 0: \quad & e^{-\psi} = \pm\frac{\eta}{\sqrt{a}}\,\mathfrak{Sin}\left(\sqrt{a}\,V + d\right),\\
&\Phi = -\frac{\sqrt{a}}{\eta^2}\,\mathfrak{Cotg}\left(\sqrt{a}\,V + d\right) + B,\end{aligned}\right\} && \text{(b)}\\
&\left.\begin{aligned}a < 0: \quad & e^{-\psi} = \pm\frac{\eta}{\sqrt{-a}}\sin\left(\sqrt{-a}\,V + d\right),\\
&\Phi = -\frac{\sqrt{-a}}{\eta^2}\operatorname{cotg}\left(\sqrt{-a}\,V + d\right) + B.\end{aligned}\right\} && \text{(c)}
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Setzen wir speziell $a = 0$, so erhalten wir die MAJUMDARschen Lösungen, gegeben durch

$$\overline{G}_{\mu\nu} = 0, \qquad \Delta V = 0. \tag{18a}$$

Ist $a \neq 0$, so ist (17) wieder eine Folge von (16), und wir erhalten den

Satz 3. Die elektrostatischen Felder mit abhängigen ψ, Φ und mit $a \neq 0$ sind vollständig bestimmt durch (16), (18b, c).

Übrigens kann man magnetostatische Felder ebenso behandeln, wie ich in meiner früheren Arbeit bemerkte. Schon eher hatte W. BONNOR einen diesbezüglichen schönen Satz gefunden, von ihm stammen weitere Untersuchungen über solche Felder[8].

IV. Statische Vakuumfelder in der erweiterten Gravitationstheorie von JORDAN-THIRY

Ist

$$ds^2 = g_{kl}\,dx^k\,dx^l \tag{19}$$

[8] BONNOR, W. B.: Proc. Phys. Soc., Sect. A **66**, 145 (1953); **67**, 225 (1954).

das natürliche, d.h. mit Maßstäben und Uhren ausmeßbare Linienelement der Raum—Zeit, so lauten die Vakuumfeldgleichungen jetzt[9]

$$\left.\begin{aligned} \varkappa^{|l}{}_{||l} &= 0\,, \\ G_{kl} + \frac{\varkappa_{|k||l}}{\varkappa} - \zeta\,\frac{\varkappa_{|k}\varkappa_{|l}}{\varkappa^2} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Nach SCHÜCKING[10] sind die Gln. (19), (20) äquivalent mit

$$\tilde{G}_{kl} = (\zeta - \tfrac{3}{2})\, u_{|k}\, u_{|l}, \tag{21}$$

wo $\tilde{G}_{kl}$ der RICCI-Tensor der Metrik

$$d\tilde{s}^2 = \frac{\varkappa}{\varkappa_0}\, d s^2 \qquad (\varkappa_0 = \text{const}) \tag{22}$$

und

$$u = \log \frac{\varkappa}{\varkappa_0} \tag{23}$$

ist. Für statische Felder ist definitionsgemäß

$$\varkappa_{|0} = u_{|0} = 0\,, \tag{24}$$

und man kann setzen:

$$d\tilde{s}^2 = e^{2\psi}\, c^2\, dt^2 - e^{-2\psi}\, d l^2 \tag{25}$$

mit

$$\psi = \psi(x^{(\nu)})\,. \tag{26}$$

Die Gln. (21) mit (24) lauten dann in R:

$$\overline{G}_{\mu\nu} = -\,2\psi_{|\mu}\,\psi_{|\nu} + (\zeta - \tfrac{3}{2})\, u_{|\mu}\, u_{|\nu}, \tag{27}$$

$$\psi^{|\nu}{}_{||\nu} = 0\,. \tag{28}$$

Aus (27) folgt analog zu (12)

$$\psi^{|\nu}{}_{||\nu}\,\psi_{|\mu} - \tfrac{1}{4}\,(2\zeta - 3)\, u^{|\nu}{}_{||\nu}\, u_{|\mu} = 0\,. \tag{29}$$

Daraus ergibt sich der

Satz 4. Wenn ψ und u (oder äquivalent damit g_{00} und $\varkappa$) unabhängige Funktionen sind, so ist (28) eine Folge von (27), und die statischen Feldgleichungen reduzieren sich auf die sechs Gln. (27).

Wir betrachten nun den Fall abhängiger ψ, u. Es gibt dann erstens die trivialen Fälle $u = \text{const}$ oder $\psi = \text{const}$. $u = \text{const}$ führt auf die EINSTEINschen Felder, vgl. II. $\psi = \text{const}$, o. B. d. A. $\psi = 0$, führt zu folgendem

[9] JORDAN, P.: a. a. O., S. 164, Gl. (6).

[10] JORDAN, P.: a. a. O., S. 208.

Satz 5. Ist R ein dreidimensionaler Raum, V ein Skalar und gilt (16), so ist

$$ds^2 = e^{-V}(c^2\,dt^2 - dl^2), \qquad \varkappa = \varkappa_0\, e^V \tag{30}$$

mit

$$\zeta = \tfrac{3}{2} - 2a \tag{31}$$

eine Lösung der JORDAN-THIRYschen Gleichungen.

Sei nun ψ nicht konstant und

$$u = g(\psi)\,. \tag{32}$$

Dann gilt (28) und wegen (29) auch

$$u^{|\nu}{}_{||\nu} = 0\,. \tag{33}$$

Daraus folgt mit (32):

$$u^{|\nu} = g'\,\psi^{|\nu}, \qquad u^{|\nu}{}_{||\nu} = g'\,\psi^{|\nu}{}_{||\nu} + g''\,\psi_{|\nu}\,\psi^{|\nu},$$

also $g'' = 0$. Damit haben wir den zu Satz 2 analogen

Satz 6. Die allgemeinste mögliche Abhängigkeit der Funktionen $\varkappa$, ψ hat die Form

$$\varkappa = \varkappa_0\, e^{2b\psi} \qquad (\varkappa_0,\, b \text{ Konstanten})\,. \tag{34}$$

Der Satz 6 ist eine Verallgemeinerung einer Relation, die zuerst im Falle der kugelsymmetrischen HECKMANNschen Lösung aus den betreffenden speziellen Differentialgleichungen erschlossen wurde[11], hier sieht man ihren allgemeinen Grund, und zwar mit einer viel einfacheren Herleitung, als sie dort im speziellen Fall gegeben wurde.

Setzen wir (34) in (27) ein, so folgt mit (22), (25) der

Satz 7. Ist R ein dreidimensionaler Raum, V ein Skalar und gilt (16), so ist

$$ds^2 = e^{2(1-b)V}\, c^2\,dt^2 - e^{-2(1+b)V}\, dl^2, \qquad \varkappa = \varkappa_0\, e^{2bV} \tag{35}$$

eine Lösung der JORDAN-THIRYschen Feldgleichungen mit

$$a = 1 - b^2(2\zeta - 3)\,. \tag{36}$$

Wir heben hervor, daß hierin eine Lösungsklasse enthalten ist, die der MAJUMDARschen in der EINSTEIN-MAXWELLschen Theorie entspricht:

Satz 8. Setzt man

$$b = \frac{1}{\sqrt{2\zeta - 3}} \tag{37}$$

und ist V eine gewöhnliche Potentialfunktion,

$$\Delta V = 0\,, \tag{38}$$

[11] JORDAN, P.: a. a. O., S. 173, Gl. (8).

so ist

$$\left.\begin{aligned} ds^2 &= e^{2(1-b)V} c^2 dt^2 - e^{-2(1+b)V} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \\ \varkappa &= \varkappa_0 e^{2bV} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

eine Lösung der JORDAN-THIRYschen Feldgleichungen.

Die bisherige Untersuchung zeigt, daß jede Lösung von (16) elektrostatische EINSTEIN-MAXWELL-Felder, JORDAN-THIRYsche Gravitationsfelder und für $a > 0$ auch EINSTEINsche Gravitationsfelder liefert, ohne daß weitere Differentialgleichungen gelöst werden müssen. Man wird deshalb wünschen, die Räume (16) differentialgeometrisch zu kennzeichnen. Das soll jetzt versucht werden.

V. Die Krümmung der Räume, die der Gleichung $\overline{G}_{\mu\nu} = -2a\, V_{|\mu} V_{|\nu}$ genügen

Nach RIEMANN definiert man die Krümmung eines beliebig dimensionalen metrischen Raumes in Abhängigkeit von der Flächenrichtung durch die Gleichung

$$K = -\frac{\frac{1}{4} G_{ijkl} S^{ij} S^{kl}}{\frac{1}{2} S_{kl} S^{kl}}. \tag{40}$$

K ist das GAUSSsche Krümmungsmaß einer durch den betreffenden Punkt in der „Richtung" S^{ij}* hindurchgelegten geodätischen Fläche**.

Verstehen wir unter δ^{ijr}_{kls} das von MURNAGHAN eingeführte verallgemeinerte KRONECKER-Symbol[12], so gilt, wie man leicht bestätigt, die Identität

$$-\tfrac{1}{4} G_{ij\,.\,.}^{\;\;\;kl} \delta^{ijr}_{kls} = G^r_s - \tfrac{1}{2} \delta^r_s G. \tag{41}$$

Nun denken wir uns einen dreidimensionalen Raum mit positiv definiter Metrik gegeben. Dann kann man eine Flächenrichtung statt durch einen Tensor S^{ij} durch den zugeordneten Normalenvektor

$$n_l = \tfrac{1}{2} E_{ijl} S^{ij}, \qquad S^{ij} = E^{ijl} n_l \tag{42}$$

kennzeichnen, wobei E_{ijl} den EDDINGTONschen Permutationstensor[13] bedeutet. Setzt man das in (40) ein und verwendet die Identitäten

$$E^{ijr} E_{kls} = \delta^{ijr}_{kls} \tag{43}$$

und (41), so erhält man für einen R_3 die schöne Formel

$$K = \frac{(G_{rs} - \frac{1}{2} g_{rs} G)\, n^r n^s}{n_r n^r} = \frac{G_{rs} n^r n^s}{n_r n^r} - \frac{1}{2} G, \tag{44}$$

---

* Spannen die Vektoren a^i, b^i die Fläche auf, so ist $S^{ij} = a^i b^j - a^j b^i$.

** Siehe z. B. EISENHART, L. P.: Riemannian Geometry, S. 79ff. Princeton 1949.

12 MURNAGHAN, F. D.: Amer. Math. Monthly 32, 233 (1925).

13 EDDINGTON, A. S.: The mathematical theory of relativity, S. 107. Cambridge 1923.

aus der man z.B. die gewöhnlich umständlicher bewiesene Tatsache abliest, daß $G_{rs} = \frac{G}{3} g_{rs}$ für dreidimensionale Räume isotroper Krümmung kennzeichnend ist*.

Uns interessiert folgender aus (44) folgender Satz:

Satz 9. Die Räume (16) sind dadurch charakterisiert, daß ihre RIEMANNsche Krümmung sich in Abhängigkeit von der Richtung genau so mit Hilfe eines Skalars V ausdrücken läßt wie (bis auf die Konstante $-2a$) in einem klassischen elektrostatischen Feld die Normalspannung durch das Potential:

$$K = -2a\left[\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)^2 - \frac{1}{2}\Delta_1 V\right]. \tag{45}$$

$\Big(\frac{\partial}{\partial n} \equiv$ Differentiation in Richtung der Normale n^l der Flächenrichtung, $\Delta_1 \equiv g^{rs}\frac{\partial}{\partial x^r}\frac{\partial}{\partial x^s} \equiv$ Differentialoperator erster Ordnung$\Big)$.

Durch den Satz 9 wird besonders deutlich, wie durch EINSTEIN die Gravitation „geometrisiert" wird: Die Spannungen in einem starren euklidischen Raum werden ersetzt durch die Krümmungen eines schmiegsamen RIEMANN-Raumes, und zwar ist die Krümmung [für $a = 1$, vgl. (7)] in Richtung der Kraftlinien (= Orthogonaltrajektorien zu $\psi = \text{const}$) minimal und negativ, senkrecht dazu maximal und positiv, und zwar von gleichem Betrage.

Übrigens folgt aus $V^{|\nu}{}_{||\nu} = 0$, daß $\oint \frac{\partial V}{\partial n}\, do$, erstreckt über eine beliebige eine Singularität umhüllende Fläche, eine dieser Singularität zugehörende Invariante ist. Im Falle eines Gravitationsfeldes ($a = 1$, $V = \psi$, siehe II) ist

$$M = \frac{2}{\varkappa}\oint \frac{\partial V}{\partial n}\, do \tag{46}$$

die Masse, im Falle eines elektrostatischen Feldes gemäß Satz 3 ist[14]

$$e = -\oint \frac{\partial V}{\partial n}\, do \tag{47}$$

die Ladung, die dieser Singularität entspricht.

Man kann die Gl. (16) auch durch ein invariantes räumliches Variationsprinzip ersetzen, nämlich

$$\delta \int (\overline{G} + 2a\,\Delta_1 V)\sqrt{\overline{\gamma}}\, d^3 x = 0. \tag{48}$$

Zu variieren sind in einem beliebigen beschränkten Bereich die $\overline{\gamma}_{\mu\nu}$ von R und V.

---

* Nach HERGLOTZ (1916) folgt daraus weiter $G = \text{const}$, so daß es sich um einen Raum konstanter Krümmung handelt; damit hat man den SCHURschen Satz für $n = 3$, ohne die Identität von BIANCHI benutzt zu haben.

[14] EHLERS, J.: Z. Physik **140**, 394 (1955), Abschnitt II, Gl. (18).

VI. Einige Bemerkungen über Lösungen der Gl. (16)

Die einfachste Lösung von (16) ist natürlich $a=0$, $dl^2 = dx^2+dy^2+dz^2$, sie führt auf die MAJUMDARsche Lösung und ihr Analogon in der erweiterten Gravitationstheorie. Für $a \neq 0$ wird man zunächst die axialsymmetrischen Lösungen suchen. Setzt man

$$dl^2 = e^{2\chi(z,r)}(dz^2 + dr^2) + r^2 d\varphi^2, \tag{49}$$

so liefert eine kleine Rechnung:

$$\overline{G}_{\varphi\varphi} = \overline{G}_{\varphi z} = \overline{G}_{\varphi r} = 0, \tag{50}$$

und von (16) bleibt nur nach

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_2 \chi + \frac{\chi_{|r}}{r} = -2a V_{|z}^2 \\ &\Delta_2 \chi - \frac{\chi_{|r}}{r} = -2a V_{|r}^2 \qquad \left(\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \\ &-\frac{\chi_{|z}}{r} = -2a V_{|z} V_{|r}, \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

woraus sofort folgt:

$$\left.\begin{aligned} &\chi = a \int r\{2 V_{|z} V_{|r}\, dz + (V_{|r}^2 - V_{|z}^2)\, dr\}, \\ &\Delta V = 0, \qquad \left(\Delta \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial z} r \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und umgekehrt folgt aus (52) wieder (51). Dabei ist noch (52b) die Integrabilitätsbedingung zu (52a). Mit Satz 3 zusammen haben wir damit die WEYLschen Lösungen auf einem sehr befriedigenden Wege gewonnen. Zugleich aber liefert uns (52) zusammen mit Satz 5 oder Satz 7 axialsymmetrische statische Felder der erweiterten Gravitationstheorie. Das dem WEYLschen kanonischen Linienelement entsprechende ist entweder (Satz 5)

$$ds^2 = e^{-V} c^2 dt^2 - e^{-V+\chi}(dz^2 + dr^2) - r^2 e^{-V} d\varphi^2 \tag{53}$$

oder (Satz 7)

$$ds^2 = e^{2(1-b)V} c^2 dt^2 - e^{-2(1+b)V+\chi}(dz^2 + dr^2) - r^2 e^{-2(1+b)V} d\varphi^2. \tag{54}$$

Natürlich sind die kugelsymmetrischen Felder in (49), (52) enthalten. Wir wollen aber noch zeigen, wie man die kugelsymmetrischen Lösungen von (16) sehr einfach direkt bestimmen kann. Dazu benutzen wir folgenden

Hilfssatz[15]. Ist F eine Fläche mit dem GAUSSschen Krümmungsmaß K und der Metrik $d\sigma^2 = \gamma_{jl}\, dx^j dx^l$ $(j, l = 1, 2)$, so gilt für den

---

[15] JORDAN, P.: a. a. O., S. 40ff., (2), (6). Der Hilfssatz des Textes ergibt sich aus dieser Formel und der Tatsache, daß für eine Fläche stets $G_{kl} = -K g_{kl}$ ist (EISENHART: Intr to Diff. Geom., S. 149., Princeton 1947).

RICCI-Tensor des Raumes mit

$$dl^2 = dr^2 + h^2(r)\, d\sigma^2: \tag{55}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{G}_{rr} &= 2\frac{h''}{h}, \qquad \overline{G}_{r1} = \overline{G}_{r2} = 0, \\ \overline{G}_{jl} &= \left(\frac{1}{2}(h^2)'' - K\right)\gamma_{jl} \qquad \left(' \equiv \frac{d}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Setzen wir nun

$$dl^2 = dr^2 + h^2(r)\ \left(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2\right), \tag{57}$$

so reduzieren sich offensichtlich die Gln. (16) wegen (56) und $K=1$ auf

$$\frac{h''}{h} + a V'^2 = 0, \qquad (h^2)'' = 2. \tag{58}$$

Diese elementaren Differentialgleichungen führen sofort mühelos zu dem Ergebnis (mit passender Wahl des Nullpunktes von r):

$$\left.\begin{aligned} a>0:\quad & dl^2 = dr^2 + (r-2m)\, r\, (d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2), \\ & V = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log\left(1 - \frac{2m}{r}\right). \\ a<0:\quad & dl^2 = dr^2 + (r^2+m^2)(d\Theta^2 + \sin^2\Theta\, d\varphi^2), \\ & V = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{r}{m}\right) \qquad (m = \text{const}). \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Nach II erhält man für $a=1$ ohne weitere Rechnung die SCHWARZSCHILD-Lösung. Dies dürfte der einfachste Weg zur SCHWARZSCHILD-Lösung sein; man braucht lediglich (7) und (56) — Formeln, die ohnehin auch für andere Fragen von Interesse sind — und erhält sofort (8) und damit die Lösung, ohne ein einziges Γ-Symbol, ja sogar ohne die G_{kl} zu ds^2 ausrechnen zu müssen.

Wendet man Satz 3 auf (59) an, so erhält man die bekannte REISSNERsche Lösung[16] für das Feld einer Punktladung, und die Sätze 5 und 7 führen auf die HECKMANNsche Lösung[17].

Geht man wieder von (55) aus und setzt $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$, also $K=0$, so erhält man ebenso einfach ebene Felder. Man kann leicht sehen, daß damit die Möglichkeiten, aus (55) Lösungen von (16) zu erhalten, erschöpft sind.

Dr. J. EHLERS, Hamburg 19, Bei der Apostelkirche 22

[16] REISSNER: Ann. Phys. **50**, 106 (1916).

[17] JORDAN, P.: a. a. O., S. 172ff. HECKMANN, O., P. JORDAN u. W. FRICKE: Astrophys. Z. **28**, 113 (1951).