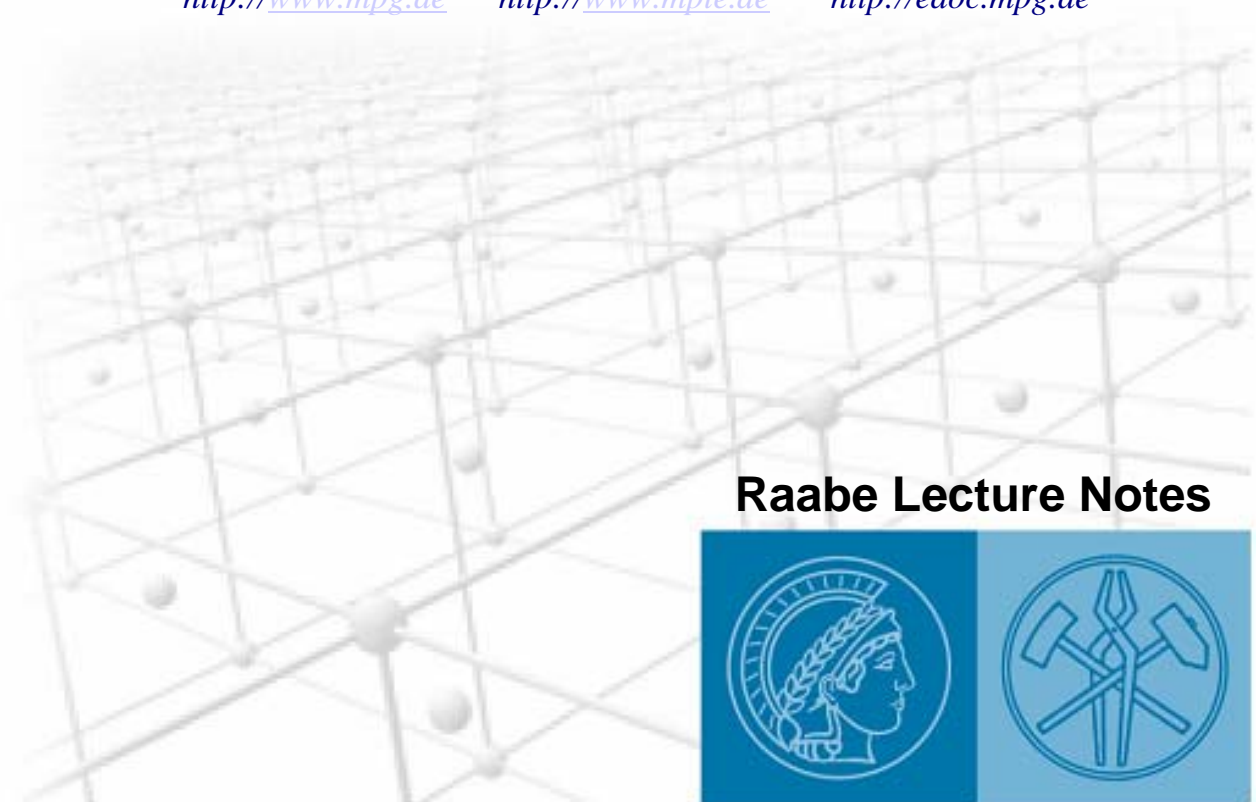


# Polykristallmechanik Grundlagen

## Polycrystal Mechanics Fundamentals

Professor Dr. Dierk Raabe  
Max-Planck-Institut, Max-Planck-Str.1  
40237 Düsseldorf, Germany, raabe@mpie.de

<http://www.mpg.de>   <http://www.mpie.de>   <http://edoc.mpg.de>



**Raabe Lecture Notes**



---

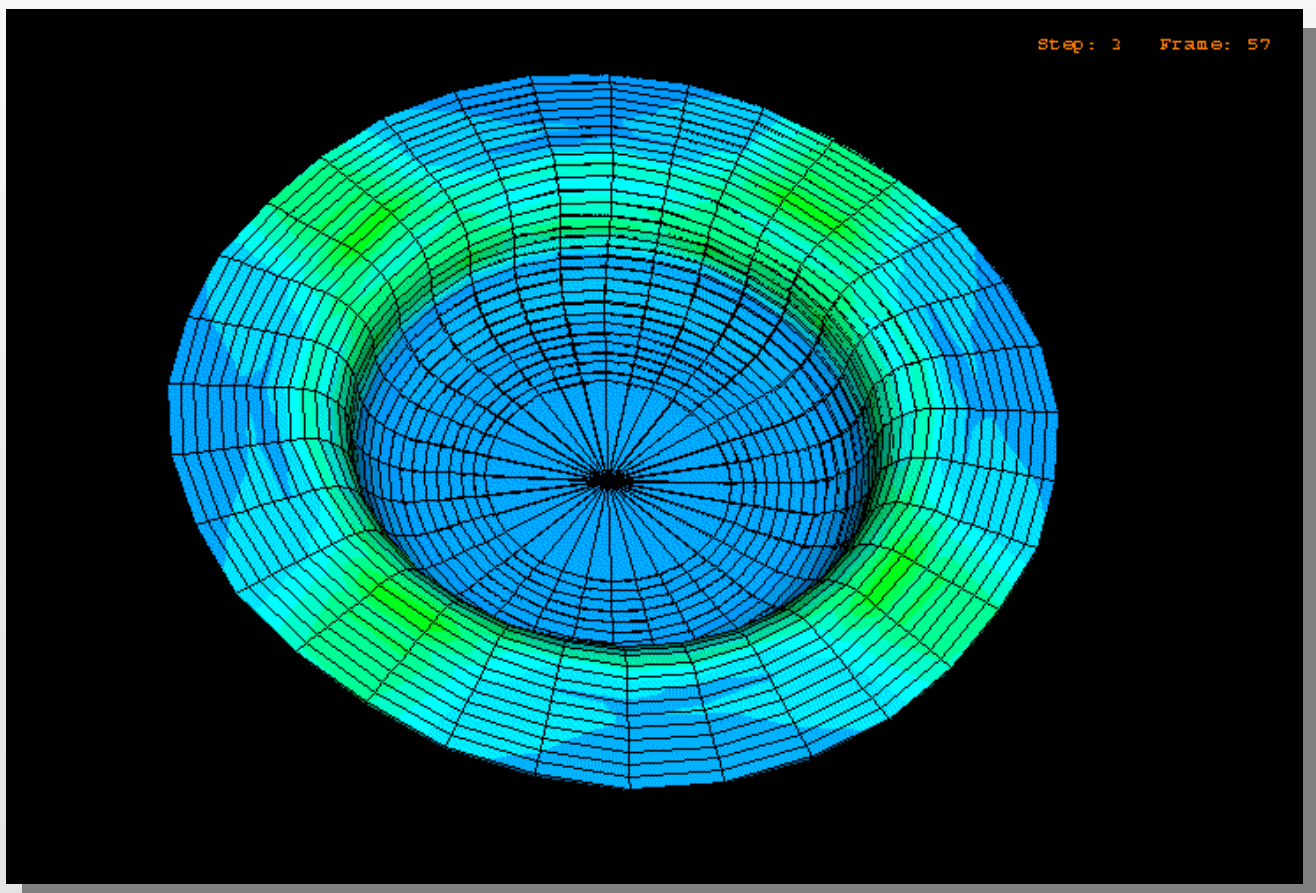
**Vorlesung RWTH Aachen, Dierk Raabe**

*Vorlesung RWTH Aachen, Dierk Raabe*



Open Document

# Raabe Lecture Notes Polycrystal Mechanics



Lecture notes Raabe

<http://www.mpg.de>

<http://www.mpie.de>

<http://edoc.mpg.de>

Vorlesung RWTH Aachen, Dierk Raabe



**Mikrostruktur:** Gesamtheit aller Gitterfehler, die sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht befinden (*Haasen*)

**Pfad:** Prozeßgeschichte; meßbar nicht durch Prozeßparameter, sondern durch mikrostrukturelle Zustandsparameter (i.d.R. keine Analogie zu thermodynamischen Zustandsgrößen, Vorsicht bei Differentiation)

**Textur:** Volumengewichtete Gesamtheit aller Kristallorientierungen in einer Probe

**Materialeigenschaften:** Makroskopische Reaktionen einer Probe auf makroskopische Anregungen

**Konstitutive Gesetze:** Quantitativ gefaßte Relationen zwischen makroskopischen Anregungen und makroskopischen Reaktionen (Feldgrößen, z.B. Hooke, evtl. auf Basis der Mikrostruktur)

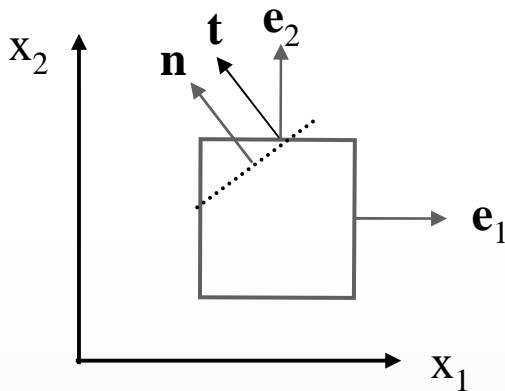
**Konstitution:** Thermodynamik der Phasen

**Isotropie:** Richtungsunabhängigkeit (*Tropos (gr.): Richtung*)

**Anisotropie:** Richtungsabhängigkeit (Morphologie, Topologie, Textur, etc.)

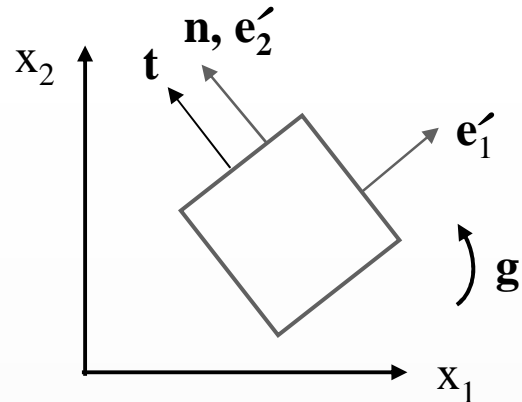
**Fließort:** Gesamtheit aller Spannungszustände, bei denen plastisches (zusätzlich zu elastischem) Fließen auftritt





$$t_i = \sigma_{ij} n_j$$

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$



$$\sigma' = \sigma_{kl} = (\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_i) (\mathbf{e}'_j \mathbf{e}_l) \sigma_{ij} = g_{ki} g_{lj} \sigma_{ij} = g_{ki} \sigma_{ij} g_{jl} = \mathbf{g} \sigma \mathbf{g}^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \rightarrow t_1 = \sigma_I n_1, t_2 = \sigma_{II} n_2, t_3 = \sigma_{III} n_3$$

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{e}'_1 - \\ -\mathbf{e}'_2 - \\ -\mathbf{e}'_3 - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \sigma \mathbf{e}'_1 & \sigma \mathbf{e}'_2 & \sigma \mathbf{e}'_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \sigma \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_1 \sigma \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_1 \sigma \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_2 \sigma \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_2 \sigma \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_2 \sigma \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}'_3 \sigma \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}'_3 \sigma \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}'_3 \sigma \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$|\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma| = \sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ : Eigenwerte

$I_1, I_2, I_3$ : Invarianten

$$I_1 = \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} = 3\sigma^{\text{hyd}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\sigma_{ii} \sigma_{jj} - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{11} \sigma_{33} - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{12}^2$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) = \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2\sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23} - \sigma_{11} \sigma_{23}^2 - \sigma_{22} \sigma_{13}^2 - \sigma_{33} \sigma_{12}^2$$

$$= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_I & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_I & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(I)} \\ r_2^{(I)} \\ r_3^{(I)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{II} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{II} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{II} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(II)} \\ r_2^{(II)} \\ r_3^{(II)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma_{III} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_{III} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_{III} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^{(III)} \\ r_2^{(III)} \\ r_3^{(III)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Eigenwerte, Eigenvektoren



## Unbekannte:

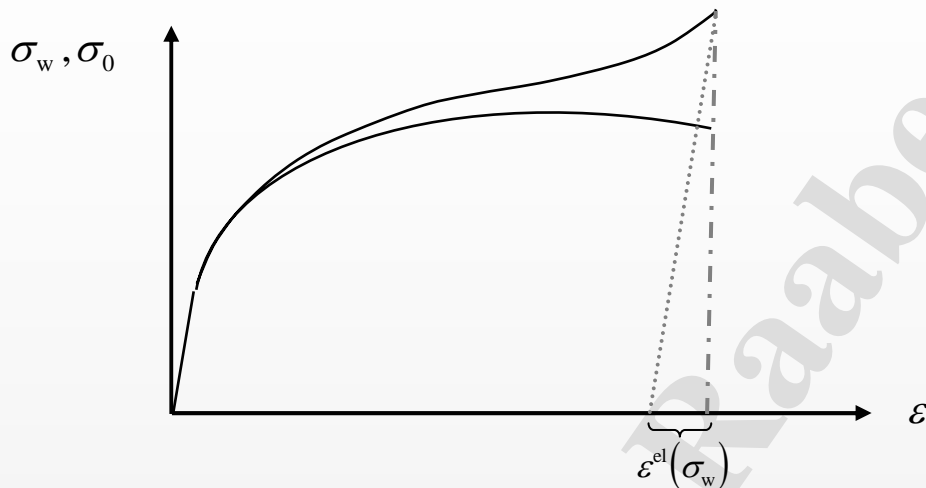
6 Elemente des lokalen Spannungstensors

$$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12}$$

bei Plastizität i.d.R. reduzierbar aufgrund Unabhängigkeit von  $\sigma_{ii}$

$$S_{11}, S_{22}, S_{13}, S_{23}, S_{12}$$

Anmerkung: bei Plastizität auch immer Elastizität (!), Einfluß auf Spin



3 Elemente des lokalen Verzerrungsratenvektors

$$\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3$$

Materialkonstanten im konstitutiven Gesetz (elastisch, plastisch)

$$C_{ijkl}, G, \lambda, \tau$$

Pfadabhängige Evolution der Textur (Kristallkinematik)

$$f(g_{kl}, D_{ij}, D_{ij}^{\text{akku}}, \sigma_{ij})$$

Materialkonstanten im Gesetz für die Evolution der Mikrostruktur

$$H^{\alpha\beta}$$

## Grundgleichungen:

3 Bedingungen für lokales Kräftegleichgewicht

$$\sigma_{ij,i} + p_j = 0$$

Plastizität: Fließbedingung (v. Mises, Hill, Kristallfließort, etc.)

$$f(\sigma_{ij}, \sigma^{\text{Vergleich}}) = 0$$

Konstitutive Gesetze: Relationen zwischen Verzerrung und Spannung  
(Hooke, Fließregel, Fließgesetz)

$$u_{k,l}^{\text{el}} = S_{ijkl} \sigma_{ij} \quad u_{k,l}^{\text{pl}} = f(\sigma_{ij})$$

Polykristallmodell

$$u_{k,l}^{\text{ext}} = \langle u_{k,l}^{\text{pl}} \rangle = u_{k,l}^{\text{K,pl}} \quad \text{in Verbindung mit} \quad \sigma_{ij}^{\text{akt}} u_{i,j}^{\text{pl}} \geq \sigma_{ij}^{\text{and}} u_{i,j}^{\text{pl}} \quad \text{oder} \quad \sum_{s=1}^5 \dot{\gamma}^s = \text{Min!}$$

Pfadabhängige Evolution der Mikrostruktur

$$d\tau^\alpha = f(d\dot{u}_{i,j}^\beta)$$

## Grundgleichungen



$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma^{\text{hyd}} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sigma_{kk}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \sigma^{\text{hyd}} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma^{\text{hyd}} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma^{\text{hyd}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & S_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & -(S_{11} + S_{22}) \end{pmatrix}$$

$$\left| \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \sigma_{kk} - \delta_{ij} \sigma \right| = \left| S_{ij} - \delta_{ij} S \right| = S^3 - J_1 S^2 + J_2 S - J_3 = S^3 + J_2 S - J_3 = 0$$

$S_1, S_2, S_3$ : Eigenwerte

$J_1, J_2, J_3$ : Deviatorinvarianten

$$J_1 = S_{ii} = \sigma_{ii} - 3 \frac{1}{3} \sigma_{kk} = 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} (S_{ij} S_{ij}) = \frac{1}{2} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2$$

$$= \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) = \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{12}^2$$

$$J_3 = \det(S_{ij}) = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} = S_1 S_2 S_3 = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & S_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & -(S_{11} + S_{22}) \end{vmatrix}$$

Isotrope Fließbedingung (von Mises)

$$k_f = f(J_2)$$

$$k_f = \sqrt{3 J_2} = \sqrt{3 S_{ij} S_{ij}}$$

Normierung auf 1-achsigen Zugversuch

Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + p_1 = m \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + p_2 = m \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + p_i = \sigma_{ij,j} + p_i = m \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + p_3 = m \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}$$

## Deviator, Gleichgewicht



# Verzerrungsleistungsdichte

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} &= \sigma_{ij} (D_{ij} + W_{ij}) = \sigma_{ij} D_{ij} + \sigma_{ij} W_{ij} \\
 &= \sigma_{11} D_{11} + \sigma_{12} D_{12} + \sigma_{13} D_{13} \\
 &\quad + \sigma_{21} D_{21} + \sigma_{22} D_{22} + \sigma_{23} D_{23} \\
 &\quad + \sigma_{31} D_{31} + \sigma_{32} D_{32} + \sigma_{33} D_{33} \\
 &\quad + \sigma_{11} W_{11} + \sigma_{12} W_{12} + \sigma_{13} W_{13} \\
 &\quad + \sigma_{21} W_{21} + \sigma_{22} W_{22} + \sigma_{23} W_{23} \\
 &\quad + \sigma_{31} W_{31} + \sigma_{32} W_{32} + \sigma_{33} W_{33} \\
 &= \sigma_{11} D_{11} + \sigma_{12} D_{12} + \sigma_{13} D_{13} \\
 &\quad + \sigma_{12} D_{12} + \sigma_{22} D_{22} + \sigma_{23} D_{23} \\
 &\quad + \sigma_{13} D_{13} + \sigma_{23} D_{23} + \sigma_{33} D_{33} \\
 &\quad + \quad 0 \quad + \sigma_{12} W_{12} \quad + \sigma_{13} W_{13} \\
 &\quad + \sigma_{12} (-W_{12}) + \quad 0 \quad + \sigma_{23} W_{23} \\
 &\quad + \sigma_{33} (-W_{13}) + \sigma_{23} (-W_{23}) + \quad 0 \\
 \\
 &= \sigma_{ij} D_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sum_{s=1}^N (n_i^s b_j^s + n_j^s b_i^s) \dot{\gamma}^s = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sum_{s=1}^N (m_{ij}^{\text{sym},s}) \dot{\gamma}^s
 \end{aligned}$$

für Einkristall:

$$= \sigma_{ij} m_{ij}^{\text{sym},s} \dot{\gamma}^s$$

Fließortfunktion als kinematischer Anteil der Verzerrungsleistungsdichte.

Desweiteren erhält man die aufgelöste Spannung als Projektion des Spannungstensors in die Richtung des Dehnratentensors:

$$= \sigma_{ij} m_{ij}^{\text{sym},s} \dot{\gamma}^s = \sigma^s \dot{\gamma}^s$$



Verschiebungsvektor (Inkrement):  $du_i$

Geschwindigkeitsvektor:  $v_i = \dot{u}_i$

Verschiebungsgradiententensor (Inkrement):  $du_{i,j} = \frac{\partial du_i}{\partial x_j}$

Geschwindigkeitsgradiententensor:  $v_{i,j} = \dot{u}_{i,j} = L_{ij}$

(Geschwindigkeitsgradienten-, Verschiebungsratengradienten-, oder Verzerrungsraten - tensor)

Geschwindigkeitsgradiententensor (Kristallkoordinaten):  $v_{i,j}^K$

für ein Gleitsystem  $s$ :  $v_{i,j}^K = n_i b_j \dot{\gamma} = m_{ij} \dot{\gamma}$

Verschiebungsgradiententensor (Inkrement) (Kristallkoordinaten):  $du_{i,j}^K$

für ein Gleitsystem  $s$ :  $du_{i,j}^K = n_i b_j d\gamma = m_{ij} d\gamma$

Einfache Abscherung durch ein Gleitsystem:  $d\gamma = |\mathbf{b}| dA/V$

Dehnratentensor im Kristall

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^K = D_{ij}^K = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^K + \dot{u}_{j,i}^K) = \sum_{s=1}^N m_{ij}^{\text{sym},s} \dot{\gamma}^s \quad \text{mit} \quad m_{ij}^{\text{sym}} = m_{ji}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (n_i b_j + n_j b_i)$$

Rotationsratentensor (Kristallanteil an der Starrkörperrotation, plastischer Spin)

$$\dot{\omega}_{ij}^K = W_{ij}^K = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^K - \dot{u}_{j,i}^K) = \sum_{s=1}^N m_{ij}^{\text{asym},s} \dot{\gamma}^s \quad \text{mit} \quad m_{ij}^{\text{asym}} = -m_{ji}^{\text{asym}} = \frac{1}{2} (n_i b_j - n_j b_i)$$

Beispiel

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{W} = \frac{\dot{\gamma}}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$





Mittelwertbildung:  $\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV$   $\langle D_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V D_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV$

### Typische und dominierende Randbedingungen

$D_{ij}^{\text{ext}} = \langle D_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV$ , Problem:  $D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})$

$D_{ij}^{\text{ext}} = \frac{1}{V} \int_V D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV \approx \sum_{\text{Komp}} D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{g}) \frac{V^{\text{Komp}}}{V} \approx D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{g})$

ortsunabhängig  
(d.h. im Korn  
konstant)

volumen-  
unabhängig



### Ungewöhnliche und weniger dominierende Randbedingungen

$\sigma_{ij}^{\text{ext}} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV$ , Problem:  $\sigma_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})$

### Gitterrotationsrate

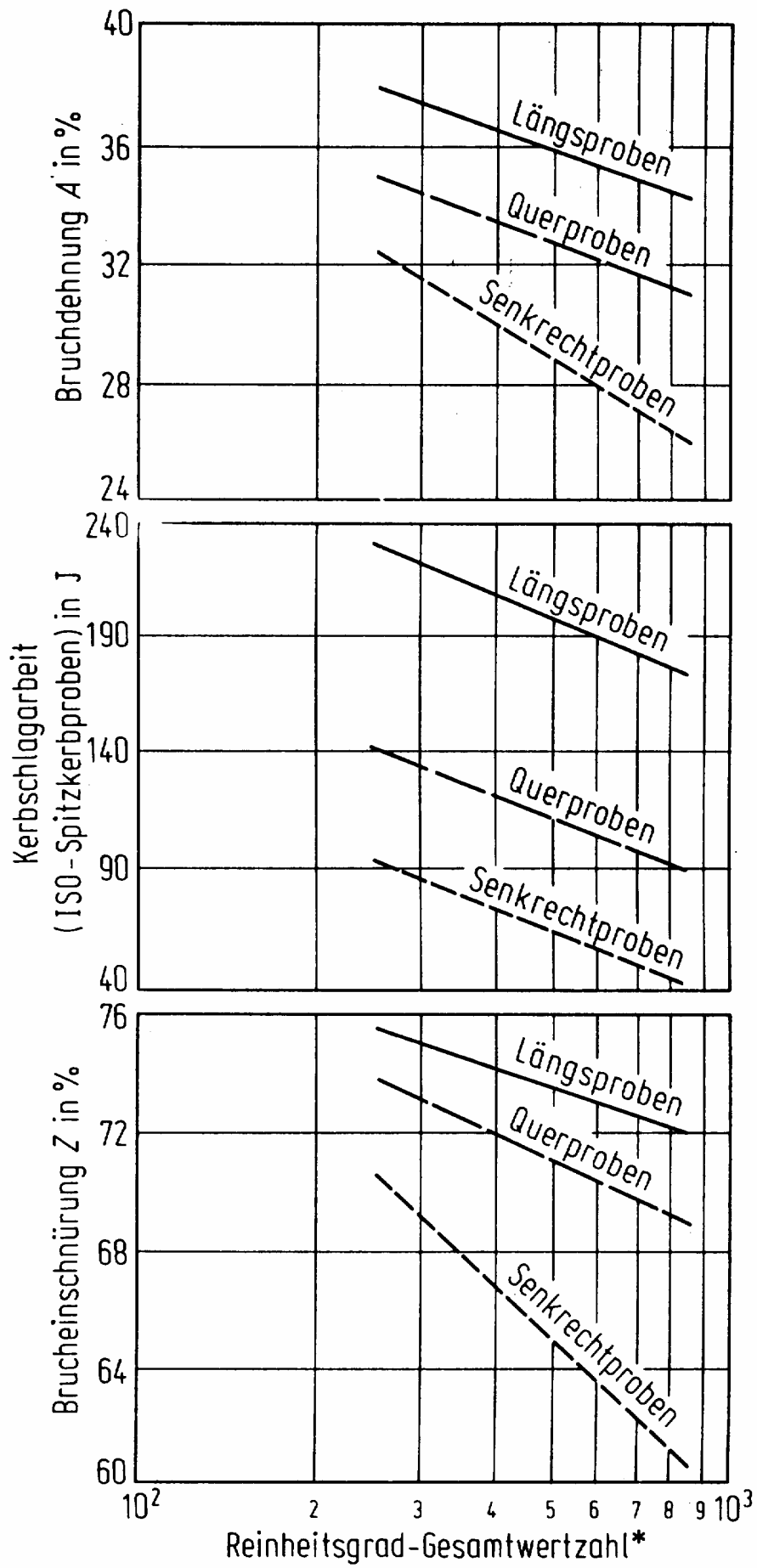
$$D_{ij}^{\text{ext}} = D_{ij}^{\text{K}} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (n_i^s b_j^s + n_j^s b_i^s) \dot{\gamma}^s$$

$$W_{ij}^{\text{ext}} = W_{ij}^{\text{K}} + W_{ij}^{\text{Gitter}} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^N (n_i^s b_j^s - n_j^s b_i^s) \dot{\gamma}^s + W_{ij}^{\text{Gitter}}$$

### Typische Zielgrößen:

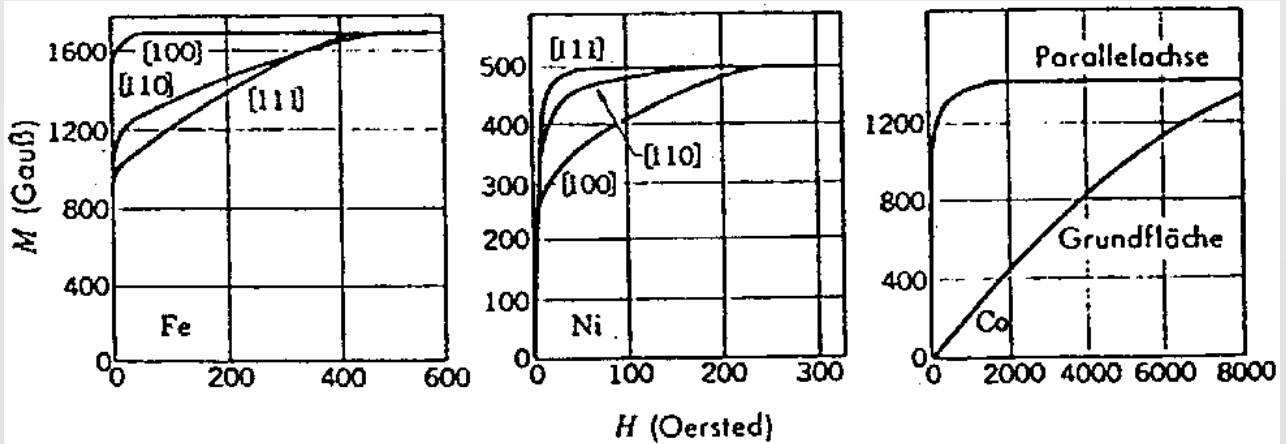
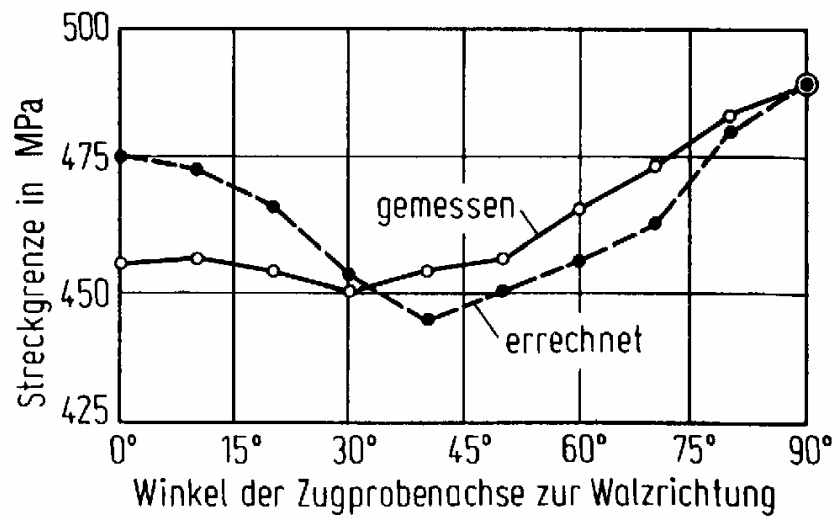
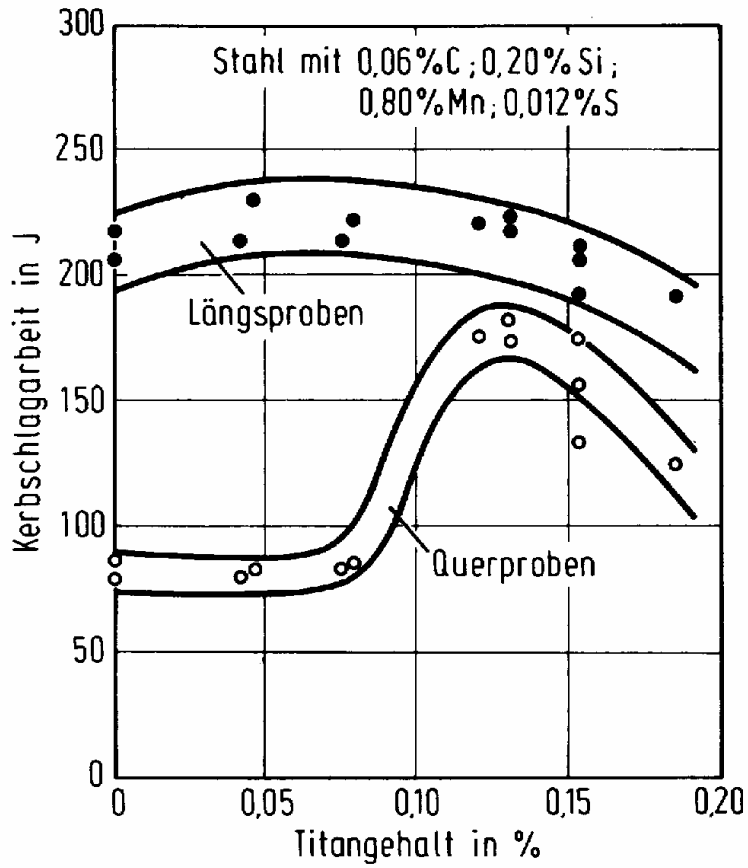
Zu  $D_{ij}^{\text{ext}}$  finde  $\sigma_{ij}^{\text{ext}}$  und  $D_{ij}^{\text{K}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})$





# Beispiele, Anisotropie





## Beispiele, Anisotropie



# Tensorschreibweise

Gleitsystem  $s$ :  $n_i^s, b_j^s$

Orientierungsfaktor für  $s$  (Gleitsystem  $\rightarrow$  Kristall):  $m_{ij}^s = n_i^s b_j^s$

symmetrischer Anteil:  $m_{ij}^{\text{sym},s} = \frac{1}{2} (n_i^s b_j^s + n_j^s b_i^s)$

Orientierungsfaktor für  $s$  (Kristall  $\rightarrow$  Probe):  $m_{kl}^s = a_{ki}^c n_i^s a_{lj}^c b_j^s$

symmetrischer Anteil:  $m_{kl}^{\text{sym},s} = \frac{1}{2} (a_{ki}^c n_i^s a_{lj}^c b_j^s + a_{lj}^c n_j^s a_{ki}^c b_i^s)$

Fließort der aktiven Systeme:  $m_{kl}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{kl} = \sigma_{\text{aufg}}^s = \tau_{\text{krit},(+)}^{s=\text{aktiv}}$

$$m_{kl}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{kl} = \sigma_{\text{aufg}}^s = \tau_{\text{krit},(-)}^{s=\text{aktiv}}$$

Nicht - aktive Systeme:  $m_{kl}^{\text{sym},s=\text{inaktiv}} \sigma_{kl} = \sigma_{\text{aufg}}^s < \tau_{\text{krit},(\pm)}^{s=\text{inaktiv}}$

## Matrix ("Vektor") - schreibweise

Fließort der aktiven Systeme:

$$m_{kl}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{kl} = m_{\lambda}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{\lambda} = \sigma_{\text{aufg}}^s = \tau_{\text{krit},(+)}^{s=\text{aktiv}}$$

$$m_{kl}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{kl} = m_{\lambda}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} \sigma_{\lambda} = \sigma_{\text{aufg}}^s = \tau_{\text{krit},(-)}^{s=\text{aktiv}}$$

Nicht - aktive Systeme:

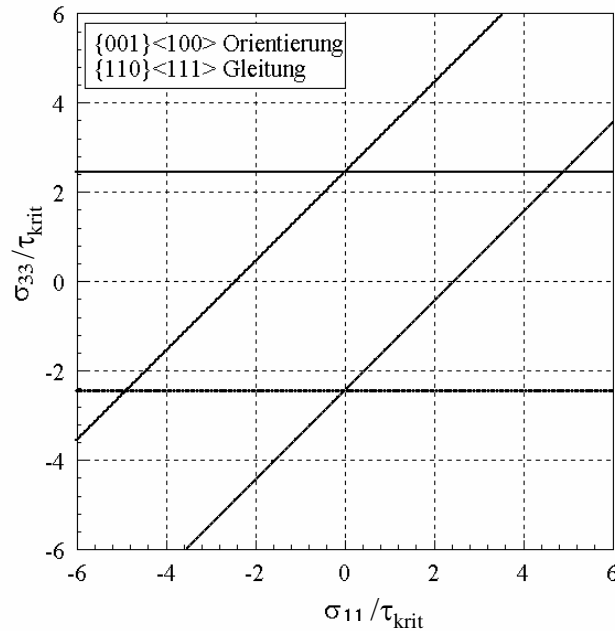
$$m_{kl}^{\text{sym},s=\text{inaktiv}} \sigma_{kl} = m_{\lambda}^{\text{sym},s=\text{inaktiv}} \sigma_{\lambda} = \sigma_{\text{aufg}}^s < \tau_{\text{krit},(\pm)}^{s=\text{inaktiv}}$$

Konus - (Eck-, Vertex-) Vektoren (aktive Systeme):

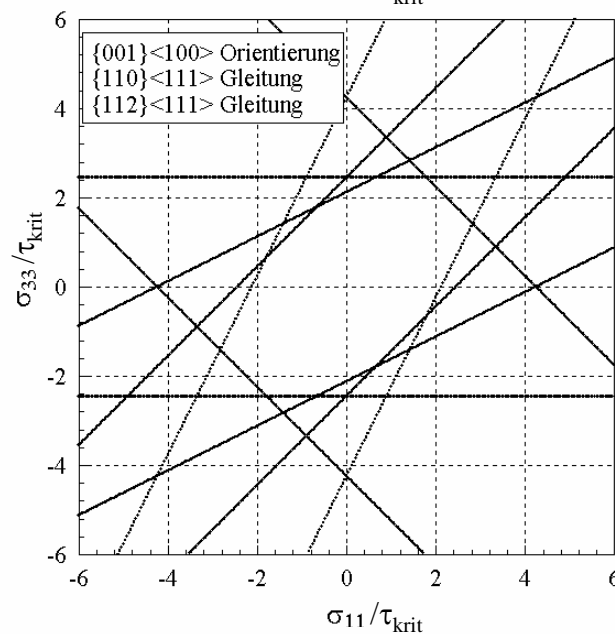
$$\sigma_{kl}^{\text{Kon}} = M_{kl}^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\lambda}^{\text{Kon}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}}$$

$$m_{kl}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} M_{kl}^{0,\text{Kon}} = \frac{\tau_{\text{krit},(\pm)}^{s=\text{aktiv}}}{\tau^{\text{skal}}} \quad \text{bzw.} \quad m_{\lambda}^{\text{sym},s=\text{aktiv}} M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} = \frac{\tau_{\text{krit},(\pm)}^{s=\text{aktiv}}}{\tau^{\text{skal}}}$$

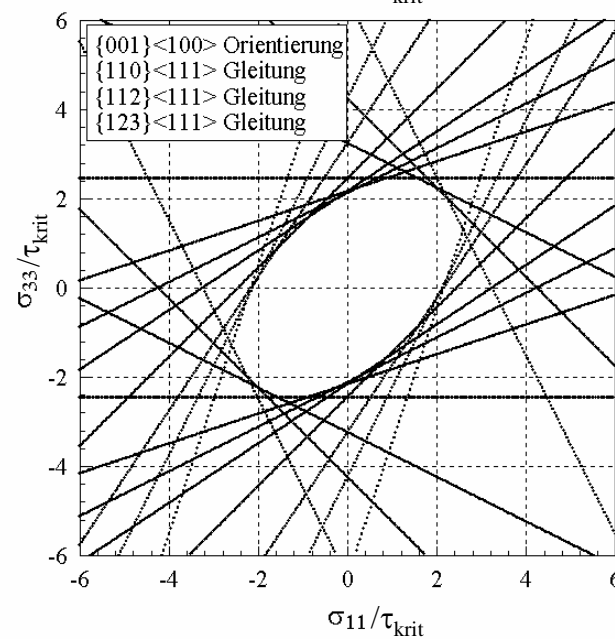




krz, kfz,  
Schnitt



krz, 24 Systeme,  
Schnitt



krz, 48 Systeme,  
Schnitt

# Einkristall-Fließort, krz, (001)[100]



# Anmerkungen zum Einkristallfließort

- plastische Spannungen existieren nur auf der Oberfläche des Fließortes
- Der Fließort repräsentiert alle möglichen plastischen Spannungszustände
- diskrete Formulierung, keine geschlossene analytische Form (Näherung?)
- Satz von Hyperebenen-Gleichungen (Matrixnotation)
- konvex (Bishop-Hill)
- 5-D oder 6-D (D=„Dimension“=Anzahl unabhängiger Komponenten)
- von Mises Kriterium (Freiheitsgrade)
- unterscheide Projektion von Schnitt
- Fließort geschlossen? Bruchspannung, physikalische Asymmetrie
- Kristallgitterfehlerkinematik ( $a_{ij}$ ), Gitterfehlerkinetik ( $\tau_{\text{krit}}$ )
- Form und Größe
- plastisch Anisotrop (Abweichung zu von Mises Fließort)
- Reduzierung der Anisotropie durch höhere Anzahl von Gleitsystemgruppen
- Symmetrie des Fließortes evtl. geringer als die des Kristalls ( $\tau_{\text{krit} \pm}$ , Vers.kern)
- Existenz von Hyperebenen-Konusbereichen
- Fester Satz von Konuskonfigurationen (Bishop-Hill)
- Innere Einhüllende ( $D^{\text{ext}}$  kann zufällig senkrecht zu einer Hyperebenen sein)
- Taylor-Bishop-Hill:  $D^{\text{ext}}$  häufig in Konus,  $D^{\text{ext}}$  selten senkrecht auf Facette
- Sachs:  $\sigma^{\text{ext}}$  endet häufig auf Facettenebene,  $\sigma^{\text{ext}}$  zeigt selten in Konus
- Wie findet man die richtige Zusammensetzung von  $D^{\text{int}}=f(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \gamma)$  im Konus?
- Evolution von Form und Größe des Fließortes anisotrop



$$\sigma_{ij} = \sum_{\lambda=1}^6 \sigma_{\lambda} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$\sigma_{\lambda} = \sigma_{ij} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$D_{ij} = \sum_{\lambda=1}^6 D_{\lambda} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$D_{\lambda} = D_{ij} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$\sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_{\lambda} D_{\lambda}$$

$$m_{ij}^{\text{sym},s} = \sum_{\lambda=1}^6 m_{\lambda}^s p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$m_{\lambda}^{\text{sym},s} = m_{ij}^s p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$p_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(l)} = \delta_{kl}$$

$$M_{ij}^{\text{Kon}} = \sum_{\lambda=1}^6 M_{\lambda}^{\text{Kon}} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$M_{\lambda}^{\text{Kon}} = M_{ij}^{\text{Kon}} p_{ij}^{(\lambda)}$$

$$p_{ij}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{ij}^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij}^D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^D = D_{ij}^D = \begin{pmatrix} D_{11} - \frac{1}{3} D_{ii} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} - \frac{1}{3} D_{ii} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} - \frac{1}{3} D_{ii} \end{pmatrix}$$

$$S_{\lambda}^T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}), \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_{22} - \sigma_{11}), \sqrt{2}\sigma_{23}, \sqrt{2}\sigma_{13}, \sqrt{2}\sigma_{12}, 0 \right\}$$

$$D_{\lambda}^T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} (2D_{33} - D_{11} - D_{22}), \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{22} - D_{11}), \sqrt{2}D_{23}, \sqrt{2}D_{13}, \sqrt{2}D_{12}, 0 \right\}$$

## Matrixnotation





# Anmerkungen zur „Vektor“- bzw. Matrixnotation

- $\sigma$ ,  $D$  und  $\varepsilon$  sind symmetrische Tensoren zweiter Ordnung
- 6 unabhängige Komponenten
- Einführung orthogonaler normierter Basistensoren  $\mathbf{p}$
- Basistensoren nicht grundsätzlich Eigentensoren von Tensoren vierter Ordnung
- umschreiben als 1x6 Matrix (Pseudo-Vektor, kein Tensor erster Ordnung)
- Voigt, Westergaard, Tresca, Mises, Canova; Kocks
- elastische Konstanten sind dann 6x6 Matrizen
- für Plastizität reduzierbar auf 5 unabhängige Deviatorikkomponenten
- Transformationsregeln gelten für Tensoren, nicht für Pseudo-Vektor
- Winkelbestimmung
- Spannung und Dehnrate in Matrixform sind konjugiert (Leistungsdichte)



Vorgabe eines äußeren Dehnratentensors  $D_\lambda^{\text{Kon}}$  (Annahme: Mehrfachgleitung)

$$\dot{a} = \sigma_\lambda^{\text{Kon}} D_\lambda^{\text{Kon}} = \sigma_\lambda^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} D^{\text{Ver}} = M_\lambda^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} D^{\text{Ver}} = M^{\text{Kon}}(D_\lambda^{0,\text{Kon}}) \tau_{\text{krit}} D^{\text{Ver}}$$

$$\dot{a} = \sigma_{ij}^{\text{Kon}} D_{ij}^{\text{Kon}} = \sigma_{ij}^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} D_{ij}^{0,\text{Kon}} D^{\text{Ver}} = M_{ij}^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}} D_{ij}^{0,\text{Kon}} D^{\text{Ver}} = M^{\text{Kon}}(D_{ij}^{0,\text{Kon}}) \tau_{\text{krit}} D^{\text{Ver}}$$

Über alle Kristalle  $f(g)$  für einen vorgeschriebenen  $D_\lambda^{\text{Kon}}$  mitteln

$$\sigma_\lambda^{\text{Kon}} D_\lambda^{\text{Kon}} = \overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_\lambda^{0,\text{Kon}}) \tau_{\text{krit}} D^{\text{Ver}}$$

$$\sigma_\lambda^{\text{Kon}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} = \overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_\lambda^{0,\text{Kon}}) \tau_{\text{krit}} \quad \text{mit} \quad D_\lambda^{\text{Kon}} = D_\lambda^{0,\text{Kon}} D^{\text{Ver}}$$

$$\sigma_\lambda^{0,\text{Kon}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} = \overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_\lambda^{0,\text{Kon}}) \quad \text{mit} \quad \sigma_\lambda^{0,\text{Kon}} = M_\lambda^{0,\text{Kon}}$$

$$\sigma_{ij}^{0,\text{Kon}} D_{ij}^{0,\text{Kon}} = \overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_{ij}^{0,\text{Kon}})$$

Mittelwertbildung für den Taylorfaktor bei vorgeschriebenem  $D_\lambda^{\text{Kon}}$

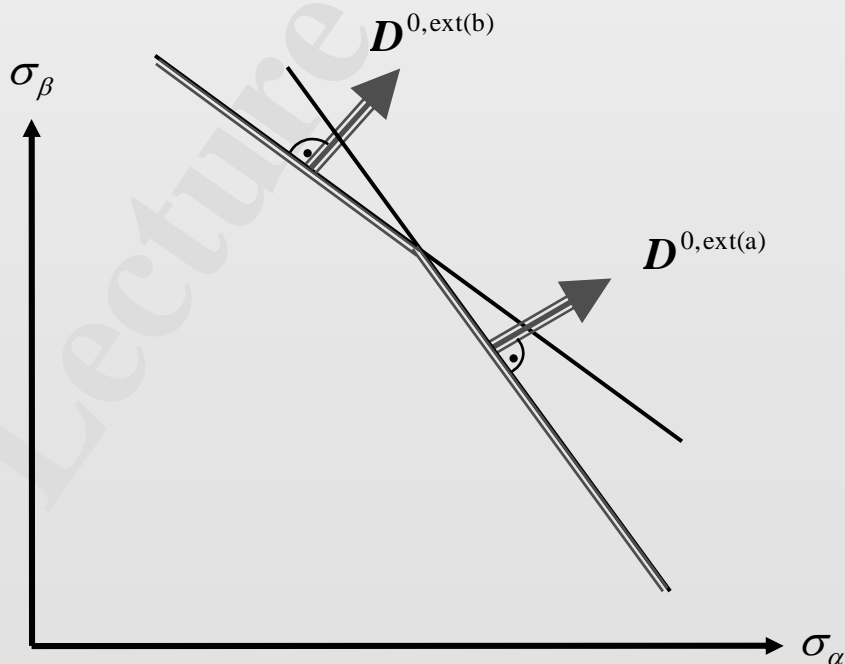
$$\overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_{ij}^{0,\text{Kon}}) = \sum_{n=1}^N M^{n,\text{Kon}}(g, D_{ij}^{0,\text{Kon}}) w^n$$

oder

$$\overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_{ij}^{0,\text{Kon}}) = \int M^{\text{Kon}}(g, D_{ij}^{0,\text{Kon}}) f(g) dg$$

$$M^{\text{Kon}}(g, D_{ij}^{0,\text{Kon}}) \approx \sum_l^L \sum_\mu^{N(l)} \sum_\nu^{M(l)} m_l^{\mu\nu} T_l^{\mu\nu}(g)$$

$$\overline{M}^{\text{Kon}}(f(g), D_{ij}^{0,\text{Kon}}) \approx \sum_l^L \sum_\mu^{N(l)} \sum_\nu^{M(l)} \frac{m_l^{\mu\nu} C_l^{\mu\nu}}{2l+1}$$



## Taylor Theorie von der minimalen inneren Arbeit

$$D_{ij}^{\text{ext}} = \langle D_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V D_{ij}^K(\mathbf{x}, \mathbf{g}) dV \approx \sum_{\text{Komp}} D_{ij}^K(\mathbf{g}) \frac{V^{\text{Komp}}}{V} \approx D_{ij}^K(\mathbf{g})$$

$$D_{ij}^K = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^K + \dot{u}_{j,i}^K) = \sum_{s=1}^N m_{ij}^{\text{sym},s} \dot{\gamma}^s, \quad m_{ij}^{\text{sym}} = m_{ji}^{\text{sym}} = \frac{1}{2} (n_i b_j + n_j b_i)$$

(von Mises Bedingung: 5 unabhängige Verformungsmoden)

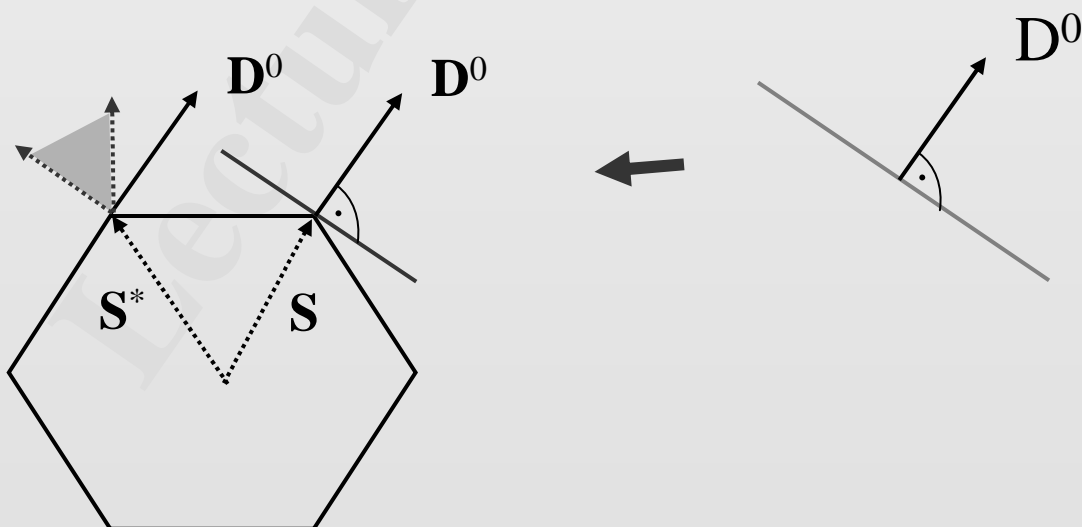
$$\text{Bedingung: } \dot{\Gamma} = \sum_{s=1}^N \dot{\gamma}^s \Rightarrow \text{Min.}! \quad \mathbf{M} = \frac{\dot{\Gamma}}{D}$$

(Lösung meist nicht eindeutig, mehrere von Mises - Kombinationen)

$$W_{ij}^K = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^K - \dot{u}_{j,i}^K) = \sum_{s=1}^N m_{ij}^{\text{asym},s} \dot{\gamma}^s, \quad m_{ij}^{\text{asym}} = -m_{ji}^{\text{asym}} = \frac{1}{2} (n_i b_j - n_j b_i)$$

## Bishop - Hill Theorie von der maximalen äußeren Arbeit

$S_\lambda D_\lambda^0 \geq S_\lambda^* D_\lambda^0$  (probiere alle Konusspannungen (Fließvektoren) aus Tabelle durch, ergibt die Spannung und die aktiven Systeme, nicht jedoch deren Scherbeitrag)



Dehnrates: Trennung von Betrag  $D$  und Richtung  $D_\lambda^0$

$$D_\lambda = D_\lambda^0 D = D_\lambda^0 D^{\text{Ver}}$$

Normierung der Dehnratesrichtung  $D_\lambda^0$  auf 1-achsigen Zugversuch

$$N^{\text{Zu}} = \frac{1}{\sqrt{D_\lambda^{0,\text{Zu}} D_\lambda^{0,\text{Zu}}}} \quad D_{ij}^{0,\text{Zu}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

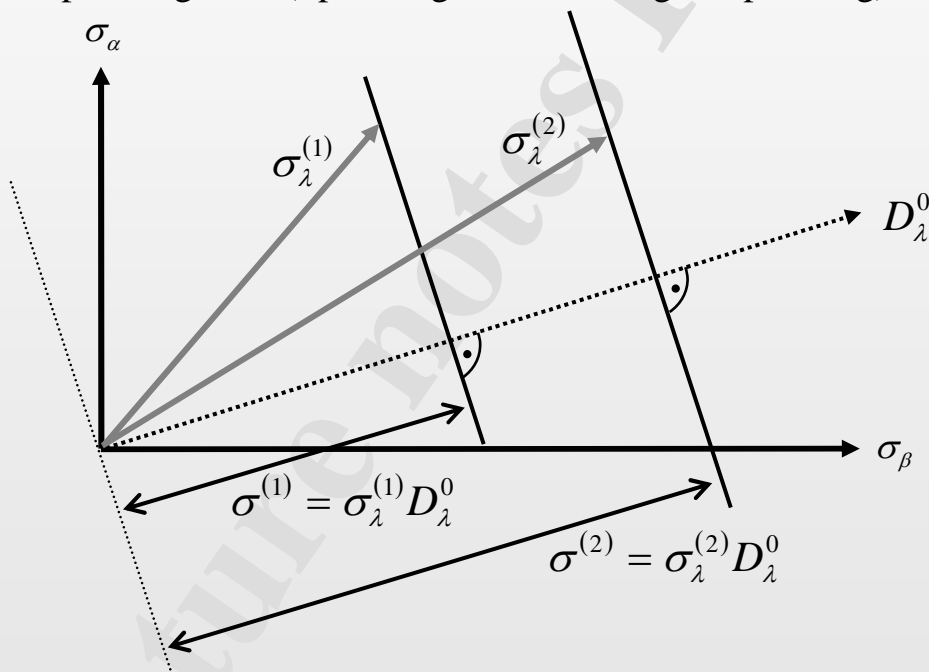
$$D_\lambda^{\text{T}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}(2D_{33} - D_{11} - D_{22}), \frac{1}{\sqrt{2}}(D_{22} - D_{11}), \sqrt{2}D_{23}, \sqrt{2}D_{13}, \sqrt{2}D_{12} \right\}$$

$$D_\lambda^{\text{T},0,\text{Zu}} = \frac{3}{2} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0 \right\} \quad D_\lambda^{0,\text{Zu}} D_\lambda^{0,\text{Zu}} = \frac{3}{2} \quad N^{\text{Zu}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Leistungsdichte (plastische Verzerrung)  $\dot{a}$  (Maß für Konjugiertheit)

$$\dot{a} = \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} = \sigma_{ij} (D_{ij} + W_{ij}) = \sigma_{ij} D_{ij} = \sigma_\lambda D_\lambda = \sigma_\lambda D_\lambda^0 D = \sigma D$$

Skalares Spannungsmaß (Spannungsabstand, aufgel. Spannung)  $\sigma = \sigma_\lambda D_\lambda^0$



Spannung: Trennung von Betrag  $\sigma$  und Richtung  $\sigma_\lambda^0$ :  $\sigma_\lambda = \sigma_\lambda^0 \sigma$

$\sigma_\lambda^0$  nicht auf Länge, sondern auf Projektion in  $D_\lambda^0$  normiert

Spannung: Trennung von Betrag  $\tau_{\text{krit}}$  ( $\tau^{\text{skal}}$ ) und Richtung im Konus  $M_\lambda^{0,\text{Kon}}$ :

$$\sigma_\lambda^{\text{Kon}} = M_\lambda^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}}$$

Mehrfachgleitung, Konus - (Eck-, Vertex-) Fall

$$\sigma^{\text{Kon}} = \sigma_\lambda^{\text{Kon}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} = M_\lambda^{0,\text{Kon}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} = M_\lambda^{0,\text{Kon}} D_\lambda^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}} = M^{\text{Kon}} \tau_{\text{krit}}$$

## Schmid - Gesetz

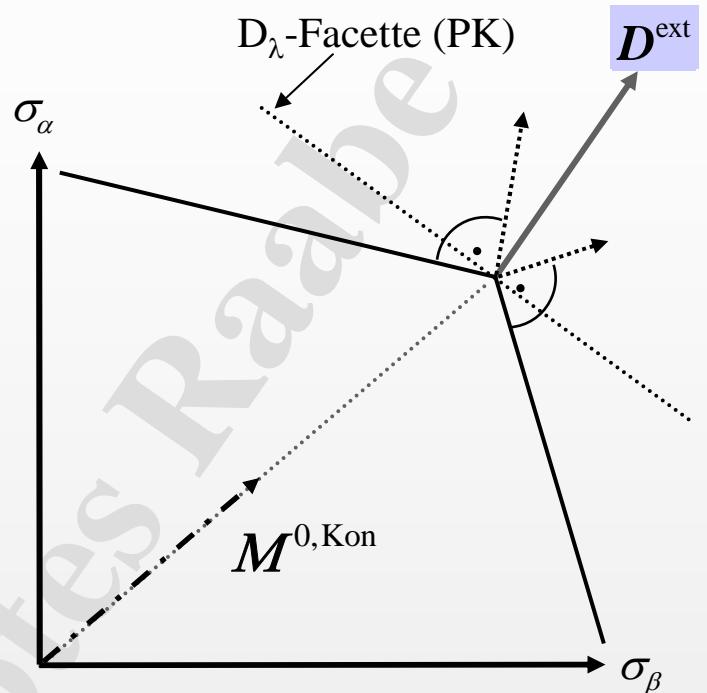
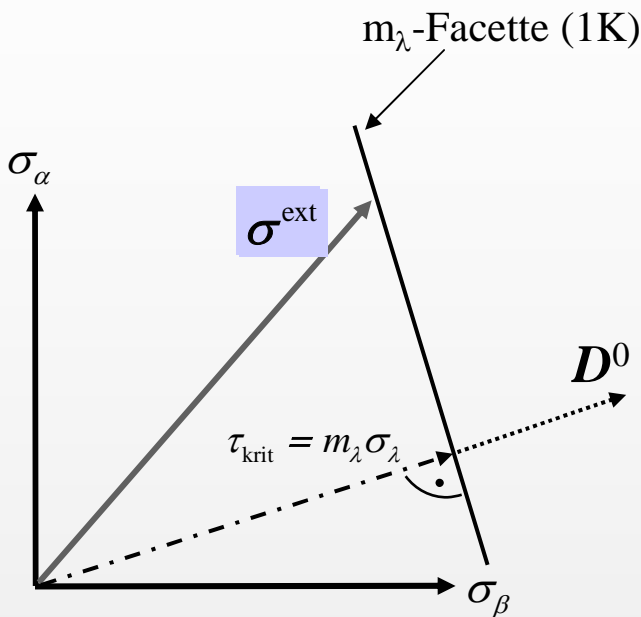
$$m_\lambda \sigma_\lambda = \tau_{\text{krit}}$$

↑  
vorgegeben

## Bishop - Hill - Gesetz

$$S_\lambda = M_\lambda^{0, \text{Kon}} (D_\lambda^0) \tau_{\text{krit}}$$

↑  
vorgegeben



unendlich viele Test - Spannungszustände  
diskreter Satz möglicher Facetten (Dehnraten)  
nur selten liegt eine Testspannung genau im Konus

unendlich viele Test - Dehnraten  
diskreter Satz möglicher Konusspannungen  
nur selten liegt eine Test - Dehnrate auf einer Facette

$$S_\lambda D_\lambda^0 = M_\lambda^0 \tau_{\text{krit}} D_\lambda^0 = M \tau_{\text{krit}}$$

$$M_\lambda^0 D_\lambda^0 = M \quad (X^0: \text{ nur Richtung})$$

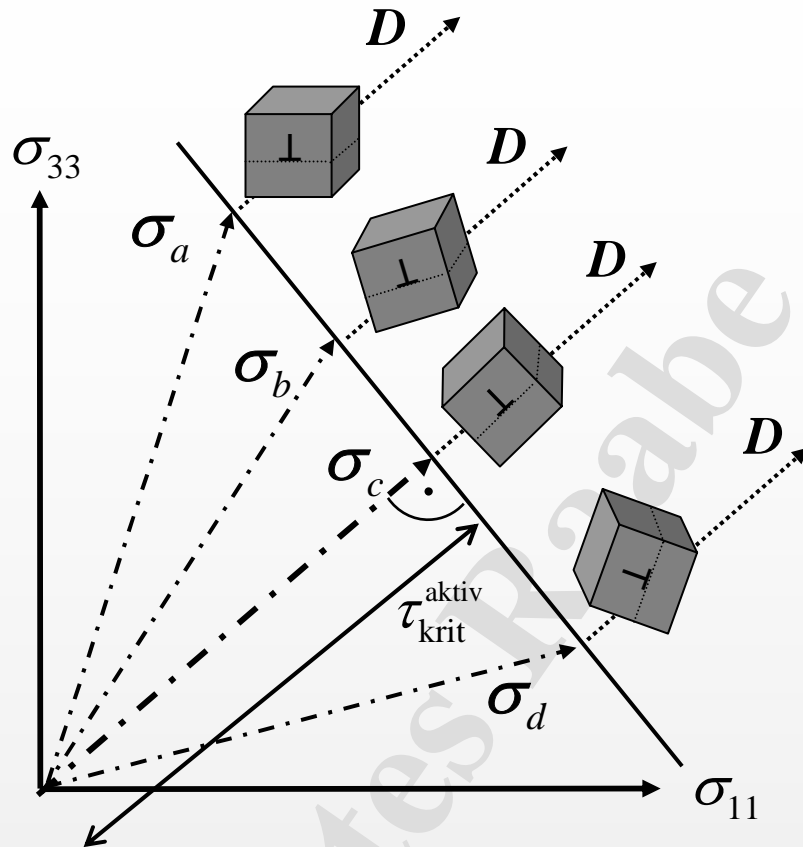
**Einkristallfließort:**  
innere Einhüllende aller Facetten, die durch einen bestimmten  $m_\lambda$  charakterisiert sind.

**Polykristallfließort:**  
innere Einhüllende aller Facetten, die durch einen bestimmten  $D_\lambda$  charakterisiert sind.



$$\frac{\sigma_a m_a^{\text{sym}}}{\tau_{\text{krit}}} = \frac{\sigma_b m_b^{\text{sym}}}{\tau_{\text{krit}}} = \frac{\sigma_d m_d^{\text{sym}}}{\tau_{\text{krit}}} = \frac{\sigma_c m_c^{\text{sym}}}{\tau_{\text{krit}}} = 1$$

$$|\sigma_c| < |\sigma_b| < |\sigma_d| < |\sigma_a|$$

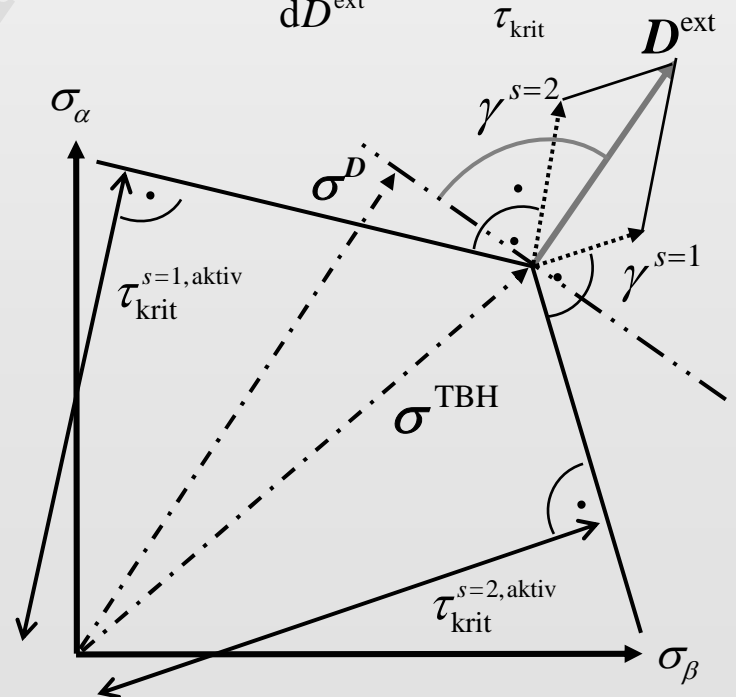
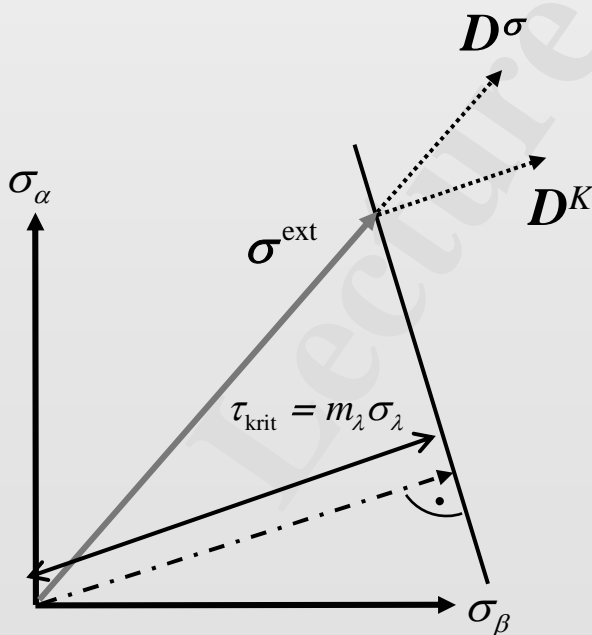


1-achsig, Spannungsvorgabe:

$$m = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{D^\sigma}{D^K}$$

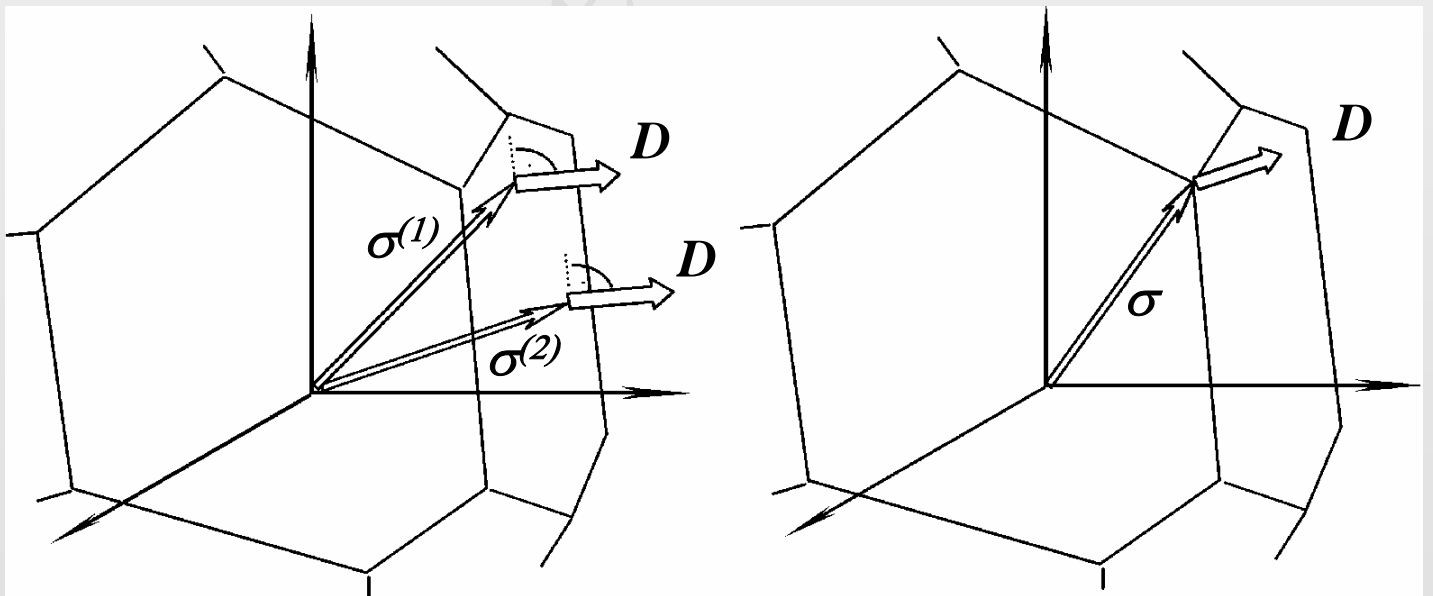
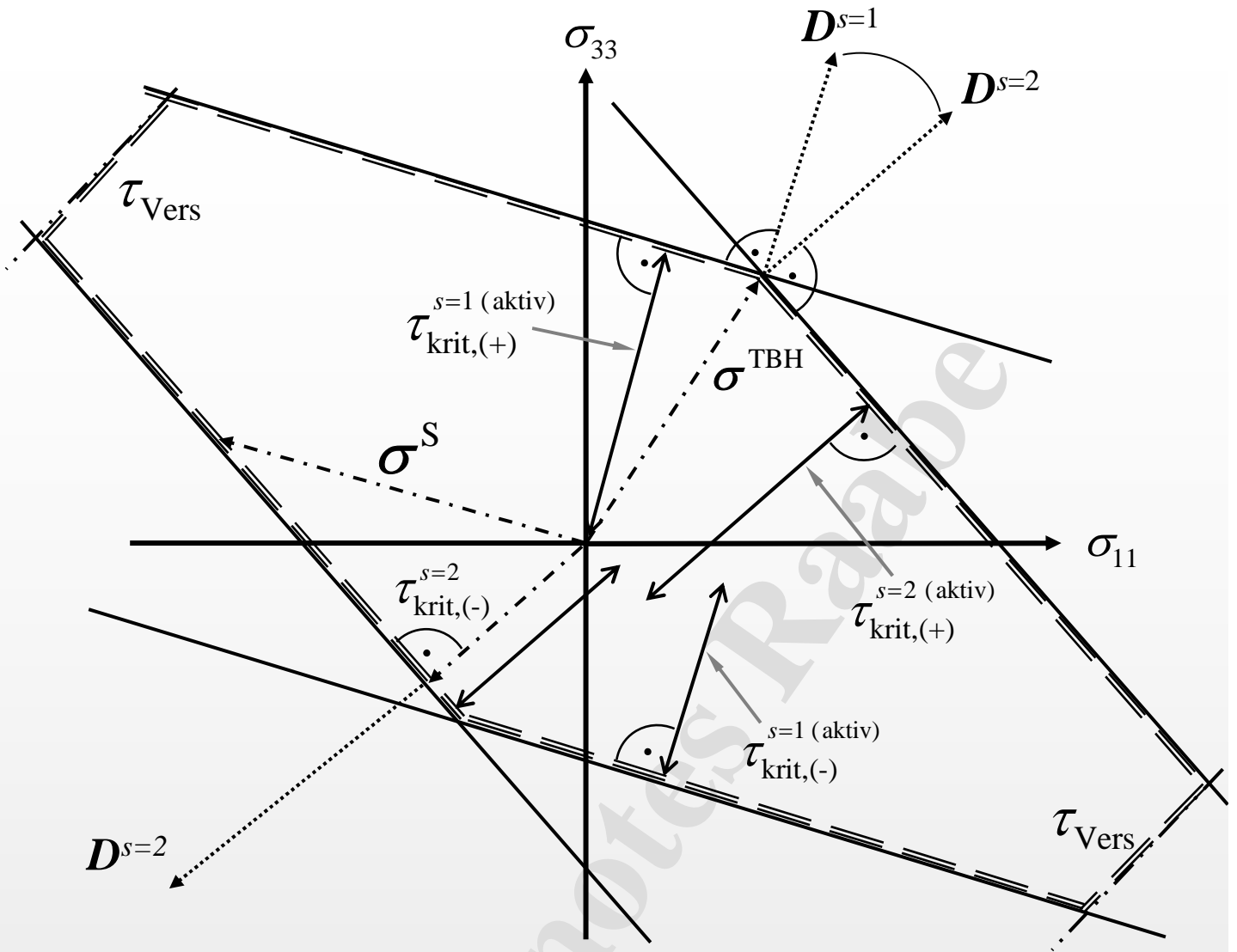
1-achsig, Dehnratenvorgabe:

$$M = \frac{d\gamma^{s=1} + d\gamma^{s=2}}{dD^{\text{ext}}} = \frac{\sigma^D}{\tau_{\text{krit}}}$$



# Einkristallfließort





# Einkristallfließort

Vorlesung RWTH Aachen, Dierk Raabe





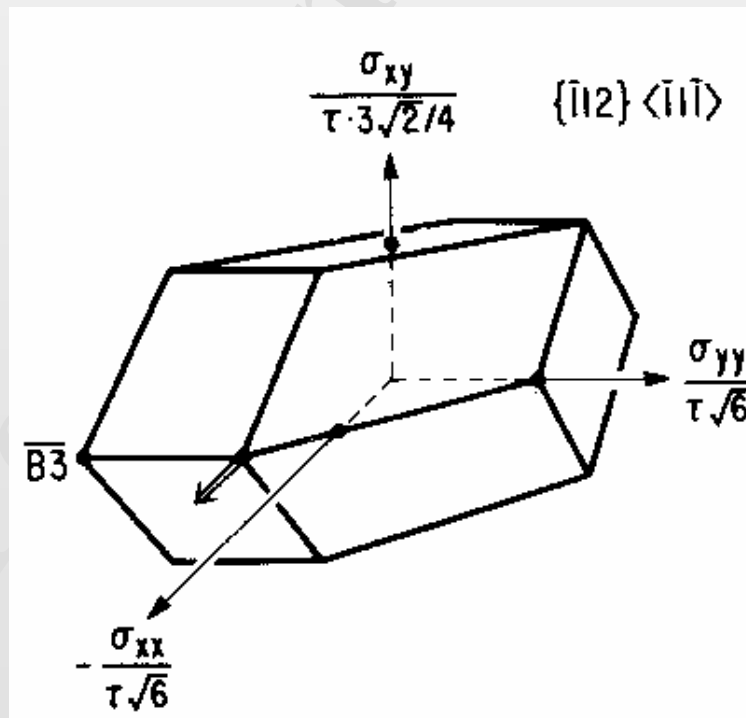
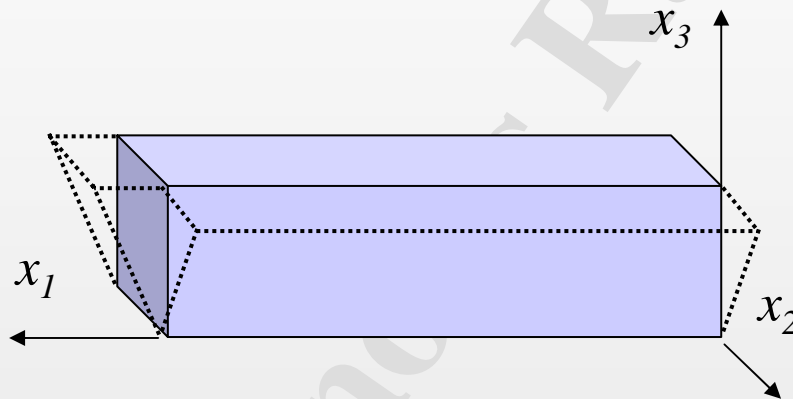
Schnitt durch einen krz / kfz Fließort

( $\{110\} \langle 111 \rangle$  (krz) bzw.  $\{111\} \langle 110 \rangle$  (kfz) Gleitung)

für einen Spannungstensor der Art (Annahme)

$$\sigma_{ij}^K = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

"Pancake"-Relaxation  $D_{ij}^{\text{ext}} = D_{ij}^K = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & ? \\ D_{12} & \sigma_{22} & ? \\ ? & ? & D_{33} \end{pmatrix}$



## Fließorte in 3D Darstellung

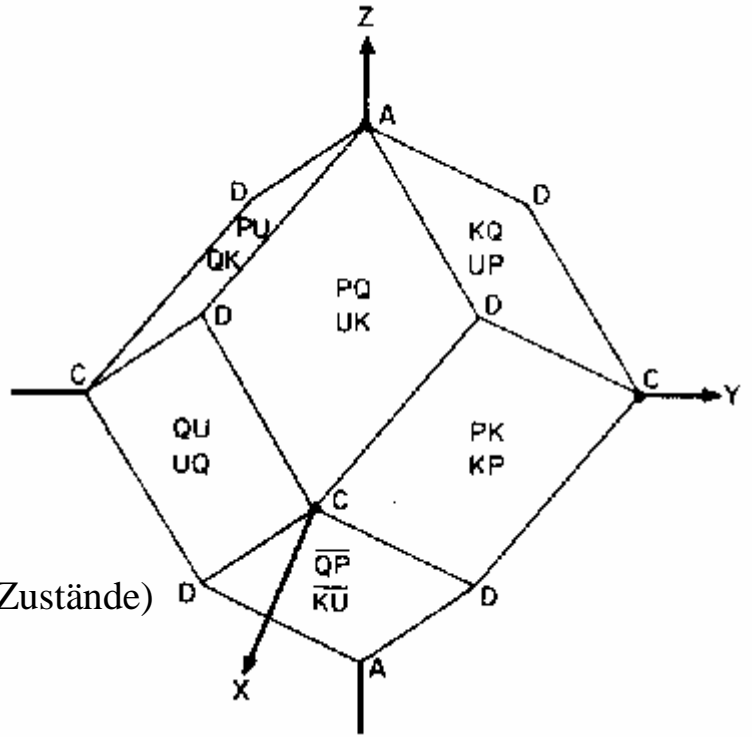
Schnitt durch einen kfz / krz Fließort  
 ( $\{110\} \langle 111 \rangle$  oder  $\{111\} \langle 110 \rangle$  Gleitung)  
 für einen Spannungstensor der Art

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} z & x & y \\ x & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hauptelemente:

5 Klassen von Fließvektoren (plastische Zustände)

$${}^1M_\lambda \quad {}^2M_\lambda \quad {}^3M_\lambda \quad {}^4M_\lambda \quad {}^5M_\lambda$$



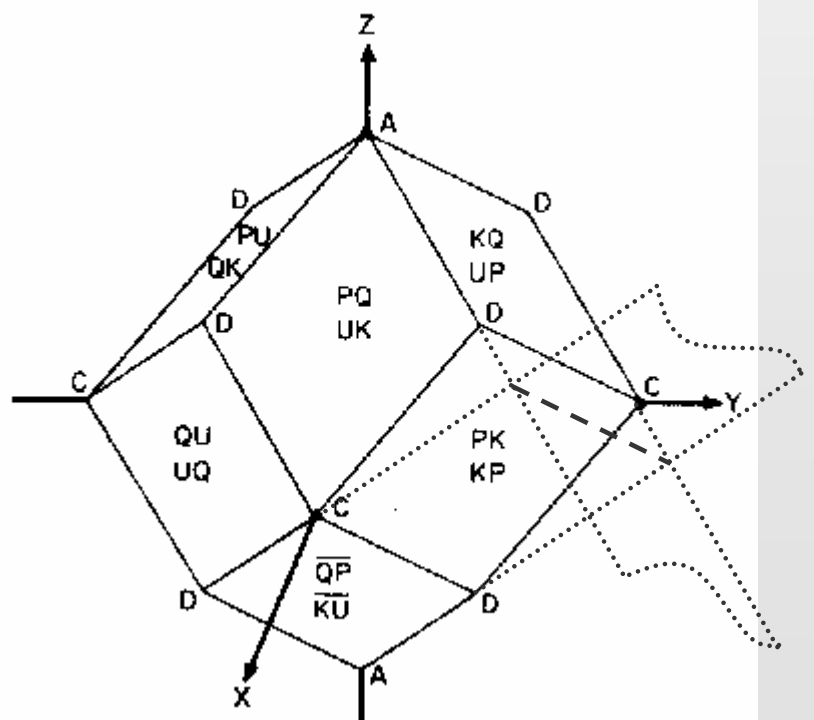
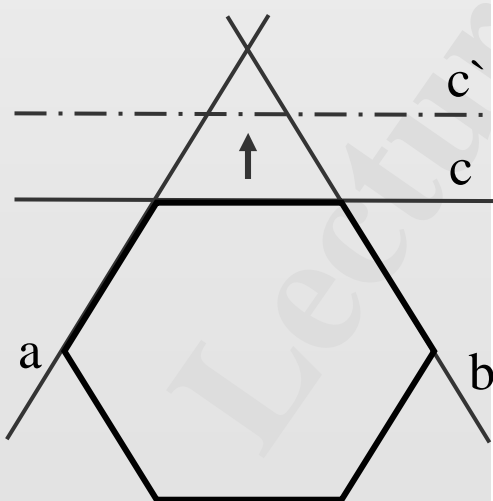
Pentaslip (Fünffachgleitung):  ${}^5M_\lambda^i$  (kfz, krz (reduz.):  $i=56$ )

Tetraslip (Vierfachgleitung):  ${}^4M_\lambda^j$  (kfz, krz (reduz.):  $j=108$ )

Trislip (Dreifachgleitung):  ${}^3M_\lambda^k$  (kfz, krz (reduz.):  $k=135$ )

Bislip (Zweifachgleitung):  ${}^2M_\lambda^l$  (kfz, krz (reduz.):  $l=66$ )

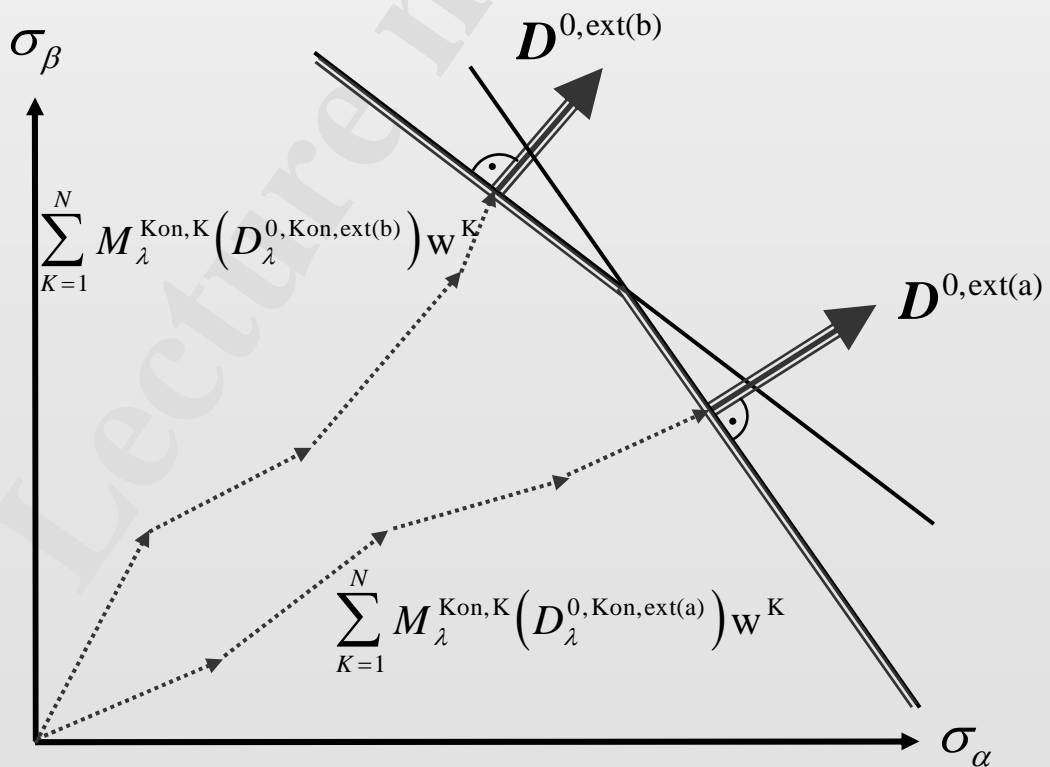
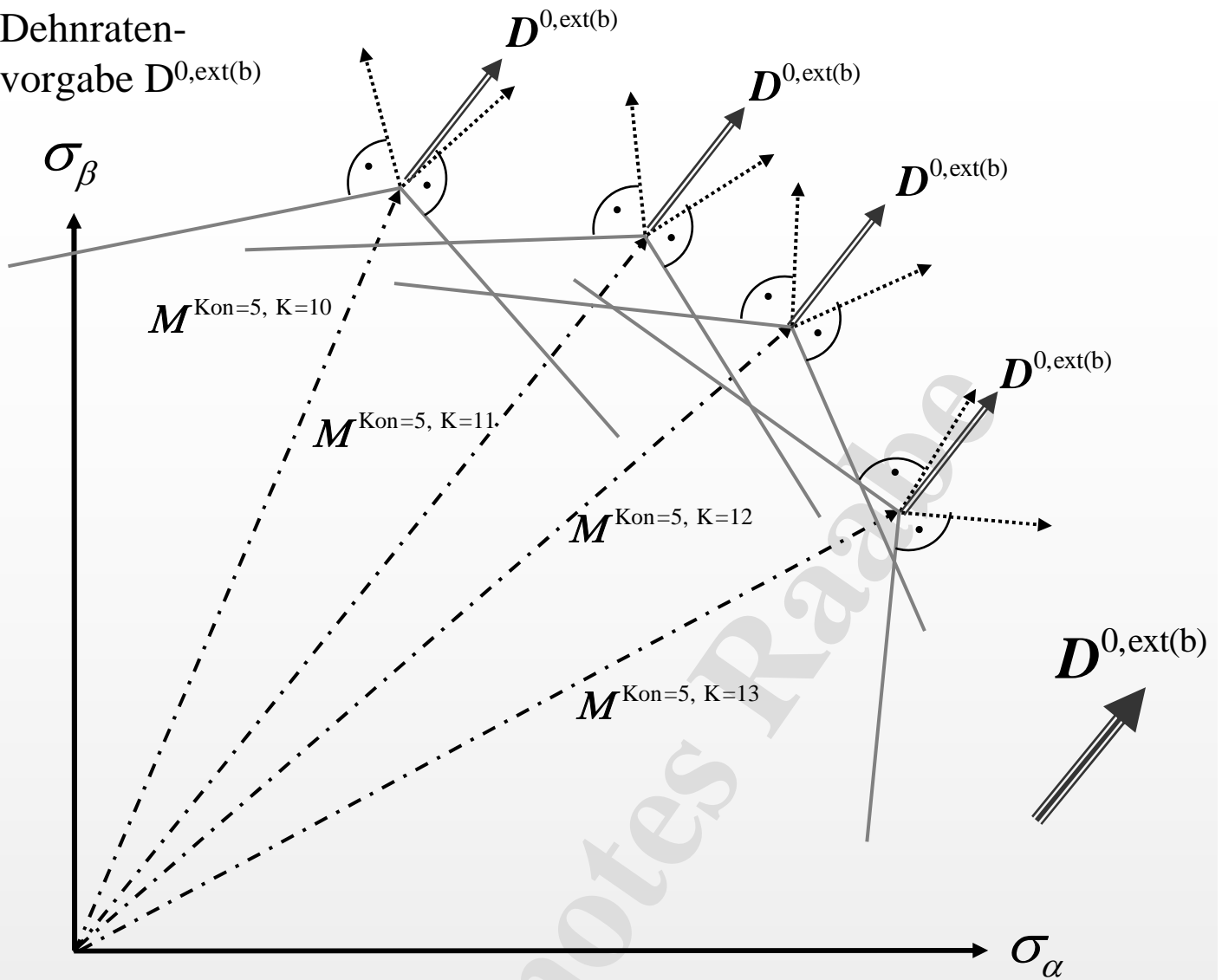
Singleslip (Einfachgleitung):  ${}^2M_\lambda^n$  (kfz, krz (reduz.):  $n=24$ )



## Fließorte in 3D Darstellung



Dehnraten-  
vorgabe  $D^{0,\text{ext}(b)}$



# Polykristallfließort



# Mehrfachgleitung, Konus - (Eck-, Vertex-) Fall

Abstand, Größe:

$$\sigma^{\text{Kon}} = \sigma_{\lambda}^{\text{Kon}} D_{\lambda}^{0,\text{Kon}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} D_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} D_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}}$$

(Anm.:  $M$  ist die Projektion des Spannungsvektors auf die Dehnratenrichtung,

$D_{\lambda}^0$ : Normierte Richtung des Dehnratentensors,  $\sigma_{\lambda}^{0,\text{Kon}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}}$ : Normierte Richtung des Dehnratentensors)

Formfunktion:

$$\sigma_{\lambda}^{\text{Kon}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau^{\text{skal}} = M_{\lambda}^{0,\text{Kon}} \tau_{\text{krit}}$$

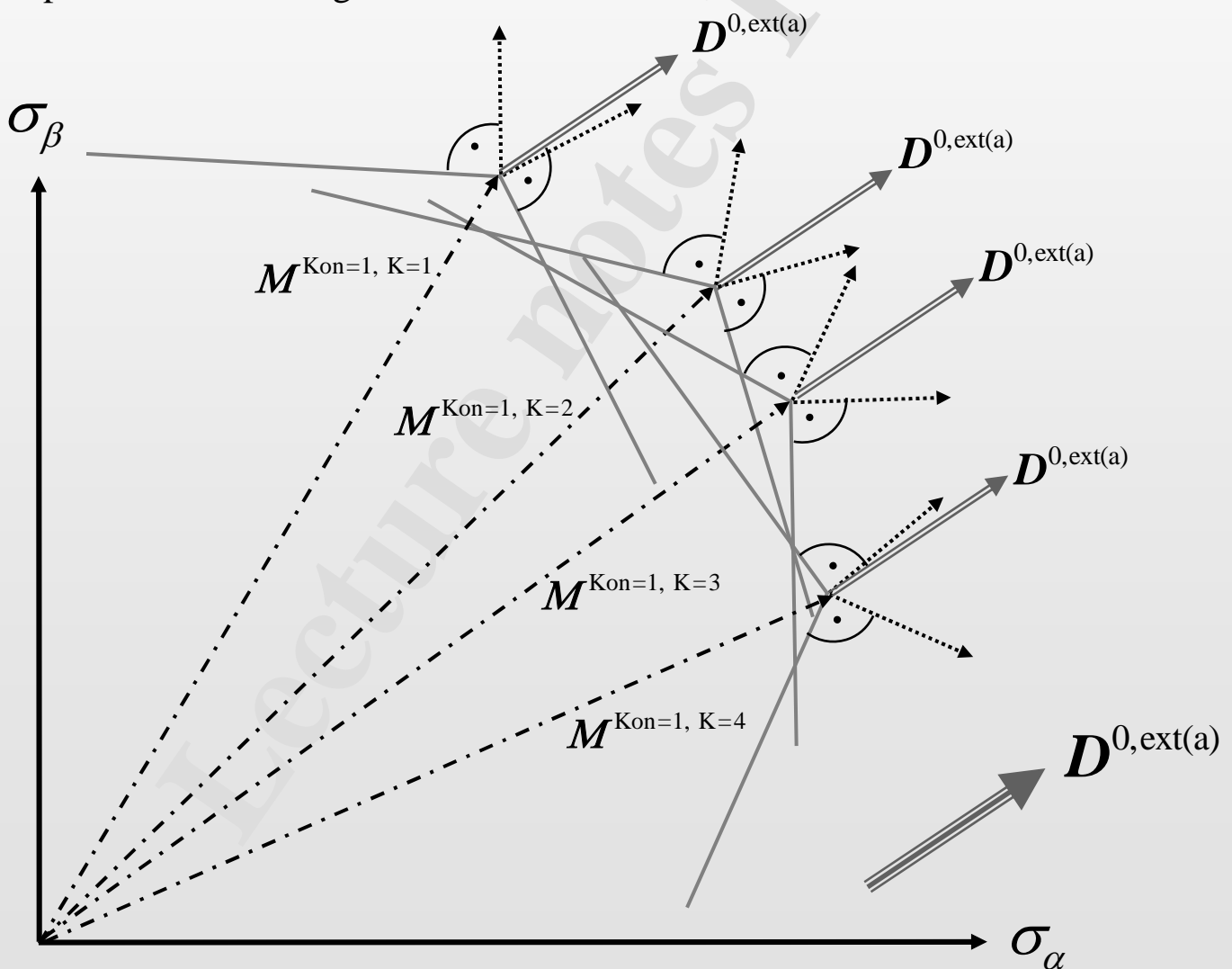
besser:

$$S_{\lambda}^{\text{Kon}} = M_{\lambda}^{\text{Kon}}(D_{\lambda}^{0,\text{Kon}}) \tau_{\text{krit}}$$

$$S_{\lambda}^{\text{P}}(D_{\lambda}^{0,\text{Kon}}) = \langle S_{\lambda}^{\text{P}}(D_{\lambda}^{0,\text{Kon}}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V S_{\lambda}^{\text{Kon},K}(\mathbf{g}) dV = \sum_{K=1}^N S_{\lambda}^{\text{Kon},K}(\mathbf{g}) w^K = \tau_{\text{krit}} \sum_{K=1}^N M_{\lambda}^{0,\text{Kon},K}(D_{\lambda}^{0,\text{Kon}}) w^K$$

$$w^K = \frac{V^K}{V}$$

Beispiel: Dehnratenvorgabe  $D^{0,\text{ext}(a)}$



# von Mises Fließortfunktion

$$f_{\text{is,Ei}}(\sigma_{\text{I}}, \sigma_{\text{II}}, \sigma_{\text{III}}) = f_{\text{is,In}}(I_1, I_2, I_3) = k_f$$

$$f_{\text{is,Ei,De}}(S_{\text{I}}, S_{\text{II}}, S_{\text{III}}) = f_{\text{is,In,De}}(J_2, J_3) = k_f$$

$$I_1 = \sigma_{ii}, I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}), I_3 = \det(\sigma_{ij}), J_1 = 0, J_2 = \frac{1}{2}(S_{ij}S_{ij}), J_3 = \det(S_{ij})$$

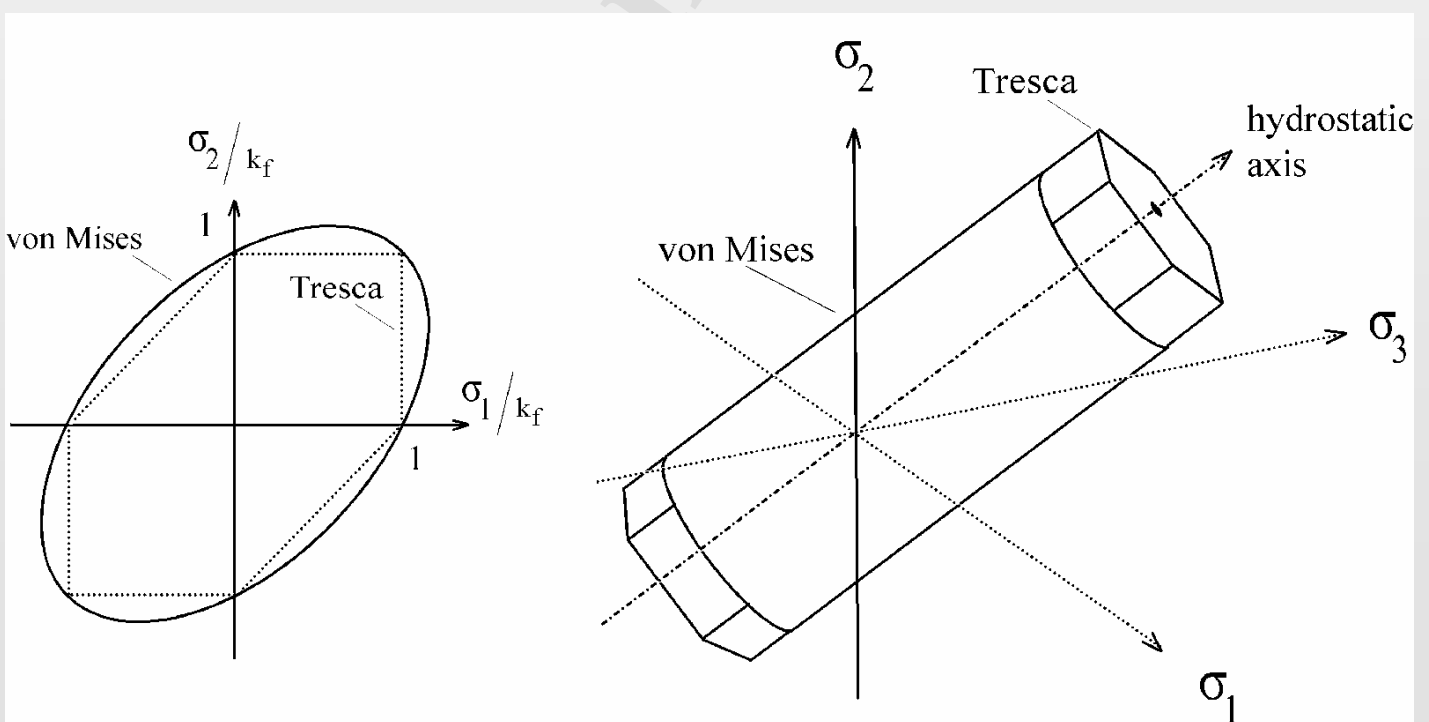
$$\frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{23}^2 + 6\sigma_{13}^2 + 6\sigma_{12}^2] = \sigma_{\text{vM}}^2 = k_f^2$$

$$\frac{1}{2}[(\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{II}})^2 + (\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{III}})^2 + (\sigma_{\text{III}} - \sigma_{\text{I}})^2] = \sigma_{\text{vM}}^2 = k_f^2$$

$$2(\tau_{\text{I}}^2 + \tau_{\text{II}}^2 + \tau_{\text{III}}^2) = \sigma_{\text{vM}}^2 = k_f^2$$

$$3J_2 = \frac{3}{2}S_{ij}S_{ij} = \sigma_{\text{vM}}^2 = k_f^2$$

$$\frac{1}{2}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2] = \sigma_{\text{vM}}^2 = k_f^2 \quad (\tau_{r\theta} = 0, \tau_{z\theta} = 0)$$



# Anmerkungen zum von Mises Fließort

- plastisch isotrop
- analytisch-empirische Hypothese zur Berechnung einer Vergleichsspannung
- Reduzierung eines Tensors auf einen Skalar
- Funktion nur des Betrages der Eigenwerte (Hauptnormalspannungen)
- Unabhängig von den Eigenvektoren (Richtungen der Eigenwerte)
- plastische Spannungen existieren nur auf der Oberfläche des Fließortes
- kleinere Spannungen beanspruchen Material nur elastisch
- größere Spannungen existieren nicht im Material (Fließort muß „mitwachsen“)
- unabhängig vom hydrostatischen Spannungsanteil
- $k_f$  aus 1-achsigem Versuch
- Potential- (Energie-) funktion
- geschlossen
- konvex
- spezielle Form allgemeinerer Klasse von Fließortfunktionen
- Symmetrie des Fließortes entspricht Tensorsymmetrie
- 3-D (D=„Dimension“=Anzahl unabhängiger Komponenten)
- kein Hyperebenen Konus
- Funktion entspricht Fließort (keine Einhüllende)
- Evolution von Form und Größe des Fließortes isotrop



# Hill Fließortfunktion

$$f_{\text{an,Ca}}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) = k_f \quad f_{\text{an,De}}(S_{11}, S_{22}, (S_{33}), S_{23}, S_{13}, S_{12}) = k_f$$

$$\frac{1}{2} \left[ H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \right] = \sigma_H^2 = k_f^2$$

$$\frac{1}{2} \left[ (G + H)S_{11}^2 + (F + H)S_{22}^2 + (F + G)S_{33}^2 - 2HS_{11}S_{22} - 2GS_{11}S_{33} - 2FS_{22}S_{33} + 2LS_{23}^2 + 2MS_{13}^2 + 2NS_{12}^2 \right] = \sigma_H^2 = k_f^2$$

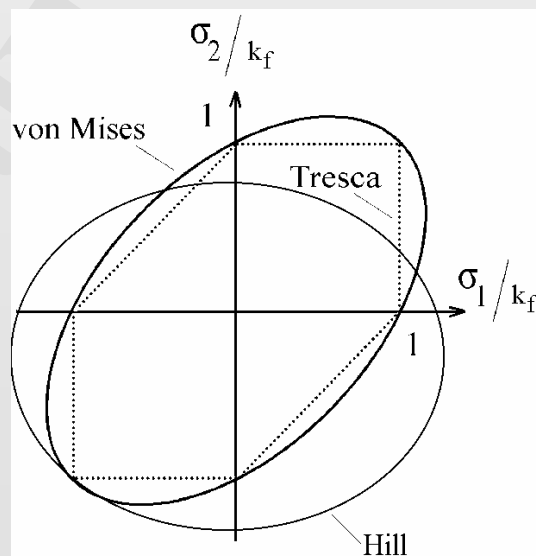
$$\frac{1}{2} \alpha_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = k_f^2$$

$$\begin{aligned} \alpha_{1111} &= G + H & \alpha_{2222} &= F + H & \alpha_{3333} &= F + G \\ \alpha_{1122} = \alpha_{2211} &= -H & \alpha_{1133} = \alpha_{3311} &= -G & \alpha_{2233} = \alpha_{3322} &= -F \end{aligned}$$

$$\alpha_{1212} = \alpha_{2121} = \alpha_{1221} = \alpha_{2112} = \frac{1}{2} N$$

$$\alpha_{1313} = \alpha_{3131} = \alpha_{1331} = \alpha_{3113} = \frac{1}{2} M$$

$$\alpha_{2323} = \alpha_{3232} = \alpha_{2332} = \alpha_{3223} = \frac{1}{2} L$$





# Hill Fließortfunktion

$$f_{\text{an,Ca}}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}) = k_f \quad f_{\text{an,De}}(S_{11}, S_{22}, (S_{33}), S_{23}, S_{13}, S_{12}) = k_f$$

$$\frac{1}{2} \left[ H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \right] = \sigma_H^2 = k_f^2$$

$$\frac{1}{2} \left[ (G + H)S_{11}^2 + (F + H)S_{22}^2 + (F + G)S_{33}^2 - 2HS_{11}S_{22} - 2GS_{11}S_{33} - 2FS_{22}S_{33} + 2LS_{23}^2 + 2MS_{13}^2 + 2NS_{12}^2 \right] = \sigma_H^2 = k_f^2$$

$$\frac{1}{2} \alpha_{ijkl} S_{ij} S_{kl} = k_f^2$$

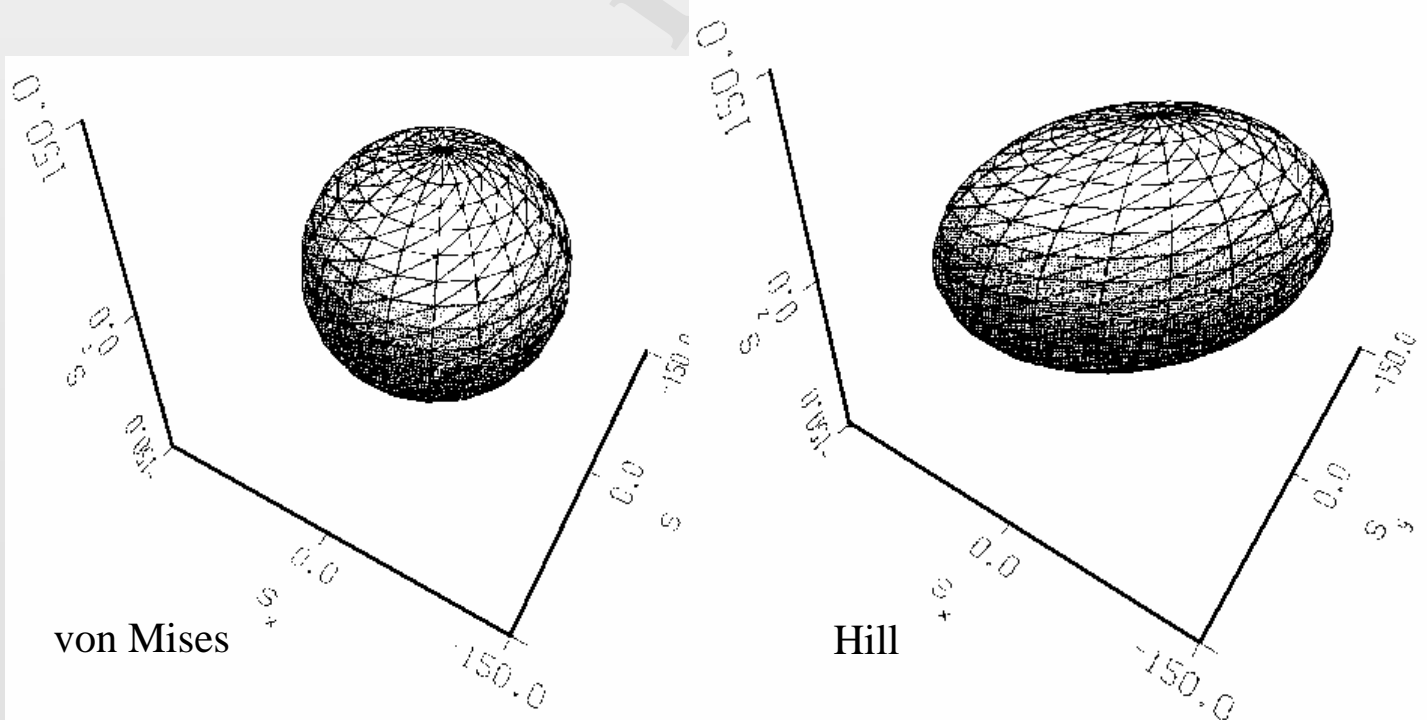
$$\alpha_{1111} = G + H \quad \alpha_{2222} = F + H \quad \alpha_{3333} = F + G$$

$$\alpha_{1122} = \alpha_{2211} = -H \quad \alpha_{1133} = \alpha_{3311} = -G \quad \alpha_{2233} = \alpha_{3322} = -F$$

$$\alpha_{1212} = \alpha_{2121} = \alpha_{1221} = \alpha_{2112} = \frac{1}{2} N$$

$$\alpha_{1313} = \alpha_{3131} = \alpha_{1331} = \alpha_{3113} = \frac{1}{2} M$$

$$\alpha_{2323} = \alpha_{3232} = \alpha_{2332} = \alpha_{3223} = \frac{1}{2} L$$



# Anmerkungen zum Hill'schen Fließort

- analytisch-empirische Hypothese zur Berechnung einer Vergleichsspannung
- plastisch anisotrop
- Reduzierung eines Tensors auf einen richtungsabhängigen Skalar
- bei Anisotropie eine Funktion aller Spannungs- (bzw. Deviator-)komponenten
- plastische Spannungen existieren nur auf der Oberfläche des Fließortes
- kleinere Spannungen beanspruchen Material nur elastisch
- größere Spannungen existieren nicht im Material (Fließort muß „mitwachsen“)
- unabhängig vom hydrostatischen Spannungsanteil
- $k_f$  aus 1-achsigem Versuch allerdings in verschiedenen Richtungen
- Potential- (Energie-) funktion
- geschlossen
- konvex
- spezielle Form allgemeinerer Klasse von Fließortfunktionen
- Asymmetrie Hill-Fließort: Probenkoordinatensystem, Mikrostruktursymmetrie
- 5-D oder 6-D (D=„Dimension“=Anzahl unabhängiger Komponenten)\*
- keine Hyperebenen-Konusbereiche (keine Facetten)
- Funktion entspricht Fließort (keine Einhüllende)
- Evolution von Form und Größe des Fließortes möglicherweise anisotrop

*\*Anm.: nur 3 Traktionen bzw. Eigenwerte (!), aber es müssen zusätzlich die 3 Eigenvektoren berücksichtigt werden; bei anisotroper Plastizität ist das Materialverhalten von der **Höhe** und **Richtung** der Beanspruchung abhängig.*



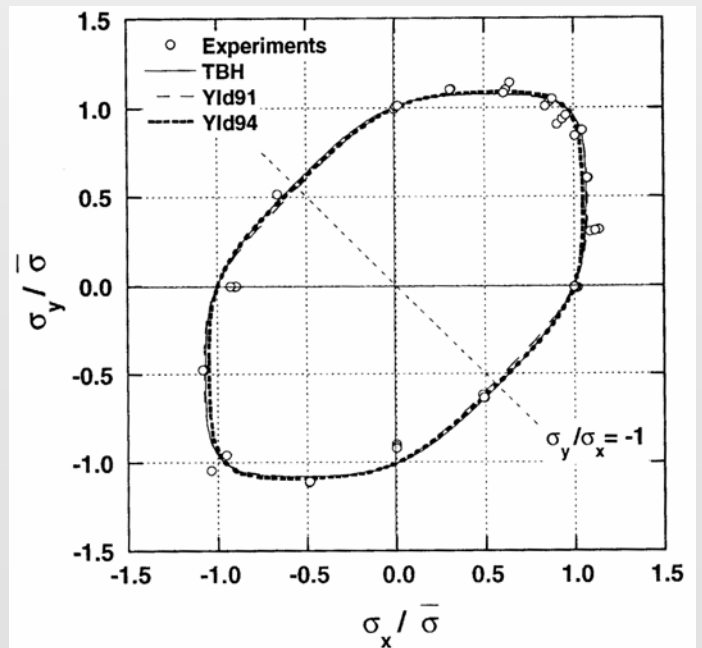
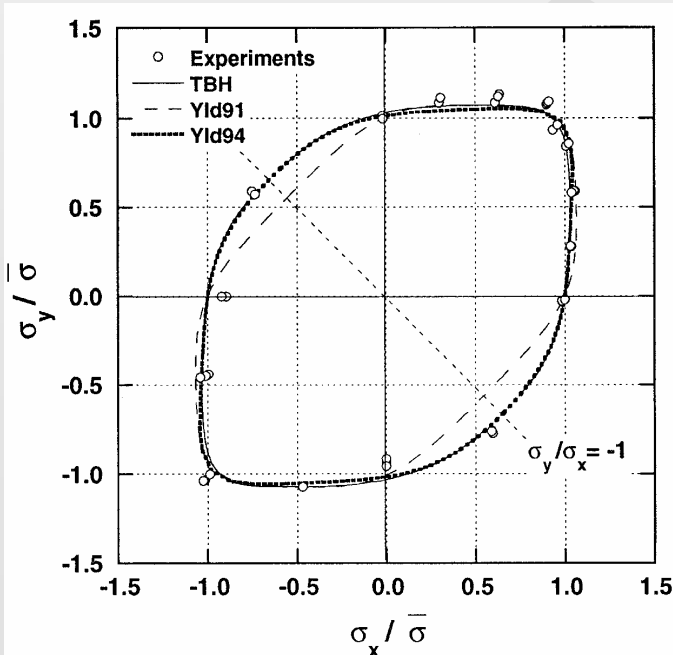
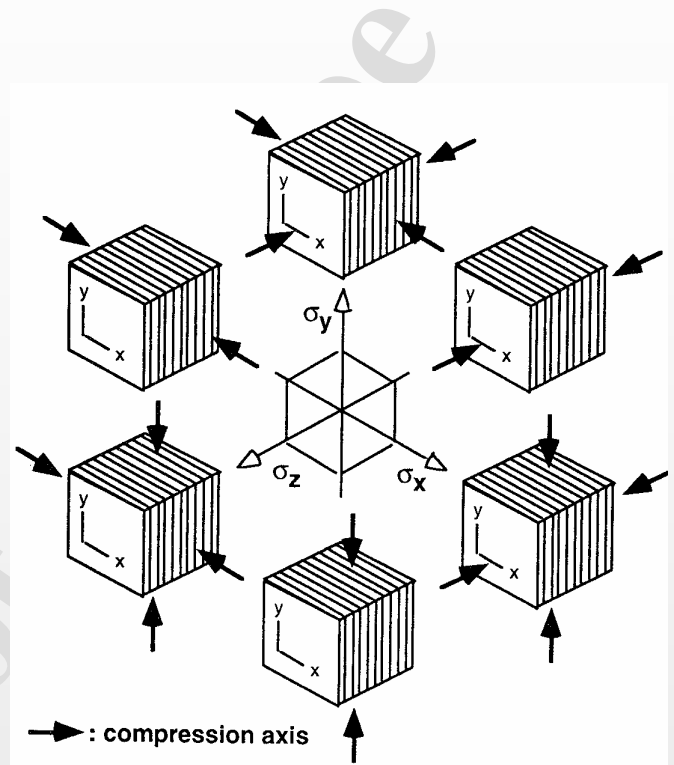
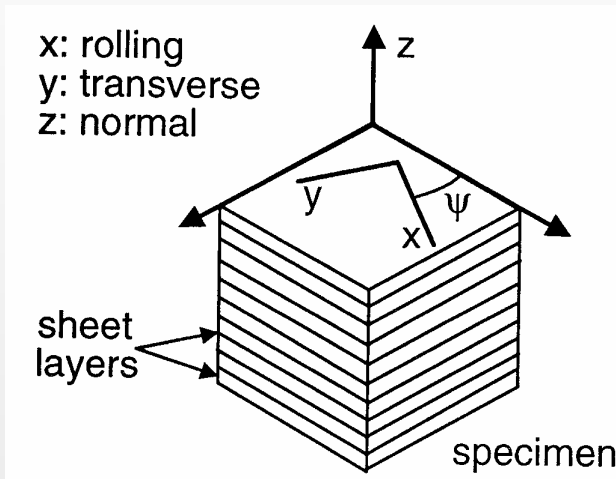
# Anisotrope Fließortfunktionen nach Barlat, Karafillis, Boyce auf der Basis der isotropen Fließortfunktion nach Hershey und Hosford

$$\alpha_1 |s_2 - s_3|^a + \alpha_2 |s_3 - s_1|^a + \alpha_3 |s_1 - s_2|^a = 2k_f^a$$

$$s_{ij} = L_{ijkl} \sigma_{kl}$$

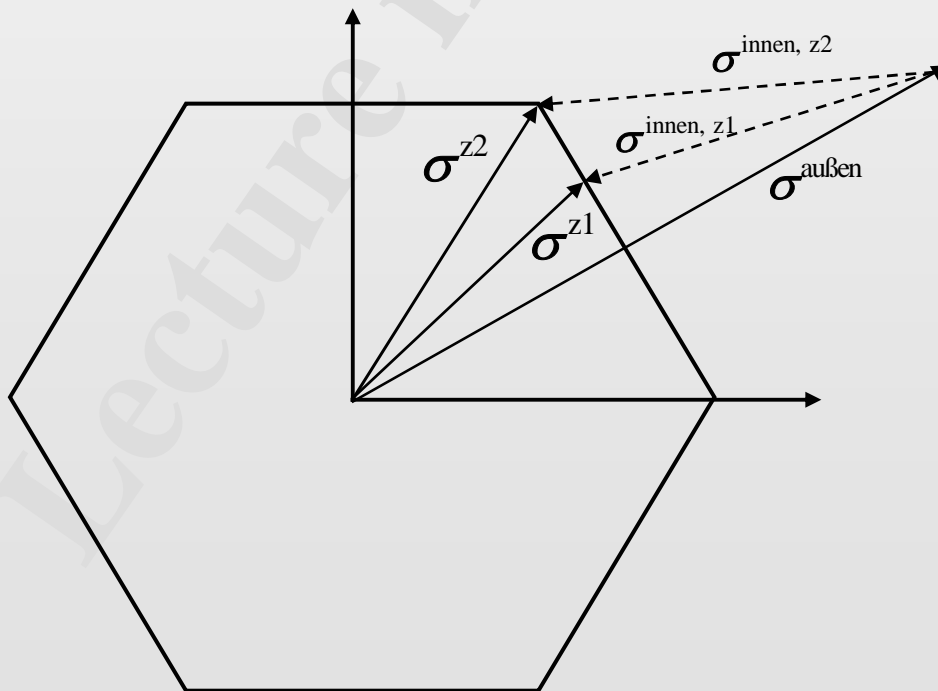
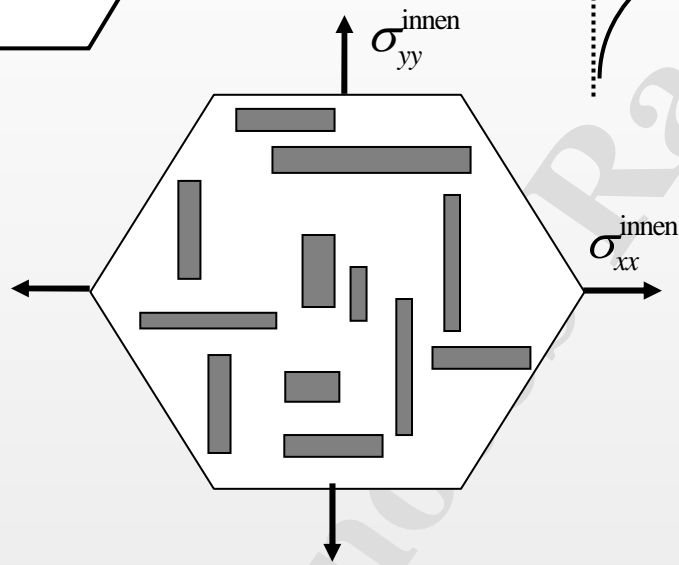
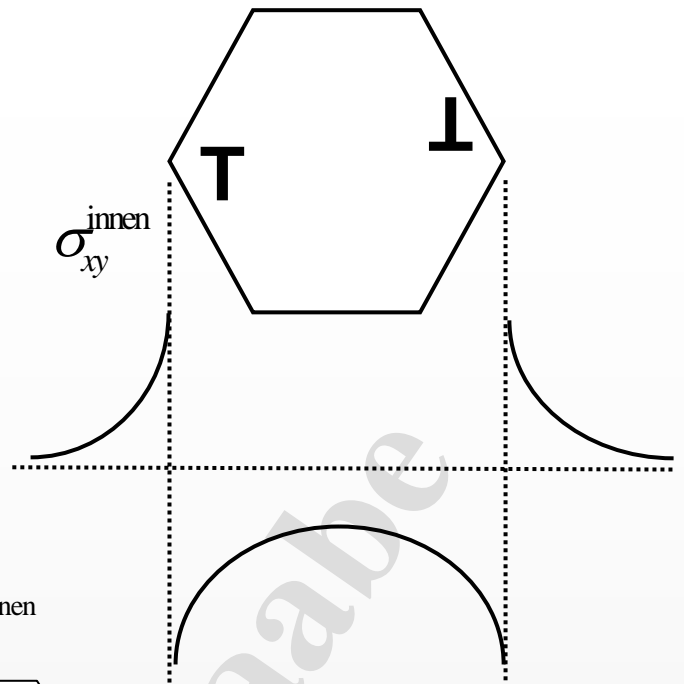
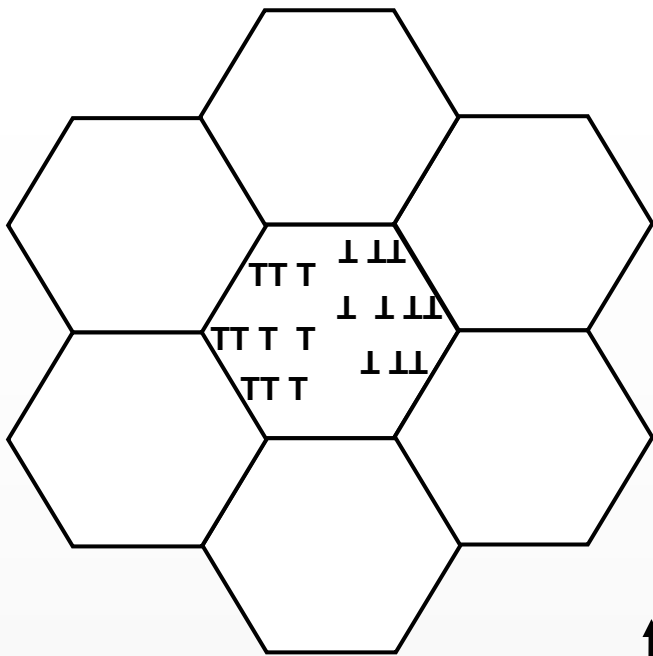
$$\alpha_m = \alpha_x p_{1m}^2 + \alpha_y p_{2m}^2 + \alpha_z p_{3m}^2$$

L: linearer Transformationsoperator  
 $\sigma$ : Spannungstensor  
s: Materialabhängiger Anisotropietensor  
p: Anisotropie-Transformationsmatrix



## Anisotroper Kontinuums-Fließort



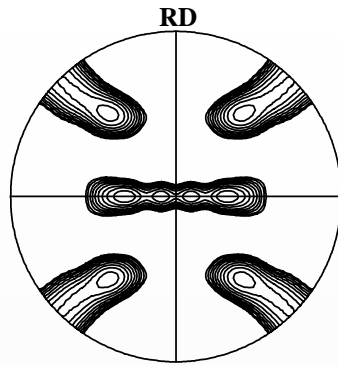


# Überlagerung von Spannungen



**Selbst-Konsistent  
viskoplastisch  
90% kaltgewalzt**

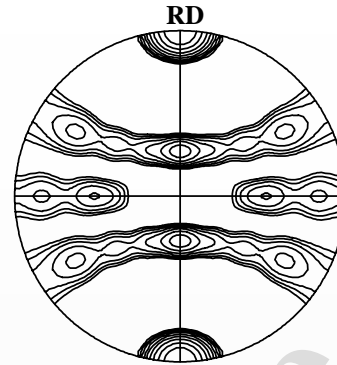
0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 5.0, 6.4



100

0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 5.0, 6.4

0.7, 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, 5.6, 8.0

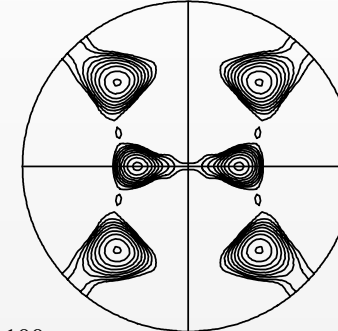


110

0.7, 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, 5.6, 8.0

**Taylor FC,  
viskoplastisch  
90% kaltgewalzt**

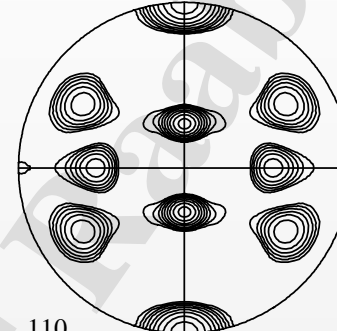
0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 5.0, 6.4



100

0.8	1.0	1.3	1.6	2.0
2.5	3.2	4.0	5.0	6.4

0.7, 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, 5.6, 8.0

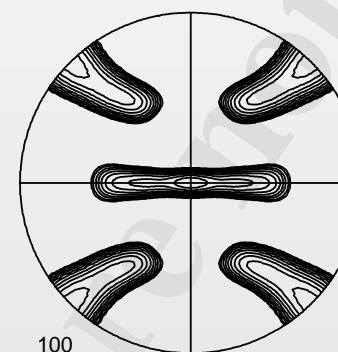


110

0.7	1.0	1.4	2.0	2.8
4.0	5.6	8.0	11	16

**Taylor Pancake,  
viskoplastisch  
90% kaltgewalzt**

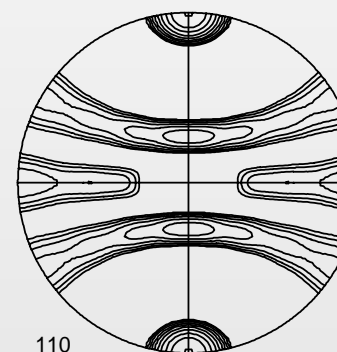
0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 5.0, 6.4



100

.8	1.0	1.3	1.6	2.0
2.5	3.2	4.0	5.0	6.4

0.7, 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, 5.6, 8.0

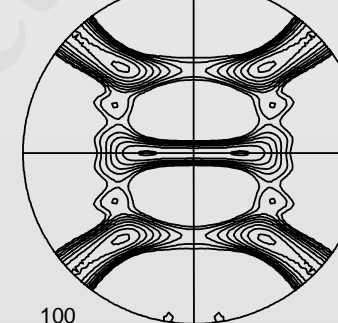


110

.7	1.0	1.4	2.0	2.8
4.0	5.6	8.0	11	16

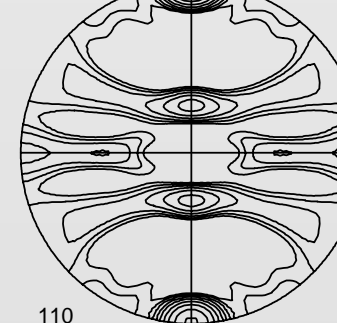
**Experiment,  
Fe-11%Cr  
90% kaltgewalzt**

0.8, 1.0, 1.3, 1.6, 2.0, 2.5, 3.2, 4.0, 5.0, 6.4



100

0.7, 1.0, 1.4, 2.0, 2.8, 4.0, 5.6, 8.0

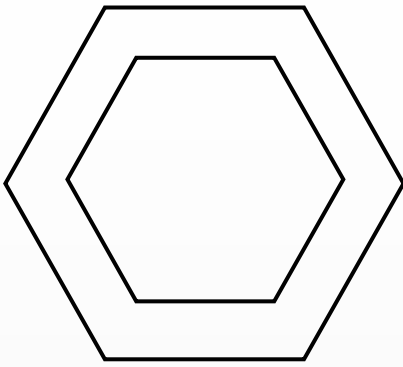


110

## Vergleich, Textur

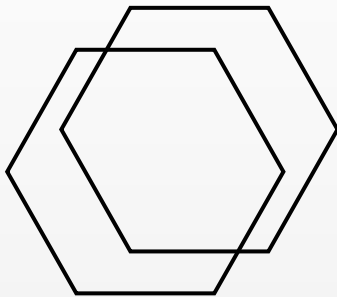


## Verfestigung unter Erhaltung der Fließortform



### Proportionale Verfestigung

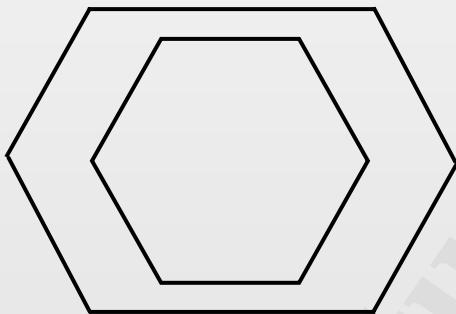
Selbstähnliches Anwachsen des Fließortes, proportionale Größenänderung des Fließortes, nur eine Art von Gleitsystemen mit einer identischen kritischen Schubspannung, gleiche Festigkeitszunahme auf allen Systemen (*nicht* isotrop, da  $d\tau \sim \tau$ )



### Kinematische Verfestigung

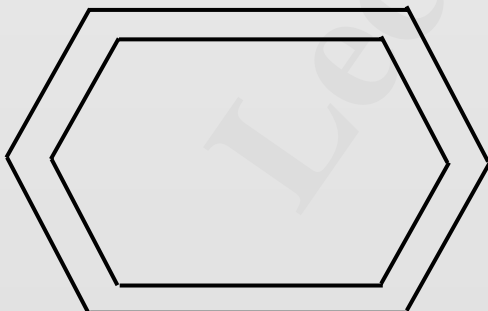
Translation des Fließortes ohne Gestaltänderung, nur denkbar bei inneren Spannungen

## Verfestigung durch mechanisch bedingte Änderung der Fließortform



### Anisotrope Verfestigung

Nicht-selbstähnliches Anwachsen des Fließortes, unproportionale Größenänderung des Fließortes, die latenten Systeme verfestigen stärker, als die aktiven System



### Isotrope Verfestigung

Nicht-selbstähnliches Anwachsen des Fließortes, unproportionale aber isotrope Größenänderung des Fließortes, die Festigkeitszunahme auf den unterschiedlichen Ssystemen ist unabhängig von der Anfangsfestigkeit

