

---

# Diffusion aktiver Brownscher Teilchen in einer Raumdimension

Benjamin Lindner

Max-Planck-Institute für Physik Komplexer Systeme, Nöthnitzer Str. 38 01187  
Dresden

**Zusammenfassung.** Brownsche Teilchen, die durch negative Reibung gepumpt werden, können Bewegungen biologischer Objekte (Zellen, Bakterien, Organismen) phänomenologisch beschreiben. In diesem Beitrag wird diese aktive Brownsche Bewegung im eindimensionalen und überdämpften Fall studiert und zwar für (1) ein freies Teilchen und (2) ein Teilchen in einem Kosinus-Potential. Diskutiert wird insbesondere der Diffusionskoeffizient als Funktion der Rauschstärke. Im Fall der freien Diffusion werden Näherungsformeln für den Diffusionskoeffizienten bei schwachem und starkem Rauschen hergeleitet. Anhand dieser Formeln als auch mittels numerischer Simulationen wird gezeigt, daß der effektive Diffusionskoeffizient der freien Bewegung einen minimalen Wert bei mittlerer Rauschstärke annimmt. Im Fall einer periodischen Potentialkraft untersuchen wir im überdämpften Grenzfall die Struktur der Nullklinen des Systems. Letztere machen verständlich, warum für eine schwache Potentialkraft das Minimum im Diffusionskoeffizienten vertieft wird, während es verschwindet, wenn die Amplitude des periodischen Potentials zu groß ist.

## 1 Einführung

Brownsche Dynamiken und "random walk" Modelle können dynamische Aspekte verschiedener biologischer Bewegungsformen phänomenologisch gut reproduzieren [1]. Eine besondere Rolle spielen hierbei die von Werner Ebeling und seinen Mitarbeiter eingeführten aktiven Brownschen Teilchen mit Energiedepot [2–4]. Die Dynamik dieser gepumpten Teilchen wurde in verschiedenen Szenarien studiert: in äußeren Potentialen [4, 5]; im Fall mechanischer [6] oder hydrodynamischer Kopplung [7]; mit räumlich heterogener Energiezufuhr ("Futterquellen") [2, 8] und unter Berücksichtigung von Hindernissen [2]. Die Mehrzahl der erwähnten Arbeiten behandelt den für die Biologie interessanten zweidimensionalen Fall.

Für ein ungebundenes (oder nur metastabil gebundenes) Brownsches Teilchen ist der Diffusionskoeffizient schlechthin die zentrale Größe, welche gegeben ist durch

$$D_{\text{eff}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle}{2t}. \quad (1)$$

Aktive Brownsche Teilchen zeigen normale Diffusion ( $\langle \Delta x^2 \rangle \sim t$ ), ihr Diffusionskoeffizient kann jedoch in nichttrivialer Art von den Systemparametern abhängen. Im zweidimensionalen Fall findet man zum Beispiel bei kleiner Rauschstärke  $D$  das Verhalten  $D_{\text{eff}} \sim D^{-1}$  (siehe [8–10]), also eine divergierende Diffusionsstärke im Grenzfall verschwindender Fluktuationen — ein paradoxes Ergebnis, das auf die endliche mittlere Absolutgeschwindigkeit  $\langle |\dot{x}| \rangle$  (also letztlich auf die Pumpe) und die verschwindende Phasendiffusion im Grenzfall  $D \rightarrow 0$  zurückzuführen ist.

Bisherige Beiträge zum eindimensionalen Problem behandelten den Fall der freien Diffusion (kein externes Potential, keine Wechselwirkungen) [11] oder die Bewegung in stückweise linearen Ratschenpotentialen (periodischen Potentialen mit gebrochener Reflexionssymmetrie) [5]. Der eindimensionale Fall ist sicherlich von prinzipiellem Interesse; er unterscheidet sich, wie wir sehen werden, schon im Fall freier Diffusion qualitativ vom mehrdimensionalen Fall. Weiterhin können dynamische Wechselwirkungen zwischen Aktivitätsmechanismen (negative Reibung) und räumlichen Inhomogenitäten (z.B. einem periodischen Potential) leichter in einer Raumdimension verstanden werden. Schließlich kann auch der eindimensionale Fall Bedeutung für Modelle aktiver Bewegung in der Biologie haben, zum Beispiel für die Bewegung entlang von intrazellulären Filamenten.

In dieser Arbeit möchte ich einige Resultate zur Diffusion aktiver Brownscher Teilchen in einer Raumdimension vorstellen. Das zu untersuchende Modell ist eine vereinfachte Variante der Brownschen Bewegung mit Energiedepot [2, 4, 5]

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\gamma \left[ 1 - \frac{\alpha}{1 + v^2 d/c} \right] v - U'(x) + \sqrt{2D} \xi(t) \quad (2)$$

wobei  $\alpha = dq/(c\gamma)$ . Die Aktivität der Teilchen ergibt sich hier durch den nichtlinearen Reibungsterm in der zweiten Gleichung. Dieser resultiert aus der adiabatischen Eliminierung der Energievariable (siehe [4]). Das Potential  $U(x)$  betreffend werde ich die zwei Fälle der freien Diffusion ( $U(x) \equiv 0$ ) und der Bewegung im periodischen Potential  $U(x) = A \cos(2\pi x)$  untersuchen. Für  $\alpha > 1$  gibt es zwei stabile Geschwindigkeiten des freien aktiven Teilchens ohne Rauschen ( $U(x) \equiv 0, D = 0$ ). Für  $\alpha = 0$  handelt es sich um ein passives Brownsches Teilchen im nichtlinearen Kraftfeld  $-U'(x)$ , auch bekannt als Kramersproblem [12]. Der Parameter  $\alpha$  quantifiziert folglich wie stark die Dynamik von der normalen Brownschen Bewegung abweicht. Im folgenden wird vorausgesetzt daß

$$\alpha \gg 1 \quad \text{und} \quad \gamma \gg 1. \quad (3)$$

In den Simulationen werden die folgenden Parameter verwendet

$$\gamma = 20, d = 4, q = 5, c = 0.1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 10 \quad (4)$$

Die erste Bedingung in Glg. (3) besagt, daß die Dynamik stark von der passiven Brownscher Teilchen abweicht (Condat und Sibona [11] diskutieren analytische Resultate für den entgegengesetzten Grenzfall  $\alpha \ll 1$ ). Die zweite Bedingung dient schlicht der Vereinfachung des Problems, insbesondere für den Fall der Bewegung im periodischen Potential. Es ist zu erwarten daß hier die Dynamik im allgemeinen gedämpften Fall reichhaltiger (aber auch sehr viel schwerer zu analysieren) ist, ganz ähnlich wie für passive Brownsche Teilchen [13].

Für die freie Brownsche Bewegung passiver Teilchen ( $\alpha = 0, U(x) \equiv 0$ ) ist der Zusammenhang zwischen Rauschintensität und Diffusionskoeffizient  $D_{\text{eff}} = D/\gamma^2$  fast eine Identität; für aktive Teilchen ist die Beziehung  $D_{\text{eff}}(D)$  nichttrivial und charakterisiert die Physik des Systems. Im folgenden werden wir uns deshalb auf die Diskussion dieser Abhängigkeit beschränken.

## 2 Die freie Diffusion aktiver Brownscher Teilchen

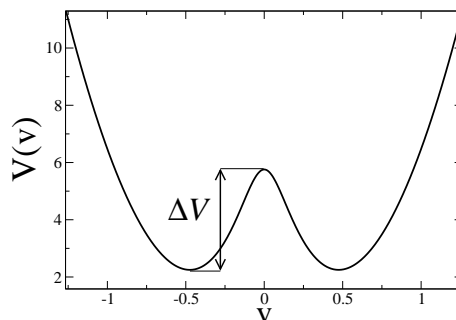
Hier betrachten wir den Fall verschwindender Potentialkraft ( $U(x) \equiv 0$ ). In Glg. (2) kann die aktive Reibung dann als negative Ableitung eines Geschwindigkeitspotentials  $V(v)$  aufgefaßt werden

$$\dot{v} = -V'(v) + \sqrt{2D}\xi(t), \quad (5)$$

wobei das Potential gegeben ist durch [10]

$$V(v) = \frac{\gamma}{2}v^2 - \frac{q}{2}\ln[c + dv^2]. \quad (6)$$

Für  $\alpha > 1$  ist dieses Potential bimodal. Seine Form ist für die Standardparameter aus Glg. (4) in Abb. 1 gezeigt.



**Abb. 1.** Potential der Geschwindigkeit für die Standardparameter Glg. (4). Die Barrierenhöhe  $\Delta V \approx 3.5$  ist angezeigt — um die Richtung zu wechseln muss das aktive Teilchen im Geschwindigkeitsraum die Barriere mit Hilfe der Fluktuationen überwinden.

Das Potential hat Minimum bei

$$v_0 = \pm \sqrt{\frac{q}{\gamma} - \frac{c}{d}} = \pm \sqrt{\frac{c}{d}} \sqrt{\alpha - 1} \quad (7)$$

und ein Maximum bei  $v = 0$ . Die Potentialdifferenz zwischen Minimum und Maximum beträgt

$$\Delta V = \frac{q}{2} [\ln(\alpha) + \alpha^{-1} - 1]. \quad (8)$$

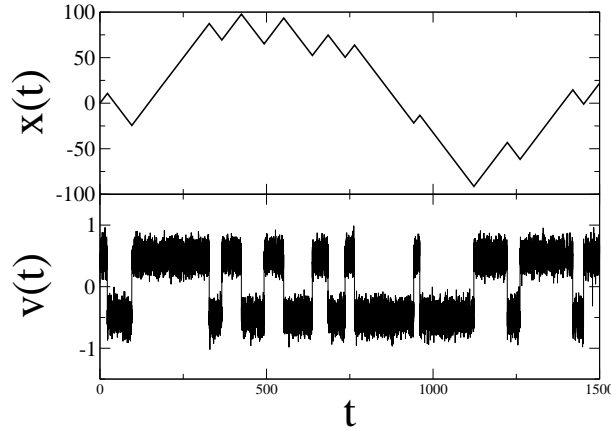
Im folgenden benötigen wir auch die zweiten Ableitungen am Minimum und Maximum

$$V''(v_0) = 2\gamma(1 - \alpha^{-1}), \quad |V''(0)| = \gamma(\alpha - 1). \quad (9)$$

Für obige Parameter und für schwaches Rauschen ( $D = 0.5$ ) ist eine typische Ortstrajektorie und die dazugehörige Geschwindigkeit in Abb. 2 gezeigt. Die Geschwindigkeitsvariable verweilt die meiste Zeit bei einem der metastabilen Zustände, springt zum jeweils anderen Zustand mit der Aktivierungsrate  $r$ , die für schwaches Rauschen durch die Kramersrate [12] gegeben ist

$$r = \frac{\sqrt{V''(v_0)|V''(0)|}}{2\pi} \exp[-\Delta V/D]. \quad (10)$$

Bei schwachem Rauschen kann die Geschwindigkeit durch einen dichotomen Prozess (Telegraphenrauschen) approximiert werden



**Abb. 2.** Trajektorie des Systems für eine schwache Rauschstärke von  $D = 0.5$ . Die Geschwindigkeit schaltet zwischen den stabilen Werten  $\pm v_0 \approx \pm 0.47$  mit einer rauschabhängigen Rate  $r$ . Entsprechend wechselt die Variable  $x(t)$  die Bewegungsrichtung. Es ist auch klar zu erkennen, daß die schnellen Geschwindigkeitsfluktuationen um  $\pm v_0$  keinen großen Einfluß auf  $x(t)$  haben – auf großer Längenskale dominiert die gradlinige Bewegung  $v \approx \pm v_0$ , d.h. die Diffusionsstärke wird durch die Sprungrate für die Richtungsänderung festgelegt.

$$v(t) \approx \sigma(t), \quad (11)$$

der zwischen  $\pm v_0$  mit einer Rate  $r$  hin und her springt. Zwar enthält die Geschwindigkeit auch sehr schnelle Fluktuationen (diese könnten durch einen Ornstein-Uhlenbeck Prozeß mit Korrelationszeit  $\tau = (V''(v_0))^{-1}$  approximiert werden). Man kann jedoch zeigen, dass die Wirkung dieser Fluktuationen auf das diffusive Verhalten vernachlässigt werden kann, solange die Approximation mittels dichotomen Rauschens überhaupt sinnvoll ist.

Das Problem eines Teilchens mit rein dichotomer Zufallsgeschwindigkeit ist seit vielen Jahren bekannt und gelöst (siehe z.B. Ref. [14]); wir skizzieren hier nochmals die Lösung.

Für stationäre Geschwindigkeiten erhalten wir aus  $x(t) - x(0) = \int_0^t dt' v(t')$

$$\begin{aligned} \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle &= \int_0^t \int_0^t dt' dt'' \langle v(t') v(t'') \rangle \\ \langle (x(t) - x(0))^2 \rangle &\rightarrow 2t \int_0^\infty d\tau K(\tau) = 2D_{\text{eff}} t \quad \text{für } t \rightarrow \infty, \\ \Rightarrow D_{\text{eff}} &= \int_0^\infty d\tau K(\tau) \end{aligned} \quad (12)$$

wobei  $K(\tau)$  die stationäre Geschwindigkeitskorrelationsfunktion ist.

Letztere lautet für einen symmetrischen dichotomen Prozess der Amplitude  $v_0$  und Sprungrate  $r$

$$K(\tau) = v_0^2 e^{-2r|\tau|} \quad (13)$$

Mit Glg. (12) ergibt sich bei schwachem Rauschen für den Diffusionskoeffizienten

$$D_{\text{eff}} = \frac{v_0^2}{2r(D)}, \quad D \ll \Delta V \quad (14)$$

Bekannterweise fällt die Rate  $r$  exponentiell mit der inversen Rauschstärke ( $r \sim \exp[-\Delta V/D]$ ). Daraus ergibt sich eine außerordentlich starke (eben exponentielle) Divergenz des Diffusionskoeffizienten für  $D \rightarrow 0$ . Obgleich der Diffusionskoeffizient in zwei Raumdimensionen auch divergiert, ist in diesem Fall die Divergenz schwächer ( $D_{\text{eff}} \sim D^{-1}$ ). Das liegt daran, daß in zwei (und auch in höheren) Dimensionen Phasendiffusion dominiert — im mehrdimensionalen System muß keine Potentialbarriere überwunden werden.

Auch im entgegengesetzten Grenzfall sehr starker Rauschstärke können wir eine Abschätzung des Diffusionskoeffizienten vornehmen. Der Geschwindigkeitsbetrag wird in diesem Fall sehr groß sein und die Nichtlinearität in der Reibungsfunktion kann ignoriert werden. Mit anderen Worten: in diesem Grenzfall erhalten wir normale Brownsche Diffusion mit

$$D_{\text{eff}} = \frac{D}{\gamma^2}, \quad D \gg \Delta V \quad (15)$$

Aus den beiden Ausdrücken für den Diffusionskoeffizienten läßt sich ohne Schwierigkeit ersehen, daß die Diffusion bei einer mittleren Rauschstärke ( $D \sim \Delta V$ ) minimal sein muß. Dies wird durch die Simulationen in Abb. 3 bestätigt. Weiterhin zeigen die Simulationsdaten bei extremen Werten der Rauschstärke gute Übereinstimmung mit der Theorie.

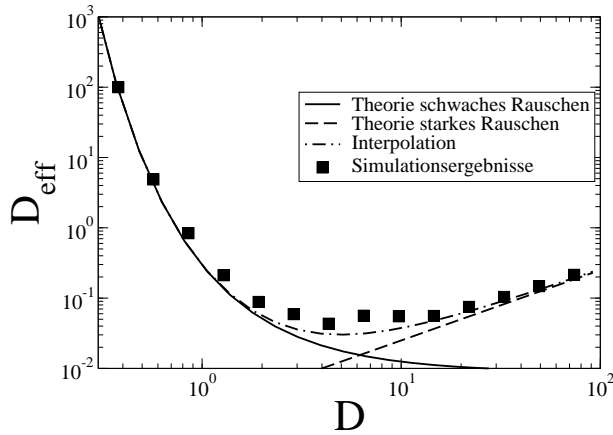
Da beide Formeln im jeweils entgegengesetzten Grenzfall vernachlässigbare Beiträge bringen, kann man eine Interpolationsformel für allgemeine Rauschstärke gewinnen, indem man einfach beide Formeln addiert

$$D_{\text{eff}} \approx \frac{v_0^2}{2r(D)} + \frac{D}{\gamma^2} \tag{16}$$

Diese Formel (Strich-Punkt Linie in Abb. 3) ist dicht an der Simulationskurve für alle Werte der Rauschstärke. Aus dieser Formel können wir auch eine Gleichung für das Minimum gewinnen und lösen

$$D_{\text{min}} = \Delta V/2 \left[ \mathcal{LW} \left( \frac{\sqrt{\delta V/\pi \sqrt{U'''(v_0)|U''(0)|}}}{2v_0\gamma} \right) \right]^{-1}. \tag{17}$$

Hierbei ist  $\mathcal{LW}(\dots)$  die LambertW Funktion [15]. Für unsere Standardparameter ergibt die Formel  $D_{\text{min}} \approx 5$  in guter Übereinstimmung mit den Simulationsergebnissen in Abb. 3.



**Abb. 3.** Diffusionskoeffizient als Funktion der Rauschstärke. Simulationsergebnisse (Quadrate) wurden aus 100 Realisierungen des stochastischen Prozesses Glg. (2) gewonnen. Hierzu wurden die Gleichungen mit einem Euler-Verfahren integriert (Zeitschritt 0.002); nach  $t = 10^4$  wurde die mittlere quadratische Abweichung bestimmt und aus dieser Größe der Diffusionskoeffizient abgeschätzt. Die durchgezogene Linie entspricht der Approximation für schwaches Rauschen Glg. (14), die gestrichelte Kurve ist die Approximation für großes Rauschen Glg. (15) und die Strich-Punkt Linie gibt die Summe beider Formeln wieder, d.h. die Interpolationsformel Glg. (16.)

Unsere bisherigen Ergebnisse implizieren, daß ein aktives Brownsches Teilchen mit Fluktuationen moderater Stärke getrieben werden muss, um es — salopp gesprochen — lahmzulegen, d.h. seine Diffusion zu minimieren. Ein ähnlicher Effekt konnte für überdämpfte passive Teilchen in periodischen Potentialen mit konstanter Kraft [16] oder mit multiplikativem Rauschen [17] gezeigt werden.

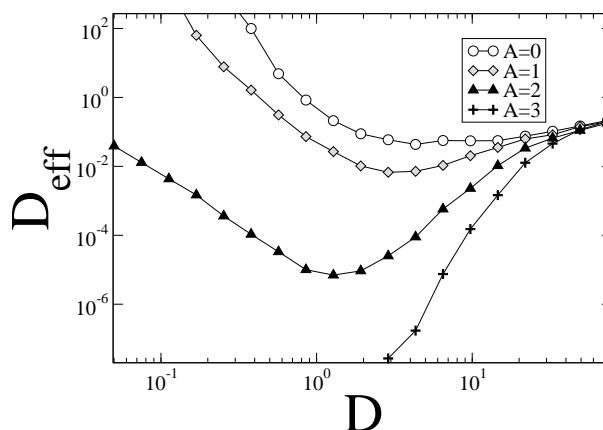
### 3 Diffusion in einem periodischen Potential

Wir denken uns das Teilchen nun dem Kraftfeld eines periodischen Potentials ausgesetzt

$$U(x) = A \cos(2\pi x). \quad (18)$$

Welche Wirkungen auf das diffusive Verhalten kann man für kleine und große Amplituden  $A$  erwarten ?

Wie in Abb. 4 gezeigt, führt eine kleine Amplitude des Potentials ( $A = 1$  für unsere Parameter) zu einer Reskalierung der Kurve, die wir bei  $A = 0$  erhalten hatten. Das Minimum in der Rauschstärke verschiebt sich zu kleineren Rauschwerten und die Kurve wird im allgemeinen nach unten verschoben (abgesehen vom Bereich sehr starker Rauschstärke).



**Abb. 4.** Diffusionskoeffizient als Funktion der Rauschstärke. Simulationsergebnisse für  $A = 0$  (Kreise) wurden aus Abb. 3 übernommen. Sonstige Simulationsergebnisse (verschiedene Symbole) wurden aus 300 Realisierungen des stochastischen Prozesses Glg. (2) gewonnen. Hierzu wurden die Gleichungen mit einem Euler-Verfahren integriert (Zeitschritt 0.002); nach  $t = 1.5 \times 10^5$  wurde die mittlere quadratische Abweichung bestimmt und aus dieser Größe der Diffusionskoeffizient abgeschätzt. Die unterschiedlichen Kurven entsprechen verschiedenen Amplituden  $A$  des periodischen Potentials.

Für eine große Amplitude ( $A = 3$ ) finden wir hingegen kein Minimum, stattdessen ein monoton ansteigendes Diffusionskoeffizienten. Man könnte meinen, daß das Minimum nur außerhalb des Bereiches läge, der mit einer endlichen Simulationszeit zugänglich ist. Im folgenden werden wir durch die Analyse des deterministischen Systems zeigen, daß dies nicht so ist, sondern daß oberhalb eines kritischen Wertes  $A_{crit}$  das deterministische System eine globale Bifurkation erfährt und sich aus diesem Grunde der Grenzfall schwachen Rauschens ändert und somit auch das Monotonieverhalten der Kurve  $D_{eff}(D)$ .

Da wir in dieser Arbeit den überdämpften Grenzfall betrachten, lohnt es sich, einen Blick auf die sogenannten Nullklinen des Systems zu werfen. Das sind die Linien, für die jeweils eine der Zeitableitungen im Fall ohne Rauschen ( $D = 0$ ) verschwindet. Für die Ortsvariable ist die Nullkline trivialerweise gegeben durch

$$v = 0 \quad (19)$$

also die  $x$ -Achse. Für die Geschwindigkeit erhalten wir die Gleichung

$$2\pi A \sin(2\pi x) = \gamma \left[ 1 - \frac{\alpha}{1 + v^2 d/c} \right] v, \quad (20)$$

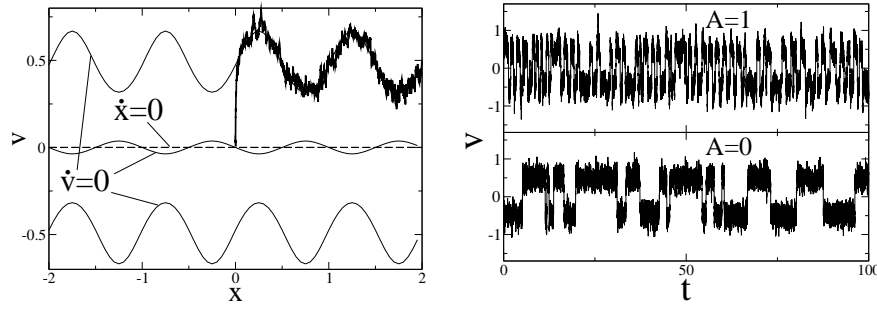
die wir entweder nach  $x$  oder nach  $v$  auflösen können. Die Gleichung ist kubisch in  $v$  und entsprechend können wir maximal drei reelle Lösungen für die Geschwindigkeit bei vorgegebenem  $x$  erhalten. Explizite Lösungen für den Ort als Funktion der Geschwindigkeit sind leichter zu erhalten; zwei verschiedene Sätze von Lösungen als  $x = f_v(v)$  lauten

$$\begin{aligned} f_{v,1,n}(v) &= n + \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( \frac{\gamma}{2\pi A} \left[ 1 - \frac{\alpha}{1 + v^2 d/c} \right] v \right), \quad n = \dots - 1, 0, 1, \dots \\ f_{v,2,n}(v) &= n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \arcsin \left( \frac{\gamma}{2\pi A} \left[ 1 - \frac{\alpha}{1 + v^2 d/c} \right] v \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Grundsätzlich wird das System dicht an den stabilen Ästen dieser Nullklinen bleiben, da nach Voraussetzung die Geschwindigkeit die schnelle Variable ist. Die Schnittpunkte der  $x$  und  $v$  Nullklinen ergeben die Fixpunkte des Systems. Es läßt sich recht einfach zeigen, daß alle diese Punkte für  $\alpha > 1$  instabile Fixpunkte sind. Das System bleibt also auch im deterministischen Fall ( $D = 0$ ) immer in Bewegung. Wir werden allerdings sehen, daß prinzipiell zwei Arten der Bewegung möglich sind, welche sehr unterschiedliche Konsequenzen für das diffusive Verhalten des verrauschten Systems haben.

Für eine relativ kleine Amplitude von  $A = 1$  haben wir für beliebiges  $x$  drei reelle Lösungen in der Geschwindigkeitsnullkline (Abb. 5). Diese Lösungen oszillieren um die Lösungen des potentialfreien Systems ( $v = 0, v = \pm v_0$ ). Die mittlere Lösung (Oszillation um  $v = 0$ ) ist bezüglich der Geschwindigkeit instabil. Starten wir, zum Beispiel eine Trajektorie mit kleinem Rauschen bei  $x = v = 0$  (vgl. Abb. 5, links), so entweicht sie auf einen der stabilen Äste





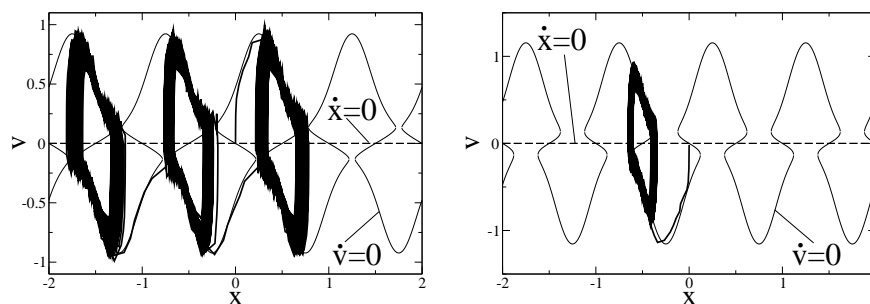
**Abb. 5.** Links: Nullklinen des Systems für  $A = 1$ : die dünnen durchgezogenen Linien entsprechen den Nullklinen für die Geschwindigkeitsvariable (in diesem Fall aus Glg. (20) durch Auflösung nach  $v$  bestimmt, wobei MAPLE benutzt wurde). Beispieltrajektorie  $(x(t), v(t))$  für eine Rauschstärke von  $D = 0.05$  (dicke durchgezogene Linie) ist ebenfalls gezeigt; Anfangswerte waren  $x(0) = v(0) = 0$ . Rechts: Vergleich der Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für eine schwache Amplitude von  $A = 1$  (oben) und das potentialfreie System  $A = 0$  (unten). Das periodische Potential erhöht deutlich die Übergangsrate zwischen den beiden Geschwindigkeitsrichtungen. Die Rauschstärke ist hier sehr viel höher als links, nämlich  $D = 1$ .

der  $v$ -Nullkline, also entweder auf den oberen (einer Rechtsbewegung entsprechend) wie in Abb. 5 (links) oder auf den unteren Ast (Linksbewegung). Ein Wechsel der Geschwindigkeitsrichtung (Übergang von unteren zu oberem Ast oder umgekehrt) ist nur möglich durch die Fluktuationen ganz analog zur freien Diffusion. Die Übergangsrate für  $A > 0$  ist jedoch deutlich grösser als für die freie Diffusion aktiver Teilchen (vgl. Abb. 5, rechts). Der endliche Kraftterm  $-U'(x)$  führt zu einer Asymmetrie im Geschwindigkeitspotential, die in bestimmten räumlichen Regionen den Übergang von einer Geschwindigkeit zur entgegengesetzten erleichtert. Da der effektive Diffusionskoeffizient invers von der Übergangsrate abhängt, erklärt der Anstieg in der Rate, warum der Diffusionskoeffizient im Vergleich zum Fall der freien Diffusion abnimmt.

Bei hinreichend großem  $A$  ist die Struktur der  $v$  Nullkline eine völlig andere (Abb. 6). Eine Analyse der Nullklinen (Details an anderer Stelle) ergibt für das kritische  $A$  (im Fall perfekter Überdämpfung und für die Parameter in Glg. (4))

$$A_{crit} \approx 2.055 \quad (22)$$

Für unterkritische Werte ( $A < A_{crit}$ ) entsprach die Geschwindigkeitsnullkline drei verschiedenen Kurven (vergleiche Abb. 5, links). Für  $A > A_{crit}$  kann man nunmehr die Geschwindigkeitsnullkline in einem räumlichen Intervall als *eine* Kurve zeichnen (vergleiche Abb. 6), die nur noch in gewissen Bereichen von  $x$  drei verschiedene Werte der Geschwindigkeit besitzt. In besagten Bereichen haben wir noch einen mittleren Ast, der weiterhin (wie vorher die mittlere Kurve) dynamisch instabil ist. Die Dynamik entspricht hier der eines Relaxationsoszillators, in der  $v$  die schnelle Variable ist. Startet man eine Trajektorie bei  $x = v = 0$  (Abb. 6), so läuft sie in einen der benachbarten Grenzzyklu-



**Abb. 6.** Nullklinen des Systems für große Amplituden. Links:  $A = 2.1$  nahe an der Bifurkation. Rechts:  $A = 3$ . Sonstige Parameter wie in Abb. 5, links.

sattraktoren hinein, ganz so wie ein passives überdämpftes Teilchen in das nächste Potentialminimum fallen würde.

Ist das System überkritisch aber dicht an der Bifurkation ( $A - A_{crit} \ll A_{crit}$ ) kann man Übergänge zwischen benachbarten Grenzzyklen beobachten. Das ist in Abb. 6 (links) gezeigt: die Trajektorie (wieder bei  $x = v = 0$  gestartet) bewegt sich auf dem oberen Ast der Nullkline nach rechts, gelangt auf den dortigen Grenzzyklus und durchläuft ihn viele Male. Eine Fluktuation ermöglicht den Übergang zum links benachbarten Grenzzyklus (dieser Übergang erfolgt in der Nähe des Punktes  $x = 0.25, v = 0.25$ ). Weitere rauschinduzierte Übergänge (hier zufälligerweise alle nach links) erfolgen, nachdem der jeweilige Grenzzyklus viele Male durchfahren wurde.

Für unterkritische Potentialamplitude verhält sich das System wie ein periodisch getriebenes Teilchen, was in Bezug auf die Diffusion zu modifizierten Übergangsraten, jedoch nicht zu einem qualitativ neuen Verhalten gegenüber dem potentialfreien Fall führt.

Für überkritische Amplitude hingegen oszilliert das System lokal auf einem  $x - v$  Grenzzyklus und kann großskalige Diffusion nur zeigen wenn Fluktuationen Übergänge zwischen benachbarten Grenzzyklen induziert. Auf großen Skalen und für  $A > A_{crit}$  verhält sich ein aktives Teilchen somit ähnlich einem passiven überdämpften Brownschen Teilchen im periodischen Potential, das sich durch rauschinduzierte Übergänge zwischen benachbarten Potentialminima diffusiv bewegt.

## 4 Ausblick

Das hier gezeigte Verhalten aktiver Teilchen in räumlich periodischen Potentialen lädt ein zu einer gründlicheren analytischen Untersuchung. Für den Fall kleiner Potentialamplitude lassen sich sicherlich die Abschätzungen für den Fall der freien Diffusion verallgemeinern — wie oben angedeutet führt

das periodische Kraftfeld zu einer Modifikation der Sprungraten bei kleinen Rauschstärken während man bei starkem Rauschen wiederum freie Diffusion [Glg. (15)] annehmen kann.

Die Übergänge zwischen benachbarten Grenzyklen im Fall starker Potentialamplitude scheinen analytisch schwerer zugänglich zu sein. Insbesondere müßte hier wohl eine endliche Dämpfung berücksichtigt werden. Letztere wird sicherlich auch zu anderen interessanten Effekten in der Dynamik aktiver Brownscher Teilchen in periodischen Potentialen führen. Diese und andere Verallgemeinerungen des Problems bleiben zukünftigen Arbeiten vorbehalten.

## Literaturverzeichnis

1. H. C. Berg. *Random Walks in Biology*. Princeton University Press, Princeton, 1993.
2. F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch. Complex motion of Brownian particles with energy depots. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5044, 1998.
3. W. Ebeling, F. Schweitzer, and B. Tilch. Active Brownian particle with energy depots modeling animal mobility. *BioSystems*, 429:17, 1999.
4. U. Erdmann, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and F. Schweitzer. Brownian particles far from equilibrium. *Eur. Phys. J. B*, 15:105, 2000.
5. F. Schweitzer, B. Tilch, and W. Ebeling. Uphill motion of active Brownian particles in piecewise linear potentials. *Eur. Phys. J. B*, 14:157, 2000.
6. U. Erdmann, W. Ebeling, and A. S. Mikhailov. Noise-induced transition from translational to rotational motion of swarms. *Phys. Rev. E*, 71:051904, 2005.
7. U. Erdmann and W. Ebeling. Collective motion of Brownian particles with hydrodynamic interactions. *Fluc. Noise Lett.*, 3:L145, 2003.
8. L. Schimansky-Geier, U. Erdmann, and N. Komin. Advantages of hopping on a zig-zag course. *Physica A*, 351:51, 2005.
9. A. S. Mikhailov and D. Meinköhn. Self-motion in physico-chemical systems far from thermal equilibrium. In L. Schimansky-Geier and T. Pöschel, editors, *Stochastic Dynamics*, page 334. Springer, Berlin, London, New York, 1998.
10. W. Ebeling. Nonlinear Brownian motion. *Condensed Matter Physics*, 7:539, 2004.
11. C. A. Condat and G. J. Sibona. Diffusion in a model for active Brownian motion. *Physica D*, 168-169:235, 2002.
12. H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7:284, 1940.
13. H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, 1984.
14. J. M. Sancho. Stochastic processes driven by dichotomous Markov noise: Some exact dynamical results. *J. Math. Phys.*, 25:354, 1984.
15. R.M. Corless, G.H. Gonnet, D.E.G. Hare, D.J. Jeffrey, and D.E. Knuth. On the Lambert W function. *Adv. Comp. Math.*, 5:329, 1996.
16. B. Lindner, M. Kostur, and L. Schimansky-Geier. Optimal diffusive transport in a tilted periodic potential. *Fluctuation and Noise Letters*, 1:R25, 2001.
17. B. Lindner and L. Schimansky-Geier. Noise-induced transport with low randomness. *Phys. Rev. Lett.*, 89:230602, 2002.

