

Magnetohydrodynamik

Horst Wobig

Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Garching bei München

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Begriffe, Definitionen, Eigenschaften	4
1.1.1	Nützliche Vektorformeln	8
1.1.2	Formeln zum Geschwindigkeitsfeld	8
1.2	Plasmaparameter	10
1.2.1	Debyelänge	10
1.2.2	Quasineutralität	11
1.2.3	Plasmafrequenz	12
1.2.4	Gyroradius	12
1.2.5	Landaulänge	13
1.2.6	Freie Weglänge	14
1.2.7	Kurven von Plasmaparametern	15
2	Flüssigkeitsmodell	18
2.1	Definition der Plasmaparameter	18
2.1.1	Definition der Momente	18
2.1.2	Beispiele dynamischer Funktionen	19
2.2	Relationen zwischen Plasmaparametern	20
2.3	Elektromagnetische Größen	21
2.3.1	Magnetische und elektrische Kräfte im Plasma	21
2.4	Impulsbilanz im Plasma	22
2.5	Das Zweikomponentenplasma	24
2.6	Ideale Magnetohydrodynamik	26
3	Erhaltungssätze der Magnetohydrodynamik	27
3.1	Der Virialsatz	27
3.2	Flusserhaltung	28
3.3	Impulserhaltung	29
3.4	Energieerhaltung	30
4	Plasmagleichgewicht	31
4.1	Grundgleichungen	31
4.2	Einfache Gleichgewichte	32
4.2.1	Die Bennetrelation	34
4.2.2	Feldlinien	34
4.3	Magnetische Flächen	35
4.3.1	Definitionen auf magnetischen Flächen	35
4.4	Axialsymmetrische Gleichgewichte	37
4.4.1	Die Lüst-Schlüter-Grad-Shafranov-Gleichung	39
4.5	Tokamakgleichgewicht	41
4.5.1	Integrale Gleichgewichtsbeziehung	42
4.5.2	Die Bennetrelation im Tokamak	42

4.5.3	Tokamakgleichgewicht mit elektrischem Widerstand	43
4.5.4	Hamada Koordinatensystem	44
4.5.5	Berechnung der integralen Flüsse	46
4.5.6	Transportgleichungen	47
4.5.7	Die Onsager-Symmetrie	47
4.5.8	Die Shafranov-Verschiebung	48
4.6	Dreidimensionale Gleichgewichte	50
4.6.1	Das Variationsprinzip	50
4.6.2	Kraftfreie Magnetfelder	52
4.6.3	Berechnung toroidaler Gleichgewichte	53
4.6.4	Das Stellaratorgleichgewicht	53
4.6.5	Darstellung des Magnetfeldes	54
4.6.6	Darstellung des Plasmastromes	55
4.6.7	Rektifizierung der Feldlinien und Stromlinien	56
4.6.8	Vakuumbild	58
4.6.9	Klassische Diffusion	59
4.6.10	Optimierung des Stellarators	60
4.6.11	Differentialgleichung für 3-D-Gleichgewichte	62
4.6.12	Stationäres Gleichgewicht	63
5	MHD-Stabilität des Plasmas	66
5.1	Der lineare Z-Pinch	66
5.2	Kink-Instabilität	67
5.3	Austauschinstabilität	67
5.4	Stabilität in Eulerscher Darstellung	68
5.4.1	Das Energieprinzip der MHD-Stabilität	69
5.4.2	Explizite Form der Energieprinzips	70
5.5	Beispiel: Der lineare diffuse Pinch	72
6	Magnetohydrodynamische Wellen	75
6.1	Schallwellen	76
6.2	Alfvénwellen	76
6.3	Allgemeiner Fall	77

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Begriffe, Definitionen, Eigenschaften

Die wesentlichen Begriffe, Eigenschaften, Parameter und Vorkommen des Plasmas sollen im folgenden stichwortartig zusammengefasst werden.

Was ist ein Plasma ? Ein vollständig oder teilweise ionisiertes Gas

Wie entsteht ein Plasma ?
Durch Stoßionisation
Durch thermische Ionisation
Durch Strahlungsionisation

Wo gibt es Plasmen ?
Im Urknall
Im Weltall
In der Umgebung der Erde
Auf der Erde

Typen von Plasmen, Vorkommen und Anwendung

Extraterrestrische Plasmen	Quark-Gluonenplasma Galaktische Nebel Planetarische Nebel Sternatmosphären Sterninneres Sternenwind Magnetosphäre Strahlungsgürtel der Planeten Ionosphäre der Erde Atmosphäre (Blitze)
Terrestrische Plasmen	Festkörperplasmen Fusionsexperimente MHD-Generatoren Plasmatechnologie Plasmachemie Plasmatriebwerke

Zusammensetzung von häufigen Plasmen:

Reines Wasserstoffplasma	Protonen, Elektronen
Fusionsplasma	Deuteronen, Tritonen, Alphateilchen, Elektronen
Sonne	Wasserstoff(73.5%), Helium (24.8%) Sauerstoff (0.77%), Kohlenstoff (0.3%) sonstige Elemente (Eisen,Neon,Stickstoff, Silizium, Magnesium)
Sonnenatmosphäre	Wasserstoffplasma mit Beimengungen von Natrium, Magnesium, Kalzium, Aluminium, Chrom, Titan, Eisen (Fraunhoferlinien, Eisenlinien in der Korona)
Ionosphäre	Sauerstoffionen, NO-Ionen, Elektronen
Allgemein	Elektronen, N verschiedenen Ionentypen

Wichtige Plasmaparameter

Teilchendichte jeder Komponente	$n_i(\mathbf{x}, t)$
Temperatur	$T_i(\mathbf{x}, t)$
Thermische Energie	$3/2nkT$
Druck	$p_i(\mathbf{x}, t)$
mittlere Geschwindigkeit	$\mathbf{V}_i(\mathbf{x}, t)$
Magnetfeld	$\mathbf{B}_i(\mathbf{x}, t)$
Elektrisches Feld	$\mathbf{E}_i(\mathbf{x}, t)$
Plasmastromdichte	$\mathbf{j}_i(\mathbf{x}, t)$

Wichtige Plasmaeigenschaften

Kleine Debyelänge ($\lambda_D \ll$ Plasmadurchmesser)
 Quasineutralität ($n_e = \text{Summe}(n_i * Z_i)$)
 Große elektrische Leitfähigkeit
 Flusserrhaltung \Rightarrow "Eingefrorenes" Magnetfeld "
 Ausbreitung von Wellen möglich
 (Schallwellen, elektromagnetische Wellen, Alfvénwellen)
 Plasmaeinschluss durch Magnetfelder möglich

Charakteristische Längen im Plasma

Debyelänge λ_D :	Abschirmung einer einzelnen Ladung
Gyroradius ρ	Teilchenbewegung quer zum Magnetfeld
Freie Weglänge λ	Bewegung parallel zum Magnetfeld \rightarrow Stöße
Landaulänge	Coulombstoßprozess
deBroglie-Länge	Quantenmechanische Effekte

Charakteristische Frequenzen

Plasmafrequenz ω_p	Plasmaschwingungen
Gyrofrequenz Ω	Zyklotronresonanz Zyklotronstrahlung Plasmaheizung
Stoßfrequenz ν	Diffusionsprozesse Elektrischer Widerstand Wärmeleitung

Dimensionslose Größen im Plasma

- Anzahl der Teilchen im Debyeolumen $N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3$
- Plasmadruck/Magnetfelddruck $\beta = 2\mu_0 p / B^2$
- Gyroradius/Plasmadurchmesser ρ / L
- Freie Weglänge/Plasmadurchmesser λ / L
- Lundquistzahl $R_M = \mu_0 u L / h$

Typen von Plasmen

- Schwachionisiertes und vollionisiertes Plasma
- Ideales Plasma $N_D \gg 1$
- Nichtideales Plasma $N_D \leq 1$
- Stoßdominiertes Plasma $\lambda \leq L$
- Stoßfreies Plasma $\lambda > L$
- Entartetes und nichtentartetes Plasma $kT > E_F$
- Relativistische und nichtrelativistische Plasmen $kT > mc^2$

Beschreibung des Plasmas

- Teilchenbild 10^{20} Teilchenbahnen
- Kinetische Beschreibung Verteilungsfunktion $f(v, x, t)$
kinetische Gleichung
- Mehrflüssigkeitsmodell Jede Teilchensorte (Ionen, Elektronen)
wird wie eine Flüssigkeit betrachtet
- Einflüssigkeitsmodell Ideale MHD (isotroper Druck,
keine Dissipation) Resistive MHD
(elektrischer Widerstand,
Wärmeleitung, Viskosität)

Zusammenfassung der wichtigsten Plasmaparameter

Debye-Länge

In einem vollionisierten Plasma gibt es nahezu gleich viel positive wie negative Ladungsträger. Das Coulombfeld einer Testladung wird in einer gewissen Entfernung durch andere Ladungsträger abgeschirmt. Die charakteristische Distanz dafür ist die Debye-Länge.

Plasmafrequenz

Eine Ladungstrennung in einem Plasma führt wegen des resultierenden elektrischen Feldes zu einer rücktreibenden Kraft. Das Plasma wird dadurch zu einem schwingungsfähigen Gebilde, die charakteristische Frequenz für diesen Vorgang ist die Plasmafrequenz.

Gyroradius

Geladene Teilchen werden in einem Magnetfeld senkrecht zur Geschwindigkeit abgelenkt. In einem homogenen Magnetfeld ist die resultierende Bahn eine Kreisbahn. Der Radius dieses Kreises heisst Gyroradius.

Gyrofrequenz

Die Gyrofrequenz ist die Kreisfrequenz der Gyrationbewegung im homogenen Magnetfeld.

Landau-Länge

Die Landau-Länge ist der Stoßparameter, bei dem geladene Teilchen bei einem Coulombstoß um 90° abgelenkt werden.

Mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge ist die Distanz, die ein thermisches Teilchen zurücklegt, bis es durch Coulombstöße um 90° abgelenkt wird.

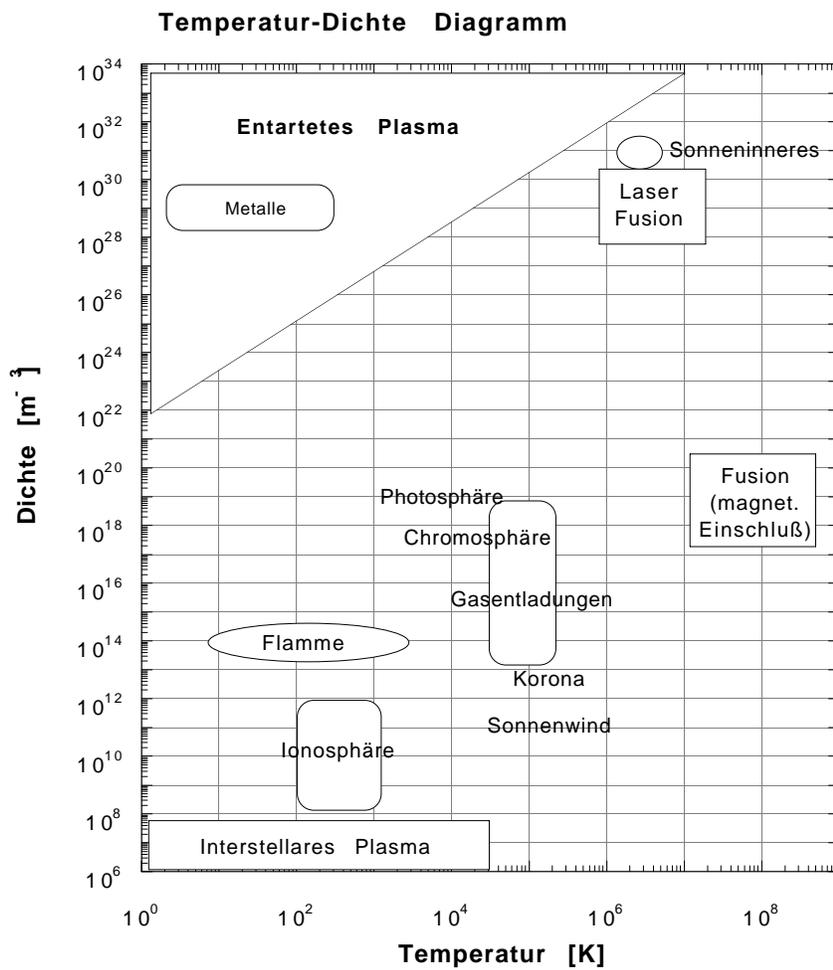


Abbildung 1.1: Dichte und Temperaturbereich einiger Plasmen

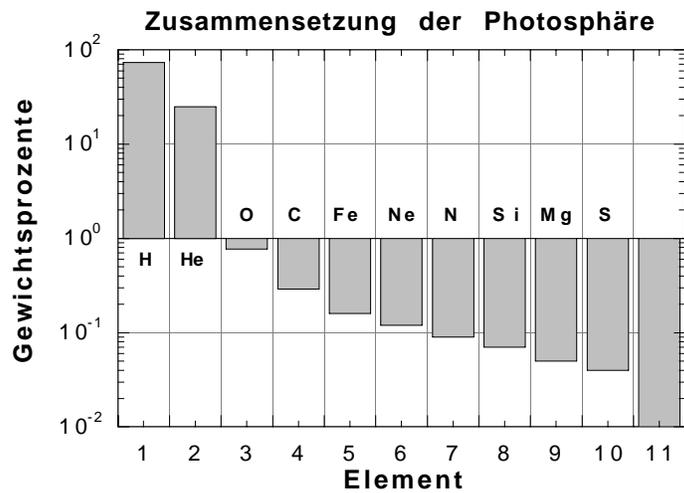


Abbildung 1.2: Beispiel eines komplexen Plasmas. Photosphäre der Sonne

1.1.1 Nützliche Vektorformeln

Im folgenden werden einige Vektorformeln beschrieben, die in den Gleichungen der Magneto hydrodynamik häufig benutzt werden. Es seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Vektoren und f ein Skalar, dann gelten die Formeln (Siehe Rottman, BI-Taschenbücher 13)

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}f) = f \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (1.1)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a}f) = f \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \nabla f \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \nabla f = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} \quad (1.5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} \quad (1.6)$$

$$\nabla (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (1.7)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a} \quad (1.8)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \nabla \frac{a^2}{2} - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (1.9)$$

Häufig werden in der MHD-Theorie noch der Gauss'sche und der Stokes'sche Satz benutzt. Der Gauss'sche Satz verwandelt ein Volumenintegral in ein Oberflächenintegral:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} d^3 \mathbf{x} = \iint_F \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f} \quad (1.10)$$

Das Gebiet V ist einfach zusammenhängend und $d\mathbf{f}$ ist ein gerichtetes Oberflächenelement. Der Satz von Stokes transformiert ein Flächenintegral in ein Linienintegral

$$\iint_F (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{f} = \oint_S \mathbf{a} \cdot ds \quad (1.11)$$

ds ist ein Linienelement längs der Berandung von F .

1.1.2 Formeln zum Geschwindigkeitsfeld

In der Flüssigkeitsbeschreibung spielen orts- und zeitabhängige Vektorfelder eine zentrale Rolle. Ein Plasma hat im Flüssigkeitsmodell an jedem Ort eine Geschwindigkeit, ein Magnetfeld, ein elektrisches Feld sowie je nach Komplexität des Modells noch andere Vektoren wie Wärmeströme etc. Wir betrachten im folgenden ein zeitabhängiges Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Jeder Punkt \mathbf{x}_0 des Raumes wird durch die Geschwindigkeit in dem Zeitintervall t in einen anderen Punkt \mathbf{x} transformiert. Ein Beobachter, der sich mit der Strömung mitbewegt, erfährt eine Verschiebung \mathbf{X} , die sich aus

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \quad (1.12)$$

berechnet. Diese Differentialgleichung definiert den Verschiebungsvektor $\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t)$. \mathbf{x}_0 ist der Anfangsort. Diese Verschiebung kann als eine zeitabhängige Abbildung

$$T(t) : \mathbf{x}_0 \longrightarrow \mathbf{x} \quad (1.13)$$

des Raumes auf sich selbst betrachtet werden. Damit lässt sich die Deformation von Volumenelementen und Flächenelementen durch die Strömung als Koordinatentransformation interpretieren. Ein Bogenelement ds wird zu einem Element ds' , ein Flächenelement $d\mathbf{f}$ zu $d\mathbf{f}'$ und ein Volumenelement $d^3 \mathbf{x}$ zu $d^3 \mathbf{x}'$. Nach der Zeitspanne dt wird das Bogenelement

$$ds' = (ds \cdot \nabla) \mathbf{V} dt \Rightarrow \frac{d}{dt} ds = (ds \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1.14)$$

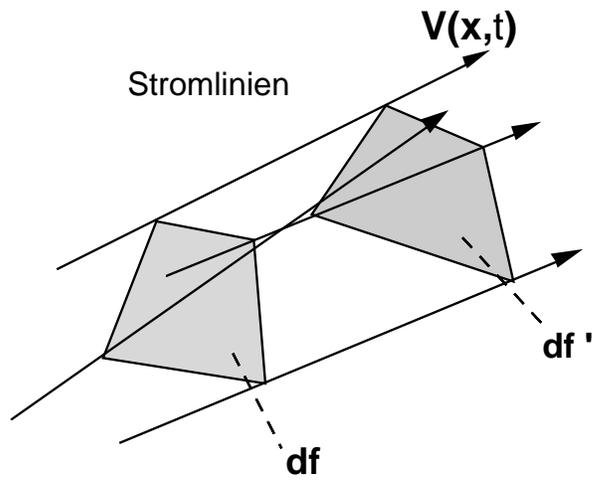


Abbildung 1.3: Deformation eines Flächenelementes in einer Strömung

Ein Flächenelement wird auf ähnliche Weise deformiert

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{f} = d\mathbf{f}(\nabla \cdot \mathbf{V}) - (\nabla : \mathbf{V})d\mathbf{f} \quad (1.15)$$

Für ein dreidimensionales Volumenelement erhält man die einfache Formel

$$\frac{d}{dt}d^3\mathbf{x} = d^3\mathbf{x}(\nabla \cdot \mathbf{V}) \quad (1.16)$$

In einer inkompressiblen Flüssigkeit bleibt das Volumen eines Flüssigkeitselements erhalten. Aus

$$\frac{d}{dt}d^3\mathbf{x} = 0 \quad (1.17)$$

folgt dann $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Diese Formeln werden bei den Erhaltungssätzen der Magnetohydrodynamik und in der Stabilitätsanalyse des Plasmas häufig angewendet.

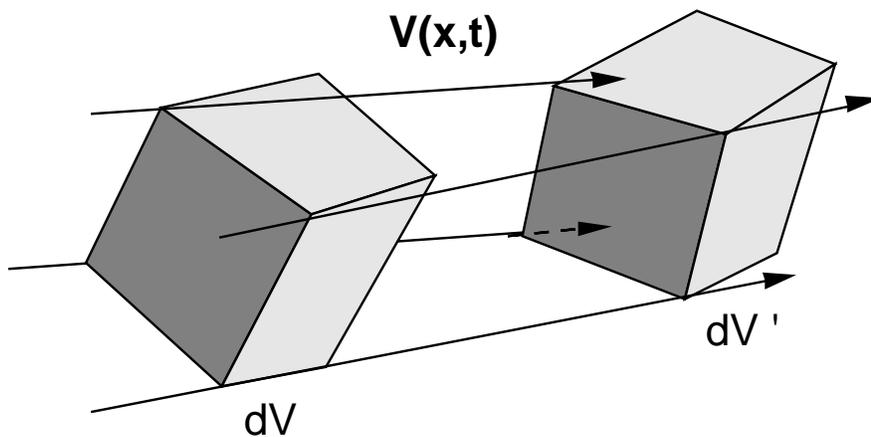


Abbildung 1.4: Deformation eines Volumenelementes in einer Strömung

1.2 Plasmaparameter

1.2.1 Debyelänge

Die Debye-Länge ist eine wichtige Größe in einem vollionisierten Plasma; sie ist im allgemeinen klein gegenüber den Ausdehnungen des Plasmas. Diese Relation kann als Charakteristikum für ein vollständig ionisiertes Plasma angesehen werden. Ist die Debye-Länge groß, dann ist das Plasma lediglich ein Ensemble unterschiedlich geladener Teilchen.

Um die Debye-Länge verständlich zu machen, betrachten wir zwei unterschiedliche Situationen, in denen die Debye-Länge eine Rolle spielt. Die eine ist die klassische Elektronenröhre, in der eine Elektronenwolke von der Kathode emittiert wird. Die Ausdehnung dieser Raumladung hängt von der Zahl der Elektronen, der Temperatur und der angelegten Spannung ab. Das elektrische Feld lässt sich im stationären Zustand aus einem Potential ableiten: $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Dieses elektrische Potential ϕ berechnet sich aus der Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{x}) \Rightarrow -\Delta\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{x}) \quad (1.18)$$

Die Ladungsdichte erhält man aus der Verteilungsfunktion der Elektronen, wobei man thermisches Gleichgewicht der Elektronen voraussetzt. Diese Voraussetzung ist zwar nicht überall erfüllt, reicht aber für die vorliegenden Betrachtungen aus. Die Verteilungsfunktion ist im thermischen Gleichgewicht eine Maxwellverteilung

$$f(\mathbf{v}) \propto \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \propto \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} - \frac{q\phi}{kT}\right) \quad (1.19)$$

Dabei ist q die Ladung der Teilchensorte, bei Elektronen haben wir also $q = -e$ und bei den positiven Wasserstoffionen $q = e$ (e ist die Elementarladung). Die Dichte der geladenen Teilchen ist damit

$$n(\mathbf{x}) = \iiint f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) d^3\mathbf{v} = n_0 \exp\left(-\frac{q\phi}{kT}\right) \quad (1.20)$$

und die Poissongleichung lautet

$$-\Delta\phi = \frac{qn_0}{\epsilon_0} \exp\left(-\frac{q\phi}{kT}\right) \quad (1.21)$$

Diese Gleichung macht man durch Normierung des Potentials dimensionslos. Mit $U = -q\phi/kT$ wird die Gleichung

$$\Delta U = \frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 kT} \exp(U) \quad (1.22)$$

In dieser Gleichung tritt eine charakteristische Länge auf - die "Debyelänge" - sie ist ein Längenmaß für die Potentialänderungen:

$$\lambda_D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{q^2 n_0} \quad (1.23)$$

In eindimensionaler Näherung lassen sich analytische Näherungen angeben¹, die zeigen, dass sich die wesentlichen Potentialänderungen in der Größenordnung Debye-Länge abspielen. Ist die Dichte groß genug und die Temperatur klein genug, dann ist die Debye-Länge klein und die Raumladung in der Elektronenröhre sitzt dicht vor der Kathode.

Das obige Beispiel zeigt, dass der Begriff "Debyelänge" bereits in einem reinen Elektronengas relevant ist, in eine Plasma dagegen spielt die Debye-Länge vor allem in der Abschirmung der Ladungsträger und damit bei der sogenannten "Quasi-Neutralität" eine wichtige Rolle. Diese Abschirmung soll im folgenden kurz skizziert werden. Dazu betrachten wir ein Plasma mit mindestens einer Ionensorte und greifen ein bestimmtes Teilchen - ein Testteilchen - mit der Ladung q heraus. Dieses Testteilchen hat eine deltaförmige Ladungsverteilung $\sigma = q/\epsilon_0 \delta(\mathbf{x})$. Die Ladung des Hintergrundplasmas ist

$$\sigma = \sum_{\mathbf{v}} \frac{q_{\mathbf{v}}}{\epsilon_0} N_{\mathbf{v}} \exp\left(-\frac{q_{\mathbf{v}}\phi}{kT}\right) \quad (1.24)$$

¹Siehe Bergmann-Schaefer, Bd II, Kap. Gasentladungen

wobei wir noch voraussetzen, das in jedem Volumenelement gleich viel positive wie negative Ladungen vorhanden sind, d.h. $\sum_v q_v N_v = 0$. N_v ist die Teilchendichte jeder Teilchenart. Mit der Näherung $|q\phi| \ll kT$ lautet die Poisson-Gleichung

$$-\Delta\phi - \frac{1}{\lambda_D^2}\phi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}) \quad (1.25)$$

dabei ist die Debye-Länge definiert durch

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_v \frac{q_v^2 N_v}{\epsilon_0 k T_v} \quad (1.26)$$

In Kugelkoordinaten lautet diese Gleichung

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{\lambda_D^2}\phi = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\mathbf{x}) \quad (1.27)$$

Die dreidimensionale kugelsymmetrische Lösung dieser Gleichung ist²

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.28)$$

Die Formel für die Debye-Länge eines Zweikomponentenplasmas lautet:

$$\lambda_D = 7.43 * 10^3 \sqrt{\frac{kT}{n}} [m]; kT[eV], n[m^{-3}] \quad (1.29)$$

Beispiel: $kT = 1 \text{ keV}$, $n = 10^{20} \text{ m}^{-3} \Rightarrow \lambda_D = 2.35 * 10^{-5} \text{ m}$. Die Lösung (1.28) besagt, dass das Potential der Testladung in einer Distanz, die größer als die Debye-Länge ist, exponentiell abfällt. In einer Distanz, die größer als die Debye-Länge ist, spürt man von der Testladung praktisch nichts mehr, die Testladung wird durch das umgebende Plasma abgeschirmt. Da die Testladung durch nichts ausgezeichnet ist, gilt diese Abschirmung für alle Plasmateilchen. Die Debye-Länge ist in der Regel klein gegenüber typischen Plasmadimensionen. Dies gilt insbesondere für dichte Plasmen aber auch für kosmische Plasmen.

1.2.2 Quasineutralität

Wegen der kleinen Debye-Länge ist ein Plasma elektrisch nahezu neutral ("Quasi-Neutralität"), d.h. die Summe der negativen Ladungen ist nahezu gleich der Summe der positiven Ladungen, d.h. $\sum_v n_v q_v = 0$. Eine Abweichung von der Neutralität führt zum Aufbau eines elektrischen Feldes. Die dazu notwendige Energie kann aber nur aus der thermischen Energie des Plasmas kommen und ist damit beschränkt. Die konkrete Fragestellung im folgenden soll daher sein: Wie groß ist die Abweichung von der Neutralität, um eine Potentialdifferenz von der Ordnung 1 (d. h. $e\phi/kT = o(1)$) aufrecht zu erhalten? Aus der Poissongleichung eines 2-Komponentenplasmas folgt:

$$-\lambda_D^2 \Delta\phi = \frac{n_e - n_i}{n_e} \quad (1.30)$$

Schwankt das (dimensionslose) Potential U über die Länge L um den Wert 1, dann ist die Differenz der Ladungen

$$\frac{n_e - n_i}{n_e} = \frac{\lambda_D^2}{L^2} \quad (1.31)$$

Solange sich die Potentialschwankung auf Längenskalen abspielt, die groß gegenüber der Debye-Länge sind und die Amplitude von der Ordnung 1 ist, ist die relative Ladungsschwankung sehr klein. Daher der Begriff "Quasi-Neutralität". Schwankt das elektrische Potential bereits über eine Debye-Länge erheblich, dann ist die Näherung der Quasineutralität nicht mehr gerechtfertigt.

²Siehe auch Helmholtzgleichung der Elektrodynamik, Smirnow: Lehrgang der Höheren Mathematik, Bd IV, 585

1.2.3 Plasmafrequenz

Eine Abweichung von der Neutralität kann zu Plasmaschwingungen führen. Die Elektronen erfahren im elektrischen Feld eine Kraft, die die Abweichung von der Quasi-Neutralität rückgängig zu machen versucht. Die Ionen werden in einem einfachen Bild als ruhend angesehen und die Elektronen durch das E-Feld beschleunigt.

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E} \quad (1.32)$$

Für den elektrischen Strom $\mathbf{j} = en_e\mathbf{v}$ gilt dann

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{den_e\mathbf{v}}{dt} = \frac{e^2n_e}{m_e} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (1.33)$$

Setzt man dies in die beiden Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\mathbf{x}) ; \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad (1.34)$$

ein, dann erhält man für die Ladungsdichte σ die Schwingungsgleichung

$$\omega_{pe}^2 \sigma + \frac{d^2\sigma}{dt^2} = 0 \quad (1.35)$$

wobei die Plasmafrequenz ω_{pe} durch

$$\omega_{pe}^2 = \frac{e^2n_e}{m_e\epsilon_0} \quad (1.36)$$

definiert ist. Der Zahlenwert ist

$$\omega_{pe} = 56.4 \sqrt{n_e} [\text{s}^{-1}] \quad (1.37)$$

In dichten Fusionsplasmen ist diese Frequenz wesentlich größer als alle anderen relevanten Frequenzen.

1.2.4 Gyroradius

Eine weitere wichtige Länge eines Plasmas im Magnetfeld ist der Gyroradius. Die Bewegung eines geladenen Teilchens im homogenen Magnetfeld wird beschrieben durch die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.38)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{q}{m} v_y B \quad ; \quad \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q}{m} v_x B \quad (1.39)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben eine Bewegung in der x, y -Ebene. Die z -Bewegung ist von dieser entkoppelt. Die Geschwindigkeit in z -Richtung ist konstant und soll hier nicht weiter berücksichtigt werden. Die Lösung der Gleichung ist

$$v_x = v_{\perp} \sin(\Omega t) \quad ; \quad v_y = v_{\perp} \cos(\Omega t) \quad ; \quad v_{\perp} = \text{const.} \quad (1.40)$$

mit der ‘‘Gyrofrequenz’’

$$\Omega = \frac{qB}{m} \quad (1.41)$$

Die Lösung im Ortsraum ist

$$x = -\frac{v_{\perp}}{\Omega} \cos(\Omega t) \quad ; \quad y = \frac{v_{\perp}}{\Omega} \sin(\Omega t) \quad (1.42)$$

Das ist eine Kreisbewegung mit dem ‘‘Gyroradius’’ $\rho = v_{\perp}/\Omega$. Mit der thermischen Geschwindigkeit $v_{\perp} = v_{th}$ wird dies auch

$$\rho = \frac{\sqrt{2mkT}}{qB} \quad (1.43)$$

Beispiel: Dies wird für Elektronen

$$\rho_e = 3.38 * 10^{-6} \frac{\sqrt{kT}}{B} [\text{m}] (\text{eV}, \text{T}) \quad (1.44)$$

und für einfach geladene Ionen

$$\rho_e = 1.45 * 10^{-4} \frac{\sqrt{AkT}}{B} [\text{m}] (\text{eV}, \text{T}) \quad (1.45)$$

A ist das Atomgewicht. Beispiel: der Gyroradius ist bei $B=3\text{T}$, $kT=1 \text{ keV}$: $\rho_e = 3.5 * 10^{-5} [\text{m}]$ $\rho_H = 1.52 * 10^{-3} [\text{m}]$. Das Verhältnis zwischen Debye-Länge und Elektronengyroradius ist

$$\frac{\lambda_D}{\rho_e} = 2.2 * 10^9 \frac{B}{\sqrt{n}} \quad (1.46)$$

In einem heissen Fusionsplasma ist das Verhältnis nahezu gleich eins.

1.2.5 Landaulänge

Beim Coulombstoß von zwei Teilchen mit gleicher Ladung ist die "Landaulänge" ein charakteristischer Parameter. Sie beschreibt den Stoßparameter, bei dem eine Ablenkung um 90 Grad stattfindet. Dazu betrachten wir den Stoß zwischen Teilchen mit gleicher Ladung und bestimmen den Minimalabstand beim zentralen Stoß. Die Teilchen nähern sich dabei bis auf den Abstand d_0 , bei dem die potentielle Energie der Coulombwechselwirkung gleich der kinetischen Energie der Stoßpartner ist.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 d_0} \quad (1.47)$$

Setzt man für die Geschwindigkeit die mittlere thermische Geschwindigkeit ein, dann ergibt sich für den Minimalabstand

$$d_0 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 kT} \quad (1.48)$$

Die Rutherford'sche Streuformel verknüpft den Stoßparameter d mit dem Ablenkwinkel θ

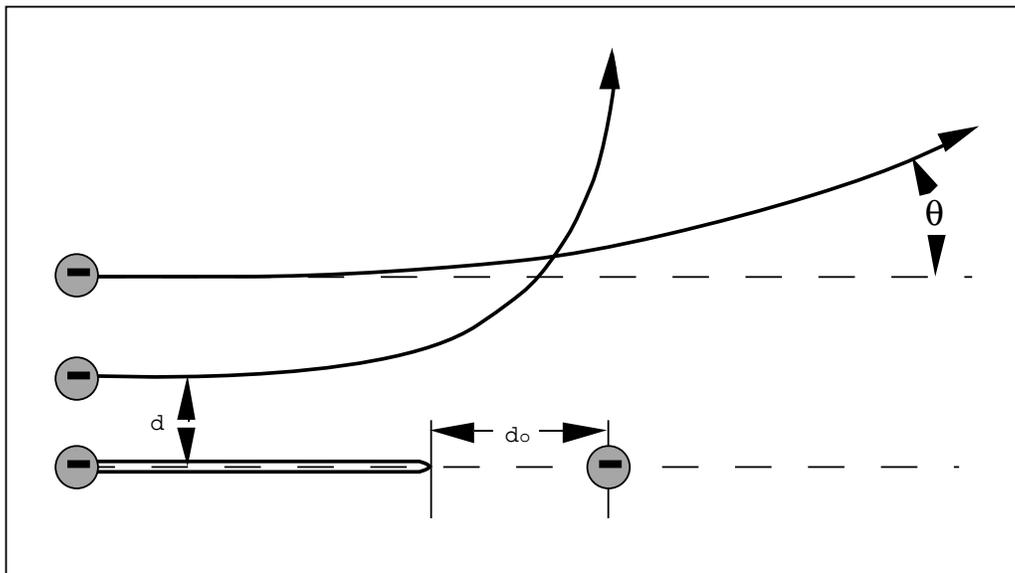


Abbildung 1.5: Ablenkung beim Coulombstoß , d =Stoßparameter, θ = Ablenkwinkel

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{d_0}{2d} \quad (1.49)$$

Für Ablenkung um 90° ist der Stoßparameter

$$d =: \lambda_L = \frac{d_0}{2} = \frac{q_1 q_2}{12\pi\epsilon_0 kT} \quad (1.50)$$

Dies definiert die Landau-Länge λ_L . Der Zahlenwert errechnet sich aus

$$\lambda_L = 4.8 * 10^{-10} T^{-1} [\text{m}]; (\text{eV}) \quad (1.51)$$

Die Landaulänge ist in der Regel kleiner als die Debye-Länge ($\lambda_L \ll \lambda_D$). Zwischen der Landaulänge und der Debye-Länge besteht folgende Beziehung: $\lambda_L = \lambda_D/N_D$, dabei ist N_D die Zahl der Teilchen im Debyevolumen:

$$N_D = \frac{4\pi}{3} \lambda_D^3 n \quad (1.52)$$

Die Landau-Länge wird vergleichbar mit der deBroglie-Länge der Elektronen. Diese ist definiert durch $\lambda_{dB} = h/mv$. was mit der mittleren thermischen Geschwindigkeit ergibt

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{m 1.5kT}} \quad (1.53)$$

Bei Elektronen mit $kT=1$ keV ist die deBroglie-Länge $\lambda_{dB} = 5.5*10^{-11}$ [m]. In diesem Beispiel ist die deBroglie-Länge wesentlich größer als die Landau- Länge. Daraus folgt, dass die starke Ablenkung der Teilchen quantenmechanisch gerechnet werden muss. In einem Plasma überwiegt aber der Effekt der Keinwinkelstöße. Die Aufsummation vieler Kleinwinkelstöße führt ebenfalls zu einer 90-Grad-Ablenkung, und da der Stoßparameter für Kleinwinkelstöße wesentlich größer als die Landau-Länge ist, kann dieser Vorgang nach der klassischen Mechanik berechnet werden. Die Korrekturen durch die Quantenmechanik sind vernachlässigbar.

1.2.6 Freie Weglänge

Die “freie Weglänge” der geladenen Teilchen ist die Wegstrecke, die die Teilchen zurücklegen, bevor sie durch Stöße untereinander um 90 Grad abgelenkt werden. Um diese Distanz abzuschätzen, betrachten wir die Teilchen als Kugeln mit dem Querschnitt $\sigma = \pi\lambda_L^2$. Die freie Weglänge λ ist dann

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{12^2\pi\epsilon_0^2(kT)^2}{nq_1^2q_2^2} \quad (1.54)$$

Dieser Wert ist zu groß, da die Kleinwinkelstöße nicht berücksichtigt wurden. Die Aufsummation der Kleinwinkelstöße ergibt einen kleineren Wert:

$$\lambda = \frac{1}{n\sigma} = \frac{25\pi\epsilon_0^2(kT)^2}{nq_1^2q_2^2 \ln \Lambda} \quad (1.55)$$

$\ln \Lambda$ ist der sogenannte Coulomb-Logarithmus, der durch die Aufsummation der Kleinwinkelstöße in die Formel kommt. Man muss die Integration über die Stoßparameter bei der Debye-Länge abschneiden, da für größere Stoßparameter die Näherung der Zweierstöße nicht mehr gilt. Im Falle von Elektronen-Elektronen-Stößen und Stöße von Elektronen an Ionen lautet die Formel

$$\lambda = 1.44 * 10^{17} \frac{T_e^2}{n \ln \Lambda} [\text{m}] (\text{eV}, \text{m}^{-3}) \quad (1.56)$$

Beispiel: $kT = 1$ keV, $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $\ln \Lambda = 15$: $\lambda = 96$ m. Die freie Weglänge ist in der Regel wesentlich größer als alle anderen Längen im Plasma. Ist sie sogar größer als die Ausdehnung des Plasmas, dann spricht man von einem “stoßfreien” Plasma.

1.2.7 Kurven von Plasmaparametern

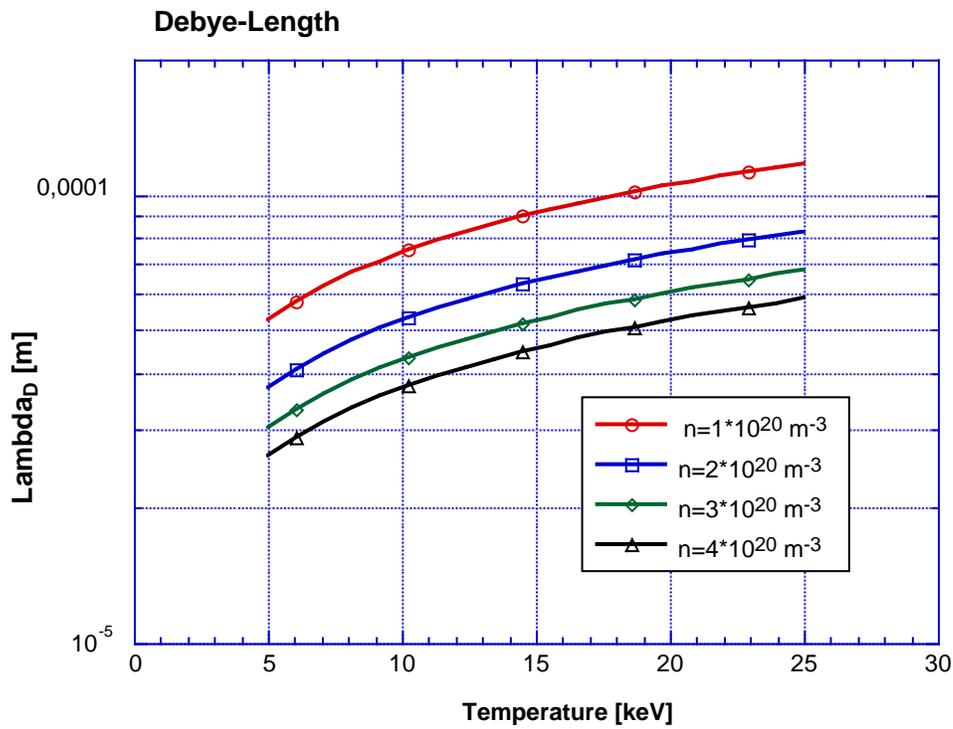


Abbildung 1.6: Debye-Länge als Funktion der Temperatur. Die Dichte variiert von $n = 10^{20} \text{ [m}^{-3}\text{]}$ bis $n = 4 * 10^{20} \text{ [m}^{-3}\text{]}$

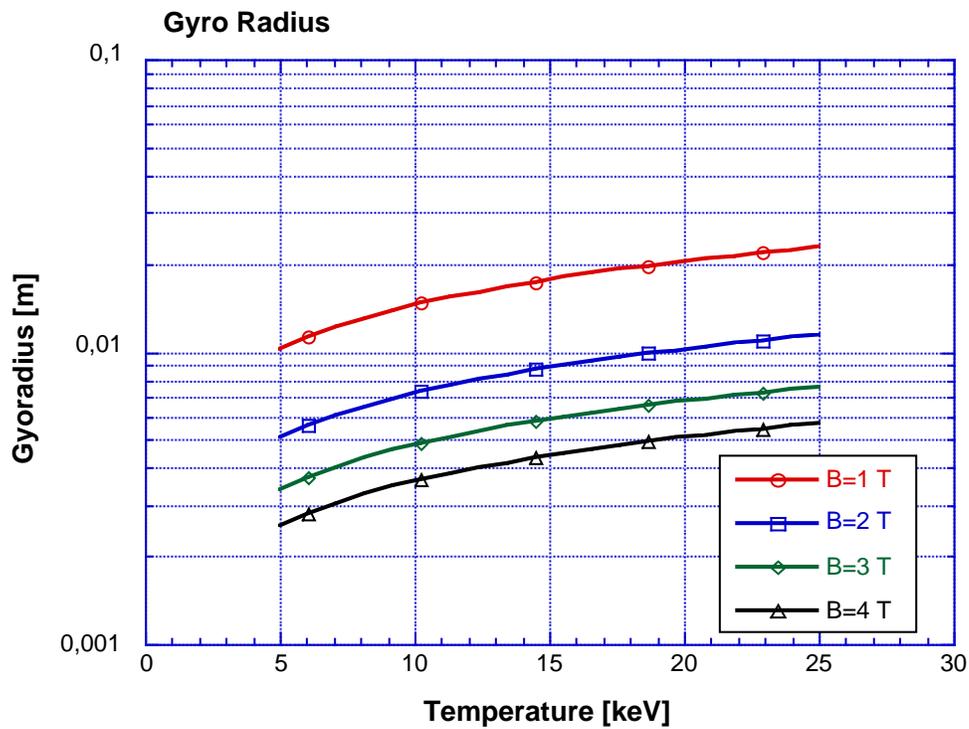


Abbildung 1.7: Gyroradius von Protonen als Funktion der Temperatur. Magnetfeld: $B=1,2,3,4 \text{ T}$

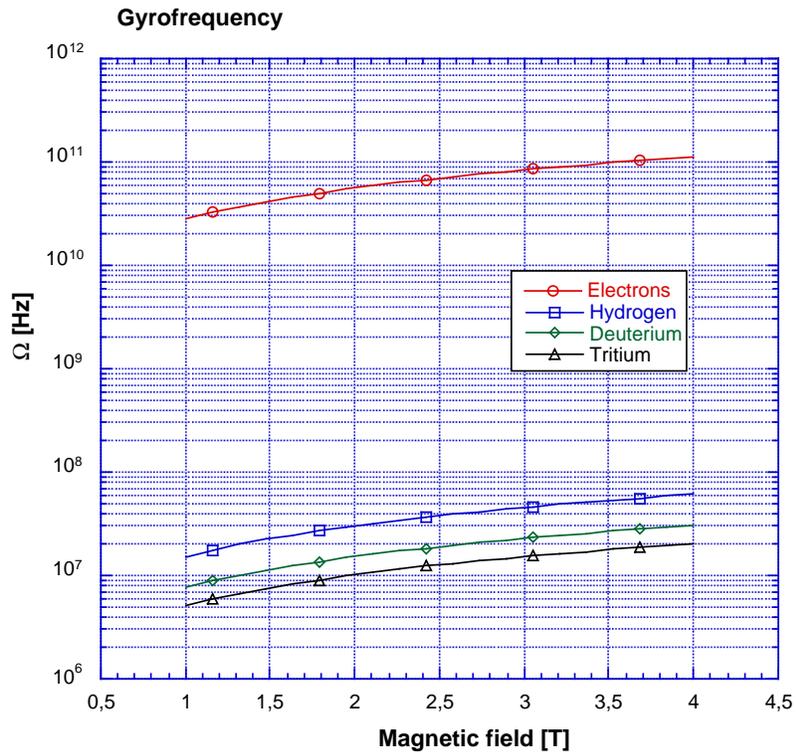


Abbildung 1.8: Gyrofrequenz als Funktion des Magnetfeldes

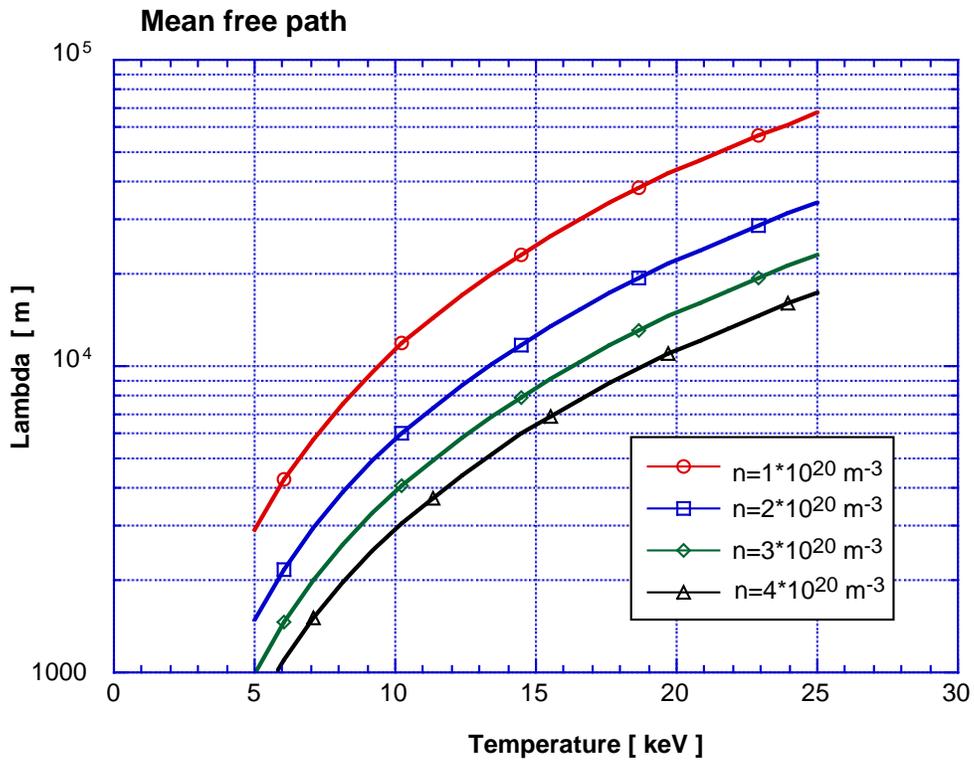


Abbildung 1.9: Mittlere freie Weglänge der Elektronen. Stöße mit Protonen

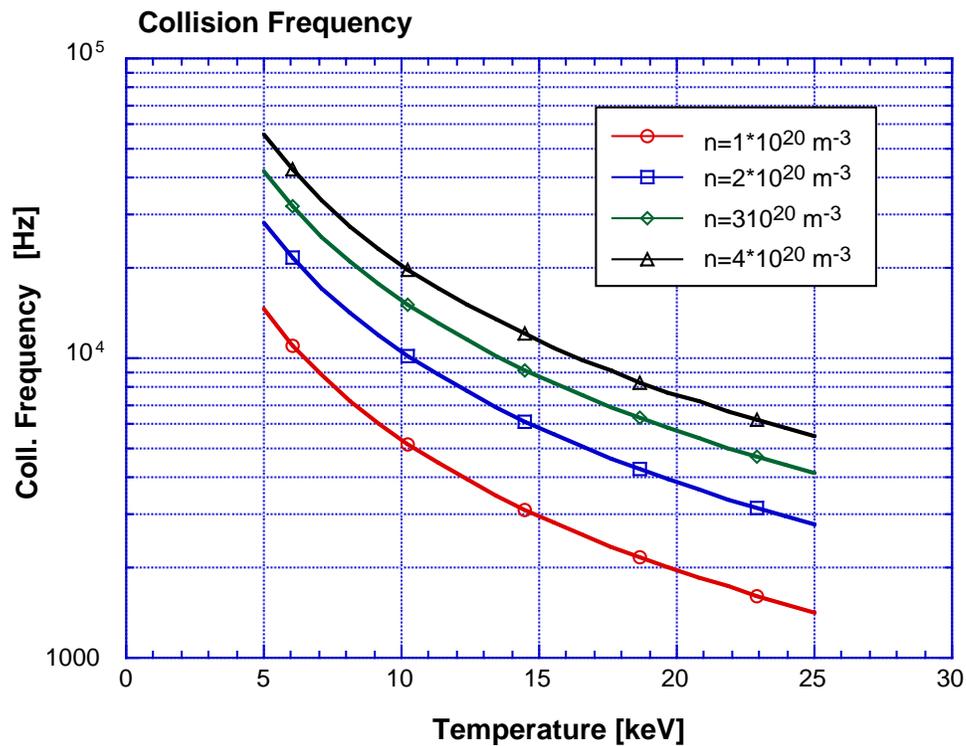


Abbildung 1.10: Stoßfrequenz der Elektronen. Stöße mit Protonen

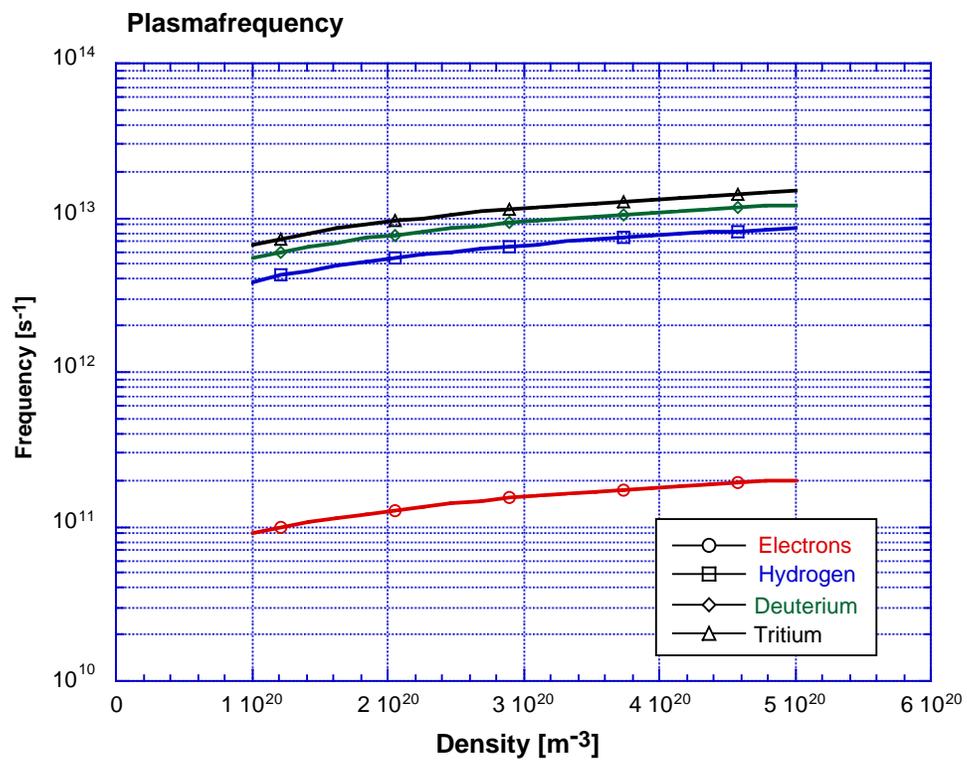


Abbildung 1.11: Plasmafrequenzen

Kapitel 2

Flüssigkeitsmodell

In einem Flüssigkeitsmodell wird das Plasma mit Hilfe von makroskopischen Gleichungen für die Plasmaparameter wie Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur usw. beschrieben. Jede Teilchensorte (Elektronen, Ionen) wird als eine Flüssigkeit betrachtet und für jede Teilchensorte wird ein Satz von Gleichungen aufgestellt. Je nach Näherung unterscheidet man zwischen Einflüssigkeit-, Zweiflüssigkeit- und Mehrflüssigkeitsmodellen. In der kinetischen Theorie des Plasmas spielt die kinetische Gleichung für die Verteilungsfunktion $f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ die zentrale Rolle und die makroskopischen Gleichungen werden als Momentengleichungen aus dieser Gleichung gewonnen. Im folgenden sollen zuerst die relevanten Plasmaparameter diskutiert und ihre gegenseitigen Beziehungen beschrieben werden. Die Bewegungsgleichungen werden dann in Analogie zur Hydrodynamik aufgestellt. In diesem Einflüssigkeitsmodell lassen sich bereits die wichtigsten Vorgänge eines vollionisierten Plasmas beschreiben.

2.1 Definition der Plasmaparameter

In einem 6-dimensionalen Phasenraum mit den Koordinaten \mathbf{x}, \mathbf{v} beschreibt die Verteilungsfunktion $f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ der Teilchensorte \mathbf{v} das Plasma vollständig. $dN_v = f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ ist die Zahl der Teilchen im Volumenelement $d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$. Die makroskopischen Größen des Plasmas wie Dichte, mittlere Geschwindigkeit usw. sind Momente der Verteilungsfunktion, sie sind definiert als Integrale über die mikroskopische Geschwindigkeit \mathbf{v} .

2.1.1 Definition der Momente

Es sei $g(\mathbf{v}) = v_x^l v_y^m v_z^n$; $l, m, n \in N$ eine beliebige Potenz in den Komponenten der Geschwindigkeit. N ist hier die Menge der natürlichen Zahlen. Das Integral

$$M_{lmn}^v = \int_{-\infty}^{+\infty} f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g(\mathbf{v}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} \quad (2.1)$$

heißt Moment der Verteilungsfunktion. In abgekürzter Schreibweise

$$M_{lmn}^v = (f_v, g) \quad (2.2)$$

Eigenschaften der Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion ist ihrer Definition nach eine positive Größe, d.h. $f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) > 0$. Weiterhin wird vorausgesetzt, dass sie für große Geschwindigkeiten hinreichend schnell verschwindet, so dass Integrale über den Geschwindigkeitsraum existieren.

$$f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) g(\mathbf{v}) \leq C \exp(-av^2) \quad ; \quad C < \infty; a > 0 \quad (2.3)$$

Diese Eigenschaft folgt nicht unmittelbar aus der kinetischen Gleichung, z.B. der Fokker-Planck-Gleichung. Da die Wirkung der Coulombwechselwirkung mit wachsender Geschwindigkeit abnimmt, können Teilchen in einem konstanten elektrischen Feld beliebig schnell werden (runaway Effekt). Relativistische

und quantenmechanische Effekte sind aber in der Fokker-Planck-Gleichung nicht enthalten. Diese würden verhindern, dass beliebig hohe Geschwindigkeiten in der Verteilungsfunktion auftreten. Eigenschaft (2.3) ist an dieser Stelle als ein Postulat zu betrachten. Aus dieser Eigenschaft folgt dann, dass alle Momente der Verteilungsfunktion existieren.

2.1.2 Beispiele dynamischer Funktionen

1. Definition der Teilchendichte n_v

$$g(\mathbf{v}) = 1 \quad \longrightarrow \quad n_v = (f_v, 1) \quad (2.4)$$

2. Definition der kinetischen Energiedichte e_v

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m_v v^2 \quad \longrightarrow \quad n_v e_v = (f_v, \frac{1}{2}m_v v^2) \quad (2.5)$$

3. Definition der mittleren Geschwindigkeit \mathbf{V}_v . $n_v \mathbf{V}_v$ ist die Teilchenstromdichte

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad n_v \mathbf{V}_v = (f_v, \mathbf{v}) \quad (2.6)$$

4. Definition der Energiestromdichte \mathbf{Q}_v

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Q}_v = (f_v, \frac{1}{2}m_v v^2 \mathbf{v}) \quad (2.7)$$

5. Definition des Spannungstensors \mathbf{S}_v

$$g(\mathbf{v}) = m_v \mathbf{v} : \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{S}_v = (f_v, m_v \mathbf{v} : \mathbf{v}) \quad (2.8)$$

6. Mit der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ definiert man die Temperatur kT_v (k ist die Boltzmannkonstante)

$$n_v kT_v = (f_v, \frac{1}{3}m_v w^2) \quad (2.9)$$

7. Definition des Drucktensors \mathbf{P}_v

$$g(\mathbf{v}) = m_v \mathbf{w} : \mathbf{w} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_v = (f_v, m_v \mathbf{w} : \mathbf{w}) \quad (2.10)$$

Der Drucktensor \mathbf{P}_v kann in einen spurfreien und einen spurbehafteten Anteil aufgespalten werden.

$$\mathbf{P}_v = m_v (f_v, \mathbf{w} : \mathbf{w} - \frac{1}{3}w^2 \mathbf{I}) + m_v (f_v, \frac{1}{3}w^2 \mathbf{I}) \quad (2.11)$$

$$= \pi_v + p_v \mathbf{I} \quad (2.12)$$

Für den ersten Term gilt Spur $\pi_v = 0$, p_v ist der skalare Druck und es gilt das ideale Gasgesetz $p_v = n_v kT_v$, π_v beschreibt die Anisotropie des Druckes.

8. Definition des Wärmestromes \mathbf{q}_v

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m_v w^2 \mathbf{w} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{q}_v = (f_v, \frac{1}{2}m_v w^2 \mathbf{w}) \quad (2.13)$$

Weiterhin sind von Interesse die mit der kinetischen Energie gewichteten

9. Druck- und Spannungstensoren

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m_v w^2 \mathbf{w} : \mathbf{w} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{P}_v^E = (f_v, \frac{1}{2}m_v w^2 \mathbf{w} : \mathbf{w}) \quad (2.14)$$

und

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m_v v^2 \mathbf{v} : \mathbf{v} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{S}_v^E = (f_v, \frac{1}{2}m_v v^2 \mathbf{v} : \mathbf{v}) \quad (2.15)$$

Damit sind die wesentlichen in der Praxis auftretenden makroskopischen Größen definiert. Aufgabe der magnetohydrodynamischen Theorie ist es, diese Parameter miteinander durch Gleichungen zu verknüpfen.

2.2 Relationen zwischen Plasmaparametern

Die oben definierten Plasmaparameter sind nicht voneinander unabhängig. Die Relationen zwischen den verschiedenen Parametern soll im folgenden dargestellt werden.

Energiedichte und Temperatur

Mit $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{V}_v$ ergibt sich die Summe aus kinetischer Energie und thermischer Energie

$$g(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}m_v v^2 \quad \longrightarrow \quad n_v e_v = (f_v, \frac{1}{2}m_v v^2) = \frac{1}{2}m_v \mathbf{V}_v^2 + \frac{3}{2}n_v k T_v \quad (2.16)$$

Die Energiedichte unterscheidet sich damit von der thermischen Energie durch die kinetische Energie der makroskopischen Massenbewegung.

Spannungstensor und Drucktensor

Spannungstensor und Drucktensor unterscheiden sich durch einen additiven Term

$$\mathbf{S}_v = m_v \mathbf{V} : \mathbf{V} + \mathbf{P}_v \quad (2.17)$$

Der additive Term ist der Tensor der Trägheitskräfte.

Energiestrom und Wärmestrom

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{q}_v + \frac{1}{2}m_v n_v V_v^2 \mathbf{V}_v + \frac{5}{2}p_v \mathbf{V}_v + \pi_v \cdot \mathbf{V}_v \quad (2.18)$$

oder

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{q}_v + n_v e_v \mathbf{V}_v + \mathbf{P}_v \cdot \mathbf{V}_v \quad (2.19)$$

Druck und Temperatur

Für den Zusammenhang zwischen Temperatur und Druck gilt das ideale Gasgesetz

$$p_v = n_v k T_v \quad (2.20)$$

Energiegewichteter Spannungstensor und Drucktensor

$$\mathbf{S}_v^E = n_v e_v \mathbf{V}_v : \mathbf{V}_v + (\mathbf{V}_v \mathbf{P}_v) : \mathbf{V}_v + \mathbf{V}_v : (\mathbf{V}_v \mathbf{P}_v) + \mathbf{q}_v : \mathbf{V}_v + \mathbf{V}_v : \mathbf{q}_v + \mathbf{P}_v^E \quad (2.21)$$

Vernachlässigung quadratischer und höherer Terme in \mathbf{V}_v liefert

$$e_v = \frac{3}{2}n_v k T_v \quad ; \quad \mathbf{P}_v = \mathbf{S}_v \quad (2.22)$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{q}_v + \frac{5}{2}p_v \mathbf{V}_v + \pi_v \cdot \mathbf{V}_v \quad (2.23)$$

$$\mathbf{P}_v^E = \mathbf{S}_v^E \quad (2.24)$$

Diese Näherungen sind anwendbar, wenn die mittlere Massengeschwindigkeit klein gegenüber der thermischen Geschwindigkeit ist.

2.3 Elektromagnetische Größen

Neben den Parametern des Flüssigkeitsbildes sind im Plasma die elektromagnetischen Größen von Bedeutung. Diese sind

- Ladung q_v jeder Teilchensorte
- Ladungsdichte $q_v n_v$
- Elektrische Stromdichte $\sum_v q_v n_v \mathbf{V}_v$
- Elektrisches Feld \mathbf{E}
- Magnetfeld \mathbf{B}
- Elektrische Energiedichte $\epsilon_0 E^2 / 2$
- Magnetische Energiedichte $B^2 / 2\mu_0$

Dazu kommen die Maxwellgleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_v q_v n_v \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.25)$$

und

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.26)$$

Der Verschiebungsstrom wird bei langsamen Vorgängen (d.h. $V \ll$ Lichtgeschwindigkeit) vernachlässigt. Die verbleibenden Gleichungen ohne Verschiebungsstrom bezeichnet man auch als Prä-Maxwellgleichungen.

2.3.1 Magnetische und elektrische Kräfte im Plasma

Ein Teilchen mit der Ladung q_v erfährt in einem elektromagnetischen Feld die Kraft

$$\mathbf{K}_v = q_v (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.27)$$

Summiert man über alle Teilchen in einem Volumenelement auf, dann ist die gesamte Kraft

$$(\mathbf{K}_v, f) = q_v n_v (\mathbf{E} + \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}) \quad (2.28)$$

Die Summation über alle Teilchensorten liefert

$$\sum_v (\mathbf{K}_v, f) = \sum_v q_v n_v (\mathbf{E} + \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.29)$$

Wegen der Quasineutralität übt das elektrische Feld keine Kraft auf das gesamte Plasma aus und die resultierende Kraft ist dann $\mathbf{K} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Diese Kraft läßt sich auch als Divergenz des Maxwell'schen Spannungstensors schreiben

$$\mathbf{K} = -\nabla \cdot \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} - \mathbf{B} : \mathbf{B} \right) \quad (2.30)$$

wobei der Spannungstensor durch

$$\mathbf{S}_M = -\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B^2}{2} - \mathbf{B} : \mathbf{B} \right) \quad (2.31)$$

gegeben ist. Er lautet in expliziter Form

$$\mu_0 \mathbf{S}_M = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{2} - B_x^2 & -B_x B_y & -B_x B_z \\ -B_x B_y & \frac{B^2}{2} - B_y^2 & -B_y B_z \\ -B_x B_z & -B_y B_z & \frac{B^2}{2} - B_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

In einem homogenen Magnetfeld lautet der Spannungstensor

$$\mu_0 \mathbf{S}_M = \begin{pmatrix} \frac{B^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{B^2}{2} \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Es gibt eine Druckspannung quer zu den Feldlinien und eine Zugspannung parallel zu den Feldlinien.

2.4 Impulsbilanz im Plasma

Um die Impulsbilanz oder die Bewegungsgleichung eines Plasmas aufzustellen betrachten wir das Kräftegleichgewicht für jede Teilchensorte separat und addieren über alle Teilchenarten. Auf ein Volumenelement wirken mechanische, elektromagnetische und Reibungskräfte. Für die Summe aller Kräfte gilt das Newtonsche Gesetz: **Kraft = Masse x Beschleunigung**. Der oben eingeführte Spannungstensor ist physikalisch eine Impulsstromdichte. Integriert man den Spannungstensor (multipliziert mit dem Normalenvektor) über eine geschlossene Fläche, dann ergibt sich die auf das eingeschlossene Volumen ausgeübte Kraft. Die Divergenz des Spannungstensors ist demnach eine Kraftdichte.

$$\mathbf{K}_v = -\nabla \cdot \mathbf{S}_v \quad (2.34)$$

mit

$$\mathbf{S}_v = m_v n_v \mathbf{V}_v : \mathbf{V}_v + p_v \mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}_v \quad (2.35)$$

Weiterhin sei $\mathbf{R}_{v\mu}$ die Reibungskraft auf Grund der Stoßprozesse zwischen den Teilchen mit dem Index v und μ . Berücksichtigt man noch die oben beschriebenen elektrischen und magnetischen Kräfte, dann lautet die Impulsbilanz einer Teilchensorte

$$\frac{\partial}{\partial t} m_v n_v \mathbf{V}_v = -\nabla \cdot \mathbf{S}_v + q_v n_v (\mathbf{E} + \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}) + \sum_{\mu} \mathbf{R}_{v\mu} \quad (2.36)$$

Bei elastischen Stößen gilt wegen der Erhaltung des Impulses $\mathbf{R}_{v\mu} + \mathbf{R}_{\mu v} = 0$ und damit ist die Summe aller Reibungskräfte gleich null: $\sum_{v\mu} \mathbf{R}_{v\mu} = 0$. Die genaue Form der Reibungskräfte läßt sich in Strenge nur aus der kinetischen Theorie herleiten. Wir benutzen hier die einfachste Näherung, die den Impulserhaltungssatz befriedigt. In dieser Näherung ist die Reibungskraft proportional zu der Relativgeschwindigkeit:

$$\mathbf{R}_{\mu v} = m_v n_v f_{\mu v} (\mathbf{V}_v - \mathbf{V}_\mu) \quad (2.37)$$

mit $m_v n_v f_{\mu v} = m_\mu n_\mu f_{v\mu}$. $f_{\mu v}$ ist die Stoßfrequenz der Coulombwechselwirkung. In schwach ionisierten Plasmen oder in der Randschicht eines Plasmas ist noch eine Neutralgaswechselwirkung zu berücksichtigen, die durch den Reibungsterm $\mathbf{R}_{v,0} = m_v n_v f_{v,0} (\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_v)$ beschrieben werden kann. \mathbf{V}_0 ist die mittlere Geschwindigkeit des Neutralgases. Durch die Neutralgasreibung geht Impuls aus dem Plasma verloren. Um zu einer Impulsgleichung für das gesamte Plasma zu kommen, definieren wir die Massendichte und die mittlere Massengeschwindigkeit

$$\rho = \sum_v m_v n_v \quad ; \quad \rho \mathbf{V} = \sum_v m_v n_v \mathbf{V}_v \quad (2.38)$$

sowie den Gesamtspannungstensor $\mathbf{S} = \sum_v \mathbf{S}_v$. Aufsummation aller Impulsgleichungen ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_v + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.39)$$

Wegen der Quasineutralität verschwindet das elektrische Feld in der Gesamtimpulsbilanz. Berücksichtigt man noch die Neutralgaswechselwirkung, dann ist die Impulsgleichung (oder Bewegungsgleichung)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} = -\nabla \cdot \mathbf{S}_v + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \sum_v \mathbf{R}_{v,0} \quad (2.40)$$

Das elektrische Feld wird zwar bei dieser Form der Summation eliminiert, es tritt aber im Ohm'schen Gesetz wieder auf. Dieses erhält man aus den Bewegungsgleichungen durch Multiplikation mit m_v/q_v und Summation über alle Teilchenarten.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \sum_v \frac{m_v}{q_v} m_v n_v \mathbf{V}_v + \frac{1}{\rho} \sum_v \frac{m_v}{q_v} \nabla \cdot \mathbf{S}_v = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \sum_v \frac{m_v}{q_v} \mathbf{R}_{\mu v} \quad (2.41)$$

Im stationären Plasma fällt der erste Term weg und das Ohm'sche Gesetz lautet

$$\frac{1}{\rho} \sum_v \frac{m_v}{q_v} \nabla \cdot \mathbf{S}_v = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{1}{\rho} \sum_v \frac{m_v}{q_v} \mathbf{R}_{\mu v} \quad (2.42)$$

In dieser allgemeinen Form ist das Ohm'sche Gesetz nicht sehr nützlich; im folgenden soll daher diskutiert werden, unter welchen Umständen einfachere Approximationen möglich sind. Dazu schätzen wir die einzelnen Summanden ab.

Der Beschleunigungsterm

Der Beschleunigungsterm ist bei hinreichend langsamen Vorgängen vernachlässigbar. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{|\frac{\partial}{\partial t} m_v n_v \mathbf{V}_v|}{|q_v n_v \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}|} = o\left(\frac{\omega}{\Omega_v}\right) \quad (2.43)$$

Der Reibungsterm

Der Reibungsterm ist klein falls die Stoßfrequenz klein gegenüber der Gyrofrequenz ist

$$\frac{|\mathbf{R}_{\mu v}|}{|q_v n_v \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}|} = o\left(\frac{\omega}{\Omega_v}\right) \quad (2.44)$$

Der Trägheitsterm

Die Trägheitskräfte sind klein, falls die Plasmageschwindigkeit hinreichend klein ist. L ist ein Maß für die Ausdehnung des Plasmas.

$$\frac{|\nabla \cdot m_v n_v \mathbf{V}_v : \mathbf{V}_v|}{|q_v n_v \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}|} = o\left(\frac{|\mathbf{V}_v|}{L \Omega_v}\right) \quad (2.45)$$

Ist die Geschwindigkeit kleiner als die thermische, dann gilt

$$o\left(\frac{|v_{th,v}|}{L \Omega_v}\right) \leq o\left(\frac{|\rho_v|}{L_v}\right) \ll 1 \quad (2.46)$$

ρ_v ist der Gyroradius.

Der Druckterm

Für den Druckterm gilt die Abschätzung

$$\frac{|\nabla p_v|}{|q_v n_v \mathbf{V}_v \times \mathbf{B}|} = o\left(\frac{|v_{th,v}^2|}{L \Omega_v |\mathbf{V}_v|}\right) \leq o\left(\frac{|\rho_v v_{th,v}|}{L |\mathbf{V}_v|}\right) \quad (2.47)$$

Falls diese Terme sehr klein und daher vernachlässigbar sind, erhält man das Ohmsche Gesetz der idealen Magnetohydrodynamik:

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.48)$$

Diese Näherung ist gültig, wenn die Geschwindigkeiten hinreichend klein, die Bewegung hinreichend langsam und die Gyroradien klein gegenüber Plasmadimensionen sind. Außerdem wird der Druck als isotrop angenommen. In den obigen Abschätzungen tritt nur die Bewegung senkrecht zum Magnetfeld auf. In paralleler Richtung muß die Näherung von Fall zu Fall geprüft werden.

2.5 Das Zweikomponentenplasma

Das einfachste und in der Natur am häufigsten vorkommende Plasma besteht aus Protonen und Elektronen. Wegen der Quasineutralität sind die Dichten beider Teilchensorten gleich. Die Massen der Teilchen unterscheiden sich aber um mehr als den Faktor 1000, was verschiedene Näherungen des Zweikomponentenplasmas erlaubt. Wegen $m_e \ll m_i$ und $n_e = n_i$ ist die Plasmadichte praktisch gleich der Dichte der Protonen $\rho = n_i m_i$ und die Plasmageschwindigkeit ist nahezu gleich der Ionengeschwindigkeit.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{V}_e \approx \mathbf{V}_i \quad (2.49)$$

Die Geschwindigkeit des Plasmas ist nahezu gleich der mittleren Geschwindigkeit der schweren Wasserstoffkerne. Der Spannungstensor vereinfacht sich dadurch zu

$$\mathbf{S} = \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} + \mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e \quad (2.50)$$

Die Gesamtimpulsbilanz ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla \cdot (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e) + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.51)$$

Die Wechselwirkung mit Neutralgas würde noch zu einem zusätzlichen Reibungsterm führen:

$$\mathbf{R}_{i0} = m_i n_i (\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}) \quad (2.52)$$

Ein Plasma im Gravitationsfeld mit dem Potential $-\nabla U$ hat die folgende Impulsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla \cdot (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_e) + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \rho \nabla U \quad (2.53)$$

Um das Ohm'sche Gesetz der Zweikomponentenplasmas abzuleiten benutzen wir die Näherungen

$$\mathbf{V}_i \approx \mathbf{V} - \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{en} \quad ; \quad \mathbf{V}_e \approx \mathbf{V} + \frac{\mathbf{j}}{en} \quad (2.54)$$

und die Reibungskraft in der Form

$$\mathbf{R}_{ei} = -m_e n_e f_{ei} (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_i) = -\frac{m_e f_{ei}}{e} \mathbf{j} \quad (2.55)$$

wird das Ohm'sche Gesetz

$$\frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}_e) - \frac{1}{\omega_p^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \frac{f_{ei}}{\omega_p^2} \mathbf{j} \quad (2.56)$$

Dabei wurde die Impulsbilanz benutzt, um den Ionendruck zu eliminieren. Die Plasmafrequenz ist definiert durch

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m_e} \quad (2.57)$$

und der Plasmawiderstand durch

$$\eta = \frac{m_e f_{ei}}{ne^2} \quad (2.58)$$

f_{ei} ist die Stoßfrequenz für den Impulsaustausch zwischen Elektronen und Ionen. Der zeitabhängige Term ist nur bei schnellen Vorgängen wichtig. Das Ohm'sche Gesetz ist damit

$$\frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{P}_e) = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{j} \quad (2.59)$$

Der Drucktensor der Elektronen ist hier nicht weiter spezifiziert, er ist im allgemeinen anisotrop. Dies hängt von den Teilchenbahnen und den Stoßfrequenzen ab. Parallel zum Magnetfeld entsteht durch die Anisotropie des Druckes eine Kraft, die einen Strom zur Folge hat. Es gilt die Gleichung

$$\frac{1}{ne} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{P}_e = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} - \eta \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \quad (2.60)$$

d.h. Sowohl das elektrische Feld als auch der anisotrope Druck treiben einen zum Magnetfeld parallelen Strom. Der Anteil des Stromes, der durch die Anisotropie des Elektronendruckes verursacht wird heißt auch "Bootstrapstrom". Er ist in einem stoßdominierten Plasma mit isotropen Druck vernachlässigbar klein. Der Zahlenwert des elektrischen Widerstandes ist

$$\eta = 2.55 \cdot 10^{-5} \frac{\ln \Lambda}{kT_e^{\frac{3}{2}}} \quad [\Omega m] \quad kT_e \text{ in eV} \quad (2.61)$$

Der Hallterm und Druckdiffusionsterm (A. Schlüter) kann vernachlässigt werden, falls gilt $\omega/\Omega_e \ll 1$, d.h. zeitliche Vorgänge verlaufen langsam im Vergleich zur Gyrationbewegung und es gilt weiterhin

$$\frac{r_g}{L} v_{th} \ll |\mathbf{V}| \ll v_{th} \quad (2.62)$$

d.h. Die mittlere Bewegung des Plasmas ist langsam gegenüber der thermischen Bewegung aber schnell gegenüber der "diamagnetischen" Bewegung. Das Ohm'sche Gesetz hat dann die Form

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (2.63)$$

Eine weitere Vereinfachung entsteht durch die Näherung isotropen Druckes $p_e = p_i = p$. Die Bewegungsgleichung ist in dieser Näherung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.64)$$

Ohne Ionisations - und Rekombinationsprozesse bleibt die Masse in dem mit der mittleren Geschwindigkeit bewegten Volumenelement erhalten. Dies bedeutet:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (2.65)$$

dabei ist V ein beliebiges Volumen. Die differentielle Form dieser Gleichung ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (2.66)$$

Mit den Gleichungen wird das Plasma wie eine Flüssigkeit mit der mittleren Geschwindigkeit \mathbf{V} betrachtet, daher kommt auch der Name "Einflüssigkeitsmodell". Vernachlässigt man den Plasmawiderstand η , dann erhält man die Gleichungen der idealen Magnetohydrodynamik.

2.6 Ideale Magnetohydrodynamik

Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0 \quad (2.67)$$

Die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.68)$$

Das Ohm'sche Gesetz

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = 0 \quad (2.69)$$

Dazu kommen noch die Prä-Maxwellgleichungen (Ampère'sches Gesetz)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (2.70)$$

und das Faraday'sche Gesetz

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.71)$$

Zur Vervollständigung ist noch eine Beziehung zwischen Druck und Dichte notwendig. Bei langsamen Vorgängen (Gleichgewicht) ist die isotherme Näherung möglich, d.h. $p \propto \rho$. während bei schnellen Vorgängen wie Wellen oder Instabilitäten die adiabatische Näherung gemacht wird. Die Erhaltung der Entropie führt zu :

$$\frac{d}{dt} \ln \left(\frac{p}{\rho^{\frac{5}{2}}} \right) = 0 \quad (2.72)$$

(Diese Beziehung wird später noch strenger begründet). Eine alternative Formulierung ist

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla \cdot p \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla p \quad (2.73)$$

Diese Gleichungen der Magnetohydrodynamik (mit endlichem Widerstand) reichen aus um die wesentlichen Vorgänge im Plasma wie Gleichgewicht, stationäre Strömungen, resistive Diffusion, Plasmawellen und Instabilitäten zu beschreiben.

Kapitel 3

Erhaltungssätze der Magnetohydrodynamik

Die MHD-Gleichungen beschreiben die zeitliche Entwicklung der Plasmaparameter und der elektromagnetischen Größen. Aus diesen Gleichungen der MHD lassen sich nun einige Erhaltungssätze und weitere generelle Beziehungen ableiten. Als erstes betrachten wir einen stationären Zustand und leiten den Virialsatz ab.

3.1 Der Virialsatz

Wie oben gezeigt, wird das Plasmagleichgewicht durch Gleichung beschrieben. Mit Hilfe des mechanischen Spannungstensors und des Maxwell'schen Spannungstensors lautet die Gleichgewichtsbeziehung

$$\nabla \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) = 0 \quad (3.1)$$

Es sei V_p ein Plasmavolumen und V ein größeres Volumen als V_p . Weiterhin sei V_f das von externen Strömen durchflossene Volumen, in dem die magnetischen Kräfte durch mechanische Kräfte im Gleichgewicht gehalten werden.

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_M = -\mathbf{K}_{ext} \quad (3.2)$$

Multiplikation mit dem Ortsvektor \mathbf{x} und Integration über das Volumen V ergibt

$$\iiint_V \mathbf{x} \cdot \nabla \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) d^3\mathbf{x} = - \iiint_V \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}_{ext} d^3\mathbf{x} \quad (3.3)$$

Mit Hilfe des Gauss'schen Satzes ergibt sich

$$\iiint_V \text{Spur} (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) d^3\mathbf{x} - \iint_F \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_M \cdot d\mathbf{f} = - \iiint_V \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}_{ext} d^3\mathbf{x} \quad (3.4)$$

Dies führt zum Widerspruch, wenn das Oberflächenintegral verschwindet. Ist das Volumen hinreichend groß, verhalten sich die Magnetfelder wie Dipolfelder und skalieren folgendermaßen

$$|\mathbf{B}| = o\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad ; \quad |\mathbf{S}_M| = \left(\frac{1}{r^6}\right) \quad ; \quad r \longrightarrow \infty \quad (3.5)$$

Mit

$$\text{Spur} (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) = \rho \mathbf{V}^2 + 3p + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

erhält man

$$\iiint_V \left(\rho \mathbf{V}^2 + 3p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3\mathbf{x} = - \iiint_V \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}_{ext} d^3\mathbf{x} \quad (3.6)$$

Die linke Seite ist immer positiv, daher können die externen Kräfte nicht verschwinden. Die Schlussfolgerung ist damit: Ein Plasmagleichgewicht erfordert externe Ströme, es kann nicht durch interne Ströme aufrecht erhalten werden. Dieser Satz gilt auch bei anisotropen Plasmadruck, es ist nicht auf die ideale Magnetohydrodynamik beschränkt. Als Beispiel betrachten wir ein homogenes Magnetfeld \mathbf{B}_0 und ein endliches Plasmavolumen. Für große Entfernungen gilt: $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0 \quad \mathbf{S}_M \longrightarrow \mathbf{S}_{M0}$. Der Virialsatz lautet dann

$$\iiint_V \left(\rho \mathbf{V}^2 + 3p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3\mathbf{x} = - \iiint_V \frac{B_0^2}{2\mu_0} d^3\mathbf{x} \quad (3.7)$$

Aus dieser Beziehung folgt, dass das Magnetfeld im Plasma kleiner als das homogene Aussenfeld ist, dieser Tatbestand heisst der diamagnetische Effekt.

3.2 Flusserhaltung

Die Erhaltung des magnetischen Flusses unter der Bewegung des Plasmas ist eine der prägnantesten Eigenschaften des idealen MHD-Modells. Man sagt auch, die Magnetfeldlinien sind in dem Plasma eingefroren, denn sie bewegen sich mit dem Plasma mit, als seien sie eingefroren. Es sei $F(t)$ eine Fläche, die von Magnetfeldlinien geschnitten wird und die sich mit der Strömung des Plasmas mitbewegt. $d\mathbf{f}$ sei ein gerichtetes Flächenelement auf dieser Fläche. Für den magnetischen Fluss durch diese Fläche gilt im idealen MHD-Bild:

$$\frac{d}{dt} \iint_{F(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (3.8)$$

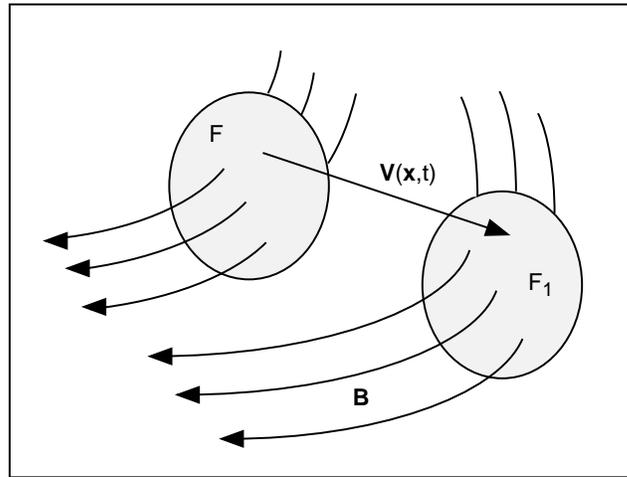


Abbildung 3.1: Deformation des Magnetfeldes durch die Plasmabewegung \mathbf{V}

Der Beweis geht folgendermaßen: Es ist

$$\frac{d}{dt} \iint_{F(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \iint_{F(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{f} + \mathbf{B} \cdot \frac{d}{dt} d\mathbf{f} \quad (3.9)$$

Aus dem Ohmschen Gesetz und dem Induktionsgesetz folgt die Relation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.10)$$

oder

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.11)$$

Damit wird das erste Integral auf der rechten Seite

$$\iint_F (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{V} \cdot d\mathbf{f} \quad (3.12)$$

Durch die Strömung wird das Flächenelement deformiert. Diese zeitliche Änderung des Flächenelementes ist

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{V} d\mathbf{f} - (\nabla : \mathbf{V}) d\mathbf{f} \quad (3.13)$$

was auf folgende Beziehung führt

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{V}) \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} - \mathbf{B} \cdot (\nabla : \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{f} \quad (3.14)$$

Setzt man diese Beziehung und Gl. (3.11) in die rechte Seite von Gl. (3.9) ein, ergibt sich die Behauptung. Die Erhaltung des Flusses bei der Bewegung des Plasmas beruht ganz wesentlich auf dem idealen Ohmschen Gesetz, d.h auf der Vernachlässigung des Plasmawiderstandes. Unter Mitnahme des endlichen Plasmawiderstandes ist der Fluss nicht mehr erhalten und die obige Formel (Gl. 3.8) wird

$$\frac{d}{dt} \iint_{F(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \oint_C \eta \mathbf{j} \cdot ds \quad (3.15)$$

Dabei ist C die Berandung der Fläche F .

3.3 Impulserhaltung

Die Bewegungsgleichung oder auch die lokale Form der Impulserhaltung lautet in der idealen MHD

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (3.16)$$

Die linke Seite kann auch folgendermaßen geschrieben werden

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = \frac{d\rho \mathbf{V}}{dt} + \rho \mathbf{V} \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.17)$$

Es sei nun $V(t)$ ein endliches Volumen, dass von der Strömung mitgenommen wird. Die Integration des lokalen Impulssatzes über dieses Volumen ergibt mit Hilfe des Gausschen Satzes

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho \mathbf{V} d^3 \mathbf{x} = - \iint_{\partial V} (\mathbf{P} + \mathbf{S}_M) \cdot d\mathbf{f} \quad (3.18)$$

∂V ist der Rand des Integrationsvolumens. \mathbf{P} ist des gesamte Drucktensor. In einem festen Volumen geht die totale Ableitung in die partielle Zeitableitung über und der Satz lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \mathbf{V} d^3 \mathbf{x} = - \iint_{\partial V} (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) \cdot d\mathbf{f} \quad (3.19)$$

Im stationären Fall verschwindet die linke Seite der Gleichung und man hat die Beziehung

$$0 = - \iint_{\partial V} (\mathbf{S} + \mathbf{S}_M) \cdot d\mathbf{f} \quad (3.20)$$

Die Summe aller Spannungen auf der Plasmaoberfläche ist null. Wendet man diese Beziehung auf eine geschlossene magnetische Fläche an ($\mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = 0$), dann erhält man

$$\iiint_V \left(\rho \mathbf{V} : \mathbf{V} + \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} \right) \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (3.21)$$

In einem rotierenden Plasma strömt das Plasma tangential zur Oberfläche und wegen $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{f} = 0$ erhält man

$$\iiint_V \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{I} \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (3.22)$$

In dieser integralen Impulsbilanz eines rotierenden Plasmas erscheinen die Trägheitskräfte nicht mehr explizit, sie bestimmen aber über die lokale Impulsbilanz die Magnetfelder.

3.4 Energieerhaltung

Um die Erhaltung der Energie zu beweisen gehen wir von der Bewegungsgleichung aus. Die Multiplikation mit der Geschwindigkeit \mathbf{V} liefert

$$\mathbf{V} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{V} + \nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} \right) \quad (3.23)$$

Weiterhin benutzen wir die Druckgleichung in der Form

$$\frac{3}{2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{5}{2} \nabla \cdot p \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla p \quad (3.24)$$

das ergibt die Energiebilanz in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{3}{2} p \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} + \frac{5}{2} p \mathbf{V} \right) = \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{S}_M \quad (3.25)$$

Aus dem idealen Ohm'schen Gesetz und den Prä-Maxwell-Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \mathbf{S}_M \quad (3.26)$$

Zusammen ergibt dies

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \nabla \cdot \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} + \frac{5}{2} p \mathbf{V} + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right) = 0 \quad (3.27)$$

Die Energiedichte des Plasmas setzt sich zusammen aus der Energie der Strömung, der inneren Energie und der Energie des Magnetfeldes. Der Energiestrom besteht aus einem konvektiven Anteil

$$\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} \mathbf{V} + \frac{5}{2} p \mathbf{V} \quad (3.28)$$

und dem Poyntingvektor. Integriert man über ein festes Volumen mit materiellen Wänden d.h. $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = 0$, dann bleibt als Energieverlustterm durch die Wand nur der Poynting Vektor übrig

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3 \mathbf{x} + \iint_F \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{f} = 0 \quad (3.29)$$

Auf einer ideal leitenden Wand steht das elektrische Feld senkrecht ($\mathbf{E} \times d\mathbf{f} = 0$), die Energie ist dann konstant.

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \left(\rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} + \frac{3}{2} p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3 \mathbf{x} = 0 \quad (3.30)$$

Integriert man die Energiegleichung über ein mitbewegtes Volumen dann ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{V(t)} \rho \frac{\mathbf{V}^2}{2} d^3 \mathbf{x} = - \iiint_{V(t)} \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{P} + \mathbf{S}_M) d^3 \mathbf{x} \quad (3.31)$$

Kapitel 4

Plasmagleichgewicht

4.1 Grundgleichungen

Ein Zustand in dem sich die Plasmaparameter zeitlich nicht mehr ändern heisst *Plasmagleichgewicht*. Im Gleichgewicht kompensieren sich alle Kräfte auf das Plasma und es kommt zu keiner beschleunigten Bewegung. In der Natur und im Experiment existieren nur stabile Gleichgewichte, instabile Gleichgewichte existieren nur als Lösungen der Gleichgewichtsgleichungen und sind vor allem als Basis für Stabilitätsanalysen von Interesse. Im Rahmen der Magnetohydrodynamik ist zu unterscheiden zwischen *Statischem Gleichgewicht* ($\mathbf{V} = 0$) und *Stationärem Gleichgewicht* ($\mathbf{V} \neq 0$). Das statische Gleichgewicht ist das am häufigsten untersuchte. Im statischen Gleichgewicht gelten die Gleichungen:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.1)$$

während im stationären Modell geschwindigkeitsabhängige Terme auftreten:

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad ; \quad \nabla \cdot \rho \mathbf{V} = S \quad (4.3)$$

Im statischen Gleichgewicht gibt es keine Bewegung und keine Plasmaverluste. Dagegen müssen im stationären Gleichgewicht mit endlichem Plasmawiderstand die Plasmaverluste durch einen Quellterm S kompensiert werden. Wegen des endlichen Widerstandes ist die Entropie keine Erhaltungsgröße mehr und die Gleichung

$$\frac{3}{2} \nabla \cdot \mathbf{V} + p \nabla \cdot \mathbf{V} = \eta \mathbf{j}^2 \quad (4.4)$$

ersetzt die Gleichung der adiabatischen Zustandsänderung. Bei hinreichend kleiner Geschwindigkeit wird der Trägheitsterm vernachlässigt, die Gleichgewichtsgleichung hat die gleiche Form wie im statischen Fall. In einem heißen Fusionsplasma ist der Plasmadruck anisotrop und der skalare Druck muss durch den Drucktensor ersetzt werden.

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} : \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (4.5)$$

Die Fragestellungen, die im Zusammenhang mit einem Plasmagleichgewicht zu klären sind, sind die folgenden

- Randbedingungen für das Gleichgewicht
- Eigenschaften des Gleichgewichts
- Existenz des Gleichgewichts
- Lösungsverfahren
- Zusammenhang zwischen Drucktensor und Geschwindigkeit (Viskosität)

4.2 Einfache Gleichgewichte

Die Bedingung für ein statisches Gleichgewicht (Gl. 4.1) kann auch in folgender Form geschrieben werden

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (4.6)$$

Mit κ als Krümmung der Feldlinien und \mathbf{n} als Normalenvektor der Feldlinie wird die rechte Seite

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B^2 \kappa \mathbf{n} + \frac{\mathbf{B}}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla B \quad (4.7)$$

und damit die Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} \left(B^2 \kappa \mathbf{n} + \frac{\mathbf{B}}{B} \mathbf{B} \cdot \nabla B \right) \quad (4.8)$$

An Hand dieser Formulierung lassen sich einige Spezialfälle diskutieren. In einem Feld mit geraden Feldlinien und Invarianz von B längs der Feldlinien gilt

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \longrightarrow p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const.} \quad (4.9)$$

Ausserhalb des Plasmas ist das Magnetfeld homogen und es gilt dann

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (4.10)$$

Daraus folgt, dass das Magnetfeld im Plasma kleiner als im Aussenraum ist. Diese Eigenschaft bezeichnet man auch als den "Diamagnetismus" des Plasmas.

Ein anderer Fall ist das von Kreisspulen erzeugte Magnetfeld. Wegen der Axialsymmetrie ist die Feldstärke auf den kreisförmigen Feldlinien konstant und die Gleichgewichtsbedingung reduziert sich zu

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} B^2 \kappa \mathbf{n} \quad (4.11)$$

Der Normalenvektor \mathbf{n} zeigt in die r-Richtung des zylindrischen Koordinatensystems. Für die z-Richtung folgt

$$\mathbf{e}_z \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (4.12)$$

Da die Feldstärke in z-Richtung konstant ist, folgt dies auch für den Plasmadruck $\mathbf{e}_z \cdot \nabla p = 0$. Die Schlussfolgerung daraus ist: Ein einfaches rotationssymmetrisches Feld eines Solenoids ist zum Plasmaeinschluss nicht geeignet, es kann darin keine toroidal geschlossenen Druckflächen geben.

Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt als notwendige Bedingung für die Existenz eines Gleichgewichts $\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$, d.h. der Druck ist längs der Feldlinien konstant. In einem toroidal eingeschlossenen Plasma sind die Druckflächen ineinander geschachtelte Flächen (nested surfaces). Diese Flächen sind dann gleichzeitig magnetische Flächen, d.h. sie werden von Magnetfeldlinien aufgespannt. Solange die Magnetfeldstärke auf diesen Flächen endlich bleibt, können sich die Feldlinien auf den geschachtelten Druckflächen nicht überschneiden, an jedem Punkt gibt es nur eine Richtung des Magnetfeldes. Es sei \mathbf{N} der Normalenvektor der Druck- oder magnetischen Fläche. Da dieser senkrecht auf der Feldrichtung steht, folgt aus der Gleichgewichtsbedingung Gl. (4.8)

$$\mathbf{N} \cdot \nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} B^2 \kappa_n \quad (4.13)$$

κ_n ist die Normalkrümmung, d.h. die Komponente des Krümmungsvektors der Feldlinie in Richtung der Flächennormale \mathbf{N} . In toroidaler Geometrie wechselt die Normalkrümmung auf der magnetischen

Fläche das Vorzeichen. Da der Druckgradient auf der Fläche nicht das Vorzeichen wechselt, muss dies für den Gradient von B^2 geschehen. Dies bedeutet, dass die Feldstärke B auf magnetischen Flächen des Gleichgewichts nicht konstant sein kann.

Im folgenden betrachten wir einfache zylindrische Plasmen. Der **Z-Pinch** besteht aus einer Plasmasäule, die von einem Längsstrom durchflossen wird. Das von dem Strom erzeugte kreisförmige Magnetfeld hält den Plasmadruck im Gleichgewicht.

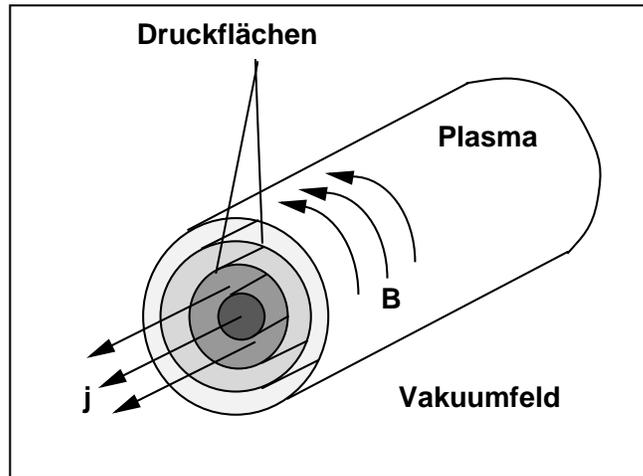


Abbildung 4.1: Axialer Strom und poloidales Magnetfeld im Z-Pinch

In zylindrischen Koordinaten (r, θ, z) ist das Magnetfeld

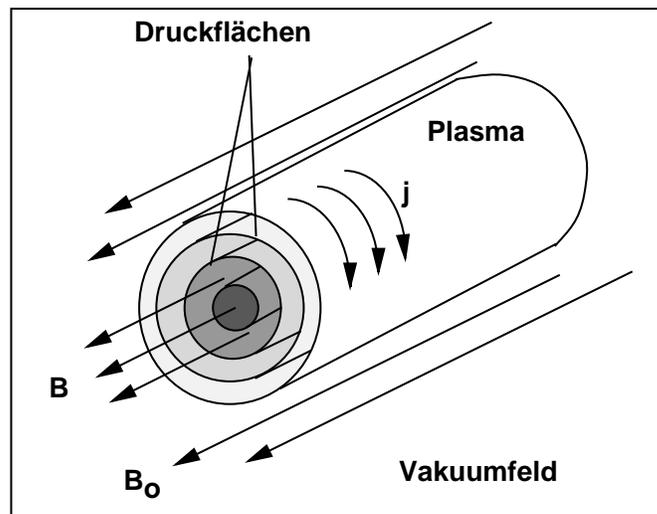


Abbildung 4.2: Schema des Theta-Pinches

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\} \quad (4.14)$$

und der Strom

$$\mathbf{j} = \{0, j_\theta(r), j_z(r)\} \quad (4.15)$$

Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B_\theta^2}{r\mu_0} \quad (4.16)$$

Strom und Magnetfeld sind verkoppelt über

$$j_\theta(r) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} \quad ; \quad j_z(r) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} \quad (4.17)$$

Die beiden Funktionen B_z, B_θ sind frei wählbar. Der Z-Pinch ist der Spezialfall, in dem nur ein axialer Strom und ein poloidales Feld existiert. Im **Theta-Pinch** (Fig. 4.2) sind die Rollen vertauscht, es gibt nur ein axiales Magnetfeld und einen poloidalen Strom. Der allgemeine Fall ist dann die Überlagerung dieser beiden Spezialfälle. Obgleich ein zylindrisches Gleichgewicht sich nicht realisieren lässt - es müsste ja unendlich lang sein - wird ein solches Gleichgewicht gerne als Modell für ein toroidales Gleichgewicht benutzt. Insbesondere dient es als Ausgangspunkt für Stabilitätsuntersuchungen.

4.2.1 Die Bennettrelation

Die Bennettrelation (1934) verknüpft den mittleren Plasmadruck mit dem axialen Plasmastrom. Der mittlere Druck $\langle p \rangle$ ist definiert über

$$a^2 \langle p \rangle = \int_0^a p 2r dr = - \int_0^a \frac{dp}{dr} r^2 dr \quad (4.18)$$

oder unter Benutzung von Gl. (4.16)

$$\begin{aligned} a^2 \langle p \rangle &= \int_0^a \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) r^2 dr + \int_0^a \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} 2r dr \\ &= a^2 \frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} + a^2 \left(\frac{B_z^2(a)}{2\mu_0} - \left\langle \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Wegen

$$B_\theta(a) = \frac{\mu_0 I_z}{2\pi a} \quad (4.20)$$

folgt

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0}{8\pi^2 a^2} I_z^2 + \frac{B_z^2(a)}{2\mu_0} - \left\langle \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right\rangle \quad (4.21)$$

Im isothermen Plasma ist mit $\langle p \rangle = \langle n \rangle kT$ und der Teilchenzahl $N = \pi a^2 \langle n \rangle$ ist diese Relation

$$\frac{8\pi}{\mu_0} N kT = I_z^2 + \frac{4\pi^2 a^2}{2\mu_0^2} (B_z^2(a) - \langle B_z^2 \rangle) \quad (4.22)$$

Im einfachen Z-Pinch ($B_z = 0$) erhält man die Bennettrelation (Bennett 1934)

$$\frac{8\pi}{\mu_0} N kT = I_z^2 \quad (4.23)$$

Beispiel : Ein Fusionsreaktor mit den Parametern $kT = 20 \text{ keV}$, $\langle n \rangle = 2 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $a = 2 \text{ m}$ erfordert einen Strom von $I = 12.6 \text{ MA}$. Der Plasmadruck ist $\langle p \rangle = 6.4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.

4.2.2 Feldlinien

Die Feldlinien im zylindrischen Pinch sind helikale Linien, deren Differentialgleichung lautet

$$\frac{rd\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{B_z} \quad (4.24)$$

mit der Lösung

$$\theta = \frac{B_\theta(r)}{rB_z(r)} z \quad (4.25)$$

Die Feldlinie ist eine Helix mit konstanter Steigung. Es sei $L = 2\pi R$ die Periodizitätslänge des Pinches, dann ist der Drehwinkel der Feldlinie

$$\iota =: \frac{\theta_L}{2\pi} = \frac{RB_\theta(r)}{rB_z(r)} \quad (4.26)$$

θ_L heisst auch ‘‘Rotationstransformation’’ der Feldlinie, häufig wird dafür auch ι benutzt. Der inverse Wert

$$q(r) = \frac{rB_z}{RB_\theta} = \frac{1}{\iota} \quad (4.27)$$

ist als ‘‘Sicherheitsfaktor’’ bekannt. Die radiale Ableitung der Rotationstranformation heisst ‘‘Versicherung’’. Der zylindrische Pinch der Länge L wird oft als Näherung für einen Torus mit grossem Radius R_0 benutzt. Die Bedingung dafür ist ein groses ‘‘Aspektverhaltnis’’, d.h.

$$\frac{R_0}{r} > \frac{R_0}{a} \gg 1 \quad (4.28)$$

4.3 Magnetische Flächen

Eine Fläche, die von Magnetfeldlinien aufgespannt wird, heisst Flussröhre oder ‘‘magnetische Fläche’’.

$$\psi = const. \quad \mathbf{B} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (4.29)$$

Eine offene Flussröhre ist nicht eindeutig definiert, sie wird durch eine Anfangskurve festgelegt. Toroidal geschlossene magnetische Flächen sind für den Plasmaeinschluss von besonderem Interesse. Eine toroidal geschlossene magnetische Fläche entsteht, wenn die Anfangskurve nach einem toroidalen Umlauf durch die feldlinien in sich abgebildet wird. Da sich geladene Teilchen längs Magnetfeldlinien nahezu frei bewegen können, muss für einen guten Plasmaeinschluss verhindert werden, dass Feldlinien materielle Wände schneiden. Das lässt sich am besten in toroidaler Geometrie erreichen, da hier Feldlinien geschlossene Gebiete ergodisch ausfüllen oder auch Flächen aufspannen können. Ergodisch bedeutet, dass die Feldlinie auf der Fläche jedem Punkt beliebig nahe kommt. Das folgende Bild zeigt eine rotationsymmetrische magnetische Fläche. Eine Feldlinie spannt die magnetische Fläche auf. Existiert eine magnetische Fläche, dann gilt für das Innere der Fixpunktsatz: Im Innenraume gibt es mindestens eine geschlossene Feldlinie, diese heisst die ‘‘magnetische Achse’’.

4.3.1 Definitionen auf magnetischen Flächen

Gegeben sei ein System ineinandergeschachtelter magnetischer Flächen (nested surfaces). Dies sind insbesondere toroidale Flächen d.h. 2-fach zusammenhängende Flächen. Es gibt auch Flächen mit höheren Zusammenhangsverhaltnissen, diese sind für Fusionsplasmen aber nicht von Interesse. Die Flächen seien beschrieben durch $c(x, y, z) = const.$. $c = 0$ sei die magnetische Achse und $c = C$ die letzte geschlossene magnetische Fläche. $\varphi(x, y, z) = const.$ seien die poloidal geschlossenen Koordinatenlinien und $\theta(x, y, z) = const.$ die toroidal geschlossenen Koordinatenlinien. Die Winkelvariablen seien auf Eins normiert d.h. $0 \leq \varphi \leq 1$; $0 \leq \theta \leq 1$. Es sei nun $c = s$ eine bestimmte magnetische Fläche, dann gibt es zu dieser Fläche einige integrale Grössen, die im folgenden beschrieben werden:

Volumen

$$V(s) = \iiint_{c \leq s} d^3 \mathbf{x} \quad (4.30)$$

Magnetische Energie

$$U(s) = \iiint_{c \leq s} B^2 d^3 \mathbf{x} \quad (4.31)$$

Helizität

$$H(s) = \iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3 \mathbf{x} \quad (4.32)$$

Toroidaler Fluss

$$\Psi(s) = \iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi d^3 \mathbf{x} \quad (4.33)$$

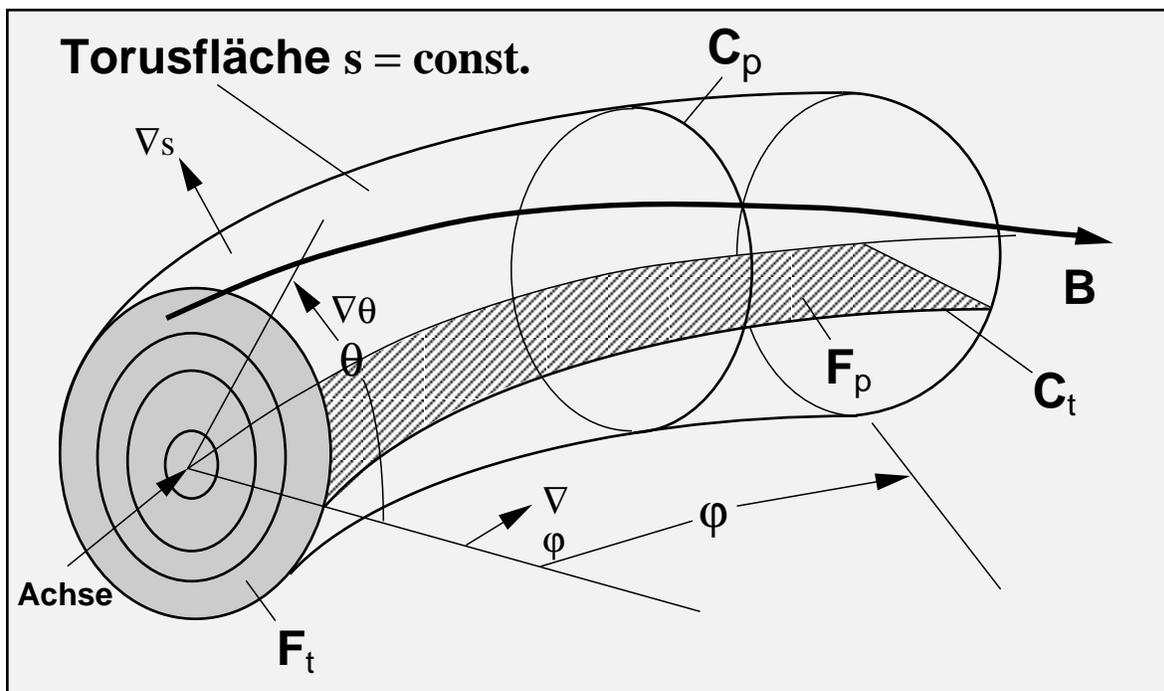


Abbildung 4.3: Teil einer toroidalen magnetischen Fläche

Poloidaler Fluss

$$\chi(s) = \iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \nabla \theta d^3 \mathbf{x} \quad (4.34)$$

Neben diesen Größen sind auch noch die Ableitungen nach dem Parameter s von Interesse.

$$V'(s) = \iint_{c=s} \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} ; \quad U'(s) = \iint_{c=s} B^2 \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} \quad (4.35)$$

$$H'(s) = \iint_{c=s} \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} ; \quad \psi'(s) = \iint_{c=s} \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} ; \quad \chi'(s) = \iint_{c=s} \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} \quad (4.36)$$

Ein divergenzfreies Magnetfeld, dessen Flächen mit $c(x,y,z) = const.$ zusammenfallen, hat folgende Darstellung in sogenannten Clebsch Variablen

$$\mathbf{B} = \nabla c \times \nabla v \quad (4.37)$$

Wegen der Beziehungen $\mathbf{B} \cdot \nabla c = 0$; $\mathbf{B} \cdot \nabla v = 0$ beschreibt $v = const$ die Feldlinie auf der magnetischen Fläche. Die Differentialgleichung für die Feldlinie lautet

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{B} \quad (4.38)$$

oder in Komponentenschreibweise

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \quad (4.39)$$

oder

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi) d\theta - (\mathbf{B} \cdot \nabla \theta) d\varphi = 0 \quad (4.40)$$

Setzt man hier die Clebsch-Darstellung des Magnetfeldes ein, dann geht diese Beziehung über in

$$((\nabla c \times \nabla v) \cdot \nabla \varphi) \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi \right) = 0 \quad (4.41)$$

Daraus folgt $d\mathbf{v} = 0$ q.e.d. Die allgemeine Form von $v(s, \theta, \varphi)$ auf der Fläche $c = s$ ist

$$\mathbf{v} = \lambda(s, \theta, \varphi) + C_1(s)\theta + C_2(s)\varphi \quad (4.42)$$

λ ist eine einwertige Funktion der Winkelvariablen. Für den Zuwachs von v bei einem poloidalen Umlauf gilt

$$C_1(s) = \oint_{C_p} \frac{\mathbf{B} \times \nabla c}{|\nabla c|^2} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.43)$$

was mit Hilfe des Stokesschen Satzes übergeht in

$$C_1(s) = \iint_{c=s} \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} = \psi'(s) \quad (4.44)$$

C_p ist eine poloidal geschlossene Kurve. Analog gilt für die zweite Konstante

$$C_2(s) = \iint_{c=s} \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \frac{d\mathbf{f}}{|\nabla c|} = \chi'(s) \quad (4.45)$$

Im Spezialfall $\lambda = 0$ sind die Feldlinien im θ, φ Koordinatensystem gerade Linien $\mathbf{v} = C_1(s)\theta + C_2(s)\varphi = \text{const.}$ Die Steigung ist durch das Verhältnis der Koeffizienten C_1 und C_2 definiert. Dieses Verhältnis C_2/C_1 heisst "Rotationstransformation" und der inverse Wert der "Sicherheitsfaktor". Ist dieses Verhältnis gleich 1, dann schließen sich die Feldlinien nach einem toroidalen und einem poloidalen Umlauf. Ganz allgemein gilt: Die Feldlinien auf einer Fläche schließen sich, wenn die Rotationstransformation

$$\iota(s) = \frac{\chi'(s)}{\psi'(s)} = \frac{m}{n} \quad (4.46)$$

eine rationale Zahl ist. Der Beweis geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} v(\theta - m, \varphi + n) &= \lambda + \psi'(s)(\theta - m) + \chi'(s)(\varphi + n) \\ &= \lambda + \psi'(s)\theta + \chi'(s)\varphi - \psi'(s)m + \chi'(s)n \\ &= \lambda + \psi'(s)\theta + \chi'(s)\varphi \\ &= v(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.47)$$

d.h. die Feldlinie schließt sich nach n toroidalen und nach m poloidalen Umläufen.

4.4 Axialsymmetrische Gleichgewichte

Axialsymmetrische Plasmagleichgewichte sind von besonderem Interesse, da sich die Berechnung auf die Lösung einer zweidimensionalen partiellen Gleichung reduzieren lässt. Weiterhin sind geschlossene magnetische Flächen zum Plasmaeinschluss besonders gut geeignet, da keine Endverluste auftreten wie in den oben beschriebenen linearen Gleichgewichten. Die Aufgabenstellung lautet wie folgt: In einem zylindrischen Koordinatensystem (r, φ, z) werden Gleichgewichte gesucht, die nicht von der toroidalen Koordinate φ abhängen. Das allgemeine axialsymmetrische divergenzfreie Magnetfeld hat die Form

$$\mathbf{B} = \mu_0 J(\chi) \nabla \varphi + \nabla \chi \times \nabla \varphi; \chi = \chi(r, z) \quad (4.48)$$

Der erste Term beschreibt das Toroidalfeld und der zweite das Poloidalfeld. Aus $\nabla \chi \cdot \nabla \varphi = 0$ und $\mathbf{B} \cdot \nabla \chi = 0$ folgt dass $\chi = \text{const.}$ die magnetische Fläche darstellt, d.h. die Feldlinie bleibt auf dieser Fläche. $J(\chi)$ ist eine freie Funktion, deren physikalische Bedeutung später erklärt wird. $\mathbf{B} = \mu_0 J(\chi) \nabla \varphi$ ist das Toroidalfeld und $\mathbf{B}_p = \nabla \chi \times \nabla \varphi$ das Poloidalfeld. Die Stromdichte ist

$$\mu_0 \mathbf{j} = \mu_0^2 J'(\chi) \mathbf{B}_p + \nabla \times \mathbf{B}_p \quad (4.49)$$

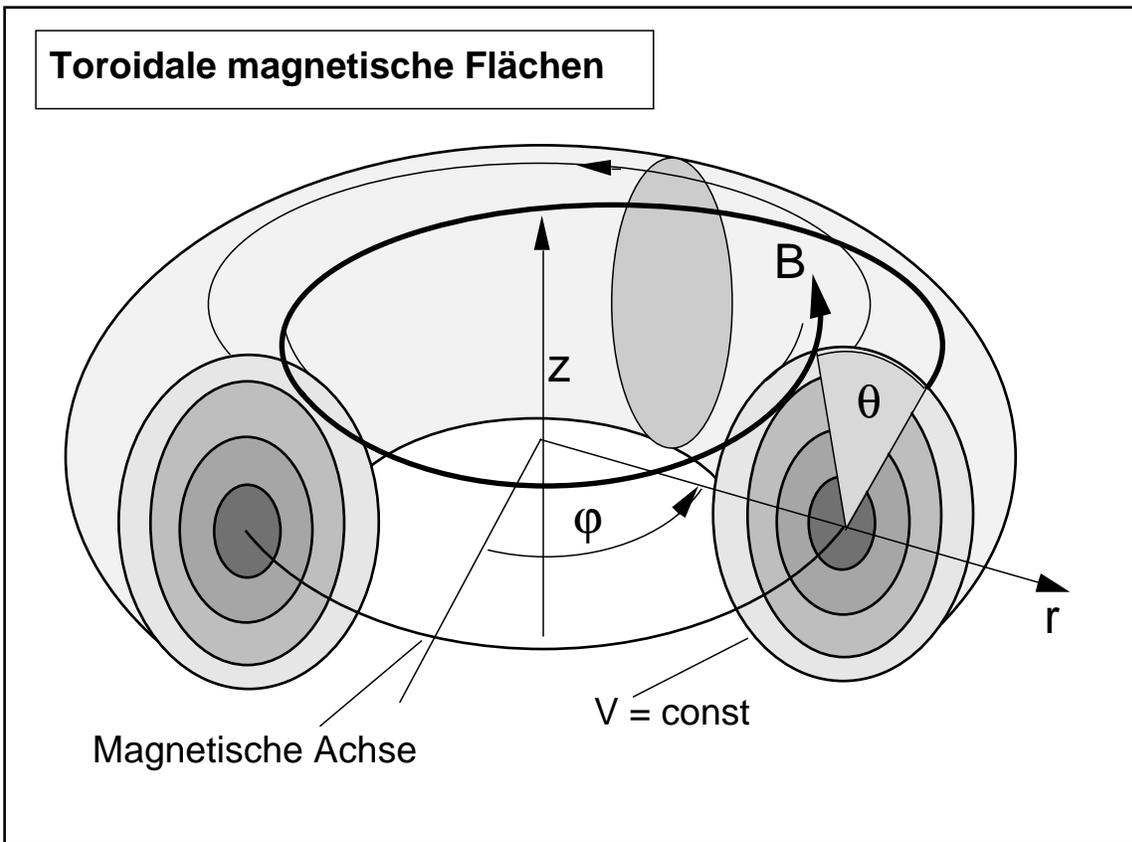


Abbildung 4.4: Axialsymmetrische magnetische Flächen im Zylinderkoordinatensystem. φ ist die toroidale Koordinate und θ die poloidale Koordinate.

woraus sich die toroidale Komponente des Stromes errechnet:

$$\mu_0 \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi = \nabla \varphi \cdot \nabla \times \mathbf{B}_p = -\nabla \cdot ((\nabla \varphi)^2 \nabla \chi) \quad (4.50)$$

Die Ströme fließen tangential zu den magnetischen Flächen, denn es gilt $\mathbf{j} \cdot \nabla \chi = 0$. Die poloidale Stromdichte ist

$$\mu_0 \mathbf{j}_p = \nabla J \times \nabla \varphi = \nabla \times (J \nabla \varphi) \quad (4.51)$$

und damit ist der poloidale Gesamtstrom zwischen magnetischer Achse und magnetischer Fläche

$$\begin{aligned} J_p(\chi) &= \iint \mu_0 \mathbf{j}_p \cdot d\mathbf{f} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \oint \mathbf{B}_t \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint J(\chi) \nabla \varphi \cdot d\mathbf{l} \\ &= J(\chi) - J(0) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Der toroidale Strom innerhalb einer magnetischen Fläche ist

$$\begin{aligned} \mu_0 I(\chi) &= \iiint \mu_0 \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi d^3 \mathbf{x} \\ &= -\iiint \nabla \cdot ((\nabla \varphi)^2 \nabla \chi) d^3 \mathbf{x} \\ &= -\iint (\nabla \varphi)^2 \nabla \chi \cdot d\mathbf{f} \\ &= -\chi'(s) \langle (\nabla \varphi)^2 (\nabla s)^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.53)$$

Der Mittelwert ist definiert durch

$$\langle g \rangle = \iint g \frac{df}{|\nabla s|}; \quad \langle 1 \rangle = 1 \quad (4.54)$$

Der poloidale magnetische Fluß ist

$$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \oint \chi \nabla \phi \cdot d\mathbf{l} = \chi(s) \quad (4.55)$$

Die Integration erfolgt entlang der magnetischen Achse und auf der magnetischen Fläche entlang einer toroidal geschlossenen Kurve. Dabei ist $s = s(\chi)$ oder $\chi = \chi(s)$ das Volumen innerhalb der magnetischen Fläche. Für den toroidalen Fluß gilt

$$\psi(s) = \iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \nabla \phi \frac{df ds}{|\nabla s|} = \iiint_{c \leq s} \mu_0 J (\nabla \phi)^2 \frac{df ds}{|\nabla s|} \quad (4.56)$$

und damit

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= \mu_0 J(s) \iint_{c=s} (\nabla \phi)^2 \frac{df}{|\nabla s|} \\ &= \mu_0 J(s) \langle (\nabla \phi)^2 \rangle \end{aligned} \quad (4.57)$$

Die Rotationstransformation $\iota(s)$ und der Sicherheitsfaktor $q(s)$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{q(s)} &= \iota(s) = \frac{\chi'(s)}{\psi'(s)} \\ &= \frac{I(s)}{J(s) \langle (\nabla \phi)^2 \rangle \langle (\nabla \phi)^2 (\nabla s)^2 \rangle} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Diese Beziehung zeigt, dass es in axialsymmetrischen Konfigurationen keine endliche Rotationstransformation ohne Toroidalstrom geben kann.

4.4.1 Die Lüst-Schlüter-Grad-Shafranov-Gleichung

In den obigen Betrachtungen wurden die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Größen des Gleichgewichts dargestellt. Es bleibt noch zu zeigen, wie das Tokamakgleichgewicht konkret berechnet wird, d.h. wie die Flussfunktion $\chi(r, z)$ ermittelt wird. Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ verlangt

$$\mathbf{j}_t \times \mathbf{B}_p + \mathbf{j}_p \times \mathbf{B}_t = p' \nabla \chi \quad (4.59)$$

oder wenn man die obigen Ausdrücke für den Strom und das Magnetfeld einsetzt

$$\mathbf{j}_t \times \mathbf{B}_p + \mathbf{j}_p \times \mathbf{B}_t = (\mathbf{j} \cdot \nabla \phi) \nabla \chi - \mu_0 J J' (\nabla \phi)^2 \nabla \chi \quad (4.60)$$

Zusammen mit der Darstellung des Toroidalstromes Gl. (4.50) ergibt dies

$$-\nabla \cdot ((\nabla \phi)^2 \nabla \chi) = \mu_0 p'(\chi) + \mu_0^2 J J'(\chi) (\nabla \phi)^2 \quad (4.61)$$

Dies ist die gesuchte Differentialgleichung für die Flussfunktion χ . Sie ist unter dem Namen ‘‘Lüst-Schlüter-Grad-Shafranov-Gleichung’’ bekannt¹. Diese Gleichung ist eine nichtlineare Gleichung vom elliptischen Typ. Mit

$$(\nabla \phi)^2 = \frac{1}{r^2} \quad (4.62)$$

¹R. Lüst and A Schlüter, Axialsymmetrische magnetohydrodynamische Gleichgewichtskonfigurationen, Z. Naturforsch. 12a, 850-4 (1957)

wird die Gleichung

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \chi = \mu_0 r^2 p'(\chi) + \mu_0^2 J J'(\chi) \quad (4.63)$$

Der Operator auf der linken Seite dieser Gleichung wird häufig mit Δ^* abgekürzt. Zur Lösung der Gleichung benötigt man noch Randbedingungen, die im einfachsten Fall Dirichletsche Randbedingungen sind. Dies bedeutet, dass auf einer geschlossenen Kurve in der r, z -Ebene gilt: $\chi = \text{const}$.

Die LSGS-Gleichung wird im allgemeinen iterativ gelöst

$$\Delta^* \chi_{n+1} = \mu_0 r^2 p'(\chi_n) + \mu_0^2 J J'(\chi_n) \quad (4.64)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Dabei sind die Funktionen $p(\chi)$ und $J(\chi)$ frei wählbar. Eine einfache analytische Lösung der Gleichung erhält man durch den Ansatz²

$$p(\chi) = \frac{8}{R^4} (1 + a^2) \chi + \text{const} ; J(\chi) = 0 \quad (4.65)$$

Die Lösung ist

$$\chi = \frac{r^2}{R^4} (2R^2 - r^2 - 4a^2 z^2) \quad (4.66)$$

Dabei sind R und a vorgegebene Konstante.

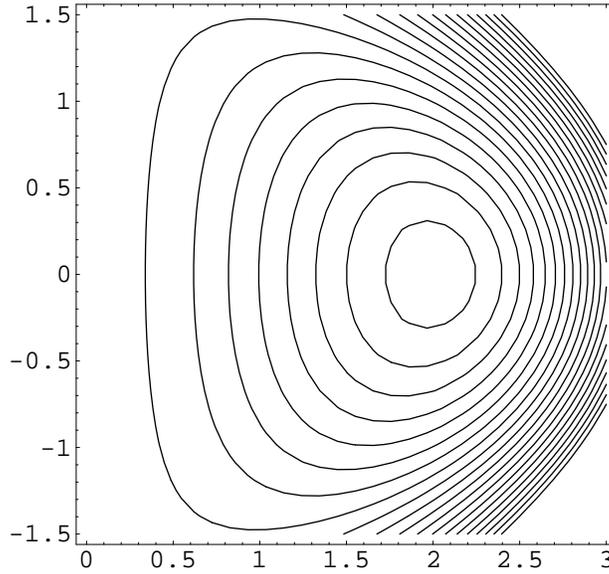


Abbildung 4.5: Konturlinien der Funktion $\chi(r, z)$ in Gl. (4.66), $R = 2$, $a = 0.8$.

Bei großem Aspektverhältnis ist der $1/r$ -Term auf der linken Seite vernachlässigbar. Die Näherung ist dann mit $z \rightarrow y$, $r \rightarrow R + x$, $x \ll R$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \chi = \mu_0 R^2 p'(\chi) + \mu_0^2 J J'(\chi) \quad (4.67)$$

Man erhält die Gleichung für den allgemeinen 2-dimensionalen Pinch. In der ebenen Approximation ist die rechte Seite dieser Gleichung nur eine Funktion von χ . Analytische Lösungen lassen sich auch in einigen nichtlinearen Fällen angeben. Die Gleichung

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) \chi = \exp(\chi) \quad (4.68)$$

²V.D. Shafranov, Rev. of Plasma Physics, Vol. 2, p. 116,

hat die allgemeine Lösung

$$-\chi = \ln \left(\frac{(1 + |g(z)|^2)^2}{|g'(z)|^2} \right) \quad (4.69)$$

wobei $g(z)$ eine beliebige Funktion der komplexen Variablen z ist. Als Beispiel betrachten wir

$$g(z) = \frac{z}{\sqrt{8}} \longrightarrow \chi = 2 \ln \left(1 + \frac{r^2}{8} \right) \quad (4.70)$$

Die Stromdichte ist

$$j_z(r) = \frac{1}{\left(1 + \frac{r^2}{8}\right)^2} \quad (4.71)$$

Dies ist der zylindrische Bennettpinch.

4.5 Tokamakgleichgewicht

Im allgemeinen axialsymmetrischen Gleichgewicht kann es mehrere Staupunkte des Poloidalfeldes geben. Staupunkte sind Punkte, an denen das Poloidalfeld null wird, d.h. $\nabla\chi = 0$. Dabei sind zwei Typen von Staupunkten zu unterscheiden: der elliptische Typ (O-Punkt) und der hyperbolische Typ (X-Punkt). Die Entwicklung der Flussfunktion χ liefert in der Nähe des Staupunktes eine quadratische Form $\chi = ar^2 + brz + cz^2$. Haben die Eigenwerte dieser quadratischen Form dasselbe Vorzeichen, dann handelt es sich um einen O-Punkt, im Falle des Vorzeichenwechsels liegt ein X-Punkt vor. Der Tokamak

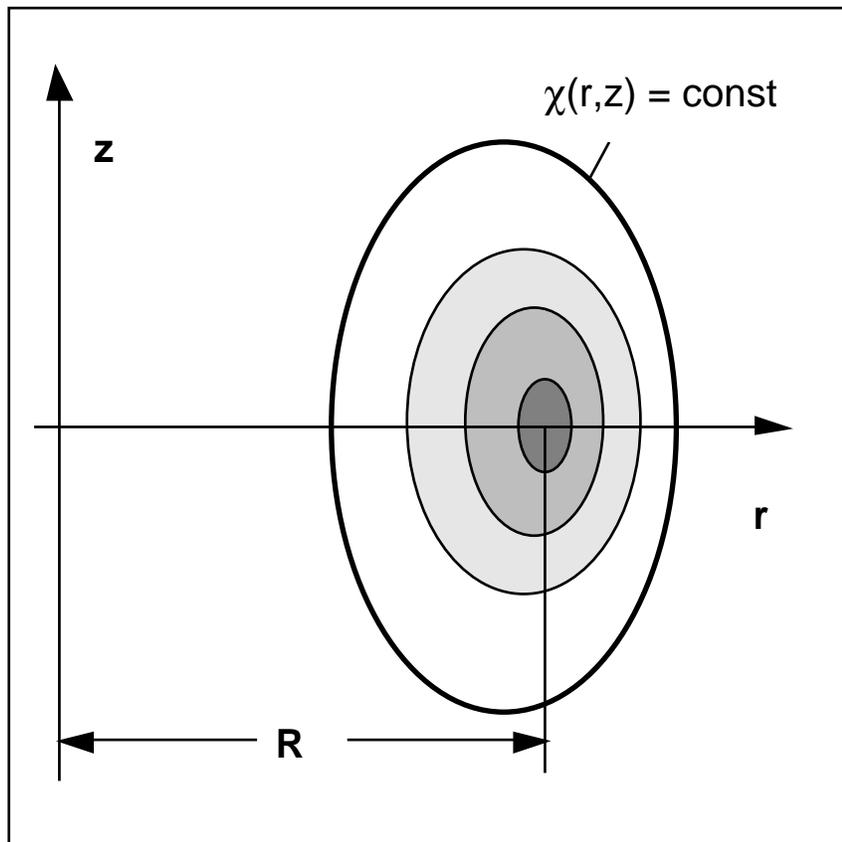


Abbildung 4.6: Tokamakgleichgewicht mit einem Staupunkt

hat im Plasmavolumen nur einen O-Punkt, d.h. es gibt nur eine magnetische Achse. Am Rande des Einschlussvolumens können noch ein oder zwei X-Punkte auftreten, die dann zur Divertorwirkung benutzt werden. In dem Staupunkt-freien Bereich gilt $|\nabla\chi| \neq 0$. Eine der wesentlichen Eigenschaften des

Tokamaks ist es, dass Gleichgewichte ohne toroidalem Gesamtstrom nicht möglich sind. Um dies zu zeigen berechnen wir den Toroidalstrom innerhalb einer magnetischen Fläche

$$\begin{aligned}\mu_0 I(\chi) &= \oint_{C_p} \mathbf{B}_p \cdot d\mathbf{l} = \oint_{C_p} (\nabla\chi \times \nabla\varphi) \cdot d\mathbf{l} \\ &= \oint_{C_p} |\nabla\varphi| |\nabla\chi| dl \neq 0\end{aligned}\quad (4.72)$$

Die Integration verläuft auf der magnetischen Fläche und auf einer poloidal geschlossenen Kurve C_p . In einem Gebiet mit ineinandergeschachtelten Flussflächen ohne Staupunkt ist $|\nabla\chi| \neq 0$ und daher ist die rechte Seite in Gl. (4.72) positiv, d.h. $I(\chi) \neq 0$.

4.5.1 Integrale Gleichgewichtsbeziehung

Die LSGS-Gleichung beschreibt das lokale Tokamakgleichgewicht. Durch Integration über eine magnetische Fläche kann man daraus gemittelte Gleichgewichtsbedingungen gewinnen. Gegeben sei ein Tokamakgleichgewicht, d.h. eine Lösung der LSGS-Gleichung. Zwischen den Integralgrößen der magnetischen Flächen wie Toroidalstrom, Poloidalstrom und den magnetischen Flüssen gibt es Zusammenhänge, die im folgenden aufgezeigt werden sollen. Die Grad-Shafranov-gleichung wird dazu über die magnetische Fläche gemittelt. Man benutzt dazu das Koordinatensystem (s, θ, φ) , wobei die s -Flächen mit den magnetischen Flächen zusammenfallen. s ist das Volumen der magnetischen Fläche und θ der Poloidalwinkel. D.h $\chi = \chi(s)$. Dabei sei und $s = 0$ auf der magnetischen Achse. Die LSGS-Gleichung lautet mit s an Stelle von χ als gesuchter Funktion

$$\chi'(s) \mathbf{j} \cdot \nabla\varphi = p'(s) + \mu_0 J J'(s) (\nabla\varphi)^2 \quad (4.73)$$

Die Mittelung dieser Gleichung über die magnetische Fläche liefert:

$$\chi'(s) I'(s) = p'(s) + \mu_0 J J'(s) \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle \quad (4.74)$$

was mit Gl. (4.57) die Form erhält

$$\chi'(s) I'(s) = p'(s) + J'(s) \psi'(s) \quad (4.75)$$

Diese Beziehung gilt auch in einem nicht-axialsymmetrischen toroidalen Gleichgewicht, sie ist die Gleichgewichtsbedingung in integraler Form³. Im Tokamakgleichgewicht lautet diese Beziehung auch

$$-\frac{\mu_0}{b(s)} I(s) I'(s) = p'(s) + J(s) J'(s) a(s) \quad (4.76)$$

mit den Abkürzungen

$$a(s) = \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle ; b(s) = \langle (\nabla\varphi)^2 (\nabla s)^2 \rangle \quad (4.77)$$

Die Geometrie der Gleichgewichtsflächen wird durch die Faktoren a und b berücksichtigt.

4.5.2 Die Bennettrelation im Tokamak

Wie oben am Beispiel des zylindrischen Pinches gezeigt, korreliert die Bennett-Relation den mittleren Druck mit dem axialen Strom. Im folgenden soll diese Relation auf Tokamakgleichgewichte ausgedehnt werden. Es sei s_0 die letzte geschlossene magnetische Fläche und es sei $p = 0$ auf $s = s_0$. Wir schreiben Gl. (4.76) in der Form

$$\frac{s}{s_0} p'(s) = -g(s) I I'(s) - h(s) \frac{s}{s_0} J J'(s) \quad (4.78)$$

mit den Funktionen

$$g(s) = \frac{\mu_0 s}{s_0 b(s)} ; h(s) = \mu_0 a(s) \quad (4.79)$$

³M. Kruskal, R. Kulsrud, Phys. Fluids 1 (1958) p

Beide Funktionen sind positiv und nur schwach von s abhängig. Der über das Volumen gemittelte Plasmapdruck ist

$$\bar{p} = \frac{1}{s_0} \int_{s_0} p ds = - \int_0^{s_0} \frac{s}{s_0} p'(s) ds \quad (4.80)$$

und mit Hilfe der integralen Beziehungen Gl. (4.78)

$$\bar{p} = \int_0^{s_0} \left[g(s) H'(s) + h(s) \frac{s}{s_0} J J'(s) \right] ds \quad (4.81)$$

und mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$\bar{p} = \bar{g} \frac{1}{2} I^2 + \bar{h} \frac{1}{2} \left(J^2(s_0) - \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} J^2 ds \right) \quad (4.82)$$

\bar{g} und \bar{h} sind Mittelwerte über das Volumen s_0 . Diese Relation ist das Equivalent zur Bennettrelation, dabei ist I der gesamte Toroidalstrom. Näherung: In nahezu kreisförmiger magnetischen Flächen lassen sich Näherungen angeben. Dazu definieren wir den mittleren Radius der magnetischen Fläche durch

$$s = \frac{1}{2} R \rho^2 \longrightarrow \rho = \rho(s) \longrightarrow \langle |\nabla \rho| \rangle \approx 1 \quad (4.83)$$

was zu der Näherung führt

$$b(s) = \langle (\nabla \phi)^2 (\nabla s)^2 \rangle \approx \frac{1}{R^2} \langle (\nabla s)^2 \rangle \approx \rho^2 \quad (4.84)$$

und

$$g(s) = \frac{\mu_0 s}{s_0 b(s)} \approx \frac{\mu_0}{\rho_0^2}; \quad |\nabla \phi| = \frac{1}{r} \approx \frac{1}{R} \longrightarrow h(s) \approx \frac{\mu_0}{R^2} \quad (4.85)$$

Die Näherung für die Bennettrelation ist in kreisförmigen Tokamaks

$$\bar{p} = \bar{g} \frac{\mu_0}{2 \rho_0^2} I^2 + \frac{\mu_0}{R^2} \left(J^2(s_0) - \frac{1}{s_0} \int_0^{s_0} J^2 ds \right) \quad (4.86)$$

Folgerung Bei niedrigem Druck oder druckfreiem Plasma (d.h kraftfreiem Plasma) ist das Toroidalfeld im Plasma größer als am Rande (paramagnetischer Effekt). Dies folgt aus

$$\frac{\mu_0}{s_0 R^2} \int_0^{s_0} J^2 ds = \frac{\mu_0}{R^2} J^2(s_0) + \frac{\mu_0}{2 \rho_0^2} I^2 \quad (4.87)$$

4.5.3 Tokamakgleichgewicht mit elektrischem Widerstand

Im idealen Gleichgewicht gibt es keine Verluste im Plasma. Der endliche Plasmawiderstand führt jedoch zu einer Dissipation und zu einem Plasmaverlust. Um diesen Verlust zu berechnen gehen wir von dem Ohmschen Gesetz mit endlichem Widerstand aus. Das Ohmsche Gesetz mit elektrischem Widerstand d.h. $\nabla \phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta(s) \mathbf{j}$ hat keinen Einfluss auf das Gleichgewicht, da die Geschwindigkeit \mathbf{V} in der Kraftbilanz nicht auftritt. \mathbf{B} und \mathbf{j} im Ohmschen Gesetz sind damit die Felder des idealen Gleichgewichts. Der Widerstand ist eine Funktion der Temperatur und damit auf Flussflächen konstant, falls die Temperatur auf Flussflächen konstant ist. Das elektrische Potential hat die Form

$$\phi = U_L \varphi + \lambda(s, \theta, \varphi) \quad (4.88)$$

U_L ist die toroidale Ringspannung und $\lambda(s, \theta, \varphi)$ periodisch in den Winkeln. Wegen $\mathbf{B} \cdot \nabla \phi = \eta(s) \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \neq 0$ ist das elektrische Potential auf Flussflächen nicht konstant und es ergibt sich aus dem Ohmschen Gesetz eine Geschwindigkeit

$$\mathbf{V} = \frac{\nabla \phi \times \mathbf{B}}{B^2} - \eta(s) \frac{\nabla p}{B^2} \quad (4.89)$$

die zu einem integralen Teilchenverlust durch die magnetische Fläche führt. Der erste Term in Gl. (4.89) beschreibt eine konvektive Bewegung und der zweite Term eine Diffusion angetrieben durch den Druckgradienten. Das elektrische Potential errechnet sich als Spannungsabfall längs der Magnetfeldlinie und hängt von der Geometrie der Feldlinien (d.h. Aspektverhältnis und Rotationstransformation) ab. Der integrale Effekt dieser Konvektion wird als "Pfirsch-Schlüter-Diffusion" bezeichnet. Streng genommen ist dies keine Diffusion sondern der Nettoverlust einer $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -Konvektion. Der zweite Term beschreibt die "klassische Diffusion". Der integrale Teilchenfluss durch eine magnetische Fläche berechnet sich aus

$$\Gamma = n(s) \iint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{f} \quad (4.90)$$

$n(s)$ ist die Teilchendichte auf den magnetischen Flächen. Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich ein Zusammenhang zwischen dem integralen Teilchenfluss und der dissipierten Leistung. Durch Multiplikation mit der Dichte und dem Strom folgt aus dem Ohm'schen Gesetz

$$n(s)\mathbf{j} \cdot \nabla\phi + n(s)\mathbf{j} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = n(s)\eta\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \quad (4.91)$$

Die Integration über die magnetische Fläche ergibt unter Benutzung der Gleichgewichtsbedingung

$$n(s)U_L I'(s) - p'(s)\Gamma = \eta n(s) \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \rangle \quad (4.92)$$

Diese Beziehung hat die Form des Entropiesatzes wie er in der Theorie irreversibler thermodynamischer Prozesse formuliert wird: Die Summe aus dem Produkt von thermodynamischen Flüssen und thermodynamischen Kräften ist gleich der dissipierten Leistung. Die Bezeichnung Kräfte hat hier nichts mit mechanischen Kräften zu tun, man kann daher den Druckgradienten $p'(s)$ und den Gradienten des Toroidalstromes $I'(s)$ als thermodynamische Kräfte bezeichnen und Γ und U_L als die thermodynamischen Flüsse. Im folgenden wird gezeigt, dass diese Bezeichnung auch sinnvoll ist.

4.5.4 Hamada Koordinatensystem

Das Axialsymmetrische Gleichgewicht wird im allgemeinen in einem zylindrischen Koordinatensystem beschrieben; die LSGS-Gleichung ist eine Gleichung in r, z -Koordinaten. Um den Zusammenhang zwischen den Gradienten und den Flüssen im Einzelnen zu analysieren ist es bequem, ein Koordinatensystem einzuführen, das die geometrischen Eigenschaften des Gleichgewichts weitgehend beinhaltet, so dass sich die Relationen zwischen den Plasmametern auf einfache Weise beschreiben lassen. Hierzu eignet sich insbesondere das Hamada-Koordinatensystem, welches dadurch ausgezeichnet ist, dass in ihm sowohl Feldlinien als auch Stromlinien gerade Linien sind. Dazu werden die magnetischen Flächen als Koordinatenflächen eingeführt und auf ihnen zwei Winkelkoordinaten θ, φ . Die Koordinate φ ist die übliche azimutale Koordinate eines Zylinderkoordinatensystems. Auf der magnetischen Fläche führt man zwei divergenzfreie Basisvektoren \mathbf{e}_p und \mathbf{e}_t ein mit den Eigenschaften

$$\mathbf{e}_t \times \mathbf{B}_p = \chi'(s)\nabla s \longrightarrow \mathbf{e}_t \cdot \nabla\varphi = 1 ; \mathbf{e}_t = \frac{\nabla\varphi}{(\nabla\varphi)^2} ; \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_t = \mu_0 J \quad (4.93)$$

Der Basisvektor \mathbf{e}_t zeigt in die toroidale Richtung, wegen der Axialsymmetrie ist er auch divergenzfrei. Der poloidale Basisvektor \mathbf{e}_p ist definiert durch

$$\mathbf{e}_p = \nabla s \times \nabla\varphi - \frac{1}{\chi'(s)} (\psi'(s) - \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi) \mathbf{e}_t \quad (4.94)$$

$\psi'(s)$ ist die Ableitung des toroidalen magnetischen Flusses. Dieser Basisvektor ist ebenfalls divergenzfrei.

$$\psi'(s) = \langle \mathbf{B} \cdot \nabla\varphi \rangle = \mu_0 J \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle \quad (4.95)$$

Damit kann man diesen Basisvektor auch schreiben

$$\mathbf{e}_p = \nabla s \times \nabla\varphi - \frac{\mu_0 J(s)}{\chi'(s)} (\langle (\nabla\varphi)^2 \rangle - (\nabla\varphi)^2) \mathbf{e}_t \quad (4.96)$$

Daraus folgen die Eigenschaften der Basisvektoren

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_t \times \mathbf{B} &= \chi'(s) \nabla s \\ \mathbf{e}_p \times \mathbf{B} &= -\psi'(s) \nabla s \\ \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_p &= \nabla s\end{aligned}\quad (4.97)$$

Das Magnetfeld lautet mit Hilfe dieser Basisvektoren

$$\mathbf{B} = \chi'(s) \mathbf{e}_p + \psi'(s) \mathbf{e}_t \quad (4.98)$$

D.h. in dem durch die Basisvektoren \mathbf{e}_p und \mathbf{e}_t definierten Koordinatensystem sind die Feldlinien gerade Linien. Die Basisvektoren \mathbf{e}_p und \mathbf{e}_t stehen nicht senkrecht aufeinander, des weiteren gilt $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_p \neq 0$. Der Mittelwert dieses Skalarproduktes ist gleich dem Toroidalstrom I :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_p \rangle &= \langle \mathbf{B} \cdot (\nabla s \times \nabla \varphi) \rangle \\ &= \langle \mathbf{B}_p \cdot (\nabla s \times \nabla \varphi) \rangle \\ &= -\mu_0 I(s)\end{aligned}\quad (4.99)$$

Da der Plasmastrom in den magnetischen Flächen fließt, muss er sich auch mit Hilfe dieser Basisvektoren darstellen lassen. Die Plasmastromdichte ist

$$\mathbf{j} = J'(s) \nabla s \times \nabla \varphi + (\mathbf{j} \cdot \nabla \varphi) \mathbf{e}_t \quad (4.100)$$

Mit Hilfe von $\langle \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \rangle = I'(s)$ wird dies

$$\mathbf{j} = J'(s) \nabla s \times \nabla \varphi + (\mathbf{j} \cdot \nabla \varphi - \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \rangle) \mathbf{e}_t + I'(s) \mathbf{e}_t \quad (4.101)$$

und unter Benutzung von Gl. (4.73) wird der zweite Ausdruck auf der rechten Seite

$$(\mathbf{j} \cdot \nabla \varphi) - \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \rangle = \frac{\mu_0 J(s) J'(s)}{\chi'(s)} (\langle (\nabla \varphi)^2 \rangle - (\nabla \varphi)^2) \quad (4.102)$$

was mit der Definition des poloidalen Basisvektors \mathbf{e}_p zu der Darstellung

$$\mathbf{j} = J'(s) \mathbf{e}_p + I'(s) \mathbf{e}_t \quad (4.103)$$

führt. Mit Hilfe der integralen Gleichgewichtsbedingung lässt sich dies auch etwas umformen. Die Darstellung des Magnetfeldes Gl. (4.98) liefert für die Stromdichte

$$\mathbf{j} = (J'(s) - I'(s) \chi'(s)) \mathbf{e}_p + \frac{I'(s)}{\psi'(s)} \mathbf{B} \quad (4.104)$$

und unter Benutzung der integralen Gleichgewichtsbeziehung

$$\mathbf{j} = -p'(\psi) \mathbf{e}_p + I'(\psi) \mathbf{B} \quad (4.105)$$

Anstelle des Volumens s wird hier der toroidale Fluss als die radiale Koordinate benutzt.

Mit dieser Aufspaltung wird die Stromdichte in 2 divergenzfreie Anteile zerlegt. Häufig wird in der Literatur eine andere Zerlegung benutzt, die diese Eigenschaft nicht hat, aber physikalisch etwas durchsichtiger ist. Aus der Gleichgewichtsbeziehung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ erhält man

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} + \lambda \mathbf{B} \quad (4.106)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist der "diamagnetische Strom" während der zweite Term, der durch die Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ bestimmt wird, "Ausgleichsstrom" oder "Pfirsch-Schlüter-Strom" heisst. Dieser umfasst im Tokamak den Parallelanteil von $p'(\psi) \mathbf{e}_p$ und den toroidalen Gesamtstrom $I'(\psi) \mathbf{B}$. Diese Aufspaltung ist aber weder nützlich noch notwendig. Die obige Basisvektoren lassen sich auch für allgemeine 3-dimensionale Gleichgewichte definieren, die Darstellung des Magnetfeldes und der Stromdichte hat dann dieselbe Form wie Gl. (4.98) und Gl. (4.104).

4.5.5 Berechnung der integralen Flüsse

Unter Benutzung des Hamada-Koordinatensystems lassen sich die Teilchenflüsse sehr schnell berechnen. Das Ohmsche Gesetz liefert nach Multiplikation mit dem poloidalen Basisvektor \mathbf{e}_p und Mittelung über die magnetische Fläche

$$\langle (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{e}_p = \eta \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_p \rangle \quad (4.107)$$

Der poloidale Mittelwert $\langle \mathbf{e}_p \cdot \nabla \phi \rangle$ des elektrischen Potentials ist gleich null, da das Potential periodisch vom Poloidalwinkel abhängt, d.h. es gibt keine poloidale Ringspannung. Mit

$$- \langle \mathbf{V} \cdot (\mathbf{e}_p \times \mathbf{B}) \rangle = \psi'(s) \langle \mathbf{V} \cdot \nabla s \rangle \quad (4.108)$$

erhalten wir für den Teilchenfluss durch die magnetische Fläche

$$\psi'(s)\Gamma = \psi'(s)n(s) \iint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{f} = n(s)\eta \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_p \rangle \quad (4.109)$$

Unter Benutzung der Darstellung des Stromes in der Form Gl. (4.105) wird der Teilchenverlustfluss Γ

$$(\psi'(s))^2\Gamma = -n(s)\eta(s) \{ p'(s) \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle + \mu_0 I'(s) \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_p \rangle \} \quad (4.110)$$

Dieser Teilchenfluss besteht aus einem zum Druckgradienten proportionalen und einem zweiten zum Stromgradienten proportionalen Anteil. Beide Gradienten wirken als thermodynamische Kräfte, die den Diffusionsfluss treiben. Mit Hilfe von Gl. (4.99) ist der Diffusionsfluss auch

$$(\psi'(s))^2\Gamma = -n(s)\eta(s) \{ p'(s) \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle + \mu_0 I'(s) I(s) \} \quad (4.111)$$

Der erste Term ist ein nach aussen gerichteter Diffusionsterm, da der Druck nach aussen - d.h. weg von der magnetischen Achse - abnimmt. Der zweite Term ist nach innen gerichtet, da der Plasmastrom $I(s)$ nach aussen zunimmt. Dieser Term beschreibt den klassischen "Pincheffekt". Dieser Effekt existiert auch in einem Gleichgewicht ohne Druckgradient, er entsteht durch das toroidale elektrische Feld, welches notwendig ist, um den Toroidalstrom aufrecht zu erhalten. Dieses elektrische Feld bildet zusammen mit dem poloidalen Magnetfeld eine nach innen gerichtete Driftbewegung (siehe Gl. (4.89)).

Aus der Parallelkomponente des Ohmschen Gesetzes erhält man durch Multiplikation mit dem Vektor \mathbf{B}

$$\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \phi \rangle = \eta \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle \quad (4.112)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist zur toroidalen Ringspannung proportional. Die rechte Seite lässt sich mit Hilfe der Darstellung des Stromes Gl. (4.105) umformen und das integrale Ohmsche Gesetz ergibt sich dann zu

$$(\psi'(s))^2 U_L = \eta \{ \mu_0 I(s) p'(s) + \langle B^2 \rangle I'(s) \} \quad (4.113)$$

Diese Gleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem toroidalen Strom $I(s)$ und der toroidalen Ringspannung. Der erste Term auf der rechten Seite ist proportional zum Druckgradienten, dies ist der klassische "Bootstrap-Effekt". Der Druckgradient verstärkt einen vorhandenen Strom $I(s)$, er wird nur wirksam, wenn bereits ein endlicher Toroidalstrom vorhanden ist. Dieser Effekt ist aber im allgemeinen klein gegenüber dem zweiten Term. Das Verhältnis ist

$$\frac{\mu_0 I(s) p'(s)}{\langle B^2 \rangle I'(s)} \approx \frac{I(s) \beta'(s)}{2I'(s)} \ll 1 \quad (4.114)$$

Das Verhältnis zwischen Plasmadruck und Magnetfelddruck

$$\beta = \frac{2\mu_0 P}{\langle B^2 \rangle} \quad (4.115)$$

ist im allgemeinen klein gegen die Eins, so dass das Ohmsche Gesetz im Tokamak die einfache Form hat

$$\sigma(s) U_L = I'(s) \quad ; \quad \sigma(s) = \frac{(\psi'(s))^2}{\eta \langle B^2 \rangle} \quad (4.116)$$

$\sigma(s)$ ist die flächengemittelte Leitfähigkeit der magnetischen Fläche. In integrierter Form lautet das Ohmsche Gesetz

$$\int_0^{s_0} \sigma(s) ds U_L = I(s_0) \quad (4.117)$$

$I(s_0)$ ist der gesamte Toroidalstrom.

4.5.6 Transportgleichungen

Die beiden Gleichungen (4.111) und (4.113) verknüpfen die Gradienten $p'(s)$, $I'(s)$ mit den integralen Größen Teilchenfluss Γ und Ringspannung U_L . Beide Gleichungen lassen in eine kompaktere Matrixform bringen, die die Symmetrie zwischen den Effekten klarer zum Ausdruck bringt.

$$\begin{pmatrix} \Gamma \\ n(s)U_L \end{pmatrix} = \frac{n\eta}{(\psi'(s))^2} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle & -\mu_0 I(s) \\ -\mu_0 I(s) & \langle B^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p'(s) \\ I'(s) \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

In diesem System stehen links die “thermodynamischen Flüsse” und rechts die “thermodynamischen Kräfte”, die Verknüpfung wird durch die Transportmatrix vermittelt. Diese ist

$$L = \frac{n\eta}{(\psi'(s))^2} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle & -\mu_0 I(s) \\ -\mu_0 I(s) & \langle B^2 \rangle \end{pmatrix} \quad (4.119)$$

Die Transportmatrix hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} \text{Diffusion} & \text{Pinch} \\ \text{Bootstrap} & \text{Widerstand} \end{pmatrix} \quad (4.120)$$

4.5.7 Die Onsager-Symmetrie

Diese Darstellung zeigt, dass Pincheffekt und Bootstrapeffekt zueinander symmetrisch sind. Diese Symmetrie nennt man auch die “Onsager-Symmetrie”. Der durch den Druckgradienten getriebene Teilchenfluss wird durch den Diffusionskoeffizienten D vermittelt, dieser ist

$$D = \frac{n(s)\eta}{(\psi'(s))^2} \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle \quad (4.121)$$

Alle geometrischen Effekte, d.h. die Form der magnetischen Flächen und der Einfluss der Rotations- transformation werden durch den Faktor $\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle$ beschrieben. Mit Hilfe der Darstellung von \mathbf{e}_p (Gl. 4.96) lässt sich dieser Faktor auch schreiben

$$\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle = \langle (\nabla\varphi)^2 (\nabla s)^2 \rangle + \left(\frac{\mu_0 J}{\chi'} \right)^2 \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle - (\nabla\varphi)^2 \frac{1}{(\nabla\varphi)^2} \quad (4.122)$$

Mit Hilfe von

$$\psi'(s) = \mu_0 J \langle (\nabla\varphi)^2 \rangle \quad ; \quad q(s) = \frac{\psi'(s)}{\chi'(s)} \quad (4.123)$$

wird diese Gleichung

$$\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle = \langle (\nabla\varphi)^2 (\nabla s)^2 \rangle + q^2(s) \left(\langle \frac{1}{(\nabla\varphi)^2} \rangle - \frac{1}{\langle (\nabla\varphi)^2 \rangle} \right) \quad (4.124)$$

In dieser Form gilt die Formel noch in allgemeiner Tokamakgeometrie. Für nahezu kreisförmige magnetische Flächen und großem Aspektverhältnis R/r gilt die Näherung

$$\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle \approx r^2 (1 + 2q^2) \quad (4.125)$$

Der Diffusionskoeffizient (4.121) beschreibt die Summe aus klassischer Diffusion und Pfirsch-Schlüter-Diffusion. Diese wurde hier abgeleitet, ohne die übliche Aufspaltung der Plasmaströme in “diamagnetische Ströme” und parallele “Ausgleichsströme”⁴.

In der Formulierung Gl. (4.118) sind Γ und $n(s)U_L$ thermodynamische Flüsse und die Größen $p'(s)$, $I'(s)$ thermodynamische Kräfte. Die Transportmatrix L ist Onsager-symmetrisch. Diese Form ist aber nicht zwingend, da die Definition von thermodynamischen Flüssen und Kräften nicht eindeutig ist. Man kann auch die toroidale Ringspannung als eine thermodynamische Kraft bezeichnen und den Strom als einen Fluss. Durch Umformen von Gl. (4.118) erhält man eine alternative Version der Transportgleichungen

$$\begin{pmatrix} \Gamma \\ I'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 & -\frac{\mu_0 I(s)}{\langle B^2 \rangle} \\ \frac{\mu_0 I(s)}{\langle B^2 \rangle} & \frac{\sigma(s)}{n(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p'(s) \\ n(s)U_L \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

mit dem Diffusionskoeffizienten

$$D_2 = \frac{n(s)\eta}{(\psi'(s))^2} \left(\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle - \frac{(\mu_0 I(s))^2}{\langle B^2 \rangle} \right) \quad (4.127)$$

Bei dieser Wahl der Flüsse und Kräfte ist die Transportmatrix antisymmetrisch. Dies ist kein Widerspruch zu dem obigen Ergebnis, in dem die Transportmatrix symmetrisch ist, es zeigt lediglich, dass die Onsager-Symmetrie keine invariante Eigenschaft ist, sondern von der Wahl der Flüsse und Kräfte abhängt. Bei einem Vorzeichenwechsel des Magnetfeldes wechselt auch das Vorzeichen des Toroidalstromes $I(s)$. Daher gilt auch in der Formulierung Gl. (4.126) die Onsager-Symmetrie, wenn mit der Vertauschung von Pinch- und Bootstrapeffekt auch das Vorzeichen des Magnetfeldes vertauscht wird, d.h. $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B}$.

4.5.8 Die Shafranov-Verschiebung

In einem zylindrischen Gleichgewicht bilden die Querschnitte der magnetischen Flächen konzentrische Kreise. Bildet man nun aus einem solchen zylindrischen Plasma ein toroidales Gleichgewicht, dann verlagert sich die magnetische Achse nach aussen, d.h. die inneren magnetischen Flächen verschieben sich stärker nach aussen als die äusseren. Dieses Verhalten wird bereits in dem einfachen Beispiel in Fig. (4.5) deutlich. Die Verschiebung lässt durch ein Vertikalfeld erklären, dass von den toroidalen Plasmaströmen erzeugt wird. Dazu zerlegen wir die Stromdichte \mathbf{j} in divergenzfreie Teilströme, und betrachten die von diesen Strömen erzeugten Magnetfelder. Mit Hilfe der integralen Gleichgewichtsbeziehung erhält man

$$(\mathbf{j} \cdot \nabla \varphi) - \langle (\mathbf{j} \cdot \nabla \varphi) \rangle = \left(I'(s) - \frac{p'(s)}{\chi'(s)} \right) \left(\frac{(\nabla \varphi)^2}{\langle (\nabla \varphi)^2 \rangle} - 1 \right) \quad (4.128)$$

und damit die folgende Darstellung des Plasmastromes

$$\mathbf{j} = J'(s) \nabla s \times \nabla \varphi + \frac{p'(s)}{\chi'(s)} \left(1 - \frac{(\nabla \varphi)^2}{\langle (\nabla \varphi)^2 \rangle} \right) \mathbf{e}_t + I'(s) \frac{(\nabla \varphi)^2}{\langle (\nabla \varphi)^2 \rangle} \mathbf{e}_t \quad (4.129)$$

Alle 3 Komponenten sind divergenzfrei, daher ist es erlaubt, für jeden Summanden das Magnetfeld zu berechnen und diese Felder linear zu überlagern. Der erste Term erzeugt das toroidale Feld, der zweite Term ein poloidales Feld und der dritte Term das Feld des toroidalen Gesamtstromes. Der zweite Term ist von besonderem Interesse, dieser Strom fließt in toroidaler Richtung, hat aber den Mittelwert null. Er kann als Dipolstrom interpretiert werden und erzeugt im wesentlichen ein vertikales Feld. Dieses Vertikalfeld verstärkt das gesamte Poloidalfeld auf der Torusaussenseite und schwächt es auf der Innenseite.

⁴D. Pfirsch, A. Schlüter, MPI-Bericht PA/7 1962

Das Plasmazentrum wird dadurch radial nach aussen verschoben. Diese Verschiebung heit “Shafranovshift”. Da diese Verschiebung mit steigendem Druck das heisse Plasmazentrum stark nach aussen verschiebt, ist man bestrebt, sie durch geeignete Form der magnetischen Flächen zu minimieren. Wie die Darstellung des Stromes zeigt, ist es dazu notwendig, die Variation von $(\nabla\phi)^2$ auf den magnetischen Flächen möglichst klein zu machen. Das wird am besten durch eine vertikale Elongation der Flächen erreicht. Dadurch wird die horizontale Ausdehnung der Flächen gering und der toroidale Dipolstrom möglichst klein.

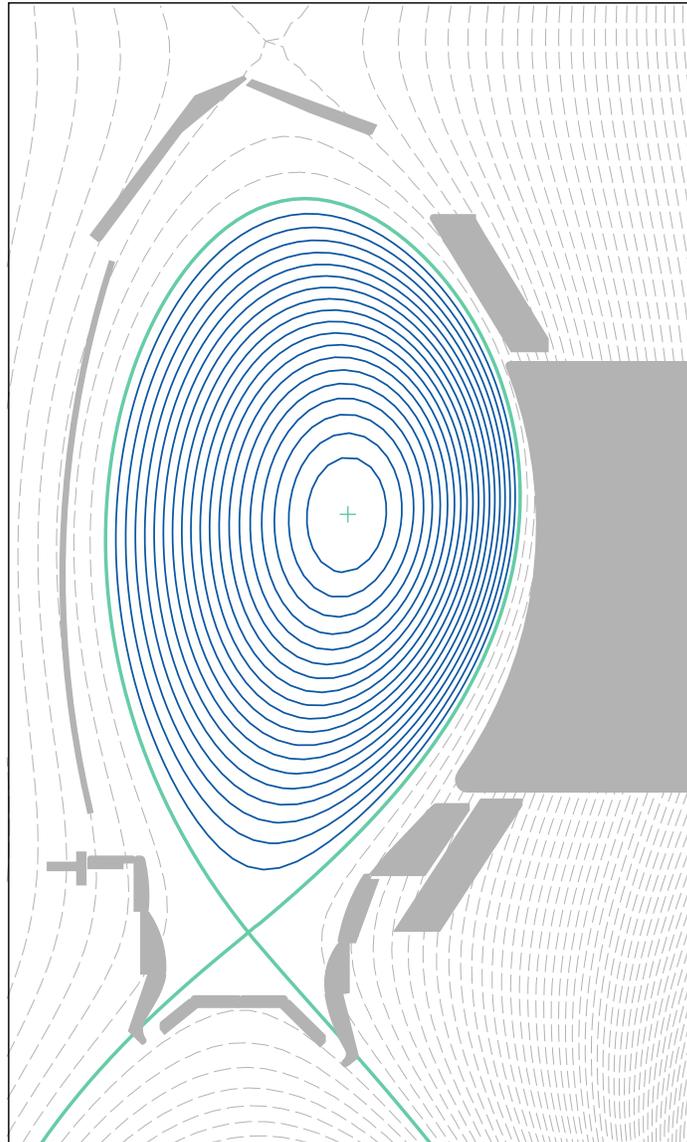


Abbildung 4.7: Plasmagleichgewicht in Asdex-Upgrade. Diese numerische Lösung der LSGS-Gleichung wurde von H.P. Zehrfeld durchgeführt

4.6 Dreidimensionale Gleichgewichte

Die zweidimensionalen oder axialsymmetrischen Gleichgewichte sind streng genommen Idealisierungen der Wirklichkeit. Reale Magnetfelder werden durch stromführende Spulen erzeugt, die je nach Anzahl der Spulen eine Abweichung von der Axialsymmetrie zur Folge haben. Der Vorteil der axialsymmetrischen Näherung bei der Berechnung der Gleichgewichte liegt darin, dass eine partielle Differentialgleichung für eine Flussfunktion zu lösen ist. Die Grad-Shafranov-Gleichung ist vom elliptischen Typ und ergibt mit den entsprechenden Randbedingungen ein wohlgestelltes Problem. In 3 Dimensionen lässt sich die Berechnung des Gleichgewichts nicht mehr auf eine elliptische Gleichung reduzieren. In der Literatur wurden bisher 2 Methoden vorgeschlagen, die iterative Lösung der Gleichgewichtsgleichungen und das Variationsverfahren. In dem iterativen Verfahren (L. Spitzer) beginnt man mit einem Vakuummagnetfeld und berechnet iterativ die Zusatzfelder der Plasmaströme. Im Variationsverfahren sucht man nach einem stationären Zustand der Energie, die zugehörigen Eulerschen Gleichungen sind dabei die Gleichgewichtsgleichungen. Dieses Verfahren soll im folgenden Kapitel beschrieben werden; es folgt im wesentlichen der Arbeit von Kruskal und Kulsrud⁵.

4.6.1 Das Variationsprinzip

Zur Bestimmung von 3-dimensionalen Gleichgewichten benutzt man das Variationsprinzip (Kruskal, Kulsrud 1958)⁶. Es wird ein stationärer Zustand der Energie gesucht, d.h.:

$$\delta \iiint \left\{ \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma-1} d^3\mathbf{x} \right\} = 0 \quad (4.130)$$

Mit den Nebenbedingungen:

1. Die Flächen $c(x, y, z) = s$; $0 < s < C$ sind toroidal geschlossene Flächen.
2. Für das Magnetfeld gilt $\mathbf{B} \cdot \nabla c = 0$; $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$
3. Die Flüsse in den magnetischen Flächen sind vorgegeben. d.h. Die Flüsse

$$\iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi d^3\mathbf{x} = \psi(s)$$

und

$$\iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot \nabla \theta d^3\mathbf{x} = \chi(s)$$

sind vorgegeben.

4. Der Druck ist vorgegeben, d.h.

$$\iiint_{c \leq s} p^{\frac{1}{\gamma}} d^3\mathbf{x} = M(s)$$

Die Vorgabe des toroidalen und poloidalen magnetischen Flusses für jede magnetische Fläche bedeutet, dass die Rotationstransformation für jede Fläche festgelegt ist. Die Eulerschen Gleichungen sind dann

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \quad (4.131)$$

Ohne diese Nebenbedingungen hätte man nur die triviale Lösung $\mathbf{B} = 0$ und $p = 0$.

Beweis: Der Ansatz $\mathbf{B} = \nabla c \times \nabla v$ mit $v = \lambda(s, \theta, \varphi) + \psi'(s)\theta - \chi'(s)\varphi$ befriedigt Bedingung 2) und 3). Mit dem Ansatz $p = p(s)$ folgt aus 4)

$$M'(s) = p^{\frac{1}{\gamma}}(s)V'(s) \quad (4.132)$$

⁵M. Kruskal, R. Kulsrud, *Phys. of Fluids* **1** (1958) 265

⁶M.D. Kruskal, R.M. Kulsrud, *Phys. Fluids* **1**, (1958)

mit

$$V'(s) = \iiint_{c \leq s} \frac{d^3 \mathbf{x}}{|\nabla c|} \quad (4.133)$$

Die zu variierenden Funktionen sind $c(x, y, z)$ und $\lambda(x, y, z)$. Die Variation von Druck, Plasmavolumen und Magnetfeld folgt dann aus den Nebenbedingungen. Die Variation des Druckes und des Volumens ist

$$\delta p = -\gamma \frac{p \delta V'(s)}{V'(s)}; \quad \delta V'(s) = -\frac{d}{ds} \iiint_{c=s} \delta c \frac{d^3 \mathbf{x}}{|\nabla c|} \quad (4.134)$$

Dies ergibt

$$\iiint_{c \leq s} \delta p d^3 \mathbf{x} = -\gamma \iiint_{c \leq s} p'(c) \delta c d^3 \mathbf{x} \quad (4.135)$$

Die Variation der Energie ist

$$\delta W = \iiint_{c \leq s} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma-1} (\delta p + p'(c) \delta c) \right] d^3 \mathbf{x} \quad (4.136)$$

oder mit Hilfe von Gl. (4.135)

$$\delta W = \iiint_{c \leq s} \left[\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} - p' \delta c \right] d^3 \mathbf{x} \quad (4.137)$$

Die Variation des Magnetfeldes ist

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \delta c \times \nabla v + \nabla c \times \nabla \delta \lambda \quad (4.138)$$

damit wird das erste Integral in δW

$$\begin{aligned} \iiint_{c \leq s} \delta \mathbf{B} \cdot \nabla \delta c \times \nabla v d^3 \mathbf{x} &= - \iiint_{c \leq s} \nabla \delta c \cdot \mathbf{B} \times \nabla v d^3 \mathbf{x} \\ &= + \iiint_{c \leq s} \delta c \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \nabla v) d^3 \mathbf{x} \\ &= + \iiint_{c \leq s} \delta c (\mu_0 \mathbf{j} \cdot \nabla v) d^3 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Das zweite Integral ist

$$\begin{aligned} \iiint_{c \leq s} \delta \mathbf{B} \cdot \nabla \delta c \times \nabla \lambda &= - \iiint_{c \leq s} \nabla \delta \lambda \cdot (\mathbf{B} \times \nabla v) d^3 \mathbf{x} \\ &= + \iiint_{c \leq s} \delta \lambda \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \nabla c) d^3 \mathbf{x} \\ &= + \iiint_{c \leq s} \delta \lambda (\mu_0 \mathbf{j} \cdot \nabla c) d^3 \mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.140)$$

Die Variation der gesamten Energie wird damit

$$\delta W = \iiint_{c \leq s} [(\mathbf{j} \cdot \nabla v - p'(c)) \delta c - (\mathbf{j} \cdot \nabla c) \delta \lambda] d^3 \mathbf{x} \quad (4.141)$$

Da die Variationen δc und $\delta \lambda$ unabhängig voneinander sind folgt

$$\mathbf{j} \cdot \nabla v - p'(c) = 0 \quad ; \quad \mathbf{j} \cdot \nabla c = 0 \quad (4.142)$$

Dies ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}\mathbf{j} \times \mathbf{B} &= \mathbf{j} \times (\nabla c \times \nabla v) = (\mathbf{j} \cdot \nabla v) \nabla c \\ &= p'(c) \nabla c = \nabla p\end{aligned}\quad (4.143)$$

Resultat: Das allgemeine 3-dimensionale toroidale MHD-Gleichgewicht macht die Gesamtenergie zu einem Extremum. Das bedeutet aber nicht, dass eine solche Lösung auch immer existiert.

Als Modifikation betrachten wir den Fall, wenn der Poloidalfluss frei variieren kann, d.h. die Rotationstransformation wird nicht festgelegt. Dann ist durch $\delta\lambda$ durch $\delta\lambda + \delta\chi\varphi$ zu ersetzen. Es ergibt sich

$$\delta W = \iiint_{c \leq s} [(\mathbf{j} \cdot \nabla v - p'(c))\delta c - (\mathbf{j} \cdot \nabla c)\delta\lambda] d^3\mathbf{x} - \iiint_{c \leq s} [I(c)\delta\chi] d^3\mathbf{x} \quad (4.144)$$

und daraus

$$\mathbf{j} \cdot \nabla v - p'(c) = 0 \quad ; \quad \mathbf{j} \cdot \nabla c = 0 \quad ; \quad I(c) = 0 \quad (4.145)$$

$I(c)$ ist der toroidale Gesamtstrom innerhalb der magnetischen Fläche. Bei frei variabler Rotationstransformation ergibt sich als Extremum ein mit Toroidalstrom null. Dies ist das sogenannte Stellaratorgleichgewicht!

Dieser Spezialfall demonstriert auf deutliche Weise die Tatsache, dass das Variationsverfahren den Existenzsatz nicht ersetzt. Wie im Kapitel über axialsymmetrische Gleichgewichte gezeigt wurde, existieren axialsymmetrische Gleichgewichte ohne Toroidalstrom nicht. Die obigen Resultate sind daher folgendermaßen zu interpretieren: Falls es einen Zustand gibt, der die Energie stationär macht, dann hat er die obigen Eigenschaften.

4.6.2 Kraftfreie Magnetfelder

Die Näherung kraftfreier Magnetfelder wird in der Astrophysik häufig verwendet um kosmische Plasmen zu beschreiben. In Sternatmosphären ist der Plasmadruck klein gegenüber dem Magnetfelddruck. Die Ströme fließen dann im wesentlichen parallel zum Magnetfeld und üben damit keine Kraft auf das Plasma aus. Ein Vakuummagnetfeld erhält man als Minimum des Funktionals

$$\iiint_{c \leq s} \frac{B^2}{2\mu_0} d^3\mathbf{x} \quad (4.146)$$

Die Variation ergibt

$$\begin{aligned}\delta \iiint_{c \leq s} \frac{B^2}{2} d^3\mathbf{x} &= \iiint_{c \leq s} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d^3\mathbf{x} \\ &= \int_{c \leq s} \nabla \cdot (\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d^3\mathbf{x} + \iiint_{c \leq s} \mathbf{j} \cdot \delta\mathbf{A} d^3\mathbf{x}\end{aligned}\quad (4.147)$$

Das Oberflächenintegral (erster Term) ist null, da $\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0$ auf magnetischen Flächen (Fluss = 0 in Normalenrichtung). Damit folgt $\mathbf{j} = 0$ (Vakuumfeld!). Unter der Nebenbedingung

$$\iiint_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3\mathbf{x} = C \quad (4.148)$$

folgt aus

$$\delta \iiint_V \left(\frac{B^2}{2} - \lambda \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \right) d^3\mathbf{x} = 0 \quad (4.149)$$

(λ ist ein Lagrangemultiplikator) die Beziehung

$$\iiint_V \nabla \cdot \left(\delta\mathbf{A} \times \mathbf{B} + \frac{\lambda}{2} \mathbf{A} \times \delta\mathbf{A} \right) d^3\mathbf{x} = \iiint_V (\mathbf{j} - \lambda \mathbf{B}) \cdot \delta\mathbf{A} d^3\mathbf{x} = 0 \quad (4.150)$$

und damit

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4.151)$$

Der Strom fließt parallel zu den Feldlinien. Das kraftfreie Magnetfeld macht die Magnetfeldenergie unter den Nebenbedingung konstanter globaler Helizität zum Extremum.

4.6.3 Berechnung toroidaler Gleichgewichte

Zur numerischen Berechnung toroidaler Gleichgewichte gibt es mehrere Methoden, diese sind

- Mit Hilfe des Variationsprinzips. Dieses Verfahren ist bekannt unter dem Namen NEMEC-Code⁷. Dabei werden toroidale Flächen $c(x, y, z) = \text{const}$ solange variiert, bis das Energieintegral stationär ist.
- Das Iterationsverfahren (Spitzer⁸). Man konstruiert dazu eine Folge von Magnetfeldern mit

$$\mathbf{j}_{n+1} \times \mathbf{B}_n = \nabla p_n \quad \nabla \times \mathbf{B}_{n+1} = \mu_0 \mathbf{j}_{n+1} \quad (4.152)$$

Es ist bisher noch nicht bewiesen, ob dieses Verfahren konvergiert. Ein solcher Beweis verlangt die Definition eines geeigneten Funktionenraumes und die Festlegung von Randbedingungen. Das Problem ist es, dass sich die magnetischen Flächen unter dem Einfluss eines Zusatzfeldes - und die Überlagerung zweier Felder im Iterationsverfahren ist ein solcher Prozess - nichtstetig verändern. Eine Folge von Magnetfeldern mit stetigen Flächen kann unter Umständen gegen ein unstetige Fläche konvergieren.

4.6.4 Das Stellaratorgleichgewicht

Ein Stellaratorgleichgewicht ist durch den Toroidalstrom $I = 0$ charakterisiert. Diese Definition geht vom Standpunkt der idealen MHD aus. In der praktischen Realisierung ist die Erzeugung oder auch Verhinderung des Toroidalstromes von größerer Bedeutung. Wegen des endlichen Plasmawiderstandes muss in axialsymmetrischen Gleichgewichten der Toroidalstrom durch eine induzierte toroidale Spannung, die Ringspannung, aufrecht erhalten werden. Dies impliziert den zusätzlichen technischen Aufwand eines Transformators. Ein Stellarator kann aber auch durch Ringspannung null definiert werden, Toroidalströme, die von internen Kräften aufrecht erhalten werden, die sogenannten Bootstrapströme, sind dann noch möglich. Im folgenden wird daher noch ein endlicher Strom zugelassen und ein allgemeines dreidimensionales Gleichgewicht behandelt.

Dazu setzen wir im folgenden die Existenz eines 3-D Gleichgewichts voraus, wir nehmen an, dass ein System von toroidal geschlossenen Flächen $c(x, y, z) = \text{const}$. existiert und dass das Magnetfeld der Gleichgewichtsbedingung genügt. Weiterhin wird ein Koordinatensystem s, θ, φ ; $0 \leq \theta, \varphi \leq 1$ definiert mit den Eigenschaften

$$s = s(c), \quad \nabla s \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \theta) = 1 \quad (4.153)$$

d.h. die Jacobideterminante ist gleich 1. $s = s(c)$ sei das Volumen der magnetischen Fläche. Ein solches Koordinatensystem lässt sich leicht konstruieren, indem man auf der Fläche s die toroidale Koordinate φ definiert. Die Koordinatenlinien $\varphi = \text{const}$. sind dann poloidal geschlossene Kurven C_φ und die poloidale Koordinate erhält man dann aus der Differentialgleichung $(\nabla s \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \theta = 1$. Die kontravarianten Basisektoren des Koordinatensystems sind

$$\mathbf{e}_p = \nabla s \times \nabla \varphi; \quad \mathbf{e}_t = -\nabla s \times \nabla \theta \quad (4.154)$$

Beide Vektoren sind divergenzfrei und sie haben die Eigenschaften

$$\mathbf{e}_p \cdot \nabla \theta = 1; \quad \mathbf{e}_t \cdot \nabla \varphi = 1; \quad \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_p = \nabla s \quad (4.155)$$

⁷S.P. Hirshman, W.I. van Rij, P. Merkel, Computer Physics Communications 43, (1986) 143-155

⁸L. Spitzer, Phys. Fluids 1, (1958), 253-264

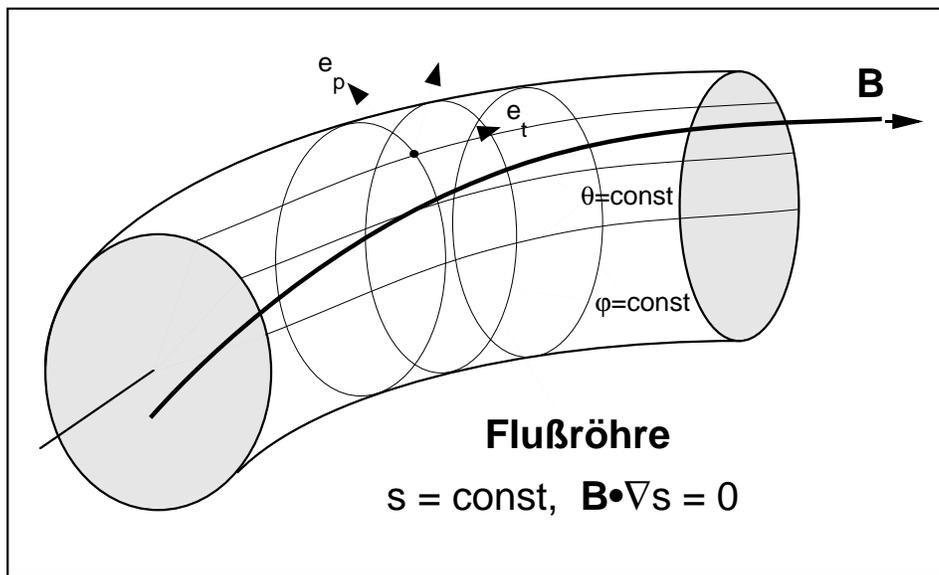


Abbildung 4.8: Ausschnitt aus einer toroidalen magnetischen Fläche

Das Volumenelement ist

$$d^3 \mathbf{x} = ds d\theta d\varphi = \frac{ds df}{|\nabla s|} \quad (4.156)$$

Die Mittelung über die magnetische Fläche ist definiert durch

$$\langle g \rangle = \iint g \frac{df}{|\nabla s|} = \iint g d\theta d\varphi \quad (4.157)$$

daraus folgt $\langle 1 \rangle = 1$. Für jede periodische Funktion $g(\theta, \varphi)$ gilt

$$\langle \nabla g \cdot (\nabla s \times \nabla \varphi) \rangle = \langle \nabla g \cdot (\nabla s \times \nabla \theta) \rangle = 0 \quad (4.158)$$

Zum Beweis betrachten wir unter Berücksichtigung von (4.157)

$$\begin{aligned} \langle \nabla g \cdot (\nabla s \times \nabla \varphi) \rangle &= \left\langle \frac{\partial g}{\partial \theta} \nabla \theta \cdot (\nabla s \times \nabla \varphi) \right\rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.159)$$

Desgleichen gilt für jedes doppelt-periodische $g(\theta, \varphi)$

$$\langle \mathbf{B} \cdot \nabla g \rangle = \langle \mathbf{j} \cdot \nabla g \rangle = 0 \quad (4.160)$$

4.6.5 Darstellung des Magnetfeldes

Das Magnetfeld verläuft tangential zu den Flächen $s = \text{const}$. d.h. der Gradient von s steht senkrecht auf dem Feldvektor \mathbf{B} . Aus $\mathbf{B} \cdot \nabla s = 0$ und der Darstellung $\mathbf{B} = \nabla s \times \nabla v$ folgt für die Funktion v

$$v = \lambda(s, \theta, \varphi) + C_1 \theta + C_2 \varphi \quad (4.161)$$

Dabei ist λ periodisch in den Winkeln und die beiden Konstanten C_1 und C_2 sind zu den Radialableitungen der Flüsse proportional. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \rangle &= \langle (\nabla s \times \nabla v) \cdot \nabla \varphi \rangle \\ &= -C_1 \langle (\nabla s \times \nabla \theta) \cdot \nabla \varphi \rangle \\ &= -C_1 = \psi'(s) \end{aligned} \quad (4.162)$$

und

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \rangle &= \langle (\nabla s \times \nabla v) \cdot \nabla \theta \rangle \\
&= C_2 \langle (\nabla s \times \nabla \varphi) \cdot \nabla \theta \rangle \\
&= C_2 = \chi'(s)
\end{aligned} \tag{4.163}$$

Es sei hier betont, dass die oben geforderte Eigenschaft des Koordinatensystems $\nabla s \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \theta) = 1$ nicht zur ableitung dieser Formel notwendig ist. Zum Beweis von (4.162) benötigt man die Umrechnung

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \rangle &= \iiint \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \frac{df}{|\nabla s|} \\
&= \frac{d}{ds} \iiint \nabla \cdot (\mathbf{B} \varphi) d^3 \mathbf{x} \\
&= \psi'(s)
\end{aligned} \tag{4.164}$$

Dieses Volumenintegral wird mit Hilfe des Gaussschen Satzes in ein Oberflächenintegral verwandelt, wobei das toroidale Volumen durch einen toroidalen und poloidalen Schnitt einfach zusammenhängend gemacht wird. Die magnetische Fläche trägt wegen $\mathbf{B} \cdot \nabla s = 0$ nichts zum Integral bei. Übrig bleibt nur das Integral über die beiden Seiten der Schnittflächen und wegen $\delta \varphi = 1 - 0 = 1$ erhalten wir

$$\frac{d}{ds} \iiint \nabla \cdot (\mathbf{B} \varphi) d^3 \mathbf{x} = \frac{d}{ds} \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \psi'(s) \tag{4.165}$$

$\psi(s)$ ist der toroidale magnetische Fluss innerhalb einer magnetischen Fläche. Auf die gleiche Weise erhält man auch $\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \varphi \rangle = \chi'(s)$. Die Steigung der Feldlinie auf der magnetischen Fläche ist

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \varphi} \tag{4.166}$$

oder mit Hilfe von $\mathbf{B} = \nabla s \times \nabla v$ und $\nabla s \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \theta) = 1$ folgt

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{-\frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} + \chi'(s)}{\frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \psi'(s)} \tag{4.167}$$

Im allgemeinen ist die Steigung der Feldlinien nicht konstant. Dies ist nur der Fall, wenn die Funktion $\lambda = 0$ ist. Wie im Falle des axialsymmetrischen Gleichgewichts ist die Rotationstransformation durch $\iota = \chi'(s)/\psi'(s)$ definiert und die Feldlinien schließen sich, wenn dies eine rationale Zahl ist. Da ι nur eine Funktion von s ist, haben alle Feldlinien auf einer magnetischen Fläche die gleiche Topologie.

Setzt man die Ergebnisse in die Flussfunktion v ein dann lautet diese $v = \lambda - \psi'(s)\theta + \chi'(s)\varphi$ und das Magnetfeld wird

$$\mathbf{B} = \left(\psi'(s) - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_t + \left(\chi'(s) + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_p \tag{4.168}$$

Die kontravarianten Komponenten des Magnetfeldes sind damit

$$B^\theta = \left(\chi'(s) + \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \right); B^\varphi = \left(\psi'(s) - \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \tag{4.169}$$

4.6.6 Darstellung des Plasmastromes

Der Plasmastrom fließt ebenfalls tangential zu den magnetischen Flächen, dies resultiert aus der Gleichgewichtsbedingung durch skalare Multiplikation mit \mathbf{j} . Aus $\mathbf{j} \cdot \nabla s = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ folgt die Darstellung

$$\mathbf{j} = -(\nabla s \times \nabla \sigma) \tag{4.170}$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ ein, dann ergibt sich wegen $\mathbf{B} \cdot \nabla s = 0$ und $\mathbf{B} \cdot \nabla v = 0$ für die Funktion σ

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma = p'(s) \Rightarrow \sigma = p'(s) \int \frac{dl}{B} + Cv \quad (4.171)$$

C ist eine Konstante. Die Integration in (4.171) erfolgt entlang den Magnetfeldlinien. Die Stromlinien auf der magnetischen Fläche sind durch $\sigma = \text{const.}$ definiert, die allgemeine Form von σ ist

$$\sigma = \mu(s, \theta, \varphi) + D_1(s)\theta + D_2(s)\varphi \quad (4.172)$$

Die Beziehung (4.171) hat zur Folge, dass im Grenzfall $p'(s) \rightarrow 0$ Magnetfeldlinien und Stromlinien zusammenfallen, d.h. $\sigma \propto v$. Der Grenzfall ist somit ein kraftfreies Feld und nicht ein Vakuumfeld. Um die physikalische Bedeutung der beiden Funktionen $D_1(s)$ und $D_2(s)$ klar zu machen, berechnen wir den differentiellen toroidalen Strom

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \rangle &= \iint \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \frac{df}{|\nabla s|} \\ &= \frac{d}{ds} \iiint \nabla \cdot (\mathbf{j} \varphi) d^3 \mathbf{x} \\ &= \frac{d}{ds} \iint \mathbf{j} \cdot d\mathbf{f} \\ &= \frac{dI}{ds} \end{aligned} \quad (4.173)$$

Andererseits folgt aus der Darstellung (4.172) und (4.170)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \varphi \rangle &= - \langle (\nabla s \times \nabla \sigma) \cdot \nabla \varphi \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right\rangle \\ &= D_1 \end{aligned} \quad (4.174)$$

Desgleichen gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \theta \rangle &= - \langle (\nabla s \times \nabla \sigma) \cdot \nabla \theta \rangle \\ &= - \left\langle \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} \right\rangle \\ &= -D_2 \end{aligned} \quad (4.175)$$

Die Stromfunktion σ schreibt sich damit in der Form

$$\sigma = \mu(s, \theta, \varphi) + I'(s)\theta - J'(s)\varphi \quad (4.176)$$

Die Stromlinien werden durch $\sigma = \text{const.}$ dargestellt.

4.6.7 Rektifizierung der Feldlinien und Stromlinien

Das oben definierte Koordinatensystem ist nur durch die Eigenschaft $\nabla s \cdot (\nabla \varphi \times \nabla \theta) = 1$ ausgezeichnet. Weder die Feldlinien noch die Stromlinien sind in diesem System gerade Linien. In dem Kapitel über Tokamakgleichgewichte war bereits das Hamada-Koordinatensystem als ein System eingeführt worden, in dem Feldlinien und Stromlinien gerade Linien sind. Dies soll im folgenden auf das allgemeine 3-D-Gleichgewicht ausgedehnt werden. An Stelle der Winkel θ, φ werden zwei neue Winkel θ_1, φ_1 eingeführt, so dass die beiden Funktionen λ und μ identisch verschwinden. In den neuen Winkelkoordinaten werden dann Fluss- und Stromfunktion

$$v = -\psi'(s)\theta_1 + \chi'(s)\varphi_1 ; \sigma = I'(s)\theta_1 - J'(s)\varphi_1 \quad (4.177)$$

Die neuen Winkelkoordinaten werden folgendermaßen definiert

$$\psi'(s)\theta_1 = \psi'(s)\theta - a; J'(s)\phi_1 = J'(s)\phi - b \quad (4.178)$$

a und b sind dabei periodische Funktionen der beiden Winkel und sie bestimmen sich wegen (4.177) aus der Bedingung

$$\begin{aligned} J'(s)a - \chi'(s)b &= J'(s)\lambda \\ -I'(s)a + \psi'(s)b &= \psi'(s)\mu \end{aligned} \quad (4.179)$$

Dieses inhomogene System für die Funktionen a und b hat eine Lösung wenn die Determinante ungleich null ist:

$$J'(s)\psi'(s) - I'(s)\chi'(s) = \text{Det}(s) \neq 0 \quad (4.180)$$

Falls das toroidale Gleichgewicht existiert, ist diese Bedingung erfüllt, denn aus der Gleichgewichtsbedingung in der Form $\mathbf{B} \cdot \nabla \sigma = p'(s)$ (4.171) folgt durch Mittelung über die magnetische Fläche

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B} \cdot \nabla \sigma \rangle &= I'(s) \langle \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \rangle - J'(s) \langle \mathbf{B} \cdot \nabla \phi \rangle \\ &= I'(s)\chi'(s) - J'(s)\psi'(s) \\ &= p'(s) \end{aligned} \quad (4.181)$$

Man hat damit das Ergebnis: Wenn es ein toroidales Gleichgewicht mit einem endlichen Druckgradienten gibt, dann lassen sich auf den magnetischen Flächen Winkelkoordinaten einführen, so dass sowohl Magnetfeldlinien als auch Stromlinien gerade Linien werden. Die kontravariante Darstellung von Magnetfeld und Stromdichte ist dann in den neuen Koordinaten

$$\mathbf{B} = \psi'(s) \mathbf{e}_t + \chi'(s) \mathbf{e}_p; \mathbf{j} = I'(s) \mathbf{e}_t + J'(s) \mathbf{e}_p \quad (4.182)$$

Der Einfachheit halber sei im folgenden der Index 1 weggelassen. Sowohl die Feldlinien als auch die Stromlinien haben im Hamada-System eine konstante Steigung. Diese ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \iota_B &= \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{B} \cdot \nabla \phi} = \frac{\chi'(s)}{\psi'(s)} \\ \iota_I &= \frac{\mathbf{j} \cdot \nabla \theta}{\mathbf{j} \cdot \nabla \phi} = \frac{J'(s)}{I'(s)} \end{aligned} \quad (4.183)$$

In einem Stellarator ohne Toroidalstrom ($I = 0$) ist die Steigung der Stromlinien unendlich groß die Stromlinien sind poloidal geschlossene Linien. Im Grenzfall $p'(s) \rightarrow 0$ ist die Steigung der Feldlinien und die der Stromlinien gleich.

Mit Hilfe der integralen Gleichgewichtsbedingung (4.181) kann man die Stromdichte auch in folgende Form bringen

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= I'(s) \mathbf{e}_t + I'(s)\iota_B \mathbf{e}_p - \frac{p'(s)}{\psi'(s)} \mathbf{e}_p \\ &= \frac{I'(s)}{\psi'(s)} (\psi'(s) \mathbf{e}_t + \chi'(s) \mathbf{e}_p) - \frac{p'(s)}{\psi'(s)} \mathbf{e}_p \\ &= \frac{I'(s)}{\psi'(s)} \mathbf{B} - \frac{p'(s)}{\psi'(s)} \mathbf{e}_p \\ &= I'(\psi) \mathbf{B} - p'(\psi) \mathbf{e}_p \end{aligned} \quad (4.184)$$

Die radiale Koordinate ist hier der toroidale Fluss ψ an Stelle von s . Diese Darstellung erlaubt es, die Rolle des Toroidalstromes zu untersuchen und den Übergang zu $I = 0$ zu machen.

Strom- und Feldlinien stehen im allgemeinen nicht senkrecht aufeinander d.h. $\mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \neq 0$. Der Mittelwert auf der magnetischen Fläche lässt sich mit der Darstellung in Hamada-Koordinaten leicht berechnen. Es gilt

$$\langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{B} \rangle = I'(\psi) \langle B^2 \rangle - p'(\psi) \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{B} \rangle \quad (4.185)$$

Zur Berechnung des letzten Terms berücksichtigen wir noch, dass das Bogenelement entlang der \boldsymbol{e}_p -Linien $dl = |\boldsymbol{e}_p|d\theta$ ist. Dies folgt aus

$$\boldsymbol{e}_p \cdot \nabla\theta = 1 \Rightarrow |\boldsymbol{e}_p|d\theta = \frac{d\theta}{|\nabla\theta| \cos \alpha} = dl \quad (4.186)$$

α ist der Winkel zwischen \boldsymbol{e}_p und $\nabla\theta$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{e}_p \cdot \mathbf{B} \rangle &= \iint \boldsymbol{e}_p \cdot \mathbf{B} d\theta d\varphi \\ &= \int_0^1 \oint_{C_p} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} d\varphi \\ &= -\mu_0 I(s) \end{aligned} \quad (4.187)$$

Dieser Mittelwert ist zum toroidalen Gesamtstrom $I(s)$ proportional. Auf dieselbe Weise erhält man für den anderen Mittelwert

$$\langle \boldsymbol{e}_t \cdot \mathbf{B} \rangle = \mu_0 (J(0) - J(s)) \quad (4.188)$$

$J(0) = \oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l}$ ist das Linienintegral längs der magnetischen Achse und $J(s)$ ist der gesamte Poloidalstrom zwischen der ausgewählten magnetischen Fläche und der magnetischen Achse.

Aus den obigen Formeln erhält man folgendes bemerkenswertes Resultat: In einem nettostromfreien toroidalen Gleichgewicht ($I(s) = 0$) stehen Strom- und Feldlinien im Mittel senkrecht aufeinander.

4.6.8 Vakuumfeld

In einem Vakuumfeld mit magnetischen Flächen gibt es keine Stromlinien und zur Rektifizierung der Magnetfeldlinien sind keine Bedingungen zu erfüllen. Es seien θ, φ ein System von Winkelkoordinaten und \boldsymbol{e}_p und \boldsymbol{e}_t die poloidalen und toroidalen Basisvektoren. Die Darstellung des Magnetfeldes ist durch Gl. (4.161) gegeben. Definiert man eine neue poloidale Koordinate durch

$$C_1\theta_1 = \lambda(\theta, \varphi, s) + C_1\theta \quad (4.189)$$

und lässt die toroidale Koordinate unverändert ($\phi_1 = \phi$), dann wird $\boldsymbol{v} = C_1\theta_1 + C_2\phi_1$ und die Feldlinien $\boldsymbol{v} = \text{const.}$ sind gerade Linien.

In einem Vakuumfeld gibt es ein magnetisches Potential ϕ und es ist $\mathbf{B} = \nabla\phi$. In den obigen Koordinaten hat das Potential die Darstellung $\phi = C_0\varphi + F(\theta, \varphi, s)$, wobei F eine periodische Funktion in den Winkeln und C_0 eine Konstante ist. In toroidaler Richtung nimmt ϕ um den Wert C_0 zu, in poloidaler Richtung gibt es wegen $\oint \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$ keinen Zuwachs. Wegen dieser Eigenschaft kann man die Potentialflächen mit den toroidalen Koordinatenflächen $\varphi = \text{const.}$ identifizieren. Dann gilt

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\varphi = AB^2 \quad (4.190)$$

A ist ein Normierungsfaktor. Definiert man nun die poloidale Koordinate θ durch

$$\mathbf{B} \cdot \nabla\theta = \iota(s)AB^2 \quad (4.191)$$

dann haben die Feldlinien in diesem System die konstante Steigung $\iota(s)$. Aus $\mathbf{B} = \nabla s \times \nabla \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{v} = C_1\theta + C_2\varphi$ folgt dann

$$(\nabla s \cdot (\nabla\varphi \times \nabla\theta)) \propto B^2 \quad (4.192)$$

Die Funktionaldeterminante dieses Systems ist nicht konstant sondern proportional zu B^2 . Dieses spezielle System ist unter dem Namen "Boozer-System" bekannt.

Nicht jedes Vakuumfeld, das toroidal geschlossene magnetische Flächen hat, ist zum Plasmaeinchluss geeignet. Wir betrachten eine Folge von Gleichgewichten mit abnehmendem Druckgradienten und Strömen. Weiterhin betrachten wir eine geschlossene Magnetfeldlinie. Nach m toroidalen und n

poloidalen Umläufen schließt sich die Feldlinie, Anfangs- und Endpunkt der Feldlinie fallen zusammen. Mit der Darstellung (4.176) von σ erhalten wir

$$I'(s)n - J'(s)m = p' \oint \frac{dl}{B} \quad (4.193)$$

Daraus folgt, dass das Integral $\oint dl/B$ auf allen geschlossenen Feldlinien einer rationalen magnetischen Fläche denselben Wert hat. Im Grenzfall $p'(s) \rightarrow 0$ muss dies auch für das Vakuumfeld gelten. Diese Integralbedingung ist den Vakuummagnetfeldern völlig fremd, d.h. es ist eine Zusatzbedingung, die nicht immer erfüllt werden kann. Ausnahmen sind Magnetfelder mit einer kontinuierlichen Invarianz, z.B. mit helikaler Symmetrie. Alle geschlossenen Feldlinien auf einer Fläche haben dann dieselbe Form und dasselbe B . In toroidaler Geometrie ohne Symmetrien gilt dies nicht mehr.

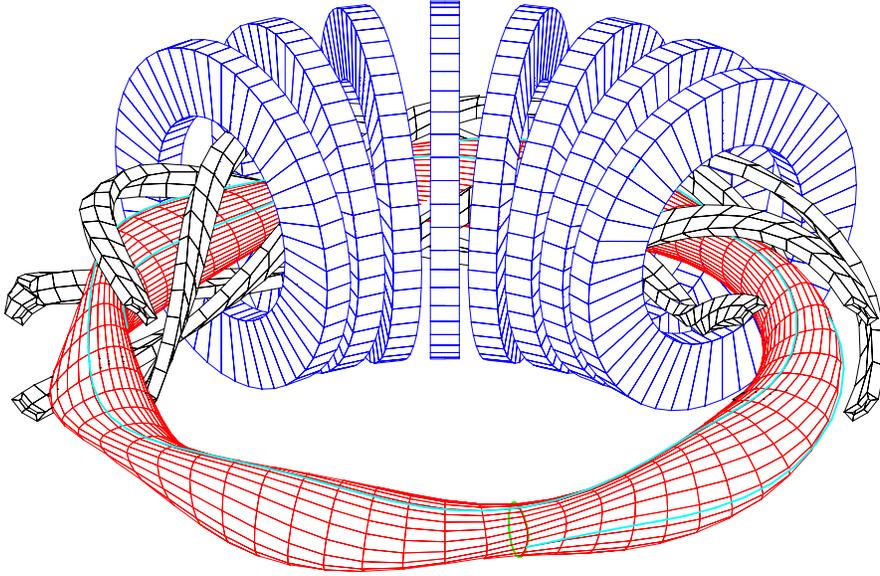


Abbildung 4.9: Klassischer $l=2$ -Stellarator mit Hauptfeldspulen und helikalen Windungen. Das Bild zeigt eine magnetische Fläche des Vakuumfeldes. Eine Magnetfeldlinie ist hervorgehoben um die helikale Verschraubung (Rotationstransformation) zu verdeutlichen.

Die in Abb. 4.9 dargestellte Methode der helikalen Windungen ist nicht die einzige Methode um Vakuumfelder mit magnetischen Flächen zu erzeugen. Eine toroidale Deformation der Hauptfeldspulen erlaubt bei geeigneter Anordnung dasselbe Magnetfeld zu erzeugen. Dies wird im folgenden Bild (4.10) gezeigt.

4.6.9 Klassische Diffusion

Im Kapitel 4.5.5 war die klassische Diffusion in axialsymmetrischen Konfigurationen behandelt worden. Die dortigen Ergebnisse gelten auch für allgemeine 3-dimensionale Gleichgewichte. Durch die Definition des Hamada-Koordinatensystems für allgemeine Gleichgewichte ist es möglich, die dortigen Formeln ohne weitere Änderungen auf 3-D-Gleichgewichte zu übertragen. Die zusammengefassten Transportgleichungen lauten

$$\begin{pmatrix} \Gamma \\ n(s)U_L \end{pmatrix} = \frac{n\eta}{(\psi'(s))^2} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle & -\mu_0 I(s) \\ -\mu_0 I(s) & \langle B^2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p'(s) \\ I'(s) \end{pmatrix} \quad (4.194)$$

In einem Stellarator ohne Ringspannung U_L und ohne Toroidalstrom vereinfachen sich diese Formeln zu

$$\Gamma = -\frac{n\eta}{(\psi'(s))^2} \langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle p'(s) \quad (4.195)$$

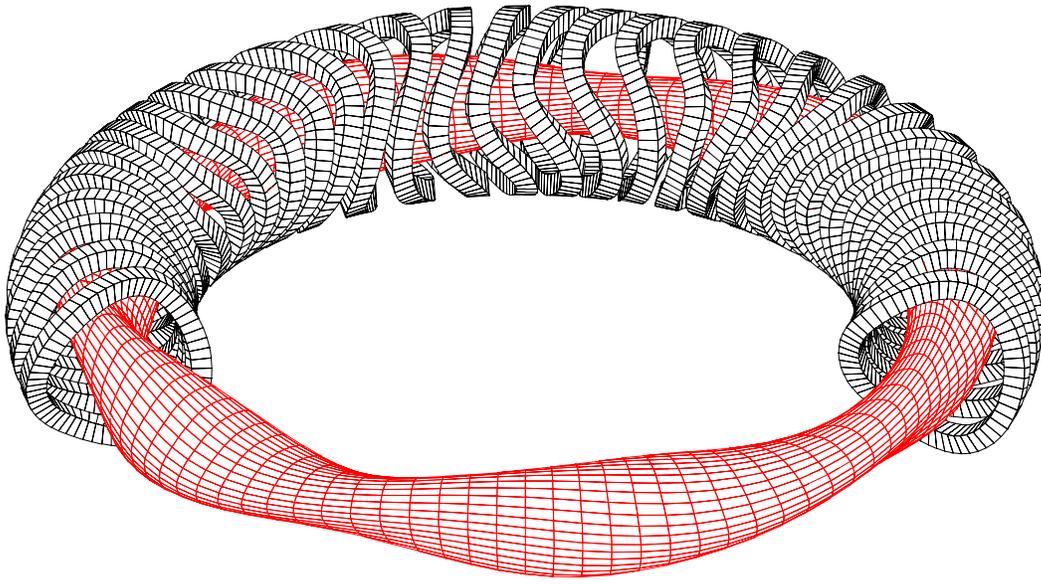


Abbildung 4.10: Modularer $l=2$ -Stellarator: Spulensystem und magnetische Fläche. Die Konfiguration ist 5-fach periodisch

Ohne toroidale Ringspannung kann es im Stellarator keinen toroidalen Strom geben, denn die zweite Gleichung in (4.194) verlangt

$$0 = \mu_0 I(s) p'(s) + \langle B^2 \rangle I'(s) \quad (4.196)$$

Mit der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ folgt daraus $I = 0 \forall s$. Es muss aber betont werden, dass diese Schlussfolgerung nur im Rahmen des einfachen Ohm'schen Gesetzes gilt, ein erweitertes Ohm'sches Gesetz mit Drucktensoren lässt auch toroidale Ströme ohne Ringspannung zu.

4.6.10 Optimierung des Stellarators

Bisher war lediglich ein allgemeines toroidales Gleichgewicht behandelt worden ohne an die Konfiguration noch spezielle Bedingungen zu stellen. Solche Zusatzbedingungen entstehen aus der Forderung nach möglichst gutem Plasmaeinschluss unter stabilen Bedingungen. Eine solche Forderung an das Gleichgewicht ist z.B. die Forderung nach Minimierung der Parallel- oder Pfirsch-Schlüter-Ströme, die ja nur indirekt über die Modifikation des Magnetfeldes das Gleichgewicht beeinflussen. In der Kraftbilanz treten die Parallelströme nicht auf. Konkret lautet eine solche Optimierungsbedingung: Der geometrische Faktor in der Diffusionsformel ist $\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle$. Die Geometrie soll so gewählt werden, dass der Ausdruck $\langle \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_p \rangle$ möglichst klein wird. Dazu soll untersucht werden, wie der Basisvektor \mathbf{e}_p mit den geometrischen Eigenschaften der magnetischen Flächen verknüpft ist.

Der Basisvektor \mathbf{e}_p genügt der Gleichung

$$\mathbf{e}_p \times \mathbf{B} = -\psi'(s) \nabla s; \quad \nabla \cdot \mathbf{e}_p = 0 \quad (4.197)$$

Diese Beziehung folgt aus den Eigenschaften der Basisvektoren (4.155) und der kontravarianten Darstellung des Magnetfeldes. Mit dem Ansatz $\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_{p,\perp} + h\mathbf{B}$ erhält man für die parallele Komponente die Differentialgleichung

$$\mathbf{B} \cdot \nabla h = -\psi'(s) (\nabla s \times \mathbf{B}) \cdot \left(\frac{1}{B^2} \right) \quad (4.198)$$

Die Senkrechtkomponente von \mathbf{e}_p ist

$$\mathbf{e}_{p,\perp} = \psi'(s) \frac{\nabla s \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (4.199)$$

Die Ableitungen von B hängen mit geometrischen Größen des Magnetfeldes zusammen, die hier zur Veranschaulichung mitbenutzt werden sollen. Die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ kann auch in

folgende Form gebracht werden

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \frac{B^2}{2} = \mu_0 \nabla p \quad (4.200)$$

Der erste Term in dieser Gleichung hängt mit dem Krümmungsvektor der Magnetfeldlinie zusammen, der durch die Ableitung des Tangentenvektors nach der Bogenlänge definiert ist

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \right) \\ &= \left(\frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} \\ &= \frac{\mathbf{B}}{B^2} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{B^3} \mathbf{B} \cdot \nabla B \end{aligned} \quad (4.201)$$

Damit lautet die Gleichgewichtsbedingung auch

$$\vec{\kappa} = \frac{1}{B^2} \nabla \left(\mu_0 p + \frac{B^2}{2} \right) - \frac{\mathbf{B}}{B^3} \mathbf{B} \cdot \nabla B \quad (4.202)$$

Der Krümmungsvektor $\vec{\kappa}$ steht im allgemeinen nicht senkrecht auf der magnetischen Fläche, die Komponente in Richtung der Flächennormale ist die "Normalkrümmung", während die Tangentialkomponente die "geodätische Krümmung" heisst. Das nächste Bild veranschaulicht diese Zusammenhänge.

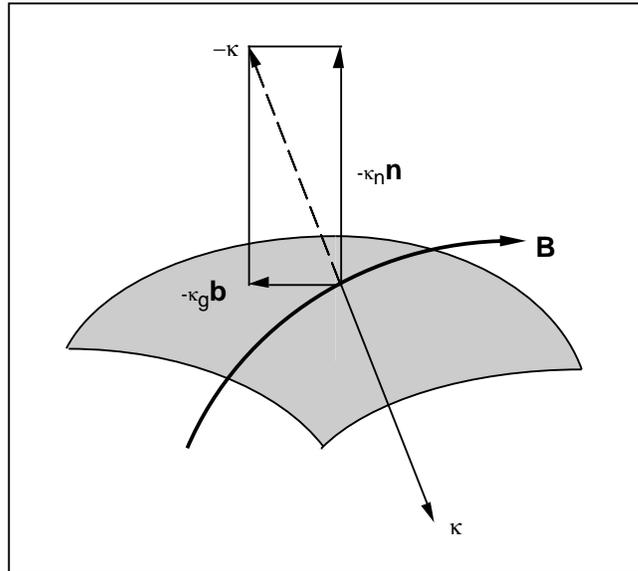


Abbildung 4.11: Krümmungsvektor auf der magnetischen Fläche. Der Krümmungsvektor zeigt zum Krümmungsmittelpunkt

Multipliziert man die Gleichgewichtsbedingung (4.202) mit dem Vektor $\nabla s \times \mathbf{B}$ dann ergibt sich mit $(\nabla s \times \mathbf{B}) \cdot \nabla p = 0$

$$-(\nabla s \times \mathbf{B}) \cdot \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) = 2 \frac{\nabla s \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \vec{\kappa} \quad (4.203)$$

Setzt man diese Beziehung in die Differentialgleichung (4.198) ein, dann lautet diese

$$\mathbf{B} \cdot \nabla h = -2\psi'(s) \frac{|\nabla s|}{B} \kappa_g \quad (4.204)$$

Das Resultat ist damit: Die Parallelkomponente von \mathbf{e}_p wird umso kleiner, je kleiner die geodätische Krümmung der Feldlinien ist. Die dazu äquivalente Formulierung lautet: Die Parallelkomponente von \mathbf{e}_p wird umso kleiner, je kleiner die Variation von B^2 längs der Orthogonaltrajektorien zu den Feldlinien

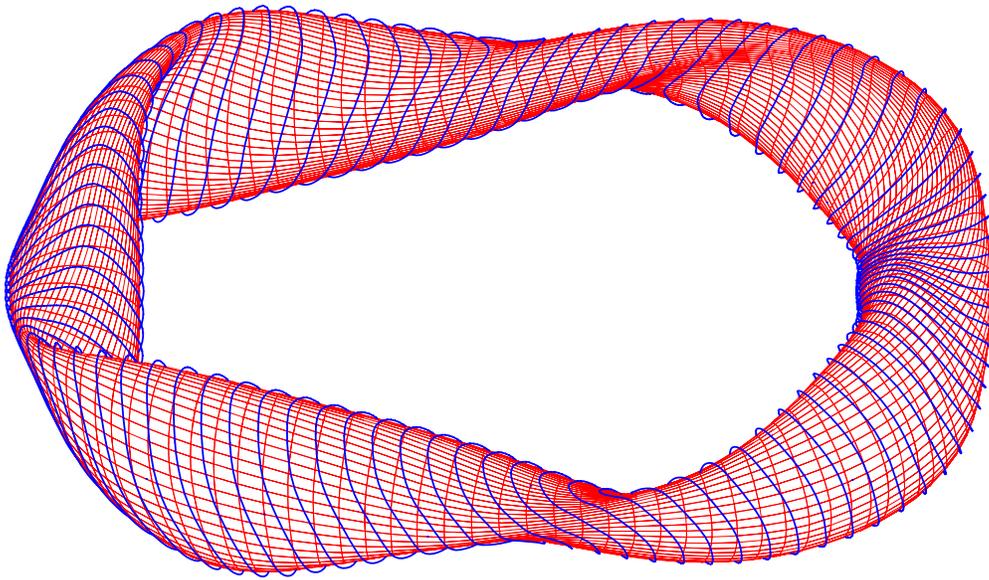


Abbildung 4.12: Magnetische Fläche eines optimierten 4-periodischen Stellarators. Die dicken Linien sind die poloidal geschlossenen Stromlinien

ist. Diese Formulierung ist unter dem Namen “Palumbo-Bedingung” bekannt. Ein optimierter Stellarator ist dadurch charakterisiert, dass diese Bedingung der kleinen geodätischen Krümmung erfüllt wird. Das Abb. 4.12 zeigt eine magnetische Fläche eines optimierten Stellaratorgleichgewichts.

4.6.11 Differentialgleichung für 3-D-Gleichgewichte

In dem Kapitel über Tokamakgleichgewichte war die Grad-Shafranovgleichung abgeleitet worden. Diese elliptische Gleichung bestimmt die Flussfunktion $\chi(r, z)$ eindeutig, wenn die Randbedingungen spezifiziert sind. Im dreidimensionalen Fall wird das Magnetfeld durch zwei Flussfunktionen s und v beschrieben und man muss erwarten, dass bestenfalls zwei Differentialgleichungen notwendig sind, um das Gleichgewicht zu beschreiben. Mit dem Ansatz $\mathbf{B} = \nabla s \times \nabla v$ gehen wir in die Gleichgewichtsbedingung $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ und erhalten daraus die zwei Gleichungen

$$\mathbf{j} \cdot \nabla s = 0 ; \mathbf{j} \cdot \nabla v = p'(s) \quad (4.205)$$

Mit $\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times (\nabla s \times \nabla v)$ werden diese Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla v) \times \nabla s) &= 0 \\ \nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla v) \times \nabla v) &= \mu_0 p'(s) \end{aligned} \quad (4.206)$$

Die erste Gleichung ist bei gegebenem s eine lineare Gleichung für die Flussfunktion v , die zweite Gleichung ist eine quasilineare Gleichung für s , wenn v gegeben ist. Diese zweite Gleichung ist das Äquivalent zur Grad-Shafranov-Gleichung und geht in diese über, wenn die Konfiguration axialsymmetrisch ist. Um dies zu zeigen, gehen wir von einem zylindrischen Koordinatensystem (r, z, φ) aus und machen den Ansatz $s = s(r, z)$, $v = \varphi + f(r, z)$. Damit gilt

$$\nabla s \cdot \nabla \varphi = 0 ; \nabla f \cdot \nabla \varphi = 0 \quad (4.207)$$

das Magnetfeld wird damit

$$\mathbf{B} = \nabla s \times \nabla f + \nabla s \times \nabla \varphi \quad (4.208)$$

Der erste Term ist ein toroidales Feld und hat die Darstellung $\nabla s \times \nabla f = \mu_0 J \nabla \varphi$. Der zweite Term ist ein poloidales Feld und wegen der Axialsymmetrie gilt

$$\nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla \varphi) \times \nabla s) = 0 \quad (4.209)$$

Damit folgt für den ersten Term

$$\nabla \cdot (J \nabla \varphi \times \nabla s) = 0 \Rightarrow J = J(s) \quad (4.210)$$

Die Verknüpfung zwischen J und $f(r, z)$ ist dann

$$(\nabla s \times \nabla f) \cdot \nabla \varphi = \mu_0 J(s) (\nabla \varphi)^2 \quad (4.211)$$

Die zweite Gleichung von (4.206) wird mit dem obigen Ansatz

$$\nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla(f + \varphi)) \times \nabla(f + \varphi)) = \mu_0 p'(s) \quad (4.212)$$

Aus Gründen der Axialsymmetrie gilt

$$\nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla f) \times \nabla \varphi) = 0 ; \nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla \varphi) \times \nabla f) = 0 \quad (4.213)$$

Weiterhin ist wegen Gl. (4.211)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla f) \times \nabla f) &= \nabla \cdot (\mu_0 J \nabla \varphi \times \nabla f) \\ &= -\mu_0^2 J'(s) J(s) (\nabla \varphi)^2 \end{aligned} \quad (4.214)$$

Setzt man diese Ergebnisse in die zweite Gleichung von (4.206) ein, dann ist das Ergebnis

$$\nabla \cdot ((\nabla s \times \nabla \varphi) \times \nabla \varphi) - \mu_0^2 J'(s) J(s) (\nabla \varphi)^2 = \mu_0 p'(s) \quad (4.215)$$

oder

$$-\nabla \cdot (\nabla \varphi)^2 \nabla s = \mu_0^2 J'(s) J(s) (\nabla \varphi)^2 + \mu_0 p'(s) \quad (4.216)$$

das ist wieder die Lüst-Schlüter-Grad-Shafranov-Gleichung.

Im dreidimensionalen Gleichgewicht müssen alle beiden Gleichungen (4.206) gelöst werden. Dies ist eine Alternative zu dem Variationsverfahren, welches am Anfang der Kapitels geschildert wurde. An diesen Differentialgleichung wird aber auch ein fundamentaler Unterschied zwischen dem zweidimensionalen und dem dreidimensionalen Gleichgewichtsproblem deutlich. Die Grad-Shafranov-Gleichung ist eine elliptische Gleichung – genau genommen eine gleichmäßig elliptische Gleichung – und damit bei Vorgabe von Randbedingungen lösbar. Wie im folgenden gezeigt wird, sind die Gleichungen des dreidimensionalen Problems nicht mehr gleichmäßig elliptisch und man kann nicht mehr auf die Existenzsätze von elliptischen Gleichungen zurückgreifen.

Um dies zu zeigen, definieren wir die Matrizen A und B durch

$$A[v] = (\nabla v)^2 \mathbf{I} - \nabla v : \nabla v \quad ; \quad B[s] = (\nabla s)^2 \mathbf{I} - \nabla s : \nabla s \quad (4.217)$$

die Differentialgleichungen schreiben sich dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot B[s] \nabla v &= 0 \\ \nabla \cdot A[v] \nabla s &= \mu_0 p'(s) \end{aligned} \quad (4.218)$$

Die Matrizen A und B sind nur positiv aber nicht positiv definit. Beide Matrizen haben den Eigenwert null, denn die Gleichung $A[v]y = 0$ wird durch $y = c \nabla v$ gelöst. Dabei ist c eine Konstante.

4.6.12 Stationäres Gleichgewicht

Das Modell des idealen magnetohydrodynamischen Gleichgewichts berücksichtigt keine Dissipationseffekte wie Viskosität und Plasmawiderstand. Diese mögen zur Untersuchung schneller Plasmavorgänge zu Recht vernachlässigbar sein, im Gleichgewichtszustand besteht aber die Möglichkeit, dass dissipative Effekte eine langsame Veränderung herbeiführen und Plasma und Magnetfeld entkoppeln. Grob gesprochen werden die eingefrorenen Magnetfeldlinien wieder "aufgetaut". Druckflächen und magnetische

Flächen stimmen dann nicht mehr exakt überein, was besonders bei der Formierung kleiner magnetischer Inseln von Bedeutung ist. Dissipative Effekte führen zu einem Plasmaverlust, um einen stationären Zustand aufrechtzuerhalten muss daher durch externe Quellen der Verlust kompensiert werden. Ein stationäres Gleichgewicht mit externen Quellen ist im thermodynamischen Sinne kein abgeschlossenes System mehr, der Gleichgewichtszustand ist dann nicht mehr durch den stationären Wert der Energie definiert.

In einem stationären Zustand mit Plasmaströmung sind Trägheitskräfte ebenfalls nicht vernachlässigbar. Dies gilt insbesondere bei Strömungen in der Nähe der Schallgeschwindigkeit oder bei Überschallströmungen wie etwa bei der Beschreibung des solaren Windes. In den toroidalen Plasmen von Fusionsexperimenten ist besonders die Rotation des Plasmas von Interesse. Toroidal und poloidal rotierende Plasmen verhalten sich in bezug auf Gleichgewicht und Stabilität anders als nichtrotierende Plasmen.

In folgenden sollen einige Beziehungen von stationären Gleichgewichten diskutiert werden, dabei werden Trägheitskräfte und Viskositätskräfte im Einflüssigkeitsmodell berücksichtigt. Die Impulsbilanz lautet in diesem Fall

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{V}) \quad (4.219)$$

Dabei ist die Viskosität (Braginskii, Rev. Plasma Phys.)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = \nabla \cdot \sum_{i=1}^4 \pi_i(\mathbf{V}) \quad (4.220)$$

mit

$$\pi_i = \mu_i A^i \cdot \nabla : \mathbf{V} \quad (4.221)$$

Die ortsabhängigen Matrizen A^i sind beschränkt und es gilt

$$|A^i| < \infty ; \mu_i \geq \mu_{min} > 0 \quad (4.222)$$

Die Viskosität ist dissipativ, d.h. es gelte die Ungleichung

$$\iiint_D \mathbf{V} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} d^3 \mathbf{x} > \mu_{min} \iiint_D \sum_{ik}^3 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right)^2 d^3 \mathbf{x} > 0 \quad (4.223)$$

In einer inkompressiblen Flüssigkeit ist

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\pi}(\mathbf{V}) = -\mu \Delta \mathbf{V} \quad (4.224)$$

Damit ist die obige Ungleichung erfüllt. Weitere Gleichungen sind das Ohmsche Gesetz

$$-\nabla \phi + \mathbf{V} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} \quad (4.225)$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = S(\mathbf{x}) \quad (4.226)$$

und die Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad ; \quad \mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.227)$$

Weiterhin sei eine Beziehung zwischen Dichte und Druck gegeben

$$p = p(\rho) \quad ; \quad \rho = \rho(p) \quad (4.228)$$

Lösungen dieser Gleichungen sind von Interesse für die Beschreibung von Plasmaströmungen und der Plasmarotation.

Es soll im folgenden vorausgesetzt werden, dass es Lösungen des stationären Gleichgewichtsproblems gibt. Eine interessante Frage ist dann, welche Unterschiede zu den statischen Gleichgewichten auftreten. In toroidalen Gleichgewichten fallen Druckflächen und magnetische Flächen nicht mehr zusammen, was zur Folge hat, dass der topologische Zusammenhang beider Flächen verschieden sein kann.

Magnetische Flächen können dann Inseln und stochastische Gebiete besitzen während diese in Druckflächen nicht auftreten.

Die Impulsbilanz parallel zum Magnetfeld ist

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) = -\mathbf{B} \cdot \nabla p - \mathbf{B} \cdot \nabla \cdot \pi(\mathbf{V}) \quad (4.229)$$

und parallel zu den Strömen

$$\mathbf{j} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) = -\mathbf{j} \cdot \nabla p - \mathbf{j} \cdot \nabla \cdot \pi(\mathbf{V}) \quad (4.230)$$

Mittelung über Druckflächen ergibt wegen $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$

$$\langle \mathbf{B} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) \rangle + \langle \mathbf{B} \cdot \nabla \cdot \pi(\mathbf{V}) \rangle \quad (4.231)$$

und

$$\langle \mathbf{j} \cdot \nabla \cdot (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) \rangle + \langle \mathbf{j} \cdot \nabla \cdot \pi(\mathbf{V}) \rangle \quad (4.232)$$

Die Mittelwertbildung über die Druckflächen ist definiert durch

$$\langle g \rangle = \iint_{c=p} g \frac{df}{|\nabla c|} \quad (4.233)$$

Die Trägheitskräfte auf der Druckfläche werden durch die Viskositätskräfte im Gleichgewicht gehalten. Dies gilt hier für die tangentialen Kräfte, wogegen in radialer Richtung Druckgradient und Lorentzkraft die dominierenden sind. Die Stromdichte senkrecht zum Magnetfeld ist

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2} + \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times (\rho \mathbf{V} : \mathbf{V}) + \nabla \times \pi(\mathbf{V}))}{B^2} \quad (4.234)$$

Dieser Strom fließt nicht mehr in den magnetischen Flächen und auch nicht in den Druckflächen. Die magnetische Differentialgleichung zur Bestimmung des Parallelstroms lautet

$$\mathbf{j}_\parallel = h\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \cdot \nabla h = -\nabla \cdot \mathbf{j}_\perp \quad (4.235)$$

Die Integrabilitätsbedingung längs geschlossener Feldlinien ist durch die Trägheitskräfte und die Viskositätskräfte erfüllbar.

Im Gegensatz zu dem idealen MHD-Modell sind im stationären und dissipativen Gleichgewichtsmodell Randbedingungen für das elektrische Potential und die Plasmaströmung möglich. Im dissipativen Gleichgewicht fallen Druckflächen, magnetische Flächen und Stromflächen nicht mehr zusammen. Analog zu den Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik läßt sich die Existenz von Lösungen beweisen. Die Eindeutigkeit der Lösungen ist nicht immer gegeben. Es können Bifurkationen auftreten. In axialsymmetrischen Konfigurationen ergibt sich ein System von Gleichungen, deren Struktur - im Gegensatz zur Grad-Shafranov Gleichung - nicht immer elliptisch ist. D.h. es können Stoßfronten auftreten.

Kapitel 5

MHD-Stabilität des Plasmas

Neben der Untersuchung des Plasmagleichgewichts spielt die Behandlung der Stabilität eine große Rolle. Gleichgewichte, die instabil sind, können im Experiment oder in der Natur nicht realisiert werden. Jede kleine Abweichung von der Gleichgewichtslage würde in der Zeit rasch anwachsen und das Plasma in einen oszillatorischen oder turbulenten Zustand überführen. Die Methode zur Untersuchung der Stabilität einer Gleichgewichtslage ist die Linearisierung der zeitabhängigen MHD-Gleichungen um einen Gleichgewichtszustand und die Lösung dieser linearen Gleichungen als Anfangswertproblem. Wenn es mindestens eine Lösung gibt, die zeitlich unbeschränkt anwächst, dann ist das Gleichgewicht instabil.

Es sollen im folgenden einige Beispiele für Plasmainstabilitäten betrachtet werden ohne dabei die Gleichungen der Stabilitätstheorie zu benutzen. Diese werden im nächsten Kapitel dargestellt, die folgenden Beispiele basieren mehr auf der anschaulichen Interpretation der Kraftbilanz.

5.1 Der lineare Z-Pinch

Das Gleichgewicht des linearen Z-Pinches wurde in den vorhergehenden Kapiteln behandelt, wir betrachten hier den einfachen Fall eines zylindrischen Stromfadens ohne externes Magnetfeld. Wird der

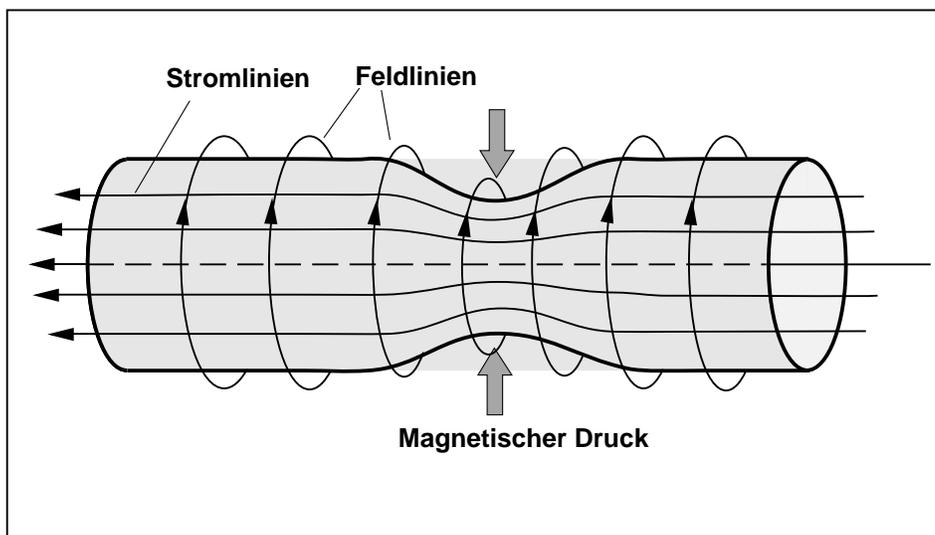


Abbildung 5.1: Einschnürung eines Stromfadens (sausage-instability).

Stromfaden an einer Stelle eingeschnürt - wie auf dem Bild (5.1) dargestellt - dann vergrößert sich der Magnetfelddruck an dieser Stelle während der Plasmadruck konstant bleibt. Das poloidale Magnetfeld fällt außerhalb des Plasmas mit $1/r$ ab, bei einer Verkleinerung des Plasmaradius vergrößert sich damit das Magnetfeld auf der Plasmaoberfläche. Der Plasmastrom bleibt ja bei der Einschnürung konstant. Andererseits bleibt der Plasmadruck bei dieser Deformation konstant. Das Druckgleichgewicht wird durch

die Deformation gestört und die Deformation wächst weiter an bis sich die Plasmasäule vollständig abschnürt. Diese "Sausage"-Instabilität kann durch ein achsenparalleles Magnetfeld stabilisiert werden. Eine Deformation der obigen Art würde das axiale Magnetfeld komprimieren und damit den inneren Magnetfelddruck erhöhen.

5.2 Kink-Instabilität

Ein weiteres Beispiel ist die einseitige Auslenkung der Plasmasäule, die sogenannte "Kink"-Instabilität. Bei einer Kink-Instabilität führt eine einseitige Auslenkung der Plasmasäule zu einem weiteren An-

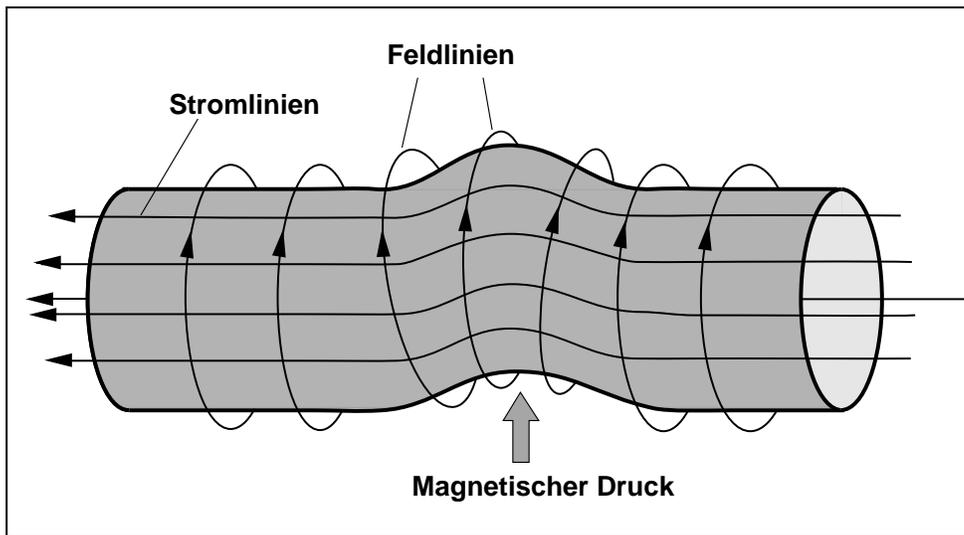


Abbildung 5.2: Knick-Instabilität eines Stromfadens (kink-instability).

wachsen. In dem obigen Bild werden die Feldlinien auf der unteren Seite komprimiert, was zu einem Anwachsen des Magnetfeldes führt. Auf der oberen Seite nimmt die Feldstärke aber ab, da der Plasmadruck wiederum konstant bleibt, das Gleichgewicht der Kräfte ist damit nicht mehr gegeben und die Deformation wächst weiter an. Diese Kink-Instabilität kann ebenfalls durch ein achsenparalleles Magnetfeld stabilisiert werden.

5.3 Austauschinstabilität

Eine der häufigsten Plasmainstabilitäten ist die Austauschinstabilität, bei der sich das Plasma deformiert ohne die Magnetfeldenergie zu verändern oder zu erhöhen. Das Standardbeispiel ist ein Plasma im Gravitationsfeld, welches von einem Magnetfeld im Gleichgewicht gehalten wird. Eine Deformation des Plasmas, bei der die Magnetfeldlinien "ausgetauscht" werden, verändert die Magnetfeldenergie nicht. Dazu muss die Verformung des Plasmas in Richtung des Magnetfeldes konstant sein. Eine solche Verformung ist in Fig. (5.3) dargestellt. Im Gleichgewicht nimmt der Plasmadruck nach oben ab. An der Stelle 1 wird das Plasma angehoben, der Druck nimmt ab. An der Stelle 2 führt die Absenkung des Plasmas zu einer Erhöhung des Druckes. Da der Magnetfelddruck bei der Deformation konstant bleibt, gerät das Plasma aus dem Gleichgewicht und die Störung wächst weiter an. In einem toroidalen Plasmagleichgewicht spielt die Feldlinienkrümmung die Rolle der Gravitation. Eine Austauschstörung ist charakterisiert durch ein Minimum an Magnetfeldveränderung.

In einem toroidalen Gleichgewicht kann sich die Austauschinstabilität nur ausbilden, wenn alle Feldlinien geschlossen sind. Sind die Feldlinien nicht geschlossen, d.h. bei endlicher Verscherung, dann ist die reine Austauschstörung nicht möglich, die Magnetfeldenergie ändert sich und es kommt zu einem stabilisierenden Effekt.

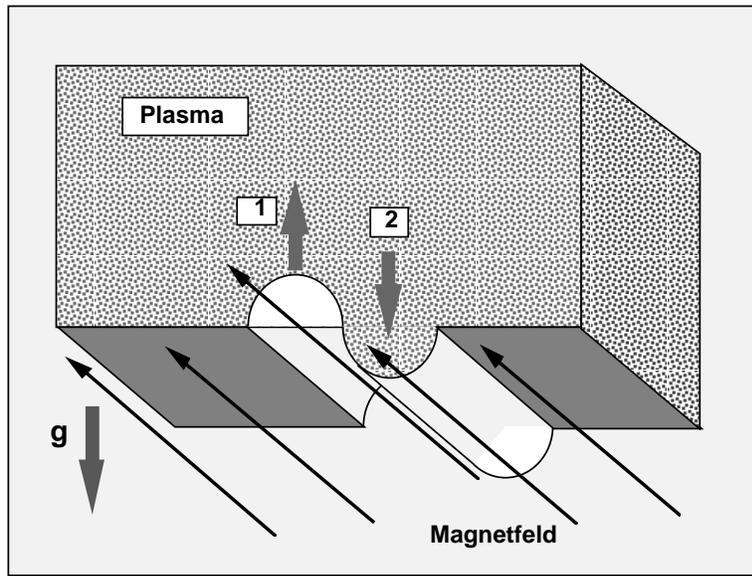


Abbildung 5.3: Austausch-Instabilität eines Plasmas im Gravitationsfeld (interchange-instability).

5.4 Stabilität in Eulerscher Darstellung

Die mathematische Behandlung der Plasmainstabilität geht man von den linearisierten MHD-Gleichungen aus. Gegeben sei ein statisches Gleichgewicht, welches durch das Kräftegleichgewicht $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p$ bestimmt ist. Zur Untersuchung der Stabilität betrachtet man eine Abweichung von dem Gleichgewichtszustand in der Form $\rho \Rightarrow \rho + \delta\rho$, $p \Rightarrow p + \delta p$, $\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{V} + \delta\mathbf{V}$, $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} + \delta\mathbf{B}$, $\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} + \delta\mathbf{E}$. Zur Linearisierung entwickelt man alle Plasmamaparameter um die Gleichgewichtslösung und vernachlässigt alle quadratischen und höheren Terme in δ . Die linearisierten Gleichungen der idealen MHD lauten dann

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \delta\mathbf{V}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + \delta\mathbf{V} \cdot \nabla p + \gamma \nabla \cdot \delta\mathbf{V} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\delta\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (5.3)$$

$$\rho \frac{\partial \delta\mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla \delta p + \delta\mathbf{j} \times \mathbf{B} + \mathbf{j} \times \delta\mathbf{B} \quad (5.4)$$

Die erste Gleichung ist die linearisierte Kontinuitätsgleichung, die zweite ergibt sich aus dem Entropiesatz und die dritte ist die linearisierte Faraday-Gleichung. Die vierte Gleichung erhält man aus der Bewegungsgleichung. Die Differentiation von Gl. (5.4) nach der Zeit t und Elimination von δp und $\delta\mathbf{B}$ liefert eine Gleichung für die Störung $\delta\mathbf{V}$:

$$\rho \frac{\partial^2 \delta\mathbf{V}}{\partial t^2} = -\mathbf{F} \delta\mathbf{V} \quad (5.5)$$

mit dem Differentialoperator 2. Ordnung

$$\mathbf{F} \delta\mathbf{V} = -\nabla (\delta\mathbf{V} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \delta\mathbf{V}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{Q}) + \mathbf{Q} \times \mathbf{j} \quad (5.6)$$

und

$$\mathbf{Q} = \nabla \times (\delta\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (5.7)$$

Zeitlich anwachsende Lösungen von Gl. (5.5) bedeuten, dass das Gleichgewicht instabil ist. Die Randbedingungen (fester Rand = magnetischer Fläche) sind: $\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{V} = 0$; $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Der Operator \mathbf{F} ist selbstadjungiert, d.h. für je 2 Vektoren f, g , die den Randbedingungen genügen, gilt

$$(f, \mathbf{F}g) = (\mathbf{F}f, g) \quad (5.8)$$

wobei die geschweiften Klammern das Integral über das Plasmavolumen bedeuten. Der Beweis der Selbstadjungiertheit ist recht mühsam und langwierig, eine ausführliche Darstellung findet man in: I.B. Bernstein, Basic Plasma Physics I, ch. 3.1, Northholland 1983

Aus der Selbstadjungiertheit des Stabilitätsoperators folgt, dass alle Eigenwerte reel sind. Positive Eigenwerte der Gleichung $\rho_0 \lambda \delta\mathbf{V} = \mathbf{F}\delta\mathbf{V}$ führen wegen $\lambda = \omega^2$ auf stabile Plasmaschwingungen, während negative Eigenwerte anwachsende Lösungen von Gl. (5.5) beschreiben.

5.4.1 Das Energieprinzip der MHD-Stabilität

Aus der Eigenschaft der Selbstadjungiertheit folgt das Energieprinzip : Das Gleichgewicht ist stabil, wenn für alle zulässigen Störungen gilt:

$$W = \iiint \delta\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}\delta\mathbf{V} d^3\mathbf{x} = (\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) \geq 0 \quad (5.9)$$

Beweis : Aus der Gl. (5.5) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}}) = -(\delta\dot{\mathbf{V}}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) - (\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\dot{\mathbf{V}}) \quad (5.10)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}}) + \frac{\partial}{\partial t}(\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) = 0 \quad (5.11)$$

Daraus folgt der Energiesatz

$$(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}}) + (\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) = E = \text{const.} \quad (5.12)$$

Resultat: Falls $(\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) \geq 0$ für alle $\delta\mathbf{V}$, bleibt die kinetische Energie $(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}})$ für alle Zeit beschränkt. In diesem Falle ist das Gleichgewicht stabil. Die Bedingung $(\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) \geq 0 \forall \delta\mathbf{V}$ ist damit hinreichend für Stabilität. Wird diese Bedingung durch eine bestimmte Störung $\delta\mathbf{V}$ verletzt, dann ist das Gleichgewicht instabil. Um dies zu beweisen, starten wir von

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\mathbf{V}) = (\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}}) - (\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\dot{\mathbf{V}}) \quad (5.13)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\mathbf{V}) = 2(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\dot{\mathbf{V}}) - E \quad (5.14)$$

Falls eine Testfunktion $\delta\mathbf{V}$ existiert, welche die Energie E negativ macht, gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\mathbf{V}) > 0 \quad (5.15)$$

d.h. die Funktion $(\rho\delta\dot{\mathbf{V}}, \delta\mathbf{V})$ wächst unbeschränkt an. Damit gilt der Satz: Hinreichend für Instabilität ist eine Störung $\delta\mathbf{V}$ mit $(\delta\mathbf{V}, \mathbf{F}\delta\mathbf{V}) < 0$. Zum Beweis der oben abgeleiteten Sätze wurde lediglich die Selbstadjungiertheit des Stabilitätsoperators \mathbf{F} benutzt. Zur praktischen Anwendung benötigt man das Energieprinzip in expliziter Form.

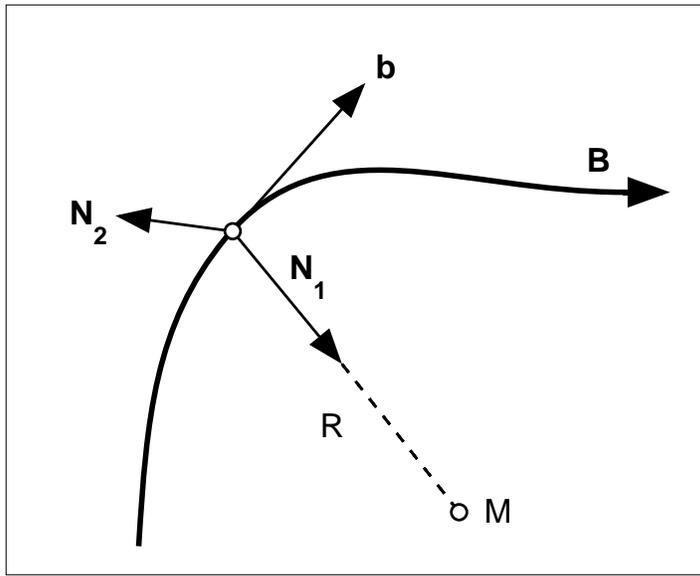


Abbildung 5.4: Magnetfeldlinie und begleitendes Dreibein

5.4.2 Explizite Form der Energieprinzips

Das Integral ist in der Literatur mehrfach behandelt worden, von Bernstein et al. wird folgende Form angegeben:

$$W = \iiint \{(\mathbf{Q} + (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{V})^2 + \gamma p (\nabla \cdot \delta \mathbf{V})^2\} d^3 \mathbf{x} - 2 \iiint \{(\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{V})^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}\} d^3 \mathbf{x} \quad (5.16)$$

Die Integration erstreckt sich über das Plasmavolumen. In dieser Formulierung wird vorausgesetzt, dass die Plasmaoberfläche nicht gestört wird, d.h. man setzt feste Randbedingungen voraus. Im allgemeinen Fall kommt noch ein Oberflächenintegral hinzu. \mathbf{n} ist der Normalenvektor auf der magnetische Fläche. Das erste Integral enthält nur positive Terme, es ist damit immer stabilisierend. Aus dieser Form des Energieintegrals lassen sich folgende Schlussfolgerungen ziehen:

1. Ein stromfreies Plasma kann nicht instabil werden.
2. Eine Störung, die sich nur in der magnetischen Fläche abspielt (d.h. $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{V} = 0$) kann nicht instabil werden

In dem zweiten Integral tritt der geometrische Term $(\mathbf{j} \times \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{n}$ auf. Das Vorzeichen dieses Terms bestimmt die Stabilität des Gleichgewichts. Um die geometrische Bedeutung dieses Terms zu verstehen betrachten wir die Feldlinie als eine Raumkurve mit ihrem begleitendem Dreibein $\mathbf{N}_1, \mathbf{b}, \mathbf{N}_2$. $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ ist der Tangentenvektor der Feldlinie, \mathbf{N}_1 der Normalenvektor und \mathbf{N}_2 der Binormalenvektor. Der Normalenvektor zeigt auf den lokalen Krümmungsmittelpunkt M der Feldlinie, der Krümmungsradius der Feldlinie ist R . Die Frenetschen Formeln verknüpfen die verschiedenen Größen der Feldlinie.

$$\frac{d\mathbf{N}_1}{ds} = -\kappa \mathbf{b} - \tau \mathbf{N}_2; \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \kappa \mathbf{N}_1; \quad \frac{d\mathbf{N}_2}{ds} = \tau \mathbf{N}_1 \quad (5.17)$$

Dabei ist $\kappa = 1/R$ die Krümmung der Feldlinie und τ die Torsion der Feldlinie. s ist die Bogenlänge entlang der Feldlinie. Die durch die Vektoren $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ aufgespannte Fläche steht senkrecht auf der Feldlinie. Ebenso liegen die Flächennormale \mathbf{n} und der dazu senkrechte Vektor $\mathbf{n}_b = \mathbf{b} \times \mathbf{n}$ in dieser Ebene und lassen sich damit durch die Vektoren $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ darstellen

$$\mathbf{n} = \cos \phi \mathbf{N}_1 + \sin \phi \mathbf{N}_2; \quad \mathbf{n}_b = \cos \phi \mathbf{N}_2 - \sin \phi \mathbf{N}_1 \quad (5.18)$$

5.5 Beispiel: Der lineare diffuse Pinch

Der diffuse lineare Pinch ist ein Beispiel, an dem die Stabilitätsgleichungen auf eine gewöhnliche Differentialgleichung reduziert werden können. Aus diesem Grunde wurde er in der Literatur häufig untersucht¹. Eine ausführliche Darstellung der Stabilität des zylindrischen Pinches findet man in dem Buch Gruber und Rappaz². Im linearen diffusen Pinch sind die Magnetfeldlinien Schraubenlinien mit konstanter Krümmung und konstanter Torsion. Flächennormale und Feldliniennormale fallen zusammen, die Feldlinien sind geodätische Linien. Der destabilisierende Term des Energieprinzips wird dann

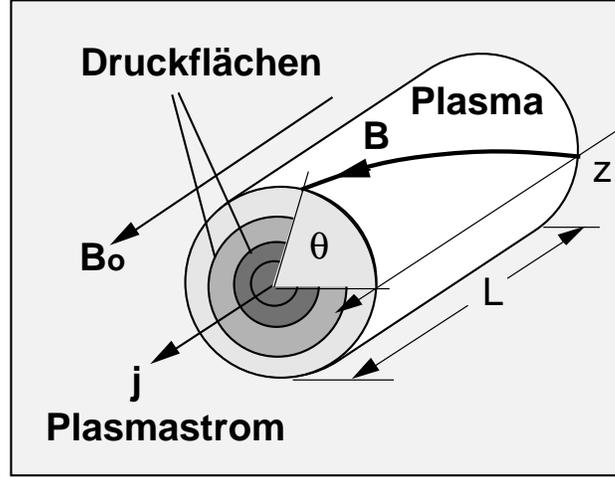


Abbildung 5.6: Schema des diffusen Pinches. Die Feldlinie hat die Darstellung $r = r_0$, $\theta = 2\pi z/L$

$$-2(\mathbf{j} \times \mathbf{n})(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{n} = -2p'(\psi) \{ \bar{\kappa} \cdot \nabla\psi - \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{B}\tau \} + 2I'(\psi)B^2\tau \quad (5.24)$$

Die Krümmung und Torsion der Schraubenlinie sind

$$\kappa = -r \frac{(2\pi)^2}{L^2 + (2\pi r)^2} \quad (5.25)$$

$$\tau = \kappa \frac{L}{2\pi r} = -L \frac{2\pi}{L^2 + (2\pi r)^2} \quad (5.26)$$

L ist die Periodizitätslänge des Pinches. Die Rotationstransformation ι ist

$$\iota = \frac{LB_\theta}{2\pi r B_z} \quad (5.27)$$

Im Grenzfall $\iota \rightarrow 0$ werden die Feldlinien gerade Linien, Krümmung und Torsion werden null und der destabilisierende Faktor verschwindet. Im anderen Grenzfall $\iota \rightarrow \infty$ werden die Feldlinien geschlossene Kreise mit der Krümmung $\kappa = -1/r$ und der Torsion $\tau = 0$. Dies ist der Fall der "sausage"-Instabilität. Ein weiterer Grenzfall ist der des vernachlässigbaren Druckgradienten; dann bleibt nur der Stromgradient $I'(\psi)$ als destabilisierendes Element übrig, was zu der "kink"-Instabilität führen kann.

Im folgenden soll das lineare Gleichgewicht mit Hilfe der Stabilitätsgleichung behandelt werden. Das Magnetfeld des Pinches hat in Zylinderkoordinaten die Darstellung:

$$\mathbf{B} = \{0, B_\theta(r), B_z(r)\} \quad (5.28)$$

und die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \{0, j_\theta(r), j_z(r)\} \quad (5.29)$$

¹W. A. Newcomb, Annals of Physics 10, 232-267 (1963).

²R. Gruber, J. Rappaz, *Finite Element Methods in Linear Ideal Magnetohydrodynamics* Springer-Verlag 1985

Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B_\theta^2}{r\mu_0} \quad (5.30)$$

Da das Gleichgewicht von den Koordinaten θ und z unabhängig ist, kann man für die Störung einen Fourieransatz machen

$$\delta\mathbf{V} = \sum_{k,m} \delta\mathbf{V}_{k,m}(r) \exp(ikz + im\theta) \quad (5.31)$$

Dabei ist $\delta\mathbf{V}_{k,m} = \{\xi_r, \xi_\theta, \xi_z\}$ und $k = n2\pi/L$. L ist die Periodizitätslänge der Störung. Mit diesem Ansatz wird das Energieintegral eine Summe

$$W = \sum_{k,m} W_{k,m} \quad ; \quad W_{k,m} = \int_0^a dr \left\{ f(r) \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 + g(r) \xi_r^2 \right\} \quad (5.32)$$

Dabei sind die Funktionen $f(r)$ und $g(r)$

$$f(r) = \frac{r(krB_z + mB_\theta)^2}{k^2r^2 + m^2} \quad ; \quad g(r) = \frac{(krB_z + mB_\theta)^2}{r} - \frac{2B_\theta}{r} \frac{d(rB_\theta)}{dr} - r \frac{d}{dr} \frac{(krB_z - mB_\theta)^2}{r(k^2r^2 + m^2)} \quad (5.33)$$

Im Falle $m = 0$ wird das Integral

$$W_{k,0} = \int_0^a dr \left\{ rB_z^2 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 + \left(\frac{B_z^2 k^2}{2} + \frac{B_z^2}{r} + 2 \frac{dp}{dr} \right) \xi_r^2 \right\} \quad (5.34)$$

Da der Druck nach aussen abnimmt d.h. $dp/dr < 0$, ist der letzte Term in diesem Integral (5.39) der einzige, der negativ und damit destabilisierend sein kann. Ist das B_z -Feld hinreichend klein, dann überwiegt der destabilisierende Term. Dies ist gerade die oben beschriebene "sausage"-Instabilität. Ist das B_z -Feld hinreichend groß, dann kann die "sausage"-Instabilität nicht auftreten. Die B_θ -Komponente hat auf die "sausage"-Instabilität keinen Einfluss. Diese ist aber im allgemeinen Fall von Wichtigkeit.

Im allgemeinen Fall mit endlichem k, m lautet die zum Energieintegral gehörende Eulersche Gleichung

$$-\frac{d}{dr} \left(f(r) \frac{d\xi_r}{dr} \right) + g(r) \xi_r = \rho(r) \omega^2 \xi_r \quad (5.35)$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung hat an der der Stelle $f(r) = 0$ eine Singularität. Explizit lautet diese Bedingung $kr_s B_z(r_s) + mB_\theta(r_s) = 0$ und sie besagt, dass an dieser Stelle die Verschraubung oder Rotationstransformation der Störung dieselbe ist wie die des Gleichgewichtsfeldes. Die Rotationstransformation des Magnetfeldes ist

$$\mathbf{v}(r) = \frac{LB_\theta(r)}{2\pi r B_z(r)} \quad (5.36)$$

Die Ableitung dieser Rotationstransformation nach dem Radius r ist die Verscherung. Entwickelt man die Function $f(r)$ in der Nachbarschaft der resonanten Stelle $r = r_s$, dann wird die Differentialgleichung näherungsweise

$$-\frac{d}{dr} \left(\alpha(r - r_s)^2 \frac{d\xi_r}{dr} \right) + g(r_s) \xi_r = \rho(r_s) \omega^2 \xi_r \quad (5.37)$$

Dabei ist

$$\alpha = r_s \left(\frac{B_z B_\theta}{B} \right)^2 \left(\frac{v'}{v} \right)^2, \quad g(r_s) = \frac{2\mu_0 B_\theta^2}{B} p'(r_s) \quad (5.38)$$

Das Energieintegral ist

$$W_{k,m} = \int_{r_1}^{r_2} dr \left\{ (\alpha(r - r_s)^2 \left(\frac{d\xi_r}{dr} \right)^2 + g(r_s) \xi_r^2 \right\} \quad (5.39)$$

Dieses Integral zeigt, dass bei hinreichend kleiner Verscherung der erste positive Term klein wird und der zweite Term mit dem Druckgradienten dominiert. Verscherung kann damit die MHD-Instabilität verhindern. Eine notwendige Bedingung für Plasmastabilität wurde von Suydam abgeleitet³, diese lautet

$$\frac{r}{4} \left(\frac{v'}{v} \right)^2 + \frac{2\mu_0 p'(r_s)}{B_z^2} \geq 0 \quad (5.40)$$

Wenn diese Bedingung verletzt wird, kann das Plasma instabil werden. Es ist damit keine hinreichende Bedingung für Instabilität.

Die stabilisierende Wirkung der Verscherung beruht auf der Tatsache, dass im idealen MHD-Modell Plasma und Magnetfeld stark gekoppelt sind. Die Magnetfeldlinien ändern ihre Topologie nicht, d.h. geschlossene Magnetfeldlinien bleiben bei der Plasmabewegung geschlossen. Eine reine Austauschstörung lässt das Magnetfeld unverändert und falls sie auch noch inkompressibel ist, verschwindet der ganze stabilisierende Term in Gl. (5.16). Damit der Term \mathbf{Q} identisch verschwindet muss $\mathbf{B} \times \delta\mathbf{V} = \nabla\delta\phi$ sein. Bedeutet aber, dass die Störung $\delta\phi$ konstant längs der Feldlinien ist d.h. $\mathbf{B} \cdot \nabla\delta\phi = 0$. Falls alle Feldlinien der toroidalen Konfiguration geschlossen sind, lässt sich diese Bedingung erfüllen, bei einer endlichen Verscherung ist dies aber nicht möglich und die einzige Lösung ist $\delta\phi = \delta\phi(\psi)$. Diese Störung führt aber zu $\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{V} = 0$ und damit nicht zur Instabilität.

³B.R. Suydam, *Proc. 2nd UN Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy*, Vol 31, p. 157, Geneva 1958

Kapitel 6

Magnetohydrodynamische Wellen

Wellen in einem Plasma entstehen wenn eine Auslenkung $\delta\mathbf{X}$ aus der Gleichgewichtslage sich wellenartig ausbreitet. Wegen der Kopplung zwischen Plasma und Magnetfeld - das Magnetfeld ist wegen der Flusserhaltung im Plasma "eingefroren" - bedeutet eine Verschiebung des Plasmas auch eine wellenförmige Deformation des Magnetfeldes. Im vorigen Kapitel waren die Gleichungen für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage abgeleitet worden. Die Gleichungen sind sowohl für instabil anwachsende Störungen als auch für oszillatorische Bewegungen des Plasmas gültig. Sie beschreiben damit auch Wellen in einem Plasma. Im folgenden sollen aber nur Wellen in einem homogenen Plasma behandelt werden, da sich hier die Differentialgleichungen auf algebraische Gleichungen reduzieren lassen. Im Rahmen des Einflüssigkeitsmodells ist die Gleichung für Wellen in einem homogenen Plasma

$$\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\mathbf{X} = -\mathbf{F}\delta\mathbf{X} \quad (6.1)$$

Dabei ist \mathbf{F} der im vorigen Kapitel abgeleitete Stabilitätsoperator. In einem homogenen Plasma ist die Stromdichte und der Druckgradient gleich null und der Stabilitätsoperator \mathbf{F} vereinfacht sich in diesem Fall zu einem Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Mit dem Wellenansatz $\delta\mathbf{X} = \delta\mathbf{X}_0 \exp(i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$ erhält man dann ein homogenes algebraisches System

$$\rho_0 \omega^2 \delta\mathbf{X}_0 = G \delta\mathbf{X}_0 \quad (6.2)$$

Die Lösbarkeitsbedingung führt auf die Dispersionsbeziehung

$$\|\rho_0 \omega^2 - G(\mathbf{k})\| = 0 \quad (6.3)$$

$\|\dots\|$ ist die Determinante. Im folgenden soll nun diese Dispersionsbeziehung abgeleitet werden. Dazu betrachten wir den Stabilitätsoperator in einem homogenen Plasma

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{X} = -\nabla(\gamma p \nabla \cdot \delta\mathbf{X}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{Q}); \quad \mathbf{Q} = \nabla \times (\delta\mathbf{X} \times \mathbf{B}) \quad (6.4)$$

In einem magnetfeldfreien Plasma gibt es auf der rechten Seite nur den ersten Term, welcher die Schallwellen in einem Plasma beschreibt. Ist das Magnetfeld endlich, aber der Plasmadruck und damit die Schallwellen vernachlässigbar, dann breiten sich Alfvén-Wellen aus. Diese Wellen sind ein charakteristische Plasmaerscheinung, es gibt sie in keinem anderen Medium. Mit dem obigen Fourieransatz wird der Operator (6.4)

$$\mathbf{F}\delta\mathbf{X} = -i\mathbf{k}(\gamma p \mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{X}) + \mathbf{B} \times (i\mathbf{k} \times \mathbf{Q}); \quad \mathbf{Q} = i\mathbf{k} \times (\delta\mathbf{X} \times \mathbf{B}) \quad (6.5)$$

Um die Untersuchung zu vereinfachen wird das Koordinatensystem so gewählt, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt und die Form $\mathbf{B} = \{0, 0, B_0\}$ hat. Weiterhin wird es so gedreht, dass der Wellenvektor die Form $\mathbf{k} = \{0, k_\perp, k_\parallel\}$ annimmt. Mit dieser Wahl des Koordinatensystems wird die Matrix G

$$G = \begin{pmatrix} V_A^2 k_\parallel^2 & 0 & 0 \\ 0 & V_A^2 k_\parallel^2 + (V_A^2 + V_s^2) k_\perp^2 & V_s^2 k_\perp k_\parallel \\ 0 & V_s^2 k_\perp k_\parallel & V_s^2 k_\parallel^2 \end{pmatrix}$$

Dabei ist die $V_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ die Schallgeschwindigkeit und $V_A^2 = B_0^2 / \mu_0 \rho_0$ die Alfvén-Geschwindigkeit. Die Dispersionsbeziehung lautet damit

$$(V_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) \left((V_A^2 k_{\parallel}^2 + (V_A^2 + V_s^2) k_{\perp}^2 - \omega^2) (V_s^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) - V_s^4 k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 \right) = 0 \quad (6.6)$$

Dies ist die gewünschte Dispersionsbeziehung zwischen dem Wellenvektor und der Frequenz ω der Wellen. Als Polynom 3. Ordnung in ω^2 hat die Dispersionsbeziehung 3 Lösungen, d.h. es gibt drei Wellentypen. Ausser den Schallwellen gibt es im Plasma noch zwei Arten von Alfvénwellen, die Shear-Alfvénwelle und die Kompressions-Alfvénwelle.

6.1 Schallwellen

In einem magnetfeldfreien Plasma kann es nur Schallwellen geben und die Dispersionsbeziehung lautet in diesem Fall

$$(V_s^2 k_{\perp}^2 - \omega^2) \left((V_s^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) - V_s^4 k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 \right) = 0 \quad (6.7)$$

Die Phasengeschwindigkeit der Schallwelle ist $\omega/k = V_s$. Schallwellen sind Longitudinalwellen, was man auf folgende Weise beweisen kann: Die transformierte Wellengleichung lautet

$$\rho_0 \omega^2 \delta \mathbf{X} = \mathbf{F} \delta \mathbf{X} = i \mathbf{k} (\gamma p \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X}) \quad (6.8)$$

Daraus folgt $\delta \mathbf{X} \times \mathbf{k} = 0$, d.h. der Wellenvektor \mathbf{k} ist zur Auslenkung $\delta \mathbf{X}$ parallel. In einem Plasma mit endlichem Magnetfeld werden die Verhältnisse komplizierter, dann kann es auch Transversalwellen geben.

6.2 Alfvénwellen

Um die Natur der Alfvénwellen zu verstehen, betrachten wir zuerst ein Plasma mit vernachlässigbarem Druck, d.h. wir vernachlässigen die Schallwellen. Dann vereinfacht sich die Dispersionsbeziehung zu

$$(V_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) \left(V_A^2 (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) - \omega^2 \right) = 0 \quad (6.9)$$

Die Dispersionsbeziehung zerfällt in ein Produkt von zwei Termen. Es gibt damit zwei unabhängige Wellen, die Shear-Alfvénwelle und die Kompressions-Alfvénwelle. Die Shear-Alfvénwelle hat die Dispersionsbeziehung

$$(V_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) = 0 \quad (6.10)$$

Bezeichnen wir mit θ den Winkel zwischen Magnetfeld und Wellenvektor, dann ist die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\omega}{k} = \pm V_A \cos \theta \quad (6.11)$$

Die Shear-Alfvénwelle breitet sich vorwiegend parallel zum Magnetfeld aus, senkrecht zum Magnetfeld gibt es keine Ausbreitung der Welle. Die zweite Lösung ist die Kompressions-Alfvénwelle mit der Dispersionsbeziehung

$$\left(V_A^2 (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) - \omega^2 \right) = 0 \quad (6.12)$$

Die Phasengeschwindigkeit der Kompressionswelle ist die Alfvéngeschwindigkeit. Sie ist für alle Richtungen gleich. Die Gruppengeschwindigkeit der Alfvénwellen ist gleich ihrer Phasengeschwindigkeit, d.h. die Alfvénwellen transportieren Energie. Ausserdem sind die Alfvénwellen Transversalwellen, was aus $\nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{B} = 0$ folgt.

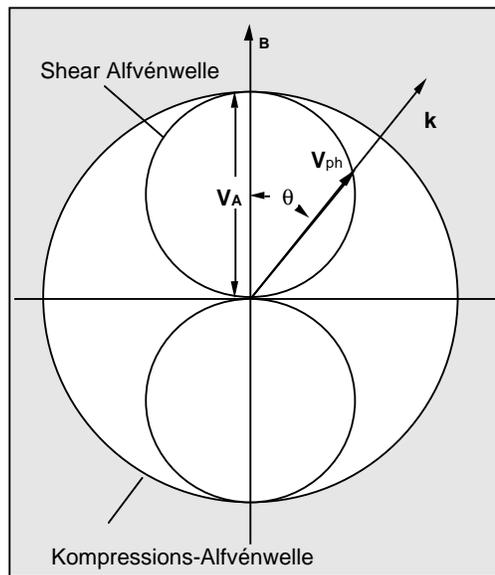


Abbildung 6.1: Das Bild zeigt das Polardiagramm der Phasengeschwindigkeit in einer k_{\perp}, k_{\parallel} -Ebene. Bei Ausbreitung parallel zum Magnetfeld sind beide Wellen identisch.

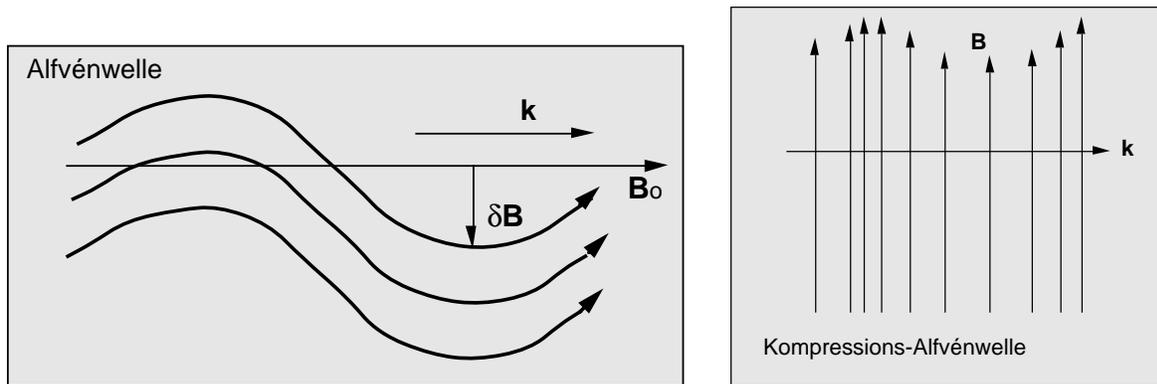


Abbildung 6.2: Links: Shear-Alfvénwelle mit paralleler Ausbreitung. Die Amplitude steht senkrecht auf dem homogenen Magnetfeld. Rechts: Kompressionswelle (senkrechte Ausbreitung). Die Magnetfeldlinien werden nicht "verbogen" sondern komprimiert, daher der Name Kompressionswelle.

6.3 Allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall eines druckbehafteten Plasmas gibt es eine Kopplung zwischen den Alfvénwellen und den Schallwellen. Es zeigt sich, dass die Shear-Alfvénwelle davon unberührt bleibt, die Schallwelle und die Kompressionswelle werden aber durch die Kopplung modifiziert. Es entstehen die sogenannte schnelle und die langsame magnetoakustische Welle (fast and slow magneto-acoustic wave). Die Dispersionsbeziehung zerfällt in ein Produkt und man erhält zwei unabhängige Wellen. Für die Shear-Alfvénwelle lautet die Dispersionsbeziehung wieder $(V_A^2 k_{\parallel}^2 - \omega^2) = 0$. Die Eigenschaften dieser Welle sind bereits oben geschildert worden, sie werden durch den Druck nicht verändert. Der zweite Faktor der Dispersionsbeziehung liefert

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (V_A^2 + V_s^2) + V_s^2 V_A^2 k^4 \cos^2 \theta = 0 \quad (6.13)$$

mit den Lösungen

$$\frac{\omega}{k} = \pm \left[\frac{1}{2} ((V_A^2 + V_s^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{V_s^4 + V_A^4 - 2V_s^2 V_A^2 \cos 2\theta}) \right]^{0.5} \quad (6.14)$$

Das Pluszeichen entspricht der schnellen magnetoakustischen Welle und das Minuszeichen der langsamen magnetoakustischen Welle (Fast wave, slow wave). Im Grenzfall $B \rightarrow 0$ (verschwindendes Magnetfeld) geht die schnelle magnetoakustische Welle in die Schallwelle über. Die langsame magnetoakustische Welle verschwindet, ebenso die Shear-Alfvénwelle. In dem anderen Grenzfall des drucklosen Plasmas wird aus der schnellen magnetoakustischen Welle die Kompressionswelle. Die Shear-Alfvénwelle bleibt unverändert.

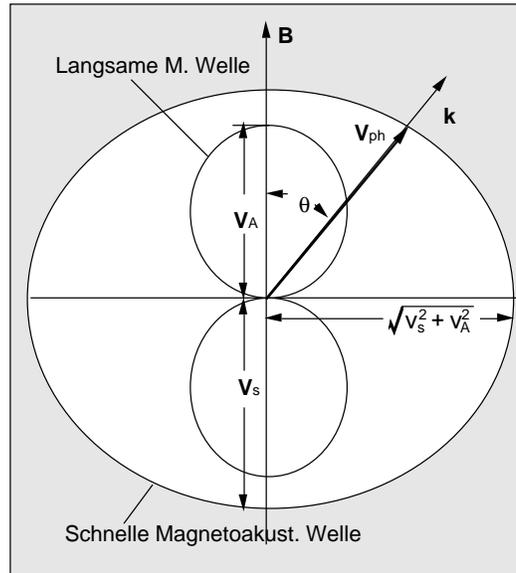


Abbildung 6.3: Polardiagramm der magnetoakustischen Wellen

MHD-Wellen treten im Plasma auf, wenn ein geeigneter Anregungsmechanismus vorhanden ist. In einem Laborplasma können Alfvénwellen z.B. durch schnelle Teilchen bei der Neutralteilchenheizung angeregt werden. In einem Fusionsplasma übernehmen Alphateilchen diese Funktion und regen diese Wellen an. Weiterhin gibt es MHD-Wellen in der Sonnenatmosphären, wo sie zum Energietransport beitragen können. Es wird vermutet, dass die Aufheizung der Korona auf MHD-Wellen zurückzuführen ist.