Nova acta Leopoldina NF *63*, Nr. 272, 61–77 (1990)

Axiome, Definitionen, Begriffe in der Mathematik

von Friedrich HIRZEBRUCH (Bonn)

Mitglied der Akademie

Mit 6 Abbildungen und 1 Tabelle

Axiome stehen am Anfang einer mathematischen Theorie. Die Sätze der Theorie ergeben sich aus den Axiomen durch logische Folgerungen. Die Axiome können damit als das Elementare einer Theorie erscheinen, und so ist die Tagungsleitung darauf gekommen, mich – zum Generalthema passend – zu diesem Vortrag über Axiomatik einzuladen. Allerdings bin ich ein Mathematiker, der sich für Axiomatik nicht systematisch, sondern nur manchmal im Rahmen seiner Arbeit an konkreten Problemen interessiert. Statt allgemeiner Erörterungen über das weitgespannte Thema will ich deshalb versuchen, an Beispielen aus Geometrie und Gruppentheorie das Thema zu diskutieren.

Der vorliegende Text schließt sich (abgesehen von einigen Ergänzungen) eng an den Vortrag an, in dem bei der vorgegebenen Zeit auf manches verzichtet werden mußte. Insbesondere bin ich in gar keiner Weise auf philosophische und grundlagentheoretische Fragen eingegangen.

1. Grundlagen der Geometrie

Diejenige Geometrie, die unserer Anschauung von dem 3-dimensionalen Raum, in dem wir leben, am ehesten entspricht, wurde schon von EUKLID (um 300 v. Chr.) axiomatisch behandelt und heißt nach ihm EUKLIDische Geometrie. HILBERT (1899) hat in seinen *Grundlagen der Geometrie* die Axiomatik des 3-dimensionalen Raumes neu begründet. Sehen wir uns einen Abschnitt der Einleitung seines Buches an:

> »So fängt denn alle menschliche Erkenntnis
> mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen
> und endigt mit Ideen.
>
> KANT, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T. 2. Abt. 2.

Einleitung

Die Geometrie bedarf – ebenso wie die Arithmetik – zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen *Axiome* der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit EUKLID in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus.«

Bevor HILBERT die Axiome formuliert, erklärt er, daß wir uns 3 verschiedene Systeme von Dingen denken, die Punkte, Geraden und Ebenen genannt werden. Er schreibt:

»Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie ›liegen‹, ›zwischen‹, ›kongruent‹; die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die Axiome der Geometrie.«

HILBERT teilt die Axiome in 5 Gruppen ein:

I. Axiome der Verknüpfung
II. Axiome der Anordnung
III. Axiome der Kongruenz
IV. Axiom der Parallelen
V. Axiome der Stetigkeit.

Die Gruppe I betrifft nur die Verknüpfung (Inzidenzen), das sind die Beziehungen: Der Punkt A liegt auf der Geraden a, der Punkt A liegt auf der Ebene α, die Gerade a liegt auf der Ebene α.

Beispiele von Axiomen der Gruppe I sind:
Zu zwei Punkten A und B gibt es genau eine Gerade a, so daß A und B auf a liegen.

Zu 3 nicht auf einer Geraden liegenden Punkten A, B, C gibt es genau eine Ebene α, so daß A, B und C auf α liegen.

Die Axiome der Anordnung und der Stetigkeit beschreiben u. a. die anschauliche Vorstellung, die wir von einer Geraden haben. Sie ermöglichen es im Endeffekt, die Punkte einer Geraden eineindeutig den reellen Zahlen zuzuordnen. Die Axiome der Kongruenz führen zur Strecken- und Winkelmessung.

Das Parallelaxiom lautet bei HILBERT wie folgt:

»IV (EUKLIDisches Axiom). Es sei a eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten Ebene höchstens eine Gerade, die durch A läuft und a nicht schneidet.«

Die HILBERTschen Axiome beschreiben nicht ein vorhandenes System, sondern stellen Forderungen an ein zu denkendes System dar. Wie kann man nun zeigen, daß die HILBERTschen Axiome erfüllt werden können? Wenn man weiß, was die reellen Zahlen sind, dann kann man leicht ein Modell finden. Man führt den $\mathfrak{R}^3$ ein, d. h. die Menge der Tripel (x_1, x_2, x_3) reeller Zahlen. Die Punkte unseres Modells sind eben diese Tripel. Die Lösungsmengen einer linearen Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0 \quad ,$$

(wo a_1, a_2, a_3, a_4 reelle Zahlen sind und a_1, a_2, a_3 nicht alle verschwinden) sind die Ebenen. Die Geraden lassen sich als die Durchschnitte von 2 nicht parallelen Ebenen erklären. Der Abstand zwischen 2 Punkten $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$ ist

$$\mathrm{d}(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \quad ,$$

und damit können die in den Kongruenzaxiomen vorkommenden Grundbegriffe (Kongruenz von Strecken und Winkeln) definiert werden.

Man kann also sagen, daß die HILBERTschen Axiome den Übergang zur analytischen Geometrie, zur rechnerischen Beschreibung zulassen. Aber zu welchen Zahlen kommt man? Die Anordnungsaxiome legen schon fest, daß man es nicht mit den komplexen Zahlen zu tun hat. Würde man aber statt der reellen Zahlen die rationalen Zahlen nehmen, also den $\mathfrak{Q}^3$ betrachten, der aus allen Tripeln rationaler Zahlen besteht, und für die Definition der Ebenen natürlich auch nur lineare Gleichungen mit rationalen Koeffizienten betrachten, dann erhielte man ein Modell, das alle HILBERTschen Axiome erfüllt bis auf das Stetigkeitsaxiom V2. Dieses Axiom lautet:

»V2 (Axiom der linearen Vollständigkeit). Das System der Punkte einer Geraden mit seinen Anordnungs- und Kongruenzbeziehungen ist keiner solchen Erweiterung fähig, bei welcher die zwischen den vorigen Elementen bestehenden Beziehungen sowie auch die aus den Axiomen I–III folgenden Grundeigenschaften der linearen Anordnung und Kongruenz, und V1 erhalten bleiben.«

Damit scheidet $\mathfrak{Q}^3$ als Modell aus, denn man kann es zum $\mathfrak{R}^3$ erweitern. Tatsächlich ist der Raum $\mathfrak{R}^3$ bis auf Isomorphie das einzige Modell der HILBERTschen Axiome. Um eine Isomorphie zwischen irgendeinem Modell und dem $\mathfrak{R}^3$ herzustellen, muß man einen Punkt als Nullpunkt auszeichnen und in ihm drei Strecken gleicher Länge ansetzen, die paarweise aufeinander senkrecht stehen (Einführung von drei Koordinatenachsen).

In der Vorlesung des 1. Semesters (Infinitesimalrechnung I) werden meistens die reellen Zahlen axiometrisch eingeführt.

Zunächst definiert man, was ein Körper ist. Ein Körper K ist eine Menge mit zwei ausgezeichneten Elementen 0, 1, in der die Rechenoperationen der Addition und Multiplikation eingeführt sind, für die die üblichen Axiome gelten: die kommutativen Gesetze

$a+b=b+a$, $a \cdot b=b \cdot a$, die assoziativen Gesetze, das distributive Gesetz $a \cdot (b+c)=ab+ac$ und die Durchführbarkeit der Subtraktion und Division. Dann kommen Anordnungsaxiome hinzu (angeordneter Körper) und schließlich ein Vollständigkeitsaxiom, das man ähnlich wie HILBERTS Axiom V2 der linearen Vollständigkeit formulieren könnte; aber man möchte doch nicht gern ein »Axiom über die übrigen Axiome« haben, und deshalb gibt man axiomatisch eine Eigenschaft an, die die reellen Zahlen charakterisiert, wie z. B. die Eigenschaft vom DEDEKINDschen Schnitt (DEDEKIND 1892):

»Zerfällt das System $\mathfrak{R}$ aller reellen Zahlen in zwei Klassen A_1, A_2 von der Art, daß jede Zahl a_1 der Klasse A_1 kleiner ist als jede Zahl a_2 der Klasse A_2, so existiert eine und nur eine Zahl a, durch welche diese Zerlegung hervorgebracht wird.«

Aber existieren nun die reellen Zahlen?

Der »naive« Mathematiker bejaht diese Frage, denn sie lassen sich »konstruieren« aus den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., von denen man leicht zu den ganzen Zahlen, ..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ... kommt. Die rationalen Zahlen werden als Brüche ganzer Zahlen eingeführt und die reellen Zahlen, z. B. nach DEDEKIND als Schnitte im Bereich der rationalen Zahlen. Die EUKLIDische Geometrie (HILBERTsche Axiome) existiert also und ist widerspruchsfrei, weil es den $\mathfrak{R}^3$ als Modell gibt.

In der anderen Vorlesung des 1. Semesters (Lineare Algebra I) werden Vektorräume über einem beliebigen Körper K betrachtet, insbesondere auch der $\mathfrak{R}^3$, und darin EUKLIDische Geometrie betrieben. Aber das Verständnis für die Geometrie geht so oft verloren. Die HILBERTschen Axiome sind nahe an der Anschauung. Sie versuchen den Raum zu beschreiben, »in dem wir leben«, und es ist eine fundamentale Erkenntnis, daß man von diesen Axiomen aus zum $\mathfrak{R}^3$ kommt und damit auch eine rechnerische Beschreibung unseres Anschauungsraumes erhält. Wie nahe sie bei der naturwissenschaftlichen Realität ist, das ist dann eine andere Frage.

Wir haben bereits durch Angabe des »unvollständigen Modells« $\mathfrak{Q}^3$ gesehen, daß das Axiom V2 der linearen Vollständigkeit nicht aus den übrigen HILBERTschen Axiomen abgeleitet werden kann. Seit fast 2 Jahrtausenden war das Parallelenpostulat umkämpft. Ist das Axiom IV der Parallelen (EUKLIDisches Axiom) aus den übrigen Axiomen ableitbar? Gibt es ein Modell, das allen Axiomen genügt, bis auf Axiom IV, das falsch wird? Die 2. Frage ist zu bejahen, also die 1. zu verneinen: Es gibt eine nicht-EUKLIDische Geometrie. Wir wollen dies nur für die ebene Geometrie diskutieren, die HILBERTschen Axiome also nur für eine einzelne Ebene betrachten. Die Axiome betreffen dann nur die Punkte und Geraden dieser Ebene. Für die Geschichte der nicht-EUKLIDischen Geometrie verweise ich auf das schöne Buch unseres Akademiemitgliedes REICHARDT (1985) *Gauß und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie.* Von besonderer Bedeutung waren hierbei: Carl Friedrich GAUSS (1777−1855), Nikolai I. LOBATSCHEWSKI (1792−1856) und János BOLYAI (1802−1860).

Wir beschreiben jetzt ein Modell der nicht-EUKLIDischen Geometrie nach A. CAYLEY (1821−1895) und F. KLEIN (1849−1925), das in der EUKLIDischen Ebene realisiert wird. Schon früher hatte E. BELTRAMI (1835−1900) ein verwandtes Modell angegeben.

Wir betrachten in der EUKLIDischen Ebene einen Kreis. Die Punkte unserer Geometrie sind die Punkte im Inneren dieses Kreises, die Geraden sind die Geraden der EUKLIDischen Geometrie, die einen nicht-leeren Durchschnitt mit dem Innern des Kreises haben. In der Abb. 1 sind 5 Geraden eingezeichnet, die Geraden a_1 und a_2 schneiden sich im Punkte A, sonst gibt es zwischen den 4 schwarz durchgezeichneten Geraden keinen Schnittpunkt.

Die Axiome der Verknüpfung (I) sind offensichtlich erfüllt. Um den Axiomen der Kongruenz (II) einen Sinn zu geben, müssen die Grundbegriffe Kongruenz von Strecken und

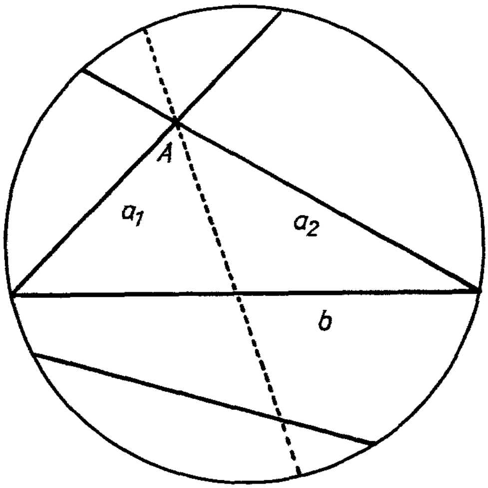

Abb. 1

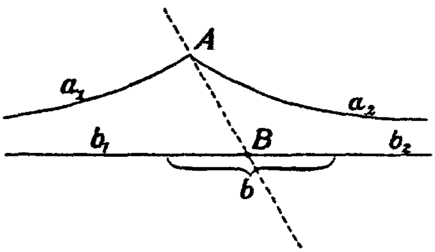

Abb. 2

Winkeln erklärt sein; dies kann durch eine Längen- und Winkelmessung erfolgen, die von F. KLEIN mit Mitteln der projektiven Geometrie eingeführt wird. Eine Gerade läuft von einem Randpunkt des Kreises zu einem anderen Randpunkt. Die beiden Randpunkte sind keine Punkte der nicht-EUKLIDischen Geraden. Die Punkte zwischen den Randpunkten entsprechen mittels des Messens eineindeutig den reellen Zahlen, sobald man 0 und 1 festgelegt hat. Die Winkelsumme in einem Dreieck ist kleiner als 180°. Die Dreiecksseiten sind geradlinig auch im EUKLIDischen Sinne, jedoch dürfen die Winkel nicht EUKLIDisch gemessen werden. Alle Axiome gelten, nur das Parallelenaxiom nicht. Es gilt jedoch – im Gegensatz zur EUKLIDischen Geometrie – folgendes (siehe Abb. 1; Formulierung und Abb. 2 nach HILBERT):

»IV*. Ist b eine beliebige Gerade und A ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so gibt es stets durch A zwei Halbgerade a_1, a_2, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die Gerade b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1, a_2 gebildeten Winkelraum gelegene, von A ausgehende Halbgerade die Gerade b schneidet.«

Ein weiteres Modell der nicht-EUKLIDischen Ebene verdankt man H. POINCARÉ (1854–1912). Punkte sind wieder die Punkte im Inneren eines Kreises der EUKLIDischen Ebene, Geraden jedoch die Kreisbögen, die senkrecht auf unserem Randkreis stehen. Die »Geraden« verlaufen von Randpunkt zu Randpunkt. Die Winkelmessung ist gleich der EUKLIDischen. Die Längenmessung wird in Kapitel 3 besprochen. In der folgenden berühmten von F. KLEIN und R. FRICKE stammenden Figur sieht man viele (schwarze und weiße) Dreiecke mit den Winkeln 90°, 60°, $\frac{1}{7} \cdot 180°$ (Winkelsumme ~175,71°). Die Dreiecke sind

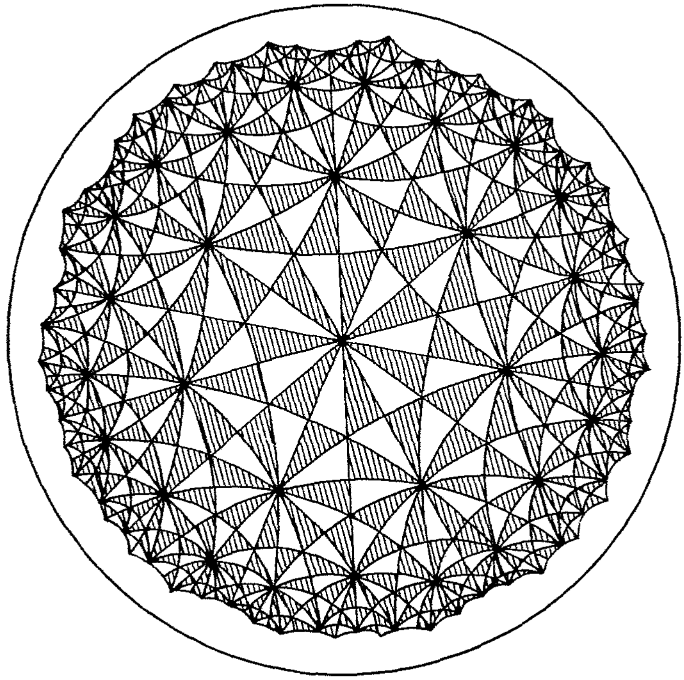

Abb. 3

alle kongruent. Wenn man in die »Nähe« (EUKLIDisch gemessen) des Randkreises kommt, werden sie EUKLIDisch immer kleiner.

Die Modelle nach CAYLEY-KLEIN und POINCARÉ sind isomorph. Es gibt bis auf Isomorphie nur ein Modell der nicht-EUKLIDischen Ebene, wenn man die HILBERTschen Axiome bis auf das Parallelaxiom IV beibehält, dieses aber durch IV* ersetzt.

Das HILBERTsche Axiomensystem für die EUKLIDische Geometrie hat bis auf Isomorphie nur ein Modell. Das Axiomensystem für einen Körper hat viele Modelle. Die Körper der rationalen Zahlen, der reellen Zahlen, der komplexen Zahlen wurden schon erwähnt. Es gibt auch Körper mit endlich vielen Elementen, und zwar ist die Anzahl der Elemente immer eine Primzahlpotenz $q = p^n$. Für eine Primzahl p besteht der Körper $\mathfrak{F}_p$ von p Elementen aus den Restklassen der ganzen Zahlen modulo p. 2 Zahlen kommen in dieselbe Klasse, wenn sie bei Division durch p den gleichen Rest lassen. Für $p = 3$ werden die Restklassen durch 0, 1, 2 repräsentiert, und es ist z. B. $2 \cdot 2 = 1$. Der endliche Körper ist bis auf Isomorphie durch die Zahl q festgelegt. Die Klassifikation aller endlichen Körper ist damit erledigt.

Axiomensysteme sind nie willkürlich, sie können sich an der Anschauung orientieren oder entstehen aus mathematischer Erfahrung. Die Formulierung eines Axiomensystems stellt den Mathematiker vor die Fragen, welche mathematischen Objekte (Modelle) das System erfüllen (Klassifikation aller dieser Objekte) und welche mathematischen Objekte zwar nicht dieses, aber ein leicht abgeändertes System erfüllen. Mathematische Forschung darf man sich aber nun nicht so vorstellen, als würde der Mathematiker vor den Axiomen sitzen und einen Logikkalkül auf sie loslassen, um möglichst viele Folgerungen (Sätze) zu finden. Es kann sein, daß es nicht gelingt, einen Satz, der recht nahe an den Axiomen zu sein scheint, direkt zu beweisen. Nachdem man den Satz vermutet hat, muß man ihn vielleicht mit höheren Methoden, die einem ganz anderen Gebiet angehören, beweisen. Es kann auch passieren, daß man ihn erst mit Hilfe dieser höheren Methoden findet. Als Beispiel will ich einen Satz der ebenen Geometrie angeben, den ich vor einiger Zeit gefunden habe. Er ist elementar formulierbar, aber bis heute nicht elementar bewiesen worden.

2. *Ein Beispiel für das Zusammenwirken verschiedener mathematischer Gebiete*

Zunächst einige allgemeine Bemerkungen über Ebenen. Es sei K ein Körper. Dann bezeichnet K^2 die Menge aller Paare (x, y) von Elementen aus K. Geraden in K^2 sind die Lösungsmengen linearer Gleichungen

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{mit} \quad a,\ b,\ c \in K \ ,$$

wo a, b nicht beide gleich 0 sind. Es gelten dann die Inzidenzaxiome und das Parallelenaxiom. Hat man umgekehrt eine Ebene mit Punkten und Geraden, in der diese Axiome und darüber hinaus die Schließungssätze von DESARGUES und PAPPOS gelten, dann folgt, daß man Koordinaten in einem Körper K einführen kann und es sich um die Ebene K^2 handelt. Im Falle der HILBERTschen Axiome ist $K = \mathfrak{R}$, und man kann die Sätze von DESARGUES und PAPPOS mittels der Kongruenzaxiome beweisen.

Betrachten wir nun die Ebene K^2 und in ihr eine endliche Menge M von k Punkten. Durch je 2 Punkte von M verläuft eine Gerade. Also bestimmt M insgesamt $\frac{h\,(K-1)}{2}$ Geraden, es sei denn auf gewissen Geraden liegen r Punkte von M (mit $r \geq 3$). Es sei t_r (für $r \geq 2$) die Anzahl der Geraden von K^2, auf der genau r Punkte von M liegen. Es gilt dann:

$$k(k-1)/2 = \sum_{r \geq 2} t_r \cdot r(r-1)/2 \ .$$

Von James Joseph SYLVESTER (1814–1897) stammt die Frage:

Es sei M eine endliche Menge von Punkten der Ebene K^2, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Gilt dann stets $t_2 > 0$, d. h., gibt es wenigstens eine Gerade, auf der genau 2 Punkte von M liegen?

Die Frage ist sicherlich zu verneinen, wenn K ein endlicher Körper mit q Elementen ($q \neq 2$) ist. Auf jeder Geraden von K^2 liegen nämlich genau q Punkte. Nimmt man für M die ganze Ebene K^2, dann ist $t_2 = 0$, ja sogar $t_r = 0$ für $r \neq q$, und $t_q = q^2 + q$.

SYLVESTER hat die Frage sicherlich gestellt, weil er wußte, daß sie für $K = \mathfrak{C}$ zu verneinen ist, und vermutete, daß sie für $K = \mathfrak{R}$ zu bejahen ist. In der komplexen Ebene $\mathfrak{C}^2$ kann man die 9 Wendepunkte einer allgemeinen kubischen Kurve betrachten. Sie zeigen ein Verhalten, wie die 9 Punkte von K^2, wenn K der Körper von 3 Elementen ist ($t_2 = 0$, $t_3 = 12$, $t_r = 0$ sonst). Anschaulich kann man sich diese 9 Punkte kaum vorstellen. Schließlich ist $\mathfrak{C}^2$ ein 4dimensionaler Raum, denn eine komplexe Zahl wird durch 2 reelle Zahlen gegeben. In der reellen Ebene gibt es ein solches Arrangement von 9 Punkten nicht, eine kubische Kurve hat dort höchstens 3 Wendepunkte. Nun zur Anwendung zurück und einige Beispiele von Arrangements endlich vieler Punkte in der reellen Ebene.

In Abbildung 4 sind die Geraden mit genau 2 Punkten nicht eingezeichnet; in diesen Beispielen ist $t_r = 0$ für $r > 3$.

Die SYLVESTERsche Vermutung für die Ebene $\mathfrak{R}^2$ läßt sich für eine endliche Menge von k Punkten mathematisch knapp so formulieren:

$$t_k = 0 \Rightarrow t_2 > 0 \ .$$

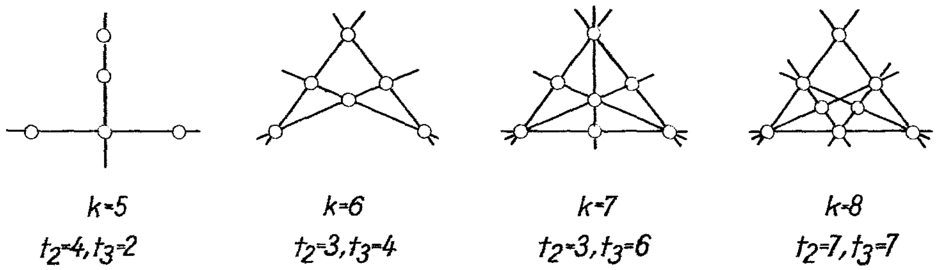

Abb. 4

Sie wurde erst um 1940 auf verschiedene Weisen von T. GALLAI und E. MELCHIOR bewiesen. MELCHIOR dualisiert das Problem (Punkte werden durch Geraden, Geraden durch Punkte ersetzt) und betrachtet die von Geraden, welche den Punkten der ursprünglich gegebenen endlichen Menge entsprechen, erzeugte Zellenzerlegung der reellen projektiven Ebene und verwendet topologische Hilfsmittel (Eigenschaften der EULER-POINCARÉschen Charakteristik).

Ich habe vor einigen Jahren folgenden Satz bewiesen:

Es sei M eine endliche Menge von Punkten der komplexen Ebene $\mathfrak{C}^2$. Es soll keine Gerade geben, auf der alle Punkte von M bis auf höchstens einen Punkt liegen. Dann gilt:

$$t_2 + \frac{3}{4} \cdot t_3 \geq k \ .$$

Diese Ungleichung gilt auch in der reellen Ebene und in jeder Ebene K^2, wo K ein Unterkörper von $\mathfrak{C}$ ist. Sie kann trotz ihres elementaren Charakters – man braucht zu ihrer Formulierung nur die Begriffe Punkt, Gerade und die Inzidenzbeziehung, daß ein Punkt auf einer Geraden liegt – bis heute nicht elementar bewiesen werden, auch für die reelle Ebene nicht. Auch für das folgende Korollar kennt man keinen direkten Beweis:

Es sei M eine endliche Menge von Punkten in $\mathfrak{C}^2$, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Wenn auf jeder Geraden durch 2 Punkte von M ein weiterer Punkt von M liegt, dann gibt es wenigstens eine Gerade, auf der genau 3 Punkte von M liegen.

KELLY (1986) hat kürzlich mit Hilfe dieses Korollars ein Problem von J.-P. SERRE aus dem Jahre 1966 gelöst. Er beweist nämlich:

Es sei M eine endliche Menge von Punkten im Raume $\mathfrak{C}^3$. Wenn auf jeder Geraden durch 2 Punkte von M ein weiterer Punkt von M liegt, dann liegt M in einer Ebene.

Wie beweist man nun die Ungleichung $t_2 + \frac{3}{4} t_3 \geq k$? Durch Dualisierung erhält man aus M eine Menge von Geraden in der komplexen Ebene. Mittels verzweigter Überlagerungen der projektiv abgeschlossenen Ebene, die längs dieser Geraden verzweigt sind, kann man gewisse algebraische Flächen konstruieren und deren charakteristische Klassen c_1, c_2 berechnen. Die berühmte Ungleichung $c_1^2 \leq 3c_2$ (MIYAOKA 1977, YAU 1977), auf diese Flächen angewandt, führt zu dem Resultat. Die Ungleichung $c_1^2 \leq 3c_2$ kann für Flächen vom allgemeinen Typ, deren kanonisches Bündel »ample« ist, so bewiesen werden: Nach T. AUBIN and S.-T. YAU existiert auf der Fläche eine EINSTEIN-KÄHLER-Metrik, die man durch die sehr schwierige Lösung einer globalen nicht-linearen partiellen Differentialgleichung vom Typ MONGE-AMPÈRE erhält. Bezüglich dieser Metrik ist dann $3c_2 - c_1^2$ ein

Integral über die ganze Fläche mit positivem Integranden. Für die Literatur verweise ich auf das demnächst im Vieweg-Verlag erscheinende Buch »Geradenkonfigurationen und algebraische Flächen« von G. BARTHEL, F. HIRZEBRUCH und T. HÖFER.

Man sieht, ein elementarer geometrischer Satz wird keineswegs innerhalb der Elementargeometrie bewiesen, sondern durch ein Zusammenspiel mehrerer Gebiete der Mathematik, weit entfernt von den der Anschauung nahen Axiomen.

KELLY (1986) schreibt:

»As satisfying as this proof might be to devotees of the theory of characteristic classes, a confirmed configurationalist cannot but feel that HIRZEBRUCH's key inequality should be susceptible to a much more direct derivation.«

3. *Mannigfaltigkeiten*

Die HILBERTschen Axiome charakterisieren den 3-dimensionalen EUKLIDischen Raum, entsprechende Axiome könnte man für den n-dimensionalen EUKLIDischen Raum aufstellen. Das Standard-Modell ist dann der $\mathfrak{R}^n$; er besteht aus allen n-Tupeln reeller Zahlen mit dem durch

$$d(x,y)^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2$$

gegebenen Abstand $d(x,y)$ zweier Punkte x, y.

Der $\mathfrak{R}^n$ ist das einfachste Beispiel einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit, dabei wird der Abstandsbegriff zunächst außer acht gelassen. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit wird in den heutigen Vorlesungen etwa so definiert: Sie ist ein topologischer Raum, der mit offenen Mengen überdeckt ist, in denen man Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ einführen kann, deren Wertebereich eine offene Menge des $\mathfrak{R}^n$ ist. Man sagt auch, daß die Mannigfaltigkeit mit lokalen Koordinatensystemen überdeckt ist. 2 Koordinatensysteme können einen gemeinsamen Definitionsbereich haben. Man verlangt dann, daß der Übergang von einem Koordinatensystem zum anderen durch stetige Funktionen erfolgt (Begriff der topologischen Mannigfaltigkeit) bzw. durch beliebig häufig differenzierbare Funktionen (Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeit). Die $(n-1)$-dimensionale Sphäre (das ist der Rand der n-dimensionalen Kugel im EUKLIDischen $\mathfrak{R}^n$) kann man zum Beispiel mit 2 Koordinatensystemen überdecken. Das Studium der Mannigfaltigkeiten hat in den letzten 30 Jahren sensationelle Ergebnisse gebracht. Nach J. MILNOR (1956) gibt es 7-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die zur 7-dimensionalen Sphäre topologisch, aber nicht differenzierbar äquivalent sind; nach M. H. FREEDMAN (unter Verwendung der Ergebnisse von S. K. DONALDSON) gibt es 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die topologisch, aber nicht differenzierbar, zum $\mathfrak{R}^4$ äquivalent sind (DONALDSON und FREEDMAN erhielten auf dem Internationalen Mathematikerkongreß in Berkeley 1986 die FIELDS-Medaille).

Der Begriff der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit stammt von Bernhard RIEMANN (1826–1866). In seinem Habilitationsvortrag *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Philosophische Fakultät Göttingen, 10. Juni 1854, GAUSS war anwesend) sagt er zum Beispiel, daß die Ortsbestimmung in einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Größenbestimmungen zurückgeführt wird. Er läßt aber auch unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten zu:

»Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeit von Grössenbestimmungen erfordert. Solche

Mannigfaltigkeit bilden z. B. die möglichen Bestimmungen einer Fuction für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur u. s. w.«

In den letzten Jahren wurden die folgenden unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten von Physikern und Mathematikern häufig betrachtet:

Es sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Schleife (»loop«) in M ist dann eine differenzierbare Abbildung der Kreislinie in M. Man kann auch sagen, daß eine Schleife eine periodische Funktion f einer reellen Veränderlichen mit Werten in M ist (Periode 2π). Ist $M = \mathfrak{R}$, dann kann man die Schleife f durch die FOURIERsche Reihe

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

beschreiben, deren Koeffizienten als Koordinaten in der unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit aller Schleifen auzusehen sind. Die Mannigfaltigkeit aller Schleifen in M wird mit LM bezeichnet (Schleifenraum, *loop space*).

In den Vorlesungen über Differentialgeometrie wird heute eine RIEMANNsche Metrik in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit etwa so definiert: Bezüglich eines Koordinatensystems $x_1, \ldots, x_n$ ist sie ein Ausdruck

$$(\mathrm{d}s)^2 = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} a_{ij}\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}) \ .$$

Die a_{ij} sind Funktionen von $x = (x_1, \ldots, x_n)$. An einer festen Stelle x ist (a_{ij}) eine positiv-definite quadratische Form, die die EUKLIDische Metrik im Tangentialraum von x definiert. An der Stelle x (aber i. a. nicht in der Umgebung von x) ist die Metrik zur EUKLIDischen Metrik in der Normalform

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x_1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x_n)^2$$

äquivalent. Zitieren wir einige Sätze aus RIEMANNS Habilitationsvortrag:

»Es folgt nun, nachdem der Begriff einer $n$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit construirt und als wesentliches Kennzeichen derselben gefunden worden ist, dass sich die Ortsbestimmung in derselben auf n Grössenbestimmungen zurückführen lässt, als zweite der oben gestellten Aufgaben eine Untersuchung über die Massverhältnisse, deren eine solche Mannigfaltigkeit fähig ist, und über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Massverhältnisse hinreichen.«

Für den EUKLIDischen Raum sagt er:

»Für den Raum wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Coordinaten ausdrückt, $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum (\mathrm{d}x)^2}$«,

und zum allgemeinen Fall:

»... ich beschränke mich daher auf die Mannigfaltigkeiten, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausgedrückt wird.«

RIEMANN weist darauf hin, daß es sich bei den $n(n+1)/2$ Funktionen a_{ij} wegen der möglichen Koordinatenwechsel eigentlich nur um $n(n-1)/2$ willkürliche Funktionen handelt. Er bespricht seine berühmte Krümmungstheorie. Für Flächen ($n = 2$) stammt der Krümmungsbegriff von GAUSS.

»Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen, zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen. Zu Beidem sind die Grundlagen enthalten in der berühmten Abhandlung des Herrn Geheimen Hofraths GAUSS über die krummen Flächen.«

Und an späterer Stelle:

»... wenn also das Krümmungsmass in jedem Punkte in $n \cdot \frac{n-1}{2}$ Flächenrichtungen gegeben wird, so werden daraus die Massverhältnisse der Mannigfaltigkeit sich bestimmen lassen, wofern nur zwischen diesen Werthen keine identischen Relationen stattfinden, was in der Tat, allgemein zu reden, nicht der Fall ist.«

RIEMANN bespricht auch die Metriken, deren Krümmungsmaß in jedem Punkt und in jeder Flächenrichtung den gleichen Wert α hat. Die RIEMANNsche Metrik schreibt sich dann so (RIEMANNS Schreibweise):

$$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2} \cdot \sqrt{\Sigma (\mathrm{d}x)^2} \; .$$

Für die nicht-EUKLIDische Ebene (POINCARÉsches Modell) benötigt man nur ein einziges Koordinatensystem x_1, x_2, und die Metrik ist

$$(\mathrm{d}s)^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2)\right)^{-2} ((\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2) \; .$$

Dabei ist α negativ, und der Radius des Kreises ist $2/\sqrt{-\alpha}$. Der Quotient von $(\mathrm{d}s)^2$ und $(\mathrm{d}x_1)^2 + (\mathrm{d}x_2)^2$ (EUKLIDische Metrik) geht nach unendlich, wenn man sich dem Randkreis nähert. Die Geraden der nicht-EUKLIDischen Geometrie sind die geodätischen Linien dieser Metrik konstanter negativer Krümmung.

Es ist allgemein bekannt, welche Rolle die RIEMANNsche Krümmungstheorie für die EINSTEINsche allgemeine Relativitätstheorie gespielt hat.

4. Gruppen

Beginnen wir mit dem »Erlanger Programm« von Felix KLEIN (Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen, 1872). Ich zitiere F. KLEIN (mit Einschluß einer Fußnote):

»Beliebig viele Transformationen des Raumes ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, dass jede Aenderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine Transformationsgruppe genannt werden. Begriffsbildung wie Bezeichnung sind herübergenommen von der Substitutionstheorie, in der nur an Stelle der Transformationen eines continuierlichen Gebietes die Vertauschungen einer endlichen Zahl discreter Grössen auftreten.«

KLEIN formuliert folgendes Problem:

»Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.«

Wir wollen diese Ideen kurz am Beispiel der ebenen projektiven Geometrie erläutern. Die (affine) Ebene K^2 bezüglich des Körpers K wurde im Kapitel 2 erwähnt. Die Geraden in K^2 kann man in »parallele Scharen« einteilen. 2 Geraden kommen in dieselbe Schar, wenn sie parallel sind. Für $a \in K$ hat man die Schar

$$y = ax + b \qquad (b \in K, \text{ beliebig}) \; .$$

Außerdem gibt es noch die Schar $x = c$. Die Scharen sind durch den »Anstieg« gegeben ($a \in K$ oder das Symbol ∞). Die projektive Ebene $P_2(K)$ entsteht, indem man zu K^2 die Menge $K \cup \{\infty\}$ der Scharen hinzufügt. Jede Gerade erhält einen weiteren Punkt, nämlich die durch sie repräsentierte Schar. Die Scharen selbst bilden eine Gerade. Trotz dieser unsymmetrischen Konstruktion ist $P_2(K)$ ganz homogen, alle Punkte sind gleichberechtigt, ebenso alle Geraden. Ohne Ausnahme gilt: Je 2 Punkte liegen auf genau einer Geraden, je 2 Geraden haben genau einen Punkt gemeinsam. Die Automorphismusgruppe G der projektiven Ebene besteht aus den »Transformationen« von $P_2(K)$, die Geraden in Geraden überführen und dabei die Inzidenzen erhalten. Wenn ein Punkt auf einer Geraden liegt, dann liegt auch der Bildpunkt auf der Bildgeraden. Man kann die Elemente von G durch (3×3)-Matrizen mit Koeffizienten in K beschreiben mit nicht verschwindender Determinante, wo 2 Matrizen projektiv gleich sind, wenn sie durch Multiplikation mit einem Element von K auseinander hervorgehen. Der Mathematiker notiert:

$$G = PGL_3(K) \qquad \text{(projektive allgemeine [»general«] lineare Gruppe).}$$

Für $K = \mathfrak{R}$ sei nun U die Untergruppe der Elemente von G, die einen vorgegebenen Vollkreis von $\mathfrak{R}^2$ in sich überführen. Was bleibt durch die Transformationen von U unverändert? Es ist die Längen- und Winkelmessung der nicht-EUKLIDischen Geometrie (Modell von CAYLEY-KLEIN). 2 Dreiecke dieser Geometrie sind kongruent, wenn sie durch eine zu U gehörige Transformation auseinander hervorgehen. Für das POINCARÉsche Modell betrachtet man den Kreis als Einheitskreis $|z| < 1$ der komplexen Zahlen. Die komplexen Zahlen werden um das Symbol ∞ zur komplexen projektiven Geraden erweitert, die Gruppe G wird erzeugt von den gebrochen linearen Transformationen und der Konjugation $z \to \bar{z}$, und $\bar{U}$ sei die Untergruppe von G, die $|z| < 1$ in sich überführt. Das ist die Automorphismengruppe der nicht-EUKLIDischen Geometrie (POINCARÉsches Modell). Die Gruppen U und $\bar{U}$ sind isomorph.

F. KLEIN hat bei seinem Programm meistens LIEsche Gruppen im Auge (Sophus LIE 1842 bis 1899); das sind selber Mannigfaltigkeiten, z. B. ist $G = PGL_3(\mathfrak{R})$ eine 8-dimensionale und U eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. (Die Mannigfaltigkeit aller glatten Kegelschnitte ist 5-dimensional.)

Wir werden im folgenden über endliche Gruppen sprechen. Sie traten ursprünglich als Substitutionsgruppen auf, d. h. als Untergruppen der Gruppe aller Vertauschungen von n Elementen. Es gibt bekanntlich $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ solche Vertauschungen (vgl. das erste Zitat aus KLEINS Programm). Jede endliche Gruppe kann bis auf Isomorphie so erhalten werden. Allmählich hat sich der abstrakte Gruppenbegriff entwickelt. Hier eine Liste der ersten großen Namen, die mit der Gruppentheorie verbunden werden können (nach Max KOECHER [1983]; KOECHER verweist für seine historischen Bemerkungen auf das Buch von H. WUSSING [1969]):

P. RUFFINI	(1765–1822)
J. L. LAGRANGE	(1736–1813)
C. F. GAUSS	(1777–1855)
A. L. CAUCHY	(1789–1857)
N. H. ABEL	(1802–1829)
H. GRASSMANN	(1809–1877)
E. GALOIS	(1811–1832)
A. CAYLEY	(1821–1895)
L. KRONECKER	(1823–1891)

Aus einer hundert Jahre alten Arbeit von Ferdinand Georg FROBENIUS (1849–1917) mit dem Titel »Neuer Beweis des SYLOWschen Satzes« zitiere sich hier die ersten 5 Zeilen und die Axiome für eine endliche Gruppe. (Der SYLOWsche Satz möge als Beispiel dienen, daß die Gruppentheorie auch schon vor 100 Jahren entwickelt war.)

»Den Satz von CAUCHY, dass jede Gruppe, deren Ordnung durch eine Primzahl p theilbar ist, Elemente der Ordnung p enthält (Exerc. d'analyse et de phys. math. tom. III, pag. 250), hat Herr SYLOW dahin verallgemeinert, dass eine Gruppe, deren Ordnung durch die νte Potenz einer Primzahl p theilbar ist, stets eine Untergruppe der Ordnung p^ν enthält (Math. Ann. Bd. 5).

Axiome

I. Je zwei Elemente A und B bestimmen in der angegebenen Reihenfolge eindeutig ein drittes, welches mit AB bezeichnet wird.
II. Aus jeder der beiden Gleichungen $AC = BC$ oder $CA = CB$ folgt A = B.
III. Für die Operation, durch welches AB aus A und B entspringt, gilt das associative Gesetz $(AB)C = A(BC)$, aber nicht nothwendig das commutative Gesetz $AB = BA$.
IV. Die Anzahl der Elemente ist endlich.«

Die Axiome I, II, III implizieren nicht, daß man in der Gruppe die Gleichungen $AX = B$ und $YA = B$ nach X bzw. Y auflösen kann. Jedoch folgt dies aus IV. Die Anzahl der Elemente heißt Ordnung der Gruppe.

Beispiele für endliche ABELsche Gruppen (d. h. Gruppen, in denen das kommunikative Gesetz gilt) sind die additive und die multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers, Beispiele für nicht-ABELsche Gruppen etwa die vorhin erwähnte Gruppe $PGL_3(K)$ für einen endlichen Körper K, die übrigens zu der Serie $PGL_n(K)$ von Gruppen gehört ($n \geq 1$; Automorphismen-

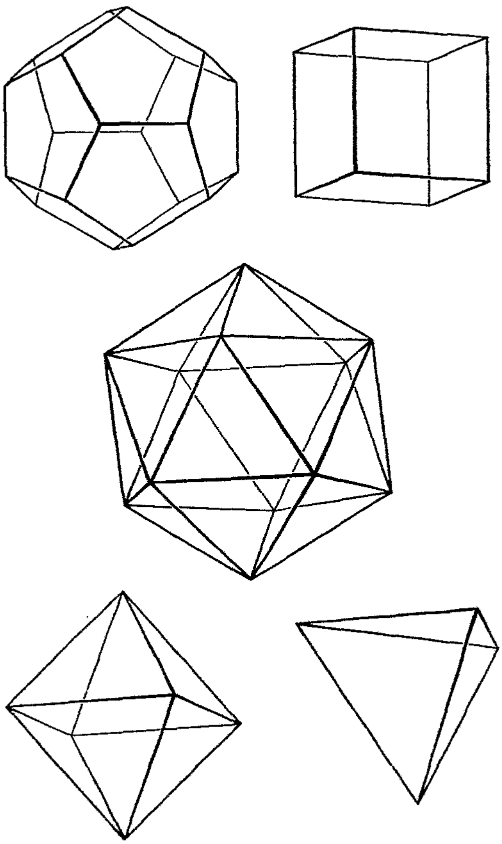

Abb. 5

gruppe des $(n-1)$-dimensionalen projektiven Raumes über K). Die Gruppe S_n aller Vertauschungen von n Objekten, die wir hier mit 1, ..., n bezeichnen wollen, ist nicht kommutativ für $n \geq 3$. In der Gruppe S_n kann man die Untergruppe A_n (alternierende Gruppe) derjenigen Vertauschungen betrachten, die die Reihenfolge für eine gerade Anzahl von Paaren (i, j) mit $i < j$ verändern. Die Gruppe A_n ist nicht-ABELsch für $n \geq 4$ und hat $n!/2$ Elemente.

Endliche Gruppen treten oft als Symmetriegruppen auf. Betrachten wir die 5 regulären Polyeder (Abbildung aus: HILBERT und COHN-VOSSEN [1932]).

Die Konstruktionen der 5 regulären Polyeder waren schon den griechischen Mathematikern bekannt. Sie sind in den Elementen des EUKLID dargestellt.

Die Symmetriegruppe eines solchen Polyeders besteht aus allen Drehungen um den Mittelpunkt des Polyeders, die das Polyeder in sich überführen. Jede Drehung – außer der identischen Abbildung – hat eine Achse und einen bestimmten Drehwinkel.

Oktaeder und Würfel sind zueinander dual, ebenso Dodekaeder und Ikosaeder. Die Symmetriegruppe braucht deshalb auch nur für Tetraeder, Würfel und Ikosaeder angegeben zu werden. Beim Tetraeder ist sie isomorph zu A_4 (Vertauschungen der 4 Eckpunkte), beim Würfel isomorph zu S_4 (Vertauschungen der 4 Hauptdiagonalen) und beim Ikosaeder isomorph zu A_5. Welche 5 Objekte werden beim Ikosaeder alternierend vertauscht? Antwort: Die 15 Kantenpaare können in 5 Teilmengen von 3 Kantenpaaren so zerlegt werden, daß die 3 Kantenpaare einer Teilmenge paarweise aufeinander senkrecht stehen (5 umschriebene Würfel).

Die projektive Ebene $P_2(\mathfrak{F}_q)$ über dem Körper $\mathfrak{F}_q$ mit q Elementen hat q^2+q+1 Punkte und q^2+q+1 Geraden. Die Automorphismengruppe ist $PGL_3(\mathfrak{F}_q)$, eine Gruppe der Ordnung $(q^2+q+1)(q^3-q)(q^3-q^2)$. Für $q=2$ hat man eine berühmte Gruppe der Ordnung 168, die oft von F. KLEIN betrachtet wurde.

Die Struktur der projektiven Ebene über $\mathfrak{F}_2$ von 7 Punkten und 7 Geraden stellt man nach Jacques TITS (Mitglied unserer Akademie) als einfachstes Beispiel aus seiner großen Theorie der Gebäude dar (Abb. 6).

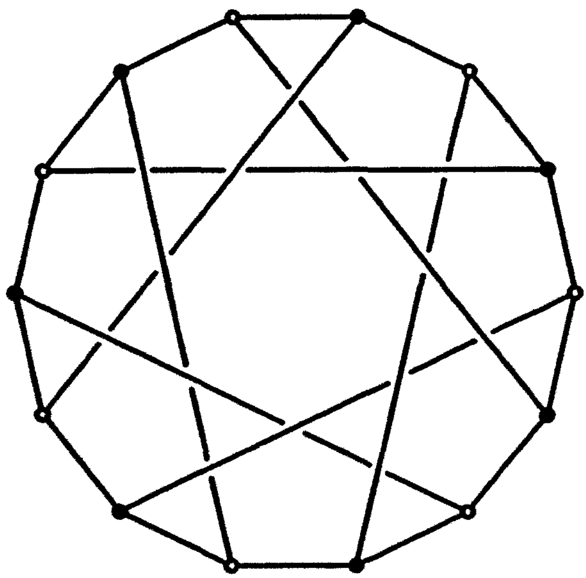

Abb. 6

Dies soll ein rein kombinatorisches Gebilde sein, nämlich ein Graph aus 14 Punkten und 21 Kanten, die gewisse Punkte verbinden. Die in der Figur vorhandenen Überschneidungspunkte von Kanten kommen in dem abstrakten Graphen nicht vor. Der Graph läßt sich nicht in die Ebene legen, ohne daß Kanten einander kreuzen. TITS kommt zu diesem Graphen wie folgt. Die 14 Punkte des Graphen repräsentieren die 7 Punkte und die 7 Geraden der projektiven Ebene. (In der Figur sieht man ein reguläres 14-Eck, in dem die Punkte abwechselnd Punkte und Geraden der projektiven Ebene repräsentieren.) Die Kanten sind die Inzidenzen. (Punkt liegt auf Gerade bzw. Gerade geht durch Punkt.) Jeder Punkt des Graphen ist mit 3 anderen Punkten verbunden, entsprechend der Tatsache, daß in der projektiven Ebene auf jeder Geraden 3 Punkte liegen und durch jeden Punkt 3 Geraden gehen.

Die Symmetriegruppe dieses Graphen hat die Ordnung 336. Die vorhin erwähnte Gruppe der Ordnung 168 besteht aus den Symmetrien des Graphen, die Punkte und Geraden im Sinne der projektiven Ebene nicht vertauschen. Man sieht sehr schön eine SYLOWsche Untergruppe der Ordnung 7. Andere Symmetrien sind »verborgen«. Man beachte, daß der Graph völlig homogen ist, z. B. sind alle Kanten gleichberechtigt.

Bei jedem Axiomensystem, das mathematisch interessant ist, sollte der Mathematiker die *Klassifikationsfrage stellen. Welche Modelle gibt es? Wie soll man alle endlichen Gruppen* klassifizieren? Die Bausteine sind die sogenannten einfachen Gruppen. Sätze der Gruppentheorie (SCHREIER, JORDAN-HÖLDER) zeigen, daß man die Klassifikation in gewissem Sinne auf einfache Gruppen zurückführen kann.

Eine endliche Gruppe G heißt einfach, wenn es keine die Gruppenoperationen respektierende Abbildung auf eine Gruppe gibt, deren Ordnung kleiner als die Ordnung von G, aber größer als 1 ist.

Für ABELsche Gruppen erhält man genau die cyklischen Gruppen von Primzahlordnung p (additive Gruppe des Körpers $\mathfrak{F}_p$).

Welche endlichen einfachen nicht-ABELschen Gruppen gibt es?

Dieses Problem wurde unter Beteiligung vieler Mathematiker gelöst. Ausgehend von einem Axiomsystem, das elementarer nicht sein könnte, sind die Mathematiker zu einem großartigen Resultat gelangt.

Zunächst gibt es gewisse unendliche Serien von einfachen Gruppen, wir haben die Serien $PGL_n(K)$ mit $n \geq 1$ und A_n $(n \geq 5)$ kennengelernt. Darüber hinaus gibt es sogenannte sporadische einfache Gruppen. Man kann 26 Gruppen konstruieren und beweisen, daß dies alle sind.

In der Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* Vol. 2 (1980) gibt J. H. CONWAY einen Überblick über die Entwicklung. Daraus zeige ich die Liste »The 26 known sporadic groups« (Tab. 1).

CONWAY erwähnt, daß seit den Entdeckungen von Émile MATHIEU (ab 1861) etwa 100 Jahre vergingen, bis die nächste sporadische Gruppe gefunden wurde. Über die Zeit der neuen Entdeckungen schreibt CONWAY:

»A much-noticed feature of this period was the fact that groups, like the physicists' elementary particles, were often predicted to exist by one author, and only later constructed, often with much difficulty, by another.

Certainly the most notorious of these predictions was the one made independently by Bernd FISCHER and Bob GRIESS in 1973, of a group nicknamed (by me!) the MONSTER, whose order is

$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$
$= 808\,017\,424\,794\,512\,875\,886\,459\,904\,961\,710\,757\,005\,754\,368\,000\,000\,000$.«

Tabelle 1 Die 26 bekannten sporadischen Gruppen

Gruppe	Ordnung	Bearbeiter
M_{11}	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	MATHIEU
M_{12}	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	MATHIEU
M_{22}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	MATHIEU
M_{23}	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	MATHIEU
M_{24}	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	MATHIEU
J_2	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$	HALL, JANKO
Sz	$2^{13} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	SUZUKI
$H-S$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	HIGMAN, SIMS
McL	$2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	MCLAUGHLIN
Co_3	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	CONWAY
Co_2	$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	CONWAY
Co_1	$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$	CONWAY
He	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 17$	HELD/HIGMAN, MCKAY
Fi_{22}	$2^{17} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$	FISCHER
Fi_{23}	$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$	FISCHER
Fi_{24}	$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$	FISCHER
$H-N$	$2^{14} \cdot 3^6 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	HARADA, NORTON/SMITH
T	$2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	THOMPSON/SMITH
B	$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$	FISCHER/SIMS, LEON
M	$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$	FISCHER, GRIESS
J_1	$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	JANKO
$O'Nan$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 7^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 31$	O'NAN/SIMS
J_3	$2^7 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19$	JANKO/HIGMAN, MCKAY
Ly	$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 67$	LYONS/SIMS
Rv	$2^{14} \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$	RUDVALIS/CONWAY, WALES
J_4	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 43$	JANKO/NORTON, PARKER, BENSON, CONWAY, THACKRAY

Als CONWAY seinen Artikel schrieb, war noch nicht bekannt, ob die Liste der 26 sporadischen Gruppen vollständig ist. Als der Artikel erschien, konnte auf dem Deckblatt des *Intelligencer*-Heftes in einer Fußnote vermerkt werden:

»added in proof ... the classification of finite simple groups is complete. There are no more sporadic groups.«

In der Darstellungstheorie endlicher Gruppen kann man insbesondere die Frage stellen, für welche kleinste Zahl n die Gruppe treu dargestellt werden kann durch lineare Abbildungen des n-dimensionalen komplexen Vektorraumes $\mathfrak{C}^n$ in sich. Für die alternierende Gruppe A_5 ist $n = 3$, als Symmetriegruppe des Ikosaeders hat sie sogar eine Darstellung im $\mathfrak{R}^3$. Für das Monster M ist $n = 196\,883$. Wie kann man die Darstellung von M im $\mathfrak{C}^{196\,883}$ beschreiben? Inzwischen gibt es viele Resultate in dieser Richtung, auf die ich nicht eingehen kann. John MCKAY hat als erster darauf hingewiesen, daß $196\,883 + 1$ ein Koeffizient der Modulfunktion

$$j(z) = q^{-1} + 744 + 196\,884\, q + 21\,493\,760\, q^2 + \ldots \qquad \text{mit } q = e^{2\pi i z}$$

ist. Dies konnte kein Zufall sein.

Die elementaren Axiome der Gruppentheorie und der Begriff »einfache Gruppe« führten zu Beziehungen zu ganz anderen Gebieten der Mathematik und zur Erkenntnis besonderer Vorkommnisse im $\mathfrak{C}^{196\,883}$. Ich zitiere aus der Einleitung des Buches »Was ist Mathematik?« von R. COURANT und H. ROBBINS (1967):

»Die Betonung des deduktiv-axiomatischen Charakters der Mathematik birgt große Gefahr. Allerdings entzieht sich das Element der konstruktiven Erfindung, der schöpferischen Intuition einer einfachen philosophischen Formulierung;

dennoch bleibt es der Kern jeder mathematischen Leistung, selbst auf den abstraktesten Gebieten. Wenn die kristallisierte, deduktive Form das letzte Ziel ist, so sind Intuition und Konstruktion die treibenden Kräfte. Der Lebensnerv der mathematischen Wissenschaft ist bedroht durch die Behauptung, Mathematik sei nichts anderes als ein System von Schlüssen aus Definitionen und Annahmen, die zwar in sich widerspruchsfrei sein müssen, sonst aber von der Willkür des Mathematikers geschaffen werden. Wäre das wahr, dann würde die Mathematik keinen intelligenten Menschen anziehen. Sie wäre eine Spielerei mit Definitionen, Regeln und Syllogismen ohne Ziel und Sinn. Die Vorstellung, daß der Verstand sinnvolle Systeme von Postulaten frei erschaffen könnte, ist eine trügerische Halbwahrheit. Nur aus der Verantwortung gegen das organische Ganze, nur aus innerer Notwendigkeit heraus kann der freie Geist Ergebnisse von wissenschaftlichem Wert hervorbringen.

Trotz der Gefahr der einseitigen Übertreibung hat die Axiomatik zu einem tieferen Verständnis der mathematischen Tatsachen und ihrer Zusammenhänge und zu einer klareren Einsicht in das Wesen mathematischer Begriffe geführt. Hieraus hat sich eine Auffassung entwickelt, welche über die Mathematik hinaus für moderne Wissenschaft typisch ist.«

»Konstruktive Erfindung und schöpferische Intuition« waren es auch, die schließlich auf langen Wegen zu der Klassifikation der einfachen Gruppen führten.

Literatur

Barthel, G., Hirzebruch, F., und Höfer, T.: Geradenkonfigurationen und algebraische Flächen. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg 1987

Conway, J. H.: Monsters and Moonshine. The Mathematical Intelligencer *2*, 165–171 (1980)

Courant, R., und Robbins, H.: Was ist Mathematik? 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1967

Dedekind, R.: Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn 1892

Freedman, M. H.: A fake $S^3 \times R$. Ann. Math. *110*, 177–201 (1979)

Frobenius, F. G.: Neuer Beweis des Sylowschen Satzes. Journal für die reine und angewandte Mathematik *100*, 179–181 (1887)

Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. 1. Aufl. Stuttgart: Teubner 1899

–, und Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie. Berlin: Springer 1932

Kelly, L. M.: A resolution of the Sylvester-Gallai problem of J.-P. Serre. Discrete Comput. Geom. *1*, 101–104 (1986)

Klein, F.: Erlanger Programm. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zum Eintritt in die Philosophische Facultät und den Senat der k. Friedrich-Alexander-Universität zu Erlangen. Erlangen 1872

Koecher, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Grundwissen Mathematik 2. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer 1983

Milnor, J. W.: On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. Ann. of Math. *64*, 399–405 (1956)

Miyaoka, Y.: On the Chern numbers of surfaces of general type. Invent. Math. *42*, 225–237 (1977)

Reichardt, H.: Gauss und die Anfänge der nicht-euklidischen Geometrie. (Mit Originalarbeiten von J. Bolyai, N. I. Lobatschewski und F. Klein.) Leipzig: Teubner 1985

Riemann, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Habil.-Vortrag. Philosophische Fakultät Göttingen 1854

Wussing, H.: Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969

Yau, S.-T.: Calabi's conjeture and some new results in algebraic geometry. Proc. Nat. Acad. Sci USA *74*, 1796–1799 (1977)

Prof. Dr. F. Hirzebruch
MPI für Mathematik
Gottfried-Claren-Str. 26
W-5300 Bonn 3