

- Serienmessungen auf den beiden Ankerstationen der zweiten Teilfahrt. Ann. Hydrogr. u. Marit. Meteorol. **72**, Januar-Beiheft. (Wiss. Ergebn. Dt. Nordatlant. Exped. 1937 und 1938, 1. Lfg.)
- Seiwell, H. R., 1937: Short period vertical oscillations in the western basin of the North Atlantic. Papers Phys. Oceanogr. and Meteorol. **5**, No. 2.
- Seiwell, H. R., 1938: Über die ganz- und halbtägige Mondkomponente der internen Wellen im westlichen Nordatlantischen Ozean. Ann. Hydrogr. u. Marit. Meteorol. **66**, 485.
- Seiwell, H. R., 1939a: The effect of short period variations of temperature and salinity on calculations in dynamic oceanography. Papers Phys. Oceanogr. and Meteorol. **7**, No. 3.
- Seiwell, H. R., 1939b: Daily temperature variations in the western North Atlantic. J. Cons. int. Explorat. Mer **14**, No. 3, 357.
- Zaitsev, G. N., 1957: Preparation of dynamical charts for seas with a complex pattern of tidal circulation. (Vortrag, gehalten auf d. Tagung des Int. Rates f. Meeresforschung, Bergen 1957.)
- Zeilon, N., 1912: On tidal boundary-waves and related hydrodynamical problems. Kungl. Svenska Vet. Akad. Handl. **47**, No. 4.

Eingegangen im Juni 1958

Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz

Von Karl Hasselmann

Zusammenfassung. Es werden die dreifachen Korrelationen, die den Einfluß der Trägheitskräfte in der Kármán-Howarth'schen Korrelationsgleichung beschreiben, auf den Impulsaustausch zwischen einem kugelförmig abgegrenzten Gebiet und dessen Umgebung zurückgeführt. Diese einfache Deutung ermöglicht eine approximative Erfassung der Trägheitskräfte der isotropen Turbulenz, die in den Grundzügen die Heisenbergsche Vorstellung einer auf die größeren Wirbel einwirkenden turbulenten Viskosität, die durch den Impulsaustausch mit den kleinen Wirbeln zustande kommt, bestätigt, jedoch zu wesentlich besserer Übereinstimmung mit den Meßergebnissen führt.

On the interpretation of the triple velocity correlations of isotropic turbulence (Summary). The influence of the inertia forces in isotropic turbulence represented by the triple-velocity correlations in Kármán-Howarth's equation is explained in terms of the momentum convected through the surface of a spherically delimited region in the fluid. Basing on this simple interpretation, an approximate expression for the triple velocity correlations is derived. The results confirm Heisenberg's basic concept of an additional turbulent viscosity acting on the larger eddies as a result of the momentum-transfer action of the smaller eddies, but show considerably closer agreement with experiment than Heisenberg's expression.

Sur l'interprétation des triples corrélations de vitesse en turbulence isotropique (Résumé). Les influences de la force d'inertie exercées sur la turbulence isotropique et représentées par les triples corrélations de vitesse dans l'équation de Kármán-Howarth sont expliquées à l'aide du moment qui pénètre par convection la surface d'une région limitée sphériquement, faisant partie d'un fluide. Basant sur cette simple interprétation, on dérive une expression approximative pour les triples corrélations de vitesse. Les résultats en vérifient la conception fondamentale de Heisenberg, d'après laquelle il existe une viscosité turbulente additionnelle agissant sur les grands tourbillons par suite de l'action du transfert du moment effectuée par de petits tourbillons, mais ces résultats sont en meilleur accord avec les essais que ceux que l'on a obtenus jusqu'ici par l'expression de Heisenberg.

Einleitung. Bekanntlich hat erst die statistische Theorie der isotropen Turbulenz eine ausführliche kinematische Analyse der turbulenten Strömungen ermöglicht. Jedoch stößt sie auf Schwierigkeiten bei allen Fragen, die mit dem dynamischen Verhalten der Turbulenz zusammenhängen. Der Kern dieser Schwierigkeiten liegt in der Natur der Trägheitskräfte, die man bisher noch nicht befriedigend beschreiben konnte. Um trotzdem dynamische Gesetzmäßigkeiten theoretisch ableiten zu können, hat man zusätzliche Hypothesen eingeführt, die man etwa in die beiden Klassen der Ähnlichkeits- und Austauschhypothesen einteilen kann. Aus den Ähnlichkeitshypothesen können Aussagen über die Änderung gewisser charakteristischer Größen des Turbulenzfeldes gewonnen werden, wie z. B. das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie; jedoch kann die innere Struktur des Turbulenzfeldes, d. h. die Form des

Energiespektrums oder der der Geschwindigkeitskorrelationen, nicht erklärt werden. Die Ähnlichkeitsannahmen werden im allgemeinen physikalisch nicht sehr überzeugend begründet und erweisen sich auch experimentell als recht grobe Approximationen. Bei den Austauschhypothesen andererseits wird auf Grund einer gewissen Vorstellung über die Einwirkung der Trägheitskräfte auf das Energiespektrum die Form des Trägheitsterms in der dynamischen Spektralgleichung einfach postuliert. Es ist schwierig, bei diesen Ausdrücken unmittelbar nachzuprüfen, ob sie gute Näherungen sind oder nicht, da der exakte Ausdruck für den Trägheitsterm der Spektralgleichung in ziemlich unübersichtlicher Weise von den Amplituden und Phasen der Fourierzerlegung des Geschwindigkeitsfeldes abhängt. Sie sind daher — ebenso wie die Ähnlichkeitsannahmen — nur als Arbeitshypothesen aufzufassen.

Obwohl der Trägheitsterm der Spektralgleichung wesentlich komplizierter ist als der entsprechende Term der mathematisch äquivalenten Korrelationsgleichung, hat man bisher die Trägheitskräfte nur an Hand der Spektralgleichung zu erklären versucht. Das liegt daran, daß der physikalische Inhalt der Spektralgleichung durchsichtiger ist, während man sich bisher für die durch die Korrelationsgleichung beschriebenen Vorgänge noch kein physikalisch anschauliches Bild gemacht hat. Wie im folgenden gezeigt wird, ermöglicht aber eine neue Ableitung der Korrelationsgleichung die anschauliche Deutung der einzelnen Glieder.

Dadurch läßt sich nun die Wirkung der Trägheitskräfte, die durch die dreifachen Korrelationen beschrieben wird, unmittelbar überblicken und mit Hilfe von einfachen Mischungswegansätzen auch quantitativ erfassen. Die Ergebnisse lassen sich im wesentlichen durch die Heisenbergsche Vorstellung einer auf die größeren Wirbel einwirkenden turbulenten Viskosität, die durch den Impulsaustausch mit den kleineren Wirbeln zustande kommt, beschreiben. Allerdings wird eine andere Einteilung der Energie in Wirbel kleinerer und größerer Dimensionen gewählt, die der Deutung des Trägheitsterms in der Korrelationsgleichung besser angepaßt ist. Ferner wird der in dem Ausdruck für die turbulente Viskosität vorkommende Mischungsweg nicht einer kinematisch, sondern einer dynamisch eingeführten Länge proportional angenommen, wodurch der Einfluß der Viskosität berücksichtigt und eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht wird.

Die zwei- und dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen Turbulenz. Bevor die Kármán-Howarth'sche Korrelationsgleichung aus den Navier-Stokesschen Gleichungen gewonnen werden kann, muß man auf die Beziehungen eingehen, die sich aus den kinematischen Bedingungen der Isotropie und der Kontinuität für die Korrelationen ergeben. Obwohl diese Beziehungen, die gewöhnlich mit Hilfe der Tensoranalysis und der Invariantentheorie gewonnen werden, wohlbekannt sind (H. P. Robertson [1940], S. Chandrasekhar [1953], G. K. Batchelor [1953]), ist es vielleicht nicht uninteressant, sie einmal auch auf einem anderen, anschaulichen Wege abzuleiten, der später bei den Navier-Stokesschen Gleichungen außerdem zu einer physikalischen Deutung der Kármán-Howarth'schen [1938] Korrelationsgleichung führen wird.

Unter der allgemeinen zweifachen Geschwindigkeitskorrelation (Abb. 1) an zwei Stellen P, P' in einem isotropen Turbulenzfeld versteht man das mittlere Produkt:

$$R(\mathbf{r}; a, b) = \overline{u_a(P') u_b(P)}, \quad (1)$$

wobei durch die Indizes a, b Geschwindigkeitskomponenten in Richtung der Einheitsvektoren a, b bezeichnet werden, \mathbf{r} der Vektor vom Punkt P zum Punkt P' und die rechte Seite ein statistischer Mittelwert über mehrere unabhängige Realisationen des Turbulenzfeldes ist. Aus der Bedingung der Isotropie folgt auch die Homogenität des Turbu-

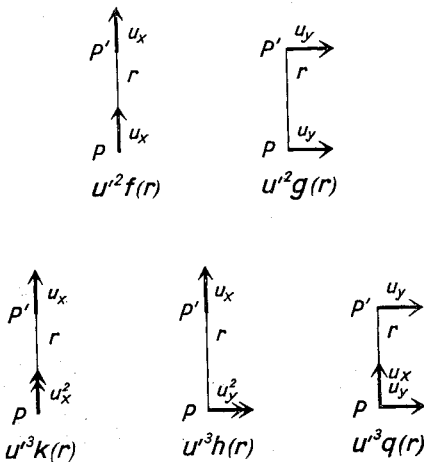


Abb. 1. Zwei- und dreifache Geschwindigkeitskorrelationen

lenzfeldes, da ein nicht verschwindender Gradient einer mittleren Größe eine ausgezeichnete Richtung festlegen würde; das mittlere Produkt (1) hängt somit nur von dem Abstandsvektor zwischen P und P' ab.

Ähnlich wird die dreifache Geschwindigkeitskorrelation an zwei Stellen definiert:

$$S(r; a, b, c) = \overline{u_a(P') u_b(P) u_c(P)}. \quad (2)$$

Korrelationen höherer Ordnung werden gewöhnlich nicht mehr betrachtet, obwohl sie streng genommen zu einer vollständigen statistischen Beschreibung der Turbulenz notwendig sind, da sie mit wesentlich größeren analytischen Schwierigkeiten verbunden sind.

Im Falle der Isotropie sind die mittleren Produkte (1) und (2) nur von der relativen Lage des Vektors r und der Einheitsvektoren a, b und c abhängig. Wir können daher annehmen, daß r in der x -Achse und a in der xy -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegen. Ferner können wir uns auf die Fälle beschränken, in denen die Einheitsvektoren achsenparallel sind, da sich die allgemeinen Produkte mittels dieser als Linearkombinationen darstellen lassen. Da a in der xy -Ebene liegt, während die Einheitsvektoren b und c beliebige Richtungen annehmen können, findet man sechs solcher Kombinationen für R und zwölf für S . Aus der Bedingung der Isotropie, die Invarianz gegenüber Permutationen und Spiegelungen der Achsen fordert, folgt jedoch sofort, daß die meisten dieser Produkte verschwinden, so daß von den zweifachen Korrelationen nur die Produkte:

$$u'^2 f(r) = \overline{u_x(P') u_x(P)}, \quad (3)$$

$$u'^2 g(r) = \overline{u_y(P') u_y(P)} \quad (4)$$

und von den dreifachen Korrelationen nur die Produkte:

$$u'^3 k(r) = \overline{u_x(P') u_x^2(P)}, \quad (5)$$

$$u'^3 h(r) = \overline{u_x(P') u_y^2(P)} = \overline{u_x(P') u_z^2(P)}, \quad (6)$$

$$u'^3 q(r) = \overline{u_y(P') u_x(P) u_y(P)} \quad (7)$$

übrigbleiben. Dabei bedeuten wie üblich u' die Wurzel des mittleren Quadrats einer Geschwindigkeitskomponente, r den Betrag von r und die Indizes x, y, z Geschwindigkeitskomponenten parallel zu den Koordinatenachsen.

Die Zurückführung der allgemeinen Produkte (1) und (2) auf die skalaren Funktionen von r in den Gleichungen (3)–(7) folgte allein aus der Bedingung der Isotropie. Aus der Kontinuitätsbedingung ergibt sich nun weiter, daß diese Funktionen voneinander abhängig sind.

Betrachten wir die Durchströmung einer halbkugelförmigen Hüllfläche wie in Abb. 2. Für eine inkompressible Flüssigkeit lautet die Kontinuitätsbedingung:

$$-\int_{\sigma_1} u_n dS = \int_{\sigma_2} u_n dS,$$

wobei u_n die Normalkomponente der Geschwindigkeit auf den beiden Teilflächen σ_1 und σ_2

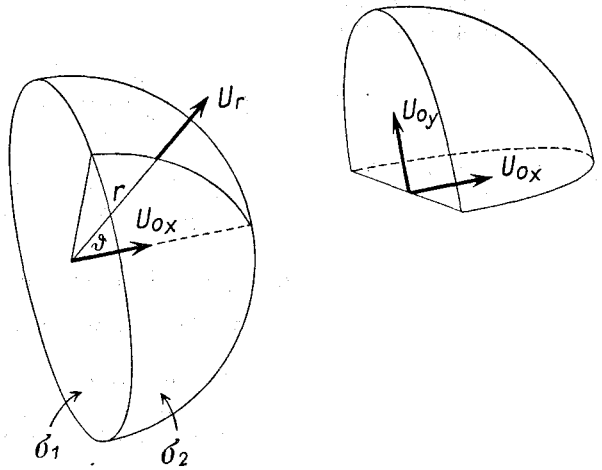


Abb. 2. Durchströmung einer halbkugelförmigen Hülle.

der Hüllfläche bedeutet. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der x -Komponente der Geschwindigkeit im Mittelpunkt erhält man nach Mittelwertbildung:

$$u'^2 \int_0^r rg(r)dr = u'^2 \int_0^{\pi/2} r^2 f(r) \sin \delta \cos \delta d\delta = \frac{u'^2}{2} r^2 f(r)$$

oder, nach Differentiation:

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} f'(r), \quad (8)$$

wobei $f' = \frac{\partial f}{\partial r}$. Die Beziehung (8) zwischen den longitudinalen und transversalen zweifachen Geschwindigkeitskorrelationen wurde nach dieser Methode erstmals von Prandtl abgeleitet (K. Wieghardt [1941]).

Auf ähnlichem Wege lassen sich auch Beziehungen zwischen den dreifachen Korrelationen ableiten. Multipliziert man die Kontinuitätsgleichung für die Strömung durch eine Vollkugel mit dem Quadrat der Geschwindigkeit im Mittelpunkt und bildet den Mittelwert, so erhält man sofort:

$$2h(r) + k(r) = 0. \quad (9)$$

Multipliziert man weiter die Kontinuitätsgleichung der Strömung durch eine Viertelkugel wie in Abb. 2 mit dem Produkt der x - und y -Komponenten der Geschwindigkeit im Mittelpunkt, so erhält man nach Mittelwertbildung und Differentiation:

$$q(r) = \frac{1}{2} k(r) + \frac{r}{4} k'(r). \quad (10)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8)–(10) lassen sich nunmehr die allgemeinen zwei- und dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen (1) und (2) auf je eine skalare Funktion von r zurückführen. Zu diesem Zweck werden gewöhnlich die beiden longitudinalen Korrelationen $u'^2 f(r)$ und $u'^3 k(r)$ gewählt, da sie am einfachsten zu messen sind. Da die Korrelationen gegenüber Spiegelungen invariant sind, muß $f(r)$ eine gerade, $k(r)$ eine ungerade Funktion von r sein. Die Entwicklung von $f(r)$ beginnt daher mit den Gliedern

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{2\lambda^2} + \frac{G}{4!} \frac{r^4}{\lambda^4} + \dots, \quad (11)$$

wo die Dissipationslänge $\lambda = - [f''(0)]^{-1/2}$ und $G = \lambda^4 f^{IV}(0)$. Die erste Ableitung von $k(r)$

verschwindet bei $r = 0$, da $u'^3 k'(0) = u_x^2 \frac{\partial}{\partial x} u_x = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} u_x^3 = 0$, so daß die Entwicklung von

$k(r)$ erst mit einem Glied dritter Ordnung beginnt:

$$k(r) = -\frac{S}{6} \frac{r^3}{\lambda^3} + \dots, \quad (12)$$

wobei $-S = \lambda^3 k'''(0)$ den Schiefefaktor $\left[\frac{\partial u_x}{\partial x} \right]^3 / \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}$ bedeutet. Bei der Definition von

S ist in Anlehnung an die Bezeichnung von G. K. Batchelor und A. A. Townsend [1947] ein negatives Vorzeichen eingeführt worden, da die experimentellen Werte des Schiefefaktors negativ ausfallen.

Obwohl sie später nicht verwendet werden, lassen sich nun ohne Schwierigkeit auch die allgemeinen Korrelationstensoren $R_{ij}(r) = \overline{u_i(P) u_j(P')}$ und $S_{iji}(r) = \overline{u_i(P) u_j(P) u_l(P')}$ in Abhängigkeit ihrer charakteristischen skalaren Funktionen $u'^2 f(r)$ bzw. $u'^3 k(r)$ bestimmen durch Transformation des Koordinatensystems der Tensoren auf ein neues System, bei dem

der Vektor \mathbf{r} in der x -Achse liegt. Bezeichnen wir die Komponenten des neuen Systems mit einem Stern und sei (a_{ij}) die Transformationsmatrix, so gilt:

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= \sum_{kl} a_{ik} a_{jl} \overline{u_k^*(P) u_l^*(P')} \\ &= u'^2 \{ a_{i1} a_{j1} f(r) + (a_{i2} a_{j2} + a_{i3} a_{j3}) g(r) \} \\ &= u'^2 \left\{ \sum_p a_{ip} a_{jp} g(r) + (f(r) - g(r)) a_{i1} a_{j1} \right\}, \end{aligned}$$

wobei sich die Indizes 1, 2 und 3 auf die Koordinatenachsen x, y bzw. z beziehen. Da $a_{i1} = \frac{r_i}{r}$, ergibt sich somit nach (8):

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = u'^2 \left\{ \left(f + \frac{r}{2} f' \right) \delta_{ij} - \frac{r}{2} f' \frac{r_i r_j}{r^2} \right\}. \tag{13}$$

Auf ähnlichem Wege läßt sich dann zeigen, daß

$$S_{ijn}(\mathbf{x}) = u'^3 \left\{ \frac{k-rk'}{2r^3} r_i r_j r_l + \frac{2k+rk'}{4r} (r_i \delta_{jl} + r_j \delta_{il}) - \frac{k}{2r} r_l \delta_{ij} \right\}. \tag{14}$$

Schließlich betrachten wir noch die Druck-Geschwindigkeits-Korrelation $\overline{p(P)u(P')}$, die bei der Ableitung der Kármán-Howarth'schen Korrelationsgleichung auftritt. Aus Gründen der Isotropie werden die Korrelationen zwischen p und den Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu \mathbf{r} offensichtlich verschwinden, sodaß nur das Produkt $\overline{p(P)u_r(P')}$ zu untersuchen wäre. Durch Multiplikation der Kontinuitätsgleichung für eine kugelförmige Hüllfläche mit dem Druck im Mittelpunkt und Mittelwertbildung folgt dann sofort, daß auch dieses letzte Korrelationsprodukt verschwindet.

Die Kármán-Howarth'sche Korrelationsgleichung. Die im letzten Abschnitt beschriebene Methode, um Folgerungen aus der Kontinuitätsbedingung herzuleiten, kann auch angewandt werden, um eine dynamische Gleichung für die Korrelationen zu gewinnen. Multipliziert man die Impulsgleichung für eine kugelförmige Hüllfläche vom Radius r mit der Geschwindigkeit u_0 im Mittelpunkt und mittelt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \overline{u \cdot u_0} dV = - \int \overline{(u \cdot u_0) u_r} dS - \int \overline{p u_{0r}} dS + \int \overline{u_0 \cdot t_r} dS, \tag{15}$$

wobei auf der linken Seite über das Innere der Kugel und auf der rechten über die Kugeloberfläche integriert wird. t_r ist die Zähigkeitsspannung auf der Kugeloberfläche.

Von den Integralen auf der rechten Seite ist zunächst bereits gezeigt worden, daß die Druck-Geschwindigkeits-Korrelation verschwindet. Das erste Integral läßt sich durch die dreifache Korrelation $u'^3 k(r)$ ausdrücken, während sich das letzte Integral auf die Ableitungen der zweifachen Korrelation $u'^2 f(r)$ zurückführen läßt. Die linke Seite kann über das Kugel-

volumen ausintegriert werden, da $\overline{u \cdot u_0} = u'^3 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 f)$. Nach Division durch $2\pi r^3$ erhält man

dann schließlich die Kármán-Howarth'sche Korrelationsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) = u'^3 \left(k' + \frac{4k}{r} \right) + 2\pi u'^2 \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right). \tag{16}$$

Die einzelnen Glieder dieser Gleichung haben nun anschauliche physikalische Bedeutungen. Aus der Berechnung der linken Seite ergibt sich eine neue kugelsymmetrische Beziehung für die zweifache longitudinale Korrelation: es ist $3u'^2 f(r)$ der Mittelwert des Produkts aus der Geschwindigkeit im Mittelpunkt einer Kugel vom Radius r mit der mittleren Geschwindigkeit im Inneren der Kugel. $f(r)$ ist somit ein Maß für die räumliche Ausdehnung der Geschwindig-

keitsschwankungen und gibt an, inwieweit der Flüssigkeit innerhalb der Kugel eine einheitliche Geschwindigkeit zugeordnet werden kann. Das erste Glied auf der rechten Seite stellt die Korrelation zwischen dem Impulsfluß durch die Oberfläche und der Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel dar und beschreibt somit die Änderung von $u^2 f(r)$ durch die Vermischung der Flüssigkeit innerhalb und außerhalb der Kugel, während das letzte Glied den Einfluß der Zähigkeitsspannungen an der Kugeloberfläche wiedergibt.

Durch Spezialisierung lassen sich aus (16) zwei weitere wichtige Gleichungen ableiten. Für $r = 0$ erhält man die Dissipationsgleichung:

$$\frac{d}{dt} u^2 = -10\nu \frac{u^2}{\lambda^2}. \quad (17)$$

Differenziert man (16) zweimal nach r , so erhält man für $r = 0$ die Gleichung für die Änderung der mittleren Rotation:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{15} \frac{d}{dt} (\text{rot } u)^2 = -\frac{7}{3} u^3 k'''(0) - \nu \frac{14}{3} u^2 f^{IV}(0). \quad (18)$$

Offensichtlich läßt sich Gleichung (16) ohne eine weitere Beziehung für $k(r)$ nicht lösen. Wegen der Nichtlinearität der Bewegungsgleichungen hängt jedoch die dreifache Korrelation von der Korrelation vierter Ordnung ab, die ihrerseits wiederum durch die Korrelation fünfter Ordnung bestimmt ist, usw. Der Versuch einer exakten Lösung der Korrelationsgleichung führt somit zu einem unlöslichen unendlichen System von Gleichungen.

Um diese Schwierigkeit zu umgehen, werden wir — wie in allen bisherigen Näherungsansätzen für die Trägheitskräfte — annehmen, daß die dreifachen Korrelationen auf die zweifachen zurückgeführt werden können. Auf Grund unserer einfachen physikalischen Deutung des Trägheitsterms der Kármán-Howarth'schen Korrelationsgleichung können wir jedoch nunmehr den Näherungsausdruck für die Trägheitseinflüsse auf einem etwas deduktiveren Wege ableiten, als es bisher bei der Untersuchung des unübersichtlichen exakten Trägheitsterms in der Spektralgleichung möglich war.

Näherungsansatz für die dreifachen Korrelationen. Die Wirkung der Trägheitskräfte in einem isotropen Turbulenzfeld läßt sich bekanntlich qualitativ durch einen Kaskadenprozeß beschreiben, bei dem ständig Energie von größeren Wirbeln zu kleineren übertragen wird. Es sind eine Reihe physikalischer Modelle vorgeschlagen worden, um diesen Prozeß zu erklären, von denen das erfolgreichste von W. Heisenberg [1948] und C. F. von Weizsäcker [1948] von der Vorstellung einer zusätzlichen turbulenten Viskosität ausgeht, die auf die größeren Wirbel einwirkt. Obwohl der Heisenbergsche Ausdruck für den Trägheitsterm in der Spektralgleichung zu qualitativ richtigen Ergebnissen führt, sind doch eine Anzahl Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Experiment festgestellt worden (J. Proudman [1951]). Es ist wahrscheinlich, daß einige dieser Unstimmigkeiten (wie z.B. der um einen Faktor 3 zu große theoretische Schiefefaktor) auf den Ansatz für die turbulente Viskosität zurückzuführen sind, da darin nur die kinematischen Eigenschaften der kleineren Wirbel berücksichtigt werden und der enge Zusammenhang zwischen dem dynamischen Verhalten der kleineren Wirbel und dem Vermischungsvorgang, der für die turbulente Viskosität verantwortlich ist, nicht zum Ausdruck kommt. Obwohl die dynamischen Eigenschaften der größeren Wirbel, bei denen die Trägheitskräfte überwiegen, auf die kinematischen zurückführbar sind, ist dies nicht mehr der Fall bei den kleineren Wirbeln, bei denen die Zähigkeits- und Trägheitskräfte vergleichbar sind. Bei unserer Analyse des Trägheitsterms in der Kármán-Howarth'schen Korrelationsgleichung werden wir nun einen Ausdruck erhalten, der sich durch geeignete Definition der Turbulenzelemente verschiedener Größe auch als eine zusätzliche turbulente Viskosität, die auf die größeren Turbulenzelemente einwirkt, interpretieren läßt. Wir werden jedoch die in unserem Ausdruck auftretende Vermischungszeit nicht aus den charakteristischen Längen und Geschwindigkeitsdimensionen der kleineren Wirbel, sondern aus einer charakteristischen „Reaktionszeit“ ableiten, die sich aus der Energiegleichung der kleineren Wirbel ergibt.

Aus der Deutung des Trägheitsterms in der Kármán-Howarth'schen Gleichung als das mittlere Produkt zwischen dem Impulsfluß durch die Oberfläche einer kugelförmigen Hüllfläche und der Geschwindigkeit im Mittelpunkt ergibt sich eine einfache Erklärung für den durch die Trägheitskräfte bewirkten Energietransport von größeren zu kleineren Wirbeln. Denn die aus der Kugel herausfließende Flüssigkeit, die vorher dem Mittelpunkt näher war, wird im allgemeinen eine größere Impulskomponente parallel zur Mittelpunktgeschwindigkeit haben als die Flüssigkeit, die aus einem vom Mittelpunkt weiter entfernt liegenden Gebiet in die Kugel hineinfließt. Es ist daher zu erwarten, daß der Ausdruck $\int (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_0) u_r dS = -2r^3 (k' + 4k/r)$ in (15) positiv ist, was mit einem Energiefluß von größeren zu kleineren Wirbeln gleichbedeutend ist.

Die Turbulenzelemente, die diese Impulsdiffusion bewirken, werden offenbar von kleinerer oder gleicher Dimension wie der Kugeldurchmesser sein, da die größeren Turbulenzelemente einfach zu einer Durchfließung der Kugel ohne Vermischung führen. Diese verschiedenen Einflüsse lassen sich am einfachsten trennen, indem man die Geschwindigkeiten auf ein Koordinatensystem bezieht, das sich mit der instantanen Geschwindigkeit im Mittelpunkt der Kugel bewegt. Die Turbulenzelemente von größerer Dimension als der Kugeldurchmesser tragen dann nur noch wenig zu den relativen Schwankungen innerhalb der Kugel bei. Der auf das neue Koordinatensystem bezogene Impulsfluß durch die Oberfläche einer mitbewegten Kugel ist $\int \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_r dS$, wo $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ die relative Geschwindigkeit bedeutet. Mit Hilfe der Gleichungen (9) und (10) läßt sich unschwer zeigen, daß das mittlere Produkt dieses Ausdruckes mit der Geschwindigkeit \mathbf{u}_0 im Mittelpunkt dem entsprechenden mittleren Produkt in dem ursprünglichen Koordinatensystem proportional ist:

$$\int (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}) v_r dS = 2 \int (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}) u_r dS. \tag{19}$$

Die linke Seite von (19) läßt sich einfacher näherungsweise erfassen als der ursprüngliche Trägheitsterm aus (17) auf der rechten Seite, da er nur noch die Geschwindigkeitsschwankungen kleinerer Dimension, die den Impulsaustausch bewirken, enthält. Nach unserer Vorstellung der Wirkung der Trägheitskräfte in der Kármán-Howarth'schen Gleichung beruht nun die Korrelation zwischen dem relativen Impulsfluß durch die Oberfläche der (bewegten) Kugel und der Geschwindigkeit \mathbf{u}_0 im Mittelpunkt darauf, daß der Impuls der die Oberfläche durchsetzenden Flüssigkeitsteilchen je nach Flußrichtung verschieden stark mit der Mittelpunktsgeschwindigkeit korreliert ist. Wir werden daher annehmen, daß sich die linke Seite der Gleichung (19) durch folgenden Näherungsausdruck ersetzen läßt:

$$\int (\mathbf{u}_0 \mathbf{v}) v_r dS = \int \left\{ \overline{\mathbf{u}_0 \mathbf{v}} - v_r \tau \frac{\partial}{\partial r} \overline{\mathbf{u}_0 \mathbf{v}} \right\} v_r dS, \tag{20}$$

wobei τ eine charakteristische „Vermischungszeit“ der kleineren Turbulenzelemente darstellt. Gleichung (20) ist unsere „Austauschhypothese“, die die dreifachen Korrelationen auf die zweifachen zurückführt. Nach Ausrechnung der rechten Seite erhält man:

$$\int (\mathbf{u}_0 \mathbf{v}) v_r dS = -8\pi r^2 u'^4 \tau (1-f) (r f'' + 4f'). \tag{21}$$

Durch Einsetzen von (21) in die Impulsleichung (15) ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u'^2 f) = 2 u'^2 (v + v_t) \left(f'' + \frac{4}{r} f' \right) \tag{22}$$

mit

$$v_t = u'^2 (1-f) \tau. \tag{23}$$

Durch Vergleich mit (16) findet man dann folgende Beziehung zwischen den zwei- und dreifachen longitudinalen Geschwindigkeitskorrelationen:

$$\left(k' + \frac{4k}{r} \right) = \frac{2v_t}{u'} \left(f'' + \frac{4f'}{r} \right). \tag{24}$$

Es folgt aus der Form der Gleichungen (22) und (23), daß der Trägheitsterm der Korrelationsgleichung ebenso wie beim Heisenbergschen Ansatz für den Trägheitsterm in der Spektralgleichung als eine durch den Impulsaustausch mit den kleineren Wirbeln auf die größeren Wirbel einwirkende turbulente Viskosität interpretiert werden kann, wenn man den

Wirbeln von größerer Dimension als r die Energie $\frac{3}{2} u'^2 f(r)$ und den übrigen, kleineren Wirbeln die Energie $\frac{3}{2} u'^2 (1 - f(r))$ zuordnet. Diese Aufteilung der Energie ist naheliegend, da $f(r)$ ein

Maß für die Gleichförmigkeit der Geschwindigkeit innerhalb einer Kugel vom Radius r darstellt; sie ist aber etwas willkürlich und stimmt nicht mit der üblichen Aufteilung der Energie mit Hilfe des Energiespektrums überein. Eine gewisse Willkür in der Definition der Energie der kleineren Wirbel, die den Impulsaustausch bewirken, ist jedoch unvermeidbar, und auf unsere Ableitung der Gleichungen (22) und (23) trifft die hier gewählte Einteilung der Energie besser zu als der übliche Schnitt des Energiespektrums an einer bestimmten Wellenzahl.

Um $k(r)$ aus (24) ermitteln zu können, muß ein Ausdruck für die Vermischungszeit τ aufgestellt werden. Aus der Ableitung der Gleichung (22) ist zu erwarten, daß die Zeit τ durch eine charakteristische Reaktionszeit der Wirbel kleiner als r bestimmt wird. Aus (16) und (17) ergibt sich für die Änderung der Energie dieser Wirbel die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u'^2 (1 - f)\} = -u'^3 \left(k' + \frac{4k}{r} \right) - 2\nu u'^2 \left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4f'}{r} \right). \quad (25)$$

Das erste Glied stellt die Energiezufuhr von den Wirbeln größer als r dar, während der Einfluß der Zähigkeitskräfte durch das zweite Glied wiedergegeben wird. Sowohl der Energieaustausch durch den Vermischungsvorgang wie die Dissipation durch die Zähigkeitskräfte bewirken nun eine ständige Änderung des Geschwindigkeitsfeldes der kleineren Wirbel. Es ist daher naheliegend, die Vermischungszeit τ , die man als die Zeit auffassen kann, in der aufeinanderfolgende Strukturen der kleineren Wirbel miteinander korreliert sind, einer charakteristischen Reaktionszeit proportional zu setzen, die durch die Glieder auf der rechten Seite von (25) bestimmt wird. Berücksichtigt man die verschiedenen Vorzeichen der gemessenen Werte dieser Glieder, so erhält man als einfachsten Ausdruck für τ :

$$\tau = \gamma \frac{u'^2 (1 - f)}{2\nu u'^2 \left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4f'}{r} \right) - u'^3 \left(k' + \frac{4k}{r} \right)} \quad (26)$$

mit $\gamma = \text{const.}$ Drückt man nach (23) und (24) τ und die dreifachen Korrelationen durch ν_t aus, so erhält man für ν_t die Gleichung:

$$\nu_t = \frac{\gamma}{2} \frac{u'^2 (1 - f)^2}{\nu \left(\frac{5}{\lambda^2} + f'' + \frac{4f'}{r} \right) - \nu_t \left(f'' + \frac{4f'}{r} \right)}. \quad (27)$$

Für kleine r wird demnach $\nu_t = O(r^2)$, in Übereinstimmung mit $k(r) = O(r^3)$ (Gleichung (24)).

Für große r folgt $\nu_t \rightarrow \frac{\gamma u'^2 \lambda^2}{10\nu}$. Da man das Abklingungsgesetz für die Gesamtenergie näherungsweise in der Form $\frac{du'^2}{dt} = -A \frac{u'^3}{L}$ schreiben kann, wo $L = \int_0^\infty f(r) dr$ das longitudinale Makromaß

der Turbulenz und A eine Konstante ist, findet man durch Vergleich mit (17) für die turbulente Viskosität der größten Wirbel $\nu_t \rightarrow \frac{\gamma}{A} u' L$.

Vergleich mit dem Experiment. Eine direkte Ermittlung der longitudinalen dreifachen Korrelationen aus den Gleichungen (24) und (27) ist schwierig, da die Abhängigkeit vom

Parameter γ , der durch Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden muß, nicht linear ist. Es werden daher $k(r)$ und γ am zweckmäßigsten iterativ bestimmt. In erster Näherung

kann man das Glied $\nu_t \left(f'' + \frac{4f'}{r} \right)$ im Nenner von (27) vernachlässigen, so daß γ nur noch linear

auftritt und durch Vergleich der theoretischen mit den experimentellen $k(r)$ -Kurven bestimmt werden kann. Die erste Iteration der so ermittelten Werte von γ und $k(r)$ reicht dann bereits aus, um den Iterationsfehler kleiner als den durch die Differentiation der experimentellen Funktionen $f(r)$ entstehenden Fehler zu machen.

In Abb. 3 sind zwei theoretische $k(r)$ -Kurven für $\gamma = 0,37$ zusammen mit den entsprechenden Messungen von R. W. Stewart und A. A. Townsend [1951] wiedergegeben. Die Kurven sind aus den experimentellen Funktionen $f(r)$ berechnet worden, die zusammen mit $k(r)$ an mehreren Entfernungen x hinter einem Turbulenzgitter bei einer Reynoldszahl $R_M = 5300$

gemessen worden sind ($R_M = \frac{UM}{\nu}$, mit U = mittlere Windgeschwindigkeit, M = Maschenweite des Gitters). Es sind nur die Kurven für die kleinste und die größte Entfernung hinter dem Gitter $\frac{x}{M} = 20$ und $\frac{x}{M} = 120$ wiedergegeben; die übrigen Kurven liegen gleichmäßig verteilt zwischen diesen. Zwei weitere theoretische Kurven für $R_M = 21200$ und 42400

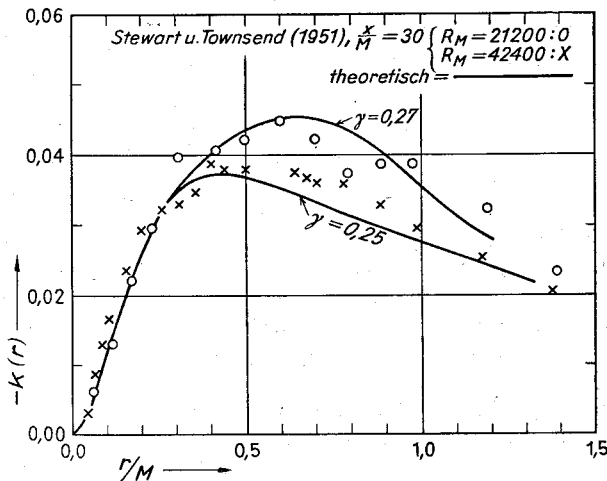


Abb. 4. Theoretische und experimentelle dreifache Korrelationen

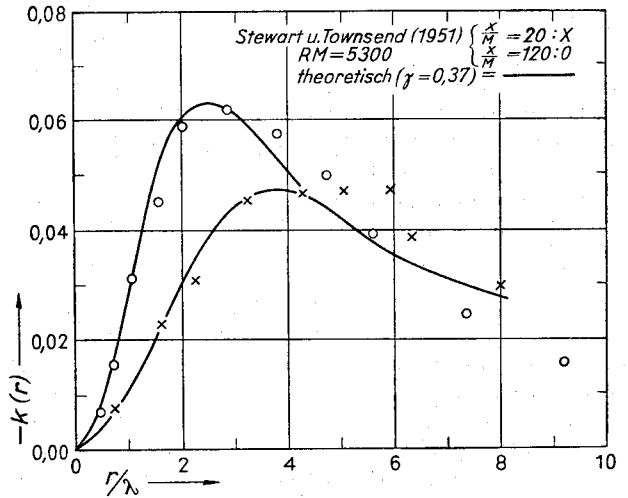


Abb. 3. Theoretische und experimentelle dreifache Korrelationen

sind neben den entsprechenden experimentellen Daten der zitierten Quelle in Abb. 4 wiedergegeben. Auch hier findet man sehr gute Übereinstimmung, wenn für γ die Werte 0,27 bzw. 0,25 an Stelle des für die kleinere Reynoldszahl gefundenen Wertes 0,37 gewählt werden. Obwohl γ als eine Konstante eingeführt wurde, ist eine geringe Abhängigkeit von der Gitter-Reynoldszahl wegen der qualitativen Form des Ansatzes für τ nicht überraschend.

In der Nähe von $r = 0$ lassen sich die theoretischen $k(r)$ -Kurven nicht mehr gut aus den gemessenen Funktionen $f(r)$ ermitteln. Aus diesem Grunde bestimmt man den ersten Koeffizienten der Entwicklung von $k(r)$, der von besonderem Interesse ist, weil er nach (18) den

Einfluß der Trägheitskräfte auf die Änderung der mittleren Rotation der Turbulenz beschreibt, am zweckmäßigsten direkt aus den gemessenen ersten Koeffizienten der Entwicklung von $f(r)$. Entwickelt man Gleichung (27), so erhält man durch Koeffizientenvergleich unter Heranziehung von (24) folgende Beziehung zwischen S , G und der Reynoldszahl $R_\lambda = \frac{u'\lambda}{\nu}$:

$$\frac{G}{R_\lambda} = \frac{45 \gamma}{49 S} - \frac{S}{2}. \quad (28)$$

Da sämtliche in (28) auftretende Größen der Messung unmittelbar zugänglich sind, könnte man die Gleichung einfach durch Einsetzen der experimentellen Werte nachprüfen. Der Vergleich mit dem Experiment wird jedoch übersichtlicher, wenn man Gleichung (18) für die Änderung der mittleren Rotation mit hinzuzieht. Setzt man in (18) das Abklingungsgesetz $u'^{-2} \sim (t-t_0)$ ein, das in einem weiten Reynoldszahlenbereich experimentell mehrfach bestätigt worden ist, so erhält man eine weitere Beziehung zwischen S , G und R_λ (Batchelor and Townsend [1947]):

$$\frac{30}{7} \frac{1}{R_\lambda} = \frac{G}{R_\lambda} - \frac{S}{2}. \quad (29)$$

Aus den Gleichungen (28) und (29) lassen sich nun S und G als Funktionen von R_λ ermitteln. Da R_λ nach dem Abklingungsgesetz während des Abklingens konstant bleibt, werden auch S und G konstant bleiben. Dieses wird durch die Experimente von Batchelor und Townsend [1947] bestätigt. Die Abhängigkeiten der Größen S und G von R_λ sind zusammen mit den Messungen von Batchelor und Townsend in Abb. 5¹ und 6 wiedergegeben. Die Übereinstimmung ist befriedigend, wenn berücksichtigt wird, daß weder S noch G mit großer Genauigkeit gemessen werden können und auch die theoretischen Werte nur als qualitativ anzusehen sind.

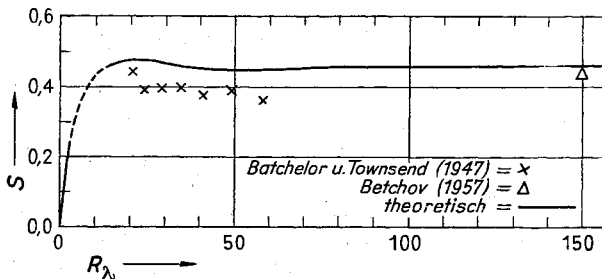


Abb. 5. Theoretischer und experimenteller Verlauf von $S(R_\lambda)$

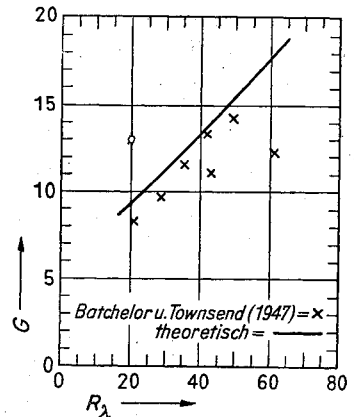


Abb. 6. Theoretischer und experimenteller Verlauf von $G(R_\lambda)$

Die aus den Gleichungen (28) und (29) folgenden Abhängigkeiten der Größen S und G von R_λ beruhen auf dem linearen Abklingungsgesetz $u'^{-2} \sim (t-t_0)$, das für sehr große Reynoldszahlen bisher noch nicht nachgeprüft worden ist und für sehr kleine Reynoldszahlen, bei denen die Trägheitskräfte klein gegen die Zähigkeitskräfte sind, nicht mehr zutrifft. Gleichwohl lassen sich S und G auch in diesen Fällen durch Anwendung weiterer Ergebnisse der Theorie der isotropen Turbulenz bestimmen.

Nach A. N. Kolmogoroff [1941] (Batchelor [1947]) ist das Dissipationsgebiet des Energiespektrums für sehr hohe Reynoldszahlen praktisch in einem Gleichgewichtszustand, bei dem der Energieverlust durch Dissipation durch die Energiezufuhr infolge der Trägheits-

¹ Die Meßpunkte in Abb. 5 sind der Abb. 6.3 aus Batchelor [1953] entnommen.

kräfte vom langwelligen Bereich des Spektrums fast aufgehoben wird. Demnach ist die linke Seite der Gleichung (18) klein gegen die beiden Terme auf der rechten Seite, so daß

$$S = \frac{2G}{R_\lambda} \quad (30)$$

Aus (28) und (30) folgt dann

$$S = \left(\frac{45}{49} \gamma \right)^{1/2} = 0,48; \quad G = 0,24 R_\lambda,$$

wobei der für die höchste Reynoldszahl $R_M = 42400$ gefundene Wert $\gamma = 0,25$ auch für den Bereich höherer Reynoldszahlen der Kolmogoroffschen Theorie übernommen worden ist. Der asymptotische Wert für S stimmt gut überein mit dem von R. Betchov [1957] für $R_\lambda = 250$ gemessenen Wert $0,45 \pm 0,05$.

Für sehr kleine Reynoldszahlen, bei denen die Trägheitskräfte klein gegen die Zähigkeitskräfte sind, läßt sich $f(r, t)$ exakt aus (16) bestimmen. Es ergibt sich, daß $f(r, t)$ asymptotisch einer sich ähnlich ändernden Funktion zustrebt, für die $G = 3$ (Batchelor & Townsend [1948]). Aus Gleichung (28) folgt somit, daß $S \rightarrow 0$ mit $R_\lambda \rightarrow 0$ — in Übereinstimmung mit der von Batchelor [1953] gefundenen asymptotischen Normalverteilung der Geschwindigkeitsschwankungen bei sehr kleinen Reynoldszahlen.

Schrifttum

- Batchelor, G. K., 1947: Kolmogoroff's theory of locally isotropic turbulence. Proc. Camb. Phil. Soc. **43**, 523.
- Batchelor, G. K., 1953: The theory of homogeneous turbulence. Camb. Univ. Press.
- Batchelor, G. K., and A. A. Townsend, 1947: Decay of vorticity on isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. A **190**, 534.
- Batchelor, G. K., and A. A. Townsend, 1948: Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc. A **194**, 527.
- Betchov, R., 1957: On the fine structure of turbulent flows. J. Fluid Mechanics **3**, 205.
- Chandrasekhar, S., 1953: Some aspects of the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Symp. Appl. Math. **4**, 1.
- Heisenberg, W., 1948: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Physik **124**, 628.
- Kármán, T. von, and L. Howarth, 1938: On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. A **164**, 192.
- Kolmogoroff, A. N., 1941: The local structure of turbulence in incompressible viscous flow for very large Reynolds' numbers. S. R. Acad. Sci. U. R. S. S. **30**, 301.
- Proudman, J., 1951: A comparison of Heisenberg's spectrum of turbulence with experiment. Proc. Camb. Phil. Soc. **47**, 158.
- Robertson, H. P., 1940: The invariant theory of isotropic turbulence. Proc. Camb. Phil. Soc. **36**, 209.
- Stewart, R. W., and A. A. Townsend, 1951: Similarity and self-preservation in isotropic turbulence. Phil. Trans. A **243**, 359.
- Weizsäcker, C. F. von, 1948: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. Z. Physik **124**, 614.
- Wiegardt, K., 1941: Zusammenfass. Bericht über Arbeiten zur statistischen Turbulenztheorie. Luftfahrtforschung **18**, 1.

Eingegangen im Mai 1958

MITTEILUNGEN

Strombeobachtungen in der südwestlichen Nordsee

In der Reihe: Meereskundliche Beobachtungen und Ergebnisse, Deutsches Hydrographisches Institut, Hamburg, wurden bisher nur Beobachtungen auf den Feuerschiffen der Nord- und Ostsee (Heft Nr. 1 bis 8) veröffentlicht. Es war jedoch vorgesehen, darüber hinaus auch Beobachtungen und Ergebnisse anderer Meßreihen zu geben; das geschieht erstmalig mit dem vorliegenden Heft Nr. 9 (1958).

Das genannte Heft enthält Ergebnisse von Schaufelrad-Strommessungen. Ein Schaufelrad-Strommesser ist bekanntlich ein am Meeresboden verankertes, in beliebiger Wassertiefe ungewartet registrierendes Gerät, auf das in der Einleitung zu Heft 9 kurz eingegangen wird. —