

Fakultät für Physik und Astronomie  
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

**Diplomarbeit**  
**im Studiengang Physik**  
**vorgelegt von**  
**Sarah Müller**  
**aus Buchen**  
**2009**



**Elektron–Positron–Paarerzeugung durch  
Multiphotonen–Absorption im Stoß eines  
relativistischen Myons mit einem hochfrequenten  
Laserstrahl**

**Die Diplomarbeit wurde von Sarah Müller ausgeführt am  
Max–Planck–Institut für Kernphysik  
unter der Betreuung von  
Herrn Prof. Christoph H. Keitel**



## **Elektron–Positron–Paarerzeugung durch Multiphotonen–Absorption im Stoß eines relativistischen Myons mit einem hochfrequenten Laserstrahl**

### **Zusammenfassung:**

In dieser Arbeit wird die Erzeugung von Elektron–Positron–Paaren beim Stoß eines relativistischen Myons mit einem zirkular polarisierten Röntgenlaser im Bereich kleiner Laserintensitätsparameter untersucht. Bei der frontalen Kollision des Projektilmyons mit dem Laserfeld entstehen durch die simultane Absorption eines oder mehrerer Laserphotonen Paare von Elektronen und Positronen. Das Feynman–Diagramm der führenden Ordnung in der Feinstrukturkonstanten wird im Rahmen der *Laser–dressed* Quantenelektrodynamik mit Hilfe der relativistischen Volkov–Zustände berechnet. Das Ergebnis wird mit dem bekannten Ausdruck für Protonen als Projektile verglichen, die als externes Coulomb–Feld behandelt werden. Es wird gezeigt, dass beide Ansätze im Grenzfall niedriger Laserintensität strukturell übereinstimmen. Numerisch berechnete differentielle Paarerzeugungsraten, insbesondere die Rückstoßverteilung und ihre Abhängigkeit von der Projektilmasse, werden diskutiert. Dabei werden sowohl lineare als auch nicht–lineare Prozesse betrachtet. Desweiteren wurde für Protonen als Projektile die Paarerzeugungsraten im Above–Threshold–Regime untersucht und ein exponentieller Zusammenhang zwischen der totalen Rate und dem Verhältnis aus der Ruheenergie des Elektrons und der Photonenenergie gefunden.

## **Electron–Positron Pair Creation by Multiphoton Absorption in the Collision of a Relativistic Muon with a High–Frequency Laser Field**

### **Abstract:**

In the present work, electron–positron pair creation in the collision of a relativistic muon with a circular–polarised X–ray laser beam is investigated within the range of small laser intensity parameters. In the head–on collision between the muon projectile and the laser field, pairs of electrons and positrons are produced via the simultaneous absorption of one or more laser photons. The leading–order Feynman diagram of this process is evaluated within the framework of laser–dressed quantum electrodynamics employing relativistic Volkov states. The result is compared to the known expression for proton projectiles which are treated as external Coulomb field. In the limit of small laser intensity, both approaches are shown to coincide. Differential pair creation rates, in particular the recoil distribution, are calculated numerically. The dependence of the recoil effect on the projectile mass is discussed. We consider both linear and non–linear processes. Furthermore, we investigate the pair creation rate for proton projectiles in the above–threshold regime and find an exponential relation between the total rate and the ratio of electron rest mass to photon energy.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Erzeugung von Elektron–Positron–Paaren . . . . .	1
1.2	Paarerzeugung durch hochenergetische Photonen . . . . .	2
1.3	Paarerzeugung in starken Laserfeldern . . . . .	3
1.4	Unterteilung in verschiedene Regimes . . . . .	4
1.5	Bereits existierende Untersuchungen . . . . .	5
1.5.1	Das Experiment E-144 am SLAC . . . . .	5
1.5.2	Paarerzeugung durch den Stoß eines hochrelativisti- schen Protons mit einem starken Laserstrahl . . . . .	6
1.5.3	Elektron–Myon–Streuung in Laserfeldern . . . . .	7
1.5.4	Der hier untersuchte Paarerzeugungsprozess im Grenz- fall verschwindender Laserfrequenz . . . . .	8
1.6	Zielsetzung und Aufbau dieser Arbeit . . . . .	8
1.7	Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Geladene Teilchen in Laserfeldern</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Zusammenfassung der Rechnung für Protonen</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Analytische Rechnung für Myonen</b>	<b>19</b>
4.1	Die Übergangsamplitude . . . . .	19
4.1.1	Der elektronische Anteil am Übergang . . . . .	22
4.1.2	Der myonische Anteil am Übergang . . . . .	27
4.1.3	Die gesamte Übergangsamplitude . . . . .	29
4.2	Die Spinsumme über das Amplitudenquadrat . . . . .	31

4.3	Die Integration über das Amplitudenquadrat . . . . .	35
4.3.1	Transformation ins Schwerpunktsystem . . . . .	37
4.3.2	Koordinatentransformation . . . . .	38
4.3.3	Durchführung der verbleibenden Integrale . . . . .	44
4.3.4	Rücktransformation ins Ruhesystem . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>49</b>
5.1	Totale Paarerzeugungsraten . . . . .	49
5.1.1	Grenzwert für kleinen Intensitätsparameter . . . . .	49
5.1.2	Vergleich mit Ergebnissen für Protonen als Projektile . . . . .	53
5.2	Massenabhängigkeit der Rückstoßverteilung . . . . .	57
5.2.1	Genauigkeit der Rechnung für Elektronen . . . . .	65
5.3	Differentielle Raten im Schwerpunktsystem . . . . .	67
5.4	Above-Threshold-Regime . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>79</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	79
6.2	Experimentelle Realisierbarkeit . . . . .	81
6.3	Ausblick . . . . .	82
<b>A</b>	<b>Festlegung der Notation</b>	<b>i</b>
<b>B</b>	<b>Gewöhnliche zylindrische Bessel-Funktionen</b>	<b>v</b>
<b>C</b>	<b>Rechenregeln für Gamma-Matrizen</b>	<b>ix</b>
<b>D</b>	<b>Eigenschaften freier Dirac-Spinoren</b>	<b>xi</b>
<b>E</b>	<b>Spinsumme über das Amplitudenquadrat</b>	<b>xiii</b>
E.1	Die Summe über die Myonenspins . . . . .	xiii
E.2	Ergebnis für den Myonenvertex . . . . .	xxii
E.3	Ergebnis für den Elektronenvertex . . . . .	xxv
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>xxxix</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>xxxiii</b>

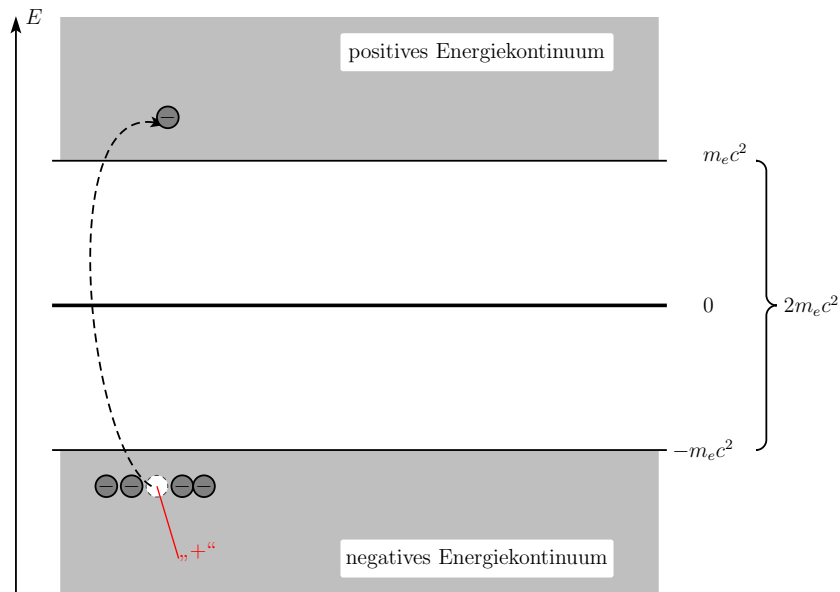


# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Erzeugung von Elektron–Positron–Paaren

Die Erzeugung von Elektron–Positron–Paaren ist ein sehr interessantes Gebiet in der relativistischen Quantenphysik [BD64]. Man kann Paarproduktion im sogenannten Dirac–Bild als den Übergang eines Elektrons vom negativen ins positive Energie–Kontinuum auffassen (Abb. 1.1). In diesem Bild wird das Vakuum durch einen See, oder ein Meer, von Teilchen in Zuständen negativer Energie repräsentiert. Auf Elektronen aus diesem See können wir nicht zugreifen. Fügen wir aber einem See–Elektron Energie zu, so ist es möglich, es aus seinem Zustand mit negativer Energie in einen Zustand mit positiver Energie zu heben. So „entsteht“ ein Elektron, das wir wahrnehmen und manipulieren können. Gleichzeitig entsteht im Dirac–See ein Loch, das sich so verhält, wie ein Elektron mit umgekehrter elektrischer Ladung und Energie sich verhalten würde. Dieses Loch wird dann von uns als Anti–Elektron, also Positron, gedeutet. Durch das Herausheben des Elektrons aus dem negativen Energiekontinuum entsteht der Eindruck, dass Masse erschaffen worden sei. Man hat also Energie, die man dem Elektron im See zugeführt hat, in Masse „verwandelt“ — dies verdeutlicht eindrücklich die Äquivalenz von Masse und Energie. Wie Abb. 1.1 veranschaulicht, muss zur Erzeugung eines *freien* Elektron–Positron–Paares mindestens das Doppelte der Ruheenergie  $m_e c^2$  eines Elektrons aufgewandt werden.



**Abbildung 1.1:** Dirac-See der Elektronen. Das positive Energiekontinuum liegt oberhalb der Energie  $m_e c^2$ , das negative unterhalb von  $-m_e c^2$ . Das negative Energiekontinuum ist mit Elektronen gefüllt. Hebt man eines dieser Elektronen durch Energiezufuhr in das positive Energiekontinuum, so entsteht ein Loch, das im Vergleich zu den vorhandenen Elektronen positiv geladen erscheint. Hierfür ist die Überwindung der Energieschwelle nötig.

## 1.2 Paarerzeugung durch hochenergetische Photonen

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Elektron-Positron-Paare mit Hilfe hochenergetischer Photonen zu erzeugen. Bereits im Jahre 1934 wurde von BREIT und WHEELER die Möglichkeit der Paarproduktion durch den Stoß zweier Photonen untersucht [BW34]:

$$\gamma_1 + \gamma_2 \longrightarrow e^+ e^-. \quad (1.1)$$

Eine weitere Möglichkeit wurde von BETHE und HEITLER betrachtet [BH34]. Durch Absorption eines hochenergetischen Photons  $\gamma$  im Coulomb-Feld eines Atomkerns kann über die Aussendung eines *virtuellen* Photons  $\gamma_*$  ein Elektron-Positron-Paar erzeugt werden:

$$\gamma + \gamma_* \longrightarrow e^+ e^-. \quad (1.2)$$

Im folgenden werden der Prozess (1.1) mit *Breit–Wheeler–Paarerzeugung* und der Prozess (1.2) mit *Bethe–Heitler–Paarerzeugung* bezeichnet.

Verwendet man Laserstrahlen statt einzelner Photonen, so lassen sich die Prozesse (1.1) und (1.2) verallgemeinern. Man unterscheidet dann zwischen linearen und sogenannten nicht-linearen Prozessen, wobei beim nicht-linearen Prozess mehr als ein Photon aus dem Laserfeld beteiligt ist. Für den nicht-linearen Bethe–Heitler–Paarerzeugungsprozess errechnet sich die minimale Anzahl absorbierter Photonen aus der Mandelstam–Variable für die Schwerpunktsenergie beim Streuprozess. Im Ruhesystem des einlaufenden Projektils gilt:

$$r_0 \hbar \omega \geq 2m_e c^2 + \frac{2m_e^2 c^2}{M} = 2m_e c^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right), \quad (1.3)$$

wobei  $2m_e c^2$  die Ruheenergie des erzeugten Paares ist und  $M$  die Ruhemasse des Projektilteilchens. Mit  $r_0$  wird die minimale Anzahl absorbierter Photonen bezeichnet, und die Photonenenergie ist  $\hbar \omega$ .

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (1.3) stellt einen Rückstoß auf das Projektil dar. Je schwerer das Projektil im Vergleich zu dem erzeugten Paar ist, desto weniger stark ist der minimale Rückstoßeffect. Handelt es sich bei den verwendeten Projektilteilchen um Elektronen, so ist die Rückstoßenergie so groß wie die Ruheenergie des erzeugten Paares. Dann muss die aus dem Laserfeld absorbierte Energie für den Bethe–Heitler–Prozess mindestens  $4m_e c^2$  betragen. Im Vergleich zu schwereren Projektilteilchen ist daher der Bethe–Heitler–Prozess für Elektronen als Projektilteilchen stark unterdrückt. Verwendet man dagegen viel schwerere Teilchen als Projektile, etwa Protonen oder Atomkerne, so ist die Rückstoßenergie im Vergleich zu der Ruhemasse des erzeugten Paares vernachlässigbar klein.

### 1.3 Paarerzeugung in starken Laserfeldern

Es gibt bereits eine Reihe von Untersuchungen, die sich mit der Erzeugung von Elektron–Positron–Paaren in starken Laserfeldern befassen. Bereits im Jahre 1931 fand SAUTER [Sau31], dass in einem konstanten elektrischen Feld spontane Paarerzeugung möglich ist, falls die elektrische Feldstärke größer ist als der kritische Wert von

$$\mathcal{E}_{kr} = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 1,3 \times 10^{16} \frac{V}{cm}. \quad (1.4)$$

Ein Feld von dieser Stärke verrichtet an einer Elementarladung  $e$  entlang einer Compton-Wellenlänge  $\lambda_c = \hbar/mc$  eine Arbeit, die gerade der Ruheenergie eines Elektrons entspricht.

In sehr intensiven Laserfeldern treten ebenfalls sehr große elektrische Feldstärken auf. SCHWINGER fand 1951 [Sch51], dass ein Laserfeld allein keine Teilchen-Antiteilchen-Paare erzeugen kann. Lässt man aber, wie im Breit-Wheeler- oder Bethe-Heitler-Prozess, ein Photon oder ein geladenes Teilchen mit einem hochintensiven Laserstrahl kollidieren, so können dadurch Elektron-Positron-Paare entstehen.

## 1.4 Unterteilung in verschiedene Regimes

Man kann für die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren in Laserfeldern drei Regimes unterscheiden. Hierzu führt man einen Laser-Intensitätsparameter  $\xi$  ein, der das Verhältnis aus Laserfeldstärke und Photonenenergie widerspiegelt:

$$\xi = \frac{e}{mc^2} \sqrt{-\overline{A^2}}. \quad (1.5)$$

Hier ist  $e$  die Elementarladung und  $\overline{A^2}$  ist das zeitlich gemittelte Quadrat des Viererpotentials des Lasers<sup>1</sup>. In jedem dieser drei Bereiche verhält sich die Wahrscheinlichkeit für Paarerzeugung unterschiedlich.

Für sehr große Intensitätsparameter  $\xi$  ist die Laserintensität sehr groß, aber die Photonenenergie relativ klein. Durch die hohe Laserintensität ist die Feldstärke sehr groß; bleibt sie unter der kritischen Feldstärke (1.4), ist der Paarerzeugungsprozess analog zu einem Tunnelprozess aufzufassen, bei dem Elektronen aus dem negativen ins positive Energie-Kontinuum tunneln können. Man spricht dann vom sogenannten *Tunnel-Regime*. Typischerweise werden hier sehr viele Photonen aus dem Laserfeld absorbiert, viel mehr als zur Überwindung der Energieschwelle nötig wären. YAKOVLEV stellte fest, dass für nicht-lineare Bethe-Heitler-Paarerzeugung mit einem Proton als Projektilteilchen der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate im Tunnelregime von der Absorption von  $r \sim \xi r_0$  herrührt [Yak65]. Die totale Rate skaliert hier nach der Schwinger-Gleichung [Sch51] mit

$$R \propto \exp\left(-\pi \frac{\mathcal{E}_{kr}}{\mathcal{E}}\right). \quad (1.6)$$

<sup>1</sup> In der gewählten Eichung ist  $A^0 = 0$ .

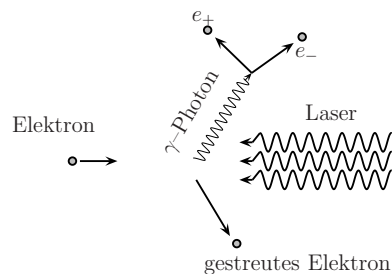
Deshalb ist  $-\overline{A^2} = -\overline{(A^0)^2 - |\vec{A}|^2} = +\overline{|\vec{A}|^2} \geq 0$ .

Für sehr kleine Intensitätsparameter ist Paarerzeugung möglich, wenn die Laserphotonen sehr hohe Energie besitzen. Dann genügt bereits die Absorption weniger Photonen aus dem Laserfeld, um die Energieschwelle (1.3) zu überwinden. Man nennt diesen Parameter-Bereich *Multiphotonen-Regime*. Hier kommt stets der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate von der Absorption der minimalen Photonenzahl. Die Partialrate  $R_r$  für die Absorption von  $r$  Photonen skaliert in diesem Bereich mit  $R_r \propto \xi^{2r}$ .

Den Bereich zwischen den genannten Regimes bezeichnet man in Analogie zur Photoionisation von Atomen und Molekülen in starken Laserfeldern mit *Above-Threshold-Regime*. Untersuchungen haben ergeben, dass sich in diesem Regime, wo der Intensitätsparameter  $\xi \approx 1$  ist, die Paarerzeugungsrate ähnlich der Ionisierungsrate verhält. Der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate rührt hier von der Absorption einer Photonenzahl  $r$  her, die etwas größer, aber von der gleichen Größenordnung ist wie die minimale Anzahl  $r_0$ , ab der die Erzeugung des Paares energetisch möglich ist.

## 1.5 Bereits existierende Untersuchungen

### 1.5.1 Das Experiment E-144 am SLAC



**Abbildung 1.2:** Schematische Darstellung des am SLAC untersuchten Paarerzeugungsprozesses.

Ende der 1990er Jahre fand am *Stanford Linear Accelerator Center* (SLAC) in Stanford ein Experiment unter der Leitung von MCDONALD und BURKE statt, in dem bei der Kollision hochrelativistischer Elektronen mit einem Laserfeld die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren beobachtet werden konnte [BFHS97, BBK99]. Die Projektil-Elektronen hatten eine kinetische Energie von  $46,6\text{GeV}$ , also einen Lorentzfaktor  $\gamma$  von etwa  $9 \cdot 10^4$ . Die Laserfrequenz lag im optischen Bereich: es handelte sich um einen Nd:YAG-Laser mit einer Photonenenergie von  $2,35\text{eV}$ . Im Ruhesystem der einlaufenden Elektronen betrug die Photonenenergie aufgrund der relativistischen

Doppler-Verschiebung  $428\text{keV}$ . Der Laser erreichte eine elektrische Feldstärke von bis zu  $2,7 \cdot 10^{10}\text{V/cm}$  im Laborsystem bzw.  $4,9 \cdot 10^{15}\text{V/cm} = 0,38\mathcal{E}_{kr}$  im Ruhesystem der einlaufenden Projektile. Damit konnte die Energieschwelle (1.3) von  $4m_e c^2$  durch die Absorption von  $r \geq r_0 = 5$  Laserphotonen überwunden werden. Der Laserintensitätsparameter  $\xi$  ist für diese Konstellation klein; er belief sich auf  $\xi \approx 0,3$ . Man kann den hier untersuchten Prozess also ins Multiphotonen-Regime einordnen. Das Experiment zeigte, dass die Paarerzeugung hauptsächlich durch die Absorption von  $r_0 = 5$  Photonen stattgefunden hat.

Anders als für den in dieser Arbeit betrachteten Prozess handelte es sich bei diesem Experiment um einen Breit-Wheeler-Paarerzeugungsprozess: Die Elektronen wurden beim Stoß mit dem Laserfeld Compton-gestrent, und das dadurch entstandene hochenergetische  $\gamma$ -Photon erzeugte seinerseits bei dem Stoß mit den Laserphotonen ein Elektron-Positron-Paar.

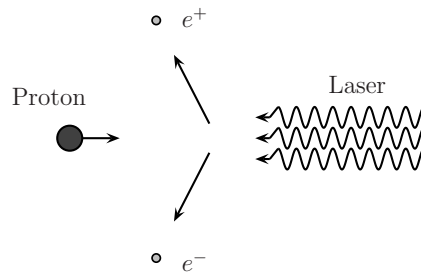
Aufgrund des großen Rückstoßeffekts auf die leichten Elektronen und der damit verbundenen vergleichsweise hohen Schwellenenergie ist für diese Konstellation der Bethe-Heitler-Prozess gegenüber dem indirekten Breit-Wheeler-Prozess stark unterdrückt.

### 1.5.2 Paarerzeugung durch den Stoß eines hochrelativistischen Protons mit einem starken Laserstrahl

Benutzt man als Projektilteilchen für den oben beschriebenen Stoßprozess anstelle eines Elektrons ein Proton, so ist der mit Elektronen-Projektilen auftretende zweistufige Paarerzeugungsprozess deutlich unterdrückt: der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung ist umgekehrt proportional zum Massenquadrat des streuenden Teilchens. Somit ist für Protonen die Rate der Compton-Streuung um einen Faktor  $m_e^2/M_p^2$  kleiner als für Elektronen, also um mehr als sechs Größenordnungen. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Bethe-Heitler-Prozesses dagegen ist für Protonen in etwa in der gleichen Größenordnung wie für Elektronen. Dies führt dazu, dass sich die Größenverhältnisse zwischen dem (direkten) Bethe-Heitler-Prozess und dem (indirekten) Breit-Wheeler-Prozess im Vergleich zu den Elektronen als Projektilteilchen umkehren. Eine ausführlichere Diskussion dieses Sachverhaltes findet sich in der Einleitung von [Mül03]. Daher eignen sich Protonen oder schwerere Atomkerne hervorragend für die theoretische Untersuchung der Bethe-Heitler-Paarerzeugung.

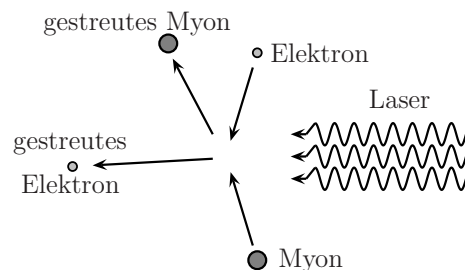
Beginnend mit der Untersuchung von YAKOVLEV aus dem Jahre 1965 [Yak65] befassen sich einige Studien mit diesem Stoßprozesses. Eine Übersicht darüber findet sich in [SHHK06]. Die Rückstoßenergie auf das Projektil ist um drei

Größenordnungen kleiner als die Ruheenergie der erzeugten Teilchen. Daher ist die Näherung angemessen, dass das Proton unendliche Masse besitzt und sich — in seinem Ruhesystem betrachtet — nur als konstantes äußeres Coulomb-Feld an dem Erzeugungsprozess beteiligt.



**Abbildung 1.3:** Schematische Darstellung des Paarerzeugungsprozesses mit einem Atomkern bzw. Proton als Projektileilchen.

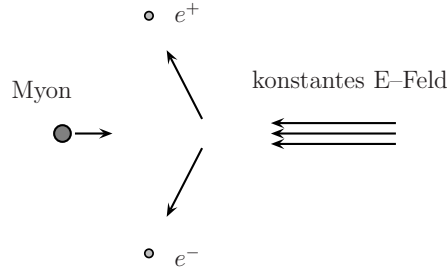
### 1.5.3 Elektron–Myon–Streuung in Laserfeldern



**Abbildung 1.4:** Schematische Darstellung des von NEDORESHTA untersuchten Streuprozesses.

Eine recht neue Untersuchung von NEDORESHTA *et al.* [NVR07] behandelt den Stoß eines Elektrons mit einem Myon in einem starken Laserfeld. Der dort gebrauchte Formalismus zur Beschreibung des Prozesses wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet (Kapitel 4). Der Streuprozess wird relativistisch behandelt; er findet unter dem Austausch eines virtuellen Photons statt. Wie im hier untersuchten Falle der Paarerzeugung durch Myonen wird auch dort dieses virtuelle Photon durch einen freien Dirac-Propagator und die geladenen Teilchen im Laserfeld durch Volkov-Zustände beschrieben.

### 1.5.4 Der hier untersuchte Paarerzeugungsprozess im Grenzfall verschwindender Laserfrequenz



**Abbildung 1.5:** Schematische Darstellung des von RITUS untersuchten Paarerzeugungsprozesses.

RITUS [Rit72] untersuchte schon im Jahre 1972 den Prozess  $\mu \rightarrow \mu' + e^+e^-$  in konstanten gekreuzten Feldern, also

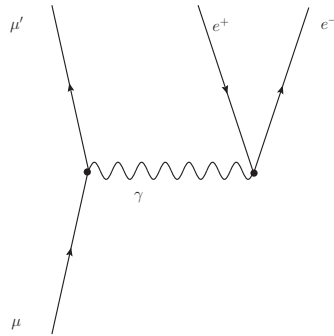
$$\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{B}$$

wie im Falle einer ebenen Welle. Man kann diesen Paarerzeugungsprozess als einen Grenzfall des auch hier betrachteten Prozesses auffassen: lässt man die Laserfrequenz  $\omega$  gegen 0 laufen, so ergeben sich konstante Felder. Dies ist der zu dieser Arbeit entgegengesetzte Grenzfall: hier wird der Grenzwert sehr großer Laserfrequenzen,  $\hbar\omega \sim m_e c^2$ , behandelt.

## 1.6 Zielsetzung und Aufbau dieser Arbeit

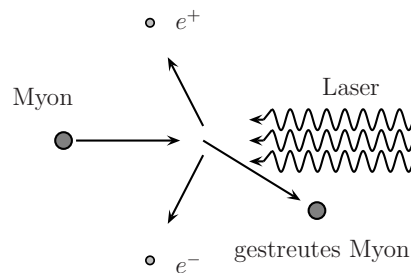
Der in dieser Arbeit hauptsächlich betrachtete Paarerzeugungsprozess wird durch das Feynman-Diagramm in Abb. 1.6 beschrieben. Ein hochrelativistisches Myon entsendet beim Stoß mit einem Laserfeld ein virtuelles Photon, das wiederum in ein Elektron-Positron-Paar zerfällt. Der Prozess wird im Multiphotonen-Regime untersucht, also im Bereich sehr kleiner Intensitätsparameter  $\xi$  des Lasers, woraus eine kleine Laserintensität und somit auch -feldstärke folgen. Daher muss die Energie der einzelnen Photonen des Lasers sehr hoch sein, um zu gewährleisten, dass die Energieschwelle (1.3) durch Absorption einiger Photonen überschritten werden kann. Dies wird durch die angenommene große kinetische Energie der Projektilyonen erreicht: durch den relativistischen Doppler-Effekt ist die Frequenz und damit auch die Energie der Laserphotonen im Ruhesystem des einlaufenden Myons um einen Faktor  $((1+\beta)/(1-\beta))^{1/2}$  vergrößert, wobei  $\beta = v/c$  das Verhältnis





**Abbildung 1.6:** Feynman-Diagramm für den untersuchten Prozess.

aus der Projektilgeschwindigkeit  $v$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist. Mit den geplanten XFEL-Lasern, die eine Photonenenergie von  $\hbar\omega \sim 10\text{keV}$  anstreben, würde man für einen Lorentzfaktor des Myons von  $\gamma \sim 50$  in seinem Schwerpunktsystem eine Photonenenergie von ca.  $1\text{MeV}$  erhalten. Dies würde zur Elektron-Positron-Paarherzeugung durch einen Zwei-Photonen-Prozess ausreichen.



**Abbildung 1.7:** Schematische Darstellung des in dieser Arbeit untersuchten Paarherzeugungsprozesses.

Im Gegensatz zu den bereits vorhandenen Rechnungen für Protonen bzw. Atomkerne als Projektilteilchen ist die hier durchgeführte Rechnung für Myonen im Sinne der Quantenelektrodynamik exakt bis zur führenden Ordnung in der Feinstrukturkonstanten  $\alpha_f$ . Es wird keine grundsätzliche Näherung gemacht, wie z.B. die Annahme unendlicher Masse und damit die Vernachlässigung jeglicher Wechselwirkung des Projektils mit dem Laserfeld. Dies erlaubt es, einen Vergleich zwischen Myonen und Protonen bzw. Teilchen unendlicher Ruhemasse als Projektil zu ziehen und zu untersuchen, welche Auswirkungen der Rückstoß auf das Projektil auf die Paarherzeugungsraten hat. Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung der Elektron-Positron-Paarherzeugung durch den Stoß eines Protons im Above-Threshold-Regime.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im folgenden kurzen Kapitel 2 werden die Volkov-Lösungen der Dirac-Gleichung für geladene Teilchen in ebenen elektromagnetischen Wellen eingeführt. Anschließend wird in Kapitel 3 die Rechnung für Protonen unter der Annahme unendlicher Masse kurz zusammengefasst. Den Hauptteil dieser Arbeit stellen die folgenden beiden Kapitel dar: In Kapitel 4 wird die Berechnung des genannten Paarerzeugungsprozesses für Myonen als Projektilteilchen vorgestellt. In Kapitel 5 werden die Ergebnisse für Myonen und Protonen verglichen sowie die gefundenen Rückstoßeffekte dargestellt. Neben einigen differentiellen Paarerzeugungsraten für Myonen als Projektilteilchen werden auch Ergebnisse für Protonen als Projektile im Above-Threshold-Regime angegeben. In Kapitel 6 finden sich eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf offene Fragen und experimentelle Realisierbarkeit.

In Anhang A werden die Notation festgelegt sowie einige nützliche Formeln aufgelistet. Anhang B fasst einige Eigenschaften der Bessel-Funktionen zusammen, von denen in der Arbeit Gebrauch gemacht wird. Anhang C enthält wichtige Rechenregeln für Gamma-Matrizen und Anhang D fasst einige Eigenschaften der freien Dirac-Spinoren zusammen. In Anhang E ist das Ergebnis der in Kapitel 4 hergeleiteten Spurmultiplikation angegeben.

## 1.7 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Wir werden sehen, dass im betrachteten Multiphotonen-Regime der analytische Ausdruck für die Paarerzeugungsrate mit Myonen als Projektilteilchen strukturell in denjenigen für Teilchen unendlicher Ruhemasse übergeht. Dennoch kann man einen deutlichen Unterschied in der Rückstoßenergie erkennen.

Die Rückstoßverteilung für Myonen als Projektile wurde mit derjenigen für Protonen als effektive Dirac-Teilchen verglichen. Bei einem untersuchten Zwei-Photonen-Prozess trat bei einer bestimmten Konstellation mit Myonen als Projektilteilchen ein Breit-Wheeler-Prozess auf. Die Paarerzeugung wurde auch für Elektronen als Projektile unter Vernachlässigung des Austauschterms untersucht. Es wurden sowohl für Myonen- als auch für Elektronen-Projektile differentielle Erzeugungsraten ausgewertet.

Für die Projektile unendlicher Ruhemasse wurde ein Zusammenhang zwischen der totalen Paarerzeugungsrate und der Photonenenergie im Above-Threshold-Regime ermittelt, der bereits für andere Paarerzeugungsprozesse mit gefunden wurde und der der Abhängigkeit im Tunnelregime ähnelt.

# Kapitel 2

## Geladene Teilchen in Laserfeldern

Für die quantenmechanische Beschreibung eines geladenen Spin- $1/2$ -Teilchens im Feld einer ebenen Welle ist die Dirac-Gleichung

$$(i\partial + e\mathcal{A} - m)\psi = 0 \quad (2.1)$$

zu lösen. Für unsere Zwecke erweist es sich als geschickt, zunächst die Dirac-Gleichung in zweiter Ordnung zu lösen. Anschließend werden, wie in § 40 in [BLP91], alle Lösungen verworfen, die (2.1) nicht lösen.

$$\begin{aligned} & (i\partial + e\mathcal{A} + m)(i\partial + e\mathcal{A} - m)\psi \\ &= (-\partial^2 + 2ie(A\partial) + e^2 A^2 - m^2 + ie\not{k}\mathcal{A}')\psi \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hier ist  $A^\mu(kx)$  das Viererpotential des elektromagnetischen Feldes der Laserwelle. Für die Zustandsfunktion  $\psi$  des Teilchens verwenden wir den Ansatz

$$\psi_p = e^{-i(px)}\varphi_p(\eta), \quad (2.3)$$

wobei  $\eta$  das Viererprodukt aus dem Wellenvektor  $k$  der elektromagnetischen Welle und dem Ortsvektor  $x$  des Teilchens bezeichnet,  $\eta = (kx)$ . Das Quadrat des konstanten Vierervektors  $p^\mu$  muss gleich dem Quadrat der Ruhemasse des Teilchens sein,  $p^2 = m^2$ . Ohne elektromagnetisches Feld entspricht  $p^\mu$  dem Viererimpuls des dann freien Teilchens. Einsetzen des Ansatzes (2.3) in die Differentialgleichung (2.2) führt zu der folgenden Gleichung für die Funktion  $\varphi_p(\eta)$ :

$$2i(kp)\frac{d\varphi_p}{d\eta} + (2e(pA) + e^2 A^2 + ie\not{k}\frac{dA}{d\eta})\varphi_p = 0. \quad (2.4)$$

Als Lösung dieser Gleichung findet man

$$\begin{aligned} \varphi_p(\eta) = N_p \exp\left(\frac{ie}{(kp)} \int^\eta [pA(\tilde{\eta}) + \frac{e}{2}A^2(\tilde{\eta})] d\tilde{\eta}\right) \\ \cdot \exp\left(-\frac{e}{2(kp)}\not{k}\not{A}\right) u_p \end{aligned} \quad (2.5)$$

mit einer Normierungskonstanten  $N_p$  und einem zunächst beliebigen Spinor  $u_p$ . Die untere Integrationsgrenze in der Exponentialfunktion in Gl. (2.5) liefert nur einen vom Ort unabhängigen Phasenfaktor. Dieser wird später durch die Wahl der Normierungskonstante festgelegt. Aus diesem Grunde lassen wir die Integrationsgrenze hier unbestimmt. Wegen der Relation (C.7) aus Anhang C ist

$$(\not{k}\not{A})^2 = 2(kA)\not{k}\not{A} - \not{k}^2 A^2 = k^2 A^2 = 0. \quad (2.6)$$

Damit verschwinden in der Reihendarstellung der Exponentialmatrix in (2.5) alle Terme, in denen  $\not{k}\not{A}$  quadratisch auftritt, also alle Terme ab der Ordnung 2:

$$\exp\left(-\frac{e}{2(kp)}\not{k}\not{A}\right) = \mathbb{1} - \frac{e}{2(kp)}\not{k}\not{A}. \quad (2.7)$$

Mit der Forderung, dass die Zustandsfunktion des Teilchens bei Ausschalten des Feldes die freie Dirac-Gleichung

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2.8)$$

lösen muss, wird dafür gesorgt, dass alle Lösungen der Differentialgleichung (2.2), die nicht die Dirac-Gleichung (2.1) lösen, verworfen werden. Dies legt den Spinor  $u_p$  fest: es muss  $u_p = u_{p,s}$  ein freier Dirac-Spinor zum Impuls  $p$  und der Spinprojektion  $s$  sein [BD64]. Die für unsere Zwecke wichtigsten Eigenschaften der Dirac-Spinoren sind in Anhang D aufgelistet.

Als Lösung der Dirac-Gleichung für Teilchen der Ladung  $-e$  im Feld einer elektromagnetischen Welle erhält man schließlich die von VOLKOV im Jahre 1935 gefundenen Volkov-Zustände [Vol35]

$$\psi_p = \psi_{p,s}^{(-)}(x) = N_p \left(1 - \frac{e\not{k}\not{A}}{2(kp)}\right) u_{p,s} \exp(iS^{(-)}) \quad (2.9)$$

mit

$$S^{(-)} = -(px) + \frac{e}{2(kp)} \int^\eta [pA(\tilde{\eta}) + \frac{e}{2}A^2(\tilde{\eta})] d\tilde{\eta}. \quad (2.10)$$

Der Index  $(-)$  gibt an, dass das betrachtete Dirac-Teilchen negativ geladen ist. Der Volkov-Zustand (2.9) geht für  $A \rightarrow 0$  in eine Lösung der freien Dirac-Gleichung (2.8) über.  $S$  entspricht der klassischen Wirkung der Teilchenbewegung.

Für Antiteilchen findet man die entsprechenden Volkov-Zustände, indem man in den Gleichungen (2.9) und (2.10) von  $p^\mu$  zu  $-p^\mu$  übergeht und den Spinor  $u_{p,s}$  durch einen zugehörigen Spinor des Antiteilchens  $v_{p,s}$  ersetzt. Dies führt zu

$$\psi_{p,s}^{(+)} = N_p \left( 1 + \frac{e \not{k} \not{A}}{2(kp)} \right) v_{p,s} \exp(iS^{(+)}) \quad (2.11)$$

und

$$S^{(+)} = (px) + \frac{e}{(kp)} \int^\eta [pA(\tilde{\eta}) - \frac{e}{2} A^2(\tilde{\eta})] d\tilde{\eta}. \quad (2.12)$$

Es soll nun ein effektiver Impuls eingeführt werden, mit dem sich die Bewegung des Teilchens in gewohnter Form beschreiben lässt. Zu diesem Zweck betrachten wir die zum Volkov-Zustand gehörige Viererstromdichte

$$j^\mu = \overline{\psi}^{(-)} \gamma^\mu \psi_{p,s}^{(-)} = \frac{|N_p|^2}{m} \left( p^\mu + eA^\mu - e \left[ \frac{(pA)}{(kp)} + \frac{e}{2} \frac{A^2}{(kp)} \right] k^\mu \right). \quad (2.13)$$

Mit den Gleichungen (C.1) und (C.11) aus Anhang C kann man die Viererstromdichte ausrechnen. Für ihren zeitlichen Mittelwert findet man dann

$$\overline{j^\mu} = \frac{|N_p|^2}{m} \left( p^\mu - \frac{e^2 \overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu \right). \quad (2.14)$$

Die Viererstromdichte eines freien Teilchens lautet

$$\overline{j_{frei}^\mu} = \frac{|N_p|^2}{m} p^\mu. \quad (2.15)$$

Man kann also sagen, dass sich ein Teilchen in der ebenen Welle mit einem effektiven Impuls

$$q^\mu = p^\mu - \frac{e^2 \overline{A^2}}{2(kp)} k^\mu \quad (2.16)$$

bewegt. Führen wir nun noch den in der Einleitung bereits erwähnten Intensitätsparameter  $\xi$  ein,

$$\xi = \frac{e \sqrt{-\overline{A^2}}}{m} = \frac{e\mathcal{E}}{m\omega}, \quad (2.17)$$

so lautet der effektive Impuls (2.16)

$$q^\mu = p^\mu + \xi^2 \frac{m^2}{2(kp)} k^\mu. \quad (2.18)$$

Mit der zugehörigen effektiven Masse  $m_* = m\sqrt{1 + \xi^2}$  nimmt die effektive Gesamtenergie des Teilchens,  $E_q$ , eine gewohnte Gestalt an:

$$E_q^2 = |\vec{q}|^2 + m_*^2. \quad (2.19)$$

Die Differenz aus der effektiven und der freien Energie,  $E_q - E_p$ , bezeichnet man als *ponderomotive* Energie  $E_{pond}$ :

$$E_{pond} = E_q - E_p = q^0 - p^0. \quad (2.20)$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass Definition (2.18) sowohl für Teilchen als auch für Antiteilchen gültig ist.

Die Normierungskonstante  $N_p$  in den Volkov-Zuständen wird nun mit Hilfe des effektiven Impulses festgelegt:

$$N_p := \sqrt{\frac{m}{Vq^0}}, \quad (2.21)$$

wobei  $V$  ein konstantes Normierungsvolumen bezeichnet. Dann ist die 0-Komponente der Viererstromdichte auf  $j^0 = 1/V$  normiert und für die Volkov-Zustände gilt

$$\int (\psi_{p,s}^{(\pm)})^\dagger \psi_{p',s}^{(\pm)} d^3x = \frac{1}{V} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{q}'). \quad (2.22)$$

Die Normierung auf eine Delta-Funktion im effektiven Impuls ist zweckmäßig für die Rechnungen in den folgenden Kapiteln.

Es sei abschließend noch bemerkt, dass die Volkov-Zustände als Lösungen der zeitabhängigen Dirac-Gleichung keine stationären Zustände mit definierter Energie sind. Wenn die elektromagnetische Welle in  $z$ -Richtung propagiert, sind die Volkov-Funktionen Eigenzustände der Operatoren  $i\partial_x$ ,  $i\partial_y$  und  $i(\partial^0 - \partial_z)$  mit den Eigenwerten  $p_x$ ,  $p_y$  und  $(p^0 - p_z)$ . Der Impuls in  $z$ -Richtung ist also keine gute Quantenzahl mehr. Stattdessen sind nur die Impulskomponenten senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle sowie die Differenz  $(p^0 - p_z)$  gute Quantenzahlen.

# Kapitel 3

## Zusammenfassung der Rechnung für Protonen

In diesem Kapitel wollen wir die Berechnung des Prozesses  $p+r\gamma \rightarrow p+e^+e^-$  kurz zusammenfassen, um später darauf verweisen zu können. Viele der Rechenschritte ähneln denen für Myonen als Projektil, so dass sie im folgenden Kapitel 4 ausführlich besprochen werden. Hier sollen nur die wichtigsten Zwischenergebnisse gesammelt werden. Die diesem Kapitel zugrunde liegende Rechnung wurde der Dissertation [Mül03] entnommen. YAKOVLEV hat den Prozess bereits im Jahre 1965 untersucht [Yak65].

Wir betrachten stets eine zirkular polarisierte Laserwelle mit dem Viererpotential

$$A_L^\mu(x) = a_1^\mu \cos(kx) + a_2^\mu \sin(kx). \quad (3.1)$$

Damit lauten die Volkov-Zustände für die Elektronen<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{p-s-}(x) = & \sqrt{\frac{m}{q_-^0}} \left( 1 - \frac{e\cancel{A}}{2(kp_-)} \right) u_{p-s-} \\ & \times \exp \left( -q_-x + \frac{e}{(kp_-)} (p_-a_1 \sin(kx) - p_-a_2 \cos(kx)) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

---

<sup>1</sup> Das im vorigen Kapitel auftretende Normierungsvolumen wurde hier  $V = 1$  gesetzt. In der Rechnung für Myonen als Projektilteilchen tritt es wieder auf. Dort sieht man dann auch, warum das Endergebnis für die Paarerzeugungsrate unabhängig von der Wahl von  $V$  ist.

und für die Positronen

$$\begin{aligned} \psi_{p_+s_+}(x) &= \sqrt{\frac{m}{q_+^0}} \left( 1 + \frac{e\hbar A}{2(kp_+)} \right) v_{p_+s_+} \\ &\times \exp \left( q_+x + \frac{e}{(kp_+)} (p_+a_1 \sin(kx) - p_+a_2 \cos(kx)) \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Der Prozess der Paarerzeugung wird nun als ein Übergang eines Elektrons aus dem negativen ins positive Energiekontinuum aufgefasst. Dies wird in der hier verwendeten Näherung durch das Viererpotential  $A_K$  des Kerns bzw. Protons induziert und durch den Übergang eines Volkov-Zustands  $\psi_{p_+,s_+}^{(+)}$  aus dem negativen in einen Volkov-Zustand  $\psi_{p_-,s_-}^{(-)}$  aus dem positiven Energiekontinuum beschrieben. Die Übergangsamplitude hierfür lautet

$$\mathcal{S}_{p_+p_-} = ie \int \bar{\psi}_{p_-,s_-}^{(-)} A_K \psi_{p_+,s_+}^{(+)} d^4x. \quad (3.4)$$

In den verwendeten Einheiten (s. Anhang A) ist das skalare zeitlich konstante Coulomb-Potential des Atomkerns in seinem Ruhesystem

$$A_K^0 = \frac{Ze}{|\vec{x}|}, \quad (3.5)$$

wobei  $Z$  die Kernladungszahl und  $|\vec{x}|$  den Abstand vom Kern angeben. Für Protonen ist  $Z = 1$ . Das Vektorpotential des Protons ist 0, also ist

$$A_P^\mu = \left( \frac{e}{|\vec{x}|}, 0, 0, 0 \right). \quad (3.6)$$

Die Übergangsamplitude kann man in eine Fourier-Reihe entwickeln und man erhält

$$\mathcal{S}_{p_+p_-} = \frac{ime}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_r \mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)} \int \frac{e}{|\vec{x}|} e^{i(q_+ + q_- - rk)x} d^4x \quad (3.7)$$



mit dem dimensionslosen Übergangsmatrixelement

$$\mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)} := \bar{u}_{p_-s_-} \left( (\gamma^0 - \frac{e^2 a^2 k^0}{2(kp_+)(kp_-)} \not{k}) \cdot B_r \right. \quad (3.8)$$

$$\left. + \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kp_+)} \gamma^0 \not{q}_1 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_1 \gamma^0 \right] \cdot C_r \right. \quad (3.9)$$

$$\left. + \left[ \frac{1}{(kp_+)} \gamma^0 \not{q}_2 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_2 \gamma^0 \right] \cdot D_r \right) v_{p_+s_+}. \quad (3.10)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $B_r, C_r, D_r$  setzen sich aus regulären zylindrischen Besselfunktionen zusammen. Im Falle eines Myons als Projektilteilchen verläuft die Fourier-Entwicklung ganz analog. Sie wird im folgenden Kapitel 4 ausführlich dargestellt.

Der Summationsindex  $r$  gibt die Gesamtzahl absorbierter Photonen an. Der Faktor  $m/\sqrt{q_+^0 q_-^0}$  kommt von der Normierung der Volkov-Zustände. Wie man sieht, entspricht das Ortsintegral gerade der Fourier-Transformierten des Coulomb-Potentials. Das Zeitintegral liefert eine energierhaltende Delta-Funktion. Somit wird (3.7) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{p_+p_-} &= \frac{ime^2}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_r \mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)} \frac{4\pi}{|\vec{q}_+ + \vec{q}_- - r\vec{k}|^2} \cdot 2\pi\delta(q_+^0 + q_-^0 - rk^0) \\ &= \frac{-i4m\pi e^2}{\sqrt{q_+^0 q_-^0}} \sum_r \mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)} \frac{2\pi\delta(q_r^0)}{q_r^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei der Vierervektor  $q_r = q_+ + q_- - rk$  eingeführt wurde, der den Impulsübertrag auf das Proton darstellt. Aufgrund der Delta-Funktion verschwindet die Nullkomponente von  $q_r$ , weshalb  $q_r^2 = -|\vec{q}_r|^2$  ist.

Um eine Übergangswahrscheinlichkeit zu erhalten, muss man das Betragsquadrat der Übergangsamplitude (3.11) über die Spins der auslaufenden Teilchen summieren und über ihre Impulse integrieren.

Das Betragsquadrat der Amplitude kann man in einzelne Summanden auseinanderziehen:

$$|\mathcal{S}_{p_+p_-}|^2 = \sum_{r \geq r_0} |\mathcal{S}_{p_+p_-}^{(r)}|^2, \quad (3.12)$$

wobei mit  $r_0$  wieder die minimale Anzahl absorbierter Photonen, die zur Überwindung der Energieschwelle nötig ist, bezeichnet wird. Die einzelnen

Summanden lauten

$$|\mathcal{S}_{p_+p_-}^{(r)}|^2 = \frac{4\pi m^2 e^2}{q_+^0 q_-^0} |\mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)}|^2 \frac{2\pi\delta(q_r^0)}{q_r^4} \cdot T \quad (3.13)$$

mit einem Zeitfaktor  $T$  vom Quadrieren der Delta-Funktion (vgl. Kapitel 4, Gl. (4.53)). Auf diese Weise erhält man die vollständig differentielle Partialrate  $d^6 R_P^{(r)}$  für den Paarerzeugungsprozess im Feld eines Protons:

$$d^6 R_P^{(r)} = \frac{1}{T} \sum_{s_+s_-} |\mathcal{S}_{p_+p_-}^{(r)}|^2 \frac{d^3 q_+}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q_-}{(2\pi)^3}. \quad (3.14)$$

Die Spinsumme

$$\sum_{s_+s_-} |\mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)}|^2 \quad (3.15)$$

lässt sich mit den Relationen aus Anhang D und wie in Kapitel 4 gezeigt als eine Spur über Gamma-Matrizen schreiben. Führt man die Matrix

$$\begin{aligned} \Gamma_r = & \left[ \left( \gamma^0 - \frac{e^2 a^2 k^0 \not{k}}{2(kp_+)(kp_-)} \right) B_r + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \gamma^0 \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \not{k} \gamma^0 \right) C_r \right. \\ & \left. + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \gamma^0 \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \not{k} \gamma^0 \right) D_r \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

ein, so kann man die Spinsumme schreiben als

$$\sum_{s_+s_-} |\mathcal{M}_{p_+p_-}^{(r)}|^2 = \text{Sp} \left( \Gamma_r \frac{\not{p}_+ - m}{2m} \bar{\Gamma}_r \frac{\not{p}_- + m}{2m} \right). \quad (3.17)$$

Damit sind die wichtigsten Ergebnisse der Rechnung für Protonen als Projekttil zusammengefasst. Im folgenden Kapitel werden viele der Rechenschritte ausführlich behandelt.

# Kapitel 4

## Analytische Rechnung für Myonen

Die im Folgenden dargestellte Rechnung wurde für Myonen als Projektile beim Stoß mit einem zirkular polarisierten Laserstrahl durchgeführt. Größen wie Massen, Impulse, Spinprojektionen sowie die Zustandsfunktionen, die sich auf die erzeugten Elektronen bzw. Positronen beziehen, werden stets mit kleinen Buchstaben bezeichnet, die mit einem Index  $-$  für das Elektron bzw. einem Index  $+$  für das Positron versehen werden. Die zum Projektilteilchen gehörigen Größen werden mit Großbuchstaben ohne weitere Indizierung bezeichnet, wobei sich gestrichene Größen auf das gestreute Myon nach dem Stoß mit dem Laserfeld beziehen. Die Raum-Zeit-Vektoren des Elektron-Positron-Paares werden mit  $x$ , die des Myons vor und nach dem Stoß mit  $y$  bezeichnet.

Die Paarerzeugungsrate wird im Ruhesystem des einlaufenden Myons berechnet. Dort ist aufgrund der Dopplerverschiebung der Laserfrequenz die Energie der Photonen um ein Vielfaches größer als im Laborsystem.

### 4.1 Die Übergangsamplitude

Betrachten wir nun eine ebene, zirkular polarisierte Laserwelle mit dem Viererpotential

$$A(kx) = a_1 \cos(kx) + a_2 \sin(kx). \quad (4.1)$$

Hier sind  $a_1$  und  $a_2$

$$a_1 = (0, a, 0, 0) \quad \text{bzw.} \quad a_2 = (0, 0, a, 0). \quad (4.2)$$

In Kapitel 2 wurde der Laserintensitätsparameter  $\xi$  definiert (Gl. (2.17)). Wir werden im folgenden mit  $\xi = ea/m$  den Intensitätsparameter für die Wechselwirkung der erzeugten Elektronen bzw. Positronen mit dem Laserfeld bezeichnen. Um später darauf verweisen zu können, führen wir noch einen Intensitätsparameter  $\Xi = ea/M$  für die Wechselwirkung des Projektilmyons mit dem Laserfeld ein. Er hängt über

$$\Xi = \frac{m}{M}\xi \quad (4.3)$$

mit dem Intensitätsparameter für die Elektronen zusammen.

Die Laserwelle bewege sich in  $z$ -Richtung, somit ist der Wellenvektor gegeben durch

$$k = \omega(1, 0, 0, 1). \quad (4.4)$$

Wie man leicht sieht, ergeben sich folgende Relationen für die Viererprodukte

$$A^2 = a_1^2 = a_2^2 = -a^2, (kA) = (ka_1) = (ka_2) = (a_1a_2) = (kk) = 0. \quad (4.5)$$

Daraus folgt für die Wirkung  $S^{e^\pm}$  des erzeugten Elektrons bzw. Positrons

$$\begin{aligned} S^{e^\pm} &= \pm(p_\pm x) + \frac{e}{(kp_\pm)} \int^\eta \left[ p_\pm \cdot A(\tilde{\eta}) \mp \frac{e}{2} A^2(\tilde{\eta}) \right] d\tilde{\eta} \\ &= \pm(p_\pm x) + \frac{e}{(kp_\pm)} \int^\eta \left[ p_\pm \cdot (a_1 \cos(\tilde{\eta}) + a_2 \sin(\tilde{\eta})) \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{e}{2} \cdot (a_1 \cos(\tilde{\eta}) + a_2 \sin(\tilde{\eta}))^2 \right] d\tilde{\eta} \\ &= \pm(p_\pm x) + \frac{e}{(kp_\pm)} \cdot \left( (p_\pm a_1 \sin(\eta) - p_\pm a_2 \cos(\eta)) \mp \frac{e}{2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int^\eta (a_1^2 \cos^2(\tilde{\eta}) + a_2^2 \sin^2(\tilde{\eta}) + a_1 a_2 \cos(\tilde{\eta}) \sin(\tilde{\eta})) d\tilde{\eta} \right) \\ &= \pm(p_\pm x) + \frac{e}{(kp_\pm)} \cdot \left( (p_\pm a_1 \sin(\eta) - p_\pm a_2 \sin(\eta)) \mp \frac{e}{2} \int^\eta (-a^2) d\tilde{\eta} \right) \\ &= \pm(p_\pm x) + \frac{e(p_\pm a_1)}{(kp_\pm)} \sin(\eta) - \frac{e(p_\pm a_2)}{(kp_\pm)} \cos(\eta) \pm \frac{e^2 a^2}{2(kp_\pm)} \eta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

und für das Myon

$$S^{\mu^-} = -(Py) + \frac{e(Pa_1)}{(kP)} \sin(\kappa) - \frac{e(Pa_2)}{(kP)} \cos(\kappa) - \frac{e^2 a^2}{2(kP)} \kappa. \quad (4.7)$$

Hier sind  $\eta = (kx)$  das Viererprodukt aus dem Wellenvektor mit der Elek-

tronen- bzw. Positronen–Ortskoordinate und  $\kappa = (ky)$  das Viererprodukt aus dem Wellenvektor mit der Myonen–Ortskoordinate. Mit dem effektiven Impuls aus Gl. (2.18) ergeben sich aus der Wirkung (4.6) die Volkov-Zustände der Elektronen

$$\begin{aligned} \psi_{p_-s_-}(x) &= \sqrt{\frac{m}{Vq_-^0}} \left( 1 - \frac{e\cancel{k}A}{2(kp_-)} \right) u_{p_-s_-} \\ &\quad \times \exp \left( -q_-x + \frac{e}{(kp_-)} (p_-a_1 \sin(kx) - p_-a_2 \cos(kx)) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

und für die Positronen

$$\begin{aligned} \psi_{p_+s_+}(x) &= \sqrt{\frac{m}{Vq_+^0}} \left( 1 + \frac{e\cancel{k}A}{2(kp_+)} \right) v_{p_+s_+} \\ &\quad \times \exp \left( q_+x + \frac{e}{(kp_+)} (p_+a_1 \sin(kx) - p_+a_2 \cos(kx)) \right). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Für die Myonen ergeben sich aus (4.7) und der Definition (2.18) die Volkov-Zustände vor dem Stoß

$$\begin{aligned} \Psi_{PS}(y) &= \sqrt{\frac{M}{VQ^0}} \left( 1 - \frac{e\cancel{k}A}{2(kP)} \right) U_{PS} \\ &\quad \times \exp \left( -Qy + \frac{e}{(kP)} (Pa_1 \sin(ky) - Pa_2 \cos(ky)) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

und nach dem Stoß

$$\begin{aligned} \Psi_{P'S'}(y) &= \sqrt{\frac{M}{VQ'^0}} \left( 1 - \frac{e\cancel{k}A}{2(kP')} \right) U_{P'S'} \\ &\quad \times \exp \left( -Q'y + \frac{e}{(kP')} (P'a_1 \sin(ky) - P'a_2 \cos(ky)) \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die Übergangsamplitude für den Prozess  $\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+e^-$  lässt sich wie folgt berechnen [BLP91].:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+e^-} &= \frac{\alpha_f}{i} \iint d^4x d^4y \bar{\psi}_{p_-s_-}(x) \gamma^\mu \psi_{p_+s_+}(x) \\ &\quad \times \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \bar{\Psi}_{P'S'}(y) \gamma^\nu \Psi_{PS}(y). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Hier bezeichnen  $\alpha_f$  die Feinstrukturkonstante  $\alpha_f = 1/\sqrt{137}$  und  $i$  die ima-

ginäre Einheit.

Den freien Photonpropagator  $\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y)$  kann man schreiben als

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi e^{iq(x-y)}}{q^2} g^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Die Integrationsvariable  $q$  stellt den Impuls des virtuellen Photons dar, das zwischen den beiden Vertices propagiert wird. Die Verwendung des freien Photonpropagators rechtfertigt sich dadurch, dass nur sehr kleine Laserfeldparameter  $\xi$  betrachtet werden. Daher liegt die Laserfeldstärke  $\mathcal{E}$  im Ruhesystem des Myons deutlich unterhalb des kritischen Wertes aus (1.4),  $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{kr}$ . Somit sind Vakuumpolarisationseffekte, die eine Modifizierung des Propagators verlangen, sehr klein und dürfen vernachlässigt werden (vgl. [BM75]).

### 4.1.1 Der elektronische Anteil am Übergang

Zunächst wird nur der elektronische Übergangsvortex,  $\bar{\psi}_{p_-s_-}(x)\gamma^\mu\psi_{p_+s_+}(x)$ , betrachtet. Die Erzeugung des Elektron-Positron-Paars wird, wie bereits angedeutet, als Übergang eines Volkov-Zustands im negativen Energiebereich,  $\psi_{p_+s_+}$ , in einen Volkov-Zustand im positiven Energiebereich,  $\psi_{p_-s_-}$ , aufgefasst. Mit anderen Worten wird gemäß dem in der Dirac-Theorie vermittelten Bild ein Elektron aus dem Dirac-See in das positive Energiekontinuum gehoben, wobei im See ein „Loch“ entsteht, das von uns als Positron interpretiert wird.

Mit der Definition der Volkov-Zustände (2.9) bzw. (2.11) und den Regeln aus Anhang D für die Dirac-Spinoren kann man den elektronischen Übergang ausschreiben, wobei die Abkürzung  $\mathcal{V}$  für den Übergang zwischen Zuständen (ohne Normierungskonstanten) eingeführt wird:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{e^+e^-} &:= \bar{\psi}_{p_-s_-}(x)\gamma^\mu\psi_{p_+s_+}(x) \cdot \frac{V\sqrt{q_+^0q_-^0}}{m} \\ &= \left[ \left( 1 - \frac{e\not{k}\not{A}}{2(kp_-)} \right) u_{p_-s_-} \right] \gamma^\mu \left( 1 + \frac{e\not{k}\not{A}}{2(kp_+)} \right) v_{p_+s_+} \\ &\quad \cdot \exp\left(-i\left(-q_-x + \frac{e}{2(kp_-)}(p_-a_1 \sin(kx) - p_-a_2 \cos(kx))\right)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(i\left(q_+x + \frac{e}{2(kp_+)}(p_+a_1 \sin(kx) - p_+a_2 \cos(kx))\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}_{p_- s_-} \left( 1 - \frac{e \not{A}}{2(kp_-)} \right) \gamma^0 \gamma^\mu \left( 1 + \frac{e \not{A}}{2(kp_+)} \right) v_{p_+ s_+} \\
&\quad \cdot \exp \left( i \frac{e}{(kp_+)} (p_+ a_1 \sin(kx) - p_+ a_2 \cos(kx)) \right) \\
&\quad \cdot \exp \left( -i \frac{e}{(kp_-)} (p_- a_1 \sin(kx) - p_- a_2 \cos(kx)) \right) \\
&\quad \cdot \exp \left( i(q_+ + q_-)x \right). \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha_j := \frac{e(a_j p_-)}{(kp_-)} - \frac{e(a_j p_+)}{(kp_+)}, \quad j = 1, 2 \tag{4.15}$$

lassen sich die Exponentialfunktionen in Gleichung (4.14) vereinfachen und es ergibt sich durch Ausmultiplizieren der runden Klammern

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{e^+ e^-} &= \bar{u}_{p_- s_-} \left( \gamma^\mu - \frac{e}{2(kp_-)} \not{A} \not{\gamma}^\mu + \frac{e}{2(kp_+)} \gamma^\mu \not{A} \right. \\
&\quad \left. - \frac{e^2}{4(kp_+)(kp_-)} \not{A} \not{\gamma}^\mu \not{A} \right) v_{p_+ s_+} \\
&\quad \cdot \exp \left( -i(\alpha_1 \sin(kx) - \alpha_2 \cos(kx)) \right) \cdot \exp \left( i(q_+ + q_-)x \right). \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Vierervektoren

$$\mu := (\delta_{\mu 0}, -\delta_{\mu 1}, -\delta_{\mu 2}, -\delta_{\mu 3}), \tag{4.17}$$

für die gilt

$$\not{\mu} = \sum_{\nu} \gamma^\nu \mu_\nu = \gamma^\mu, \tag{4.18}$$

lassen sich die einzelnen Gamma-Matrizen in Feynmanscher Slash-Schreibweise darstellen (Vgl. Anhang A).

Einsetzen des Viererpotentials  $A$  aus Gleichung (4.1) führt zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{e^+e^-} &= \bar{u}_{p_-s_-} \left( \not{\mu} + \left( \frac{e}{2(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{e}{2(kp_-)} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right) \cos(kx) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{e}{2(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{e}{2(kp_-)} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right) \sin(kx) - \frac{e^2}{4(kp_+)(kp_-)} \not{A} \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{A} \right) \\
&\quad \cdot v_{p_+s_+} \cdot \exp\left(-i(\alpha_1 \sin(kx) - \alpha_2 \cos(kx))\right) \cdot \exp\left(i(q_+ + q_-)x\right) \\
&= \bar{u}_{p_-s_-} \left( \left( \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \cdot \exp\left(-i(\alpha_1 \sin(kx) - \alpha_2 \cos(kx))\right) \right) \\
&\quad + \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \cos(kx) \right. \\
&\quad \quad \left. + \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \sin(kx) \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(-i(\alpha_1 \sin(kx) - \alpha_2 \cos(kx))\right) \Big) v_{p_+s_+} \cdot \exp\left(i(q_+ + q_-)x\right). \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde ausgenutzt, dass für  $\not{A} \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{A}$  mit  $A$  aus Gleichung (4.1) und den Rechenregeln für Gamma-Matrizen aus Anhang (C) gilt:

$$\begin{aligned}
\not{A} \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{A} &\stackrel{(4.1)}{=} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 \cos^2(kx) + \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 \sin^2(kx) \\
&\quad + \underbrace{\left( \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 + \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 \right)}_{=0 \text{ (4.5)}} \cos(kx) \sin(kx) \cos(kx) \sin(kx) \\
&\stackrel{(C.7)}{=} 2a^2 k^\mu \not{k}. \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$\eta := (kx) \tag{4.21}$$

kann man die in Gleichung (4.19) auftretenden periodischen Funktionen

$$f(\eta) := \exp\left(-i(\alpha_1 \sin(\eta) - \alpha_2 \cos(\eta))\right), \quad \cos(\eta)f(\eta), \quad \sin(\eta)f(\eta) \tag{4.22}$$



in Fourierreihen entwickeln:

$$\begin{aligned} f(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n e^{-inn}, \\ \cos(\eta) f(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-inn}, \\ \sin(\eta) f(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{-inn}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Entwicklungskoeffizienten lassen sich, wie in Anhang B beschrieben, mit Hilfe der gewöhnlichen Bessel-Funktionen  $J_n$  darstellen. Diese besitzen die erzeugende Funktion (Anhang B, Gleichung (B.2) bzw. [AS65])

$$e^{-iu \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(u) e^{-in\phi}. \quad (4.24)$$

Damit findet man für die Fourier-Koeffizienten aus Gleichung (4.23)

$$\begin{aligned} B_n &= J_n(\bar{\alpha}) e^{inn_0}, \\ C_n &= \frac{1}{2} \left( J_{n+1}(\bar{\alpha}) e^{i(n+1)\eta_0} + J_{n-1}(\bar{\alpha}) e^{i(n-1)\eta_0} \right), \\ D_n &= \frac{1}{2i} \left( J_{n+1}(\bar{\alpha}) e^{i(n+1)\eta_0} - J_{n-1}(\bar{\alpha}) e^{i(n-1)\eta_0} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

mit dem Argument der Bessel-Funktionen

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \quad (4.26)$$

und dem Winkel  $\eta_0$ , der bestimmt ist durch

$$\cos(\eta_0) = \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}}, \quad \sin(\eta_0) = \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}}. \quad (4.27)$$

Der Summationsindex  $n$  bezeichnet hier die Anzahl der an diesem Vertex absorbierten Photonen aus dem Laserfeld. Bei negativer Anzahl  $n$  werden  $|n|$  Photonen emittiert.

Damit wird der elektronische Teil des Integranden in der Übergangsamplitude

(4.12) zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{e^+e^-} &= \bar{\psi}_{p_-s_-}(x)\gamma^\mu\psi_{p_+s_+}(x) \cdot \frac{V\sqrt{q_+^0q_-^0}}{m} \\
&= \bar{u}_{p_-s_-} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \left( \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \cdot B_n e^{-inn\eta} \right. \\
&\quad + \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \cdot C_n e^{-inn\eta} \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \cdot D_n e^{-inn\eta} \right) \right) v_{p_+s_+} \\
&\quad \cdot \exp(i(q_+ + q_-)x) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^\mu(e^+, e^-|n) \cdot \exp(i(q_+ + q_-)x) \cdot \exp(-inn\eta) \quad (4.28)
\end{aligned}$$

mit dem dimensionslosen Matrixelement

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\mu(e^+, e^-|n) &:= \bar{u}_{p_-s_-} \left( \left( \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(kp_-)} \not{k} \right) \cdot B_n \right. \\
&\quad + \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \cdot C_n \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \frac{1}{(kp_+)} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{(kp_-)} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \cdot D_n \right) \right) v_{p_+s_+}. \quad (4.29)
\end{aligned}$$

### 4.1.2 Der myonische Anteil am Übergang

Völlig analog zum Vorgehen in Abschnitt (4.1.1) kann man auch den myonischen Anteil am Übergang,  $\bar{\Psi}_{P'S'}(y)\gamma^\nu\Psi_{PS}(y)$ , behandeln:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mu\mu'} &:= \bar{\Psi}_{P'S'}(y)\gamma^\nu\Psi_{PS}(y) \cdot \frac{V\sqrt{Q^0Q^0}}{M} \\
&= \bar{U}_{P'S'} \left( 1 - \frac{e\cancel{A}\cancel{k}}{2(kP')} \right) \gamma^0\gamma^\nu \left( 1 + \frac{e\cancel{k}\cancel{A}}{2(kP)} \right) U_{PS} \\
&\quad \cdot \exp\left(i\frac{e}{(kP)}((Pa_1)\sin(ky) - (Pa_2)\cos(ky))\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(-i\frac{e}{(kP')}((P'a_1)\sin(ky) - (P'a_2)\cos(ky))\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(i(Q' - Q)y\right). \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der runden Klammern unter Zuhilfenahme der Vierervektoren (4.17) und der Relation (4.20) und mit der Abkürzung (vgl. (4.15))

$$\beta_j := \frac{e(a_jP')}{(kP')} - \frac{e(a_jP)}{(kP)}, \quad j = 1, 2 \tag{4.31}$$

führt zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mu\mu'} &= \bar{U}_{P'S'} \left( \cancel{\not{y}} + \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kP')(kP)} \cancel{k} \right) \cdot \exp\left(-i(\beta_1 \sin(ky) - \beta_2 \cos(ky))\right) \\
&\quad - \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kP)} \cancel{\not{y}} \cancel{k} \cancel{q}_1 + \frac{1}{(kP')} \cancel{q}_1 \cancel{k} \cancel{\not{y}} \right] \cos(ky) \right. \\
&\quad \quad \left. + \left[ \frac{1}{(kP)} \cancel{\not{y}} \cancel{k} \cancel{q}_2 + \frac{1}{(kP')} \cancel{q}_2 \cancel{k} \cancel{\not{y}} \right] \sin(ky) \right) \\
&\quad \cdot \exp\left(-i(\beta_1 \sin(ky) - \beta_2 \cos(ky))\right) \Big) U_{PS} \cdot \exp\left(i(Q' - Q)y\right). \tag{4.32}
\end{aligned}$$

Nun wird, analog zu Gleichung (4.21), die Abkürzung

$$\kappa := ky \tag{4.33}$$

eingeführt. Damit lassen sich die periodischen Funktionen in (4.32),

$$g(\kappa) := \exp\left(-i(\beta_1 \sin(\kappa) - \beta_2 \cos(\kappa))\right), \quad \cos(\kappa)g(\kappa), \quad \sin(\kappa)g(\kappa), \tag{4.34}$$

in Fourierreihen entwickeln:

$$\begin{aligned}
 g(\kappa) &= \sum_{N=-\infty}^{\infty} F_N e^{-iN\kappa}, \\
 \cos(\kappa) g(\kappa) &= \sum_{N=-\infty}^{\infty} G_N e^{-iN\kappa}, \\
 \sin(\kappa) g(\kappa) &= \sum_{N=-\infty}^{\infty} H_N e^{-iN\kappa}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Auch hier lassen sich die Fourier-Koeffizienten, wie im vorigen Abschnitt beim elektronischen Anteil, mit Hilfe der erzeugenden Funktion der Bessel-Funktionen (Gl. (4.24)) finden und man erhält:

$$\begin{aligned}
 F_N &= J_N(\bar{\beta}) e^{iN\kappa_0}, \\
 G_N &= \frac{1}{2} \left( J_{N+1}(\bar{\beta}) e^{i(N+1)\kappa_0} + J_{N-1}(\bar{\beta}) e^{i(N-1)\kappa_0} \right), \\
 H_N &= \frac{1}{2i} \left( J_{N+1}(\bar{\beta}) e^{i(N+1)\kappa_0} - J_{N-1}(\bar{\beta}) e^{i(N-1)\kappa_0} \right).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Hier ist das Argument der Bessel-Funktionen

$$\bar{\beta} = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \tag{4.37}$$

und der Winkel  $\kappa_0$  ist gegeben durch

$$\cos(\kappa_0) = \frac{\beta_1}{\bar{\beta}}, \quad \sin(\kappa_0) = \frac{\beta_2}{\bar{\beta}}. \tag{4.38}$$

Analog zum Elektronenvertex bezeichnet hier  $N$  die Anzahl der Photonen, die am Projektilvertex absorbiert bzw. emittiert wird.

Damit wird (4.32) zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{\mu\mu'} &= \bar{U}_{P'S'} \sum_{N=-\infty}^{\infty} \left( \left( \not{y} + \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kP')(kP)} \not{k} \right) \cdot F_N e^{-iN\kappa} \right. \\
&\quad - \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kP)} \not{y} \not{k} \not{q}_1 + \frac{1}{(kP')} \not{q}_1 \not{k} \not{y} \right] \cdot G_N e^{-iN\kappa} \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \frac{1}{(kP)} \not{y} \not{k} \not{q}_2 + \frac{1}{(kP')} \not{q}_2 \not{k} \not{y} \right] \cdot H_N e^{-iN\kappa} \right) \right) U_{PS} \\
&\quad \cdot \exp(i(Q' - Q)y) \\
&= \sum_{N=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^\nu(\mu, \mu'|N) \cdot \exp(i(Q' - Q)y) \cdot \exp(-iN\kappa) \quad (4.39)
\end{aligned}$$

mit dem Matrixelement

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\nu(\mu, \mu'|N) &:= \bar{U}_{P'S'} \left( \left( \not{y} + \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kP')(kP)} \not{k} \right) \cdot F_N \right. \\
&\quad - \frac{e}{2} \left( \left[ \frac{1}{(kP)} \not{y} \not{k} \not{q}_1 + \frac{1}{(kP')} \not{q}_1 \not{k} \not{y} \right] \cdot G_N \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[ \frac{1}{(kP)} \not{y} \not{k} \not{q}_2 + \frac{1}{(kP')} \not{q}_2 \not{k} \not{y} \right] \cdot H_N \right) \right) U_{PS}. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

### 4.1.3 Die gesamte Übergangsamplitude

Setzt man die Gleichungen (4.28) und (4.39) sowie den Photonpropagator (4.13) in den Ausdruck für die Übergangsamplitude (4.12) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-} &= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{4\pi M m}{(2\pi)^4 V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \\
&\quad \cdot \iiint d^4x d^4y d^4q \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2} \sum_{n, N=-\infty}^{\infty} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- |n) \cdot g^{\mu\nu} \cdot \mathcal{M}^\nu(\mu, \mu'|N) \\
&\quad \cdot \exp(i(q_+ + q_- - nk)x) \cdot \exp(i(Q' - Q - Nk)y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2Mm}{(2\pi)^3 V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \cdot \sum_{n,N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \\
&\quad \cdot \iiint d^4x d^4y d^4q \frac{e^{iq(x-y)}}{q^2} \cdot \exp\left(i(q_+ + q_- - nk)x\right) \\
&\quad \cdot \exp\left(i(Q' - Q - Nk)y\right), \tag{4.41}
\end{aligned}$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention benutzt wird (siehe Anhang A). Die Integrale über die Elektron–Positron- bzw. Myonen–Koordinaten  $x$  bzw.  $y$  lassen sich ausführen:

$$\begin{aligned}
&\int d^4y \exp\left(i(Q' - Q - q - Nk)y\right) \int d^4x \exp\left(i(q + q_+ + q_- - nk)x\right) \\
&= \int d^4y \exp\left(i(Q' - Q - q - Nk)y\right) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(Q' - Q - q - Nk) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk); \tag{4.42}
\end{aligned}$$

dies führt zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-} &= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \cdot \sum_{n,N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \\
&\quad \cdot \int d^4q \frac{1}{q^2} \delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk) \cdot \delta^{(4)}(q + Q + Nk - Q'). \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Das Produkt der Delta–Funktionen kann man wegen der allgemeinen Regel  $\delta(a - b)\delta(a + c) = \delta(a - b)\delta(b + c)$  umschreiben,

$$\begin{aligned}
&\delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk) \cdot \delta^{(4)}(q + Q + Nk - Q') \\
&= \delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk) \cdot \delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - (n + N)k), \tag{4.44}
\end{aligned}$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-} &= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \cdot \sum_{n,N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \\
&\quad \cdot \delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - (n + N)k) \int d^4q \frac{\delta^{(4)}(q + q_+ + q_- - nk)}{q^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \\
&\cdot \sum_{n,N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - (n + N)k)}{(q_+ + q_- - nk)^2}.
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Gleichung (4.45) beschreibt die Übergangsamplitude. Um Übergangswahrscheinlichkeiten zu erhalten, benötigt man das Absolutquadrat der Amplitude. Dieses muss über alle möglichen Spins der auslaufenden Teilchen summiert und über die Anfangsspinzustände gemittelt, sowie über die Impulse der auslaufenden Teilchen integriert werden. Also ist die vollständig differentielle Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit  $d^9 R$

$$\begin{aligned}
&d^9 R_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-} \\
&= \frac{1}{2} \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} \frac{|\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}|^2}{T} \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{q}_+ \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{q}_- \frac{V}{(2\pi)^3} d^3 \vec{Q}'. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Durch die Division durch den Zeitfaktor  $T$  stellt (4.46) eine Rate dar.  $V$  ist das Normierungsvolumen, das auch in der Normierung der Volkov-Zustände vorkommt. Dann entspricht  $V/(2\pi)^3$  wegen  $\hbar = 1$  (s. Anhang A) einem Einheitsvolumen im Phasenraum.

## 4.2 Die Spinsumme über das Amplitudenquadrat

In Gleichung (4.46) tritt die Spinsumme über das Amplitudenquadrat auf:

$$\begin{aligned}
&\sum_S \sum_{S', s_+, s_-} |\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}|^2 \\
&= \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} \left| \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \cdot \sum_{n,N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - \overbrace{(n + N)k}^{r:=})}{(q_+ + q_- - nk)^2} \right|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} \left| \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \cdot \sum_{n, N} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | N) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- + q_- - nk)^2} \right|^2
\end{aligned} \tag{4.47}$$

mit der Gesamtzahl  $r$  absorbierter Photonen<sup>1</sup>.

Aufgrund der Delta-Funktion tritt hier beim Quadrieren keine Doppelsumme über  $r, r'$  auf: offensichtlich gilt

$$\begin{aligned}
&\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk) \delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - r'k) \\
&= \delta_{rr'} (\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk))^2.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Daher kann man die Summation über die Gesamtzahl absorbierter Photonen  $r$  herausziehen und erhält

$$|\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}|^2 = \sum_{r \geq r_0} |\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}^{(r)}|^2 \tag{4.49}$$

mit der *Partialamplitude*  $\mathcal{S}^{(r)}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}^{(r)} &= \frac{\alpha_f}{i} \cdot \frac{2(2\pi)^5 Mm}{V^2 \sqrt{q_+^0 q_-^0 Q'^0 Q^0}} \sum_n \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | r - n) \\
&\quad \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- + q_- - nk)^2}.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Das Betragsquadrat dieser Partialamplitude ist damit

$$\begin{aligned}
|\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}^{(r)}|^2 &= 4(2\pi)^{10} \alpha_f^2 \frac{m^2}{V^2 q_+^0 q_-^0} \frac{M^2}{V^2 Q'^0 Q^0} \cdot \left| \sum_n \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \right. \\
&\quad \left. \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | r - n) \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- - nk)^2} \right|^2
\end{aligned} \tag{4.51}$$

<sup>1</sup> Man beachte, dass sowohl  $n$  als auch  $N$  negativ werden dürfen. Dies entspricht dann dem Fall, dass am jeweiligen Vertex  $|n|$  bzw.  $|N|$  Photonen emittiert werden. Weil es zur Überwindung der Energieschwelle aber nötig ist, dem Gesamtsystem Energie zuzuführen, darf die Gesamtzahl  $r$  nie negativ werden. Es müssen immer  $r \geq r_0$  aus (1.3) Photonen aus dem Laserfeld absorbiert werden. Wir sprechen dann von einem  $r$ -Photonen-Prozess.



und

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_n \mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) \cdot \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu'|r-n) \cdot \frac{\delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- - nk)^2} \right|^2 \\
&= \sum_n \sum_{n'} (\mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu'|r-n)) (\mathcal{M}^\nu(e^+e^-|n') \mathcal{M}_\nu(\mu, \mu'|r-n'))^\dagger \\
&\quad \cdot \frac{(\delta(q_+ + q_- + Q' - Q - rk))^2}{(q_+ + q_- - nk)^2 \cdot (q_+ + q_- - n'k)^2}. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Wegen [BD64]

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(X - rk)^2 = TV \delta^{(4)}(X - rk) \tag{4.53}$$

mit einem Zeitfaktor  $T$  von der Delta-Funktion über die 0-Komponente und einem Volumenfaktor  $V$  von den Ortskomponenten, ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_n \sum_{n'} (\mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu'|r-n)) (\mathcal{M}^\nu(e^+e^-|n') \mathcal{M}_\nu(\mu, \mu'|r-n'))^\dagger \\
&\quad \cdot \frac{(\delta(q_+ + q_- + Q' - Q - rk))^2}{(q_+ + q_- - nk)^2 \cdot (q_+ + q_- - n'k)^2} \\
&= \sum_{n, n'} \mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu'|r-n) \mathcal{M}_\nu^\dagger(\mu, \mu'|r-n') \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+e^-|n') \\
&\quad \cdot \frac{TV}{(2\pi)^4} \frac{\delta(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- - nk)^2 \cdot (q_+ + q_- - n'k)^2}. \tag{4.54}
\end{aligned}$$

Für ein festes Paar  $(n, n')$  kann man die Spinsumme über die Matrixelemente ausschreiben. Für die Spinsumme  $T_r^{nn'}$  für eine Gesamtphotonenzahl  $r$  mit der Kombination  $nn'$  der am Projektil- und Elektron-Positron-Vertex absorbierten Photonen gilt:

$$\begin{aligned}
T_r^{nn'} &:= \sum_{S, S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu'|r-n) \mathcal{M}_\nu^\dagger(\mu, \mu'|r-n') \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+e^-|n') \\
&= \sum_{S, S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+e^-|n) (\bar{U}_{P', S'})_\alpha ({}_r\Delta_\mu^n)_{\alpha\beta} (U_{P, S})_\beta \\
&\quad \cdot (\bar{U}_{P, S})_{\beta'} ({}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'})_{\beta'\alpha'} (U_{P', S'})_{\alpha'} \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+e^-|n'), \tag{4.55}
\end{aligned}$$

wobei über doppelt auftretende Indizes  $\alpha, \beta = 1 \dots 4$  summiert wird und die Matrix

$${}_r\Delta_\mu^n = \left[ \left( \gamma_\mu + \frac{e^2 a^2 k_\mu \not{k}}{2(kP)(kP')} \right) F_{r-n} - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP} \gamma_\mu \not{k} \not{q}_1 + \frac{1}{kP'} \not{q}_1 \not{k} \gamma_\mu \right) G_{r-n} \right. \quad (4.56)$$

$$\left. - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP} \gamma_\mu \not{k} \not{q}_2 + \frac{1}{kP'} \not{q}_2 \not{k} \gamma_\mu \right) H_{r-n} \right] \quad (4.57)$$

eingeführt wurde. Mit Gleichung (D.11) aus Anhang (D) kann man die Summe über den Spin des einlaufenden Myons  $S$  ausführen:

$$\sum_S (U_{P,S})_\beta (\bar{U}_{P,S})_{\beta'} = \left( \frac{\not{P} + M}{2M} \right)_{\beta\beta'}. \quad (4.58)$$

Damit lässt sich Gleichung (4.55) für die Spinsumme  $T_r^{nn'}$  weiter umformen:

$$\begin{aligned} T_r^{nn'} &= \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) (\bar{U}_{P', S'})_\alpha ({}_r\Delta_\mu^n)_{\alpha\beta} \underbrace{\left( \frac{\not{P} + M}{2M} \right)_{\beta\beta'} ({}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'})_{\beta'\alpha'}}_{\Sigma_{\beta'}} \\ &\quad \cdot (U_{P', S'})_{\alpha'} \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\ &= \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) (\bar{U}_{P', S'})_\alpha \underbrace{({}_r\Delta_\mu^n)_{\alpha\beta} \frac{\not{P} + M}{2M} ({}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'})_{\beta\alpha'}}_{\Sigma_\beta} \\ &\quad \cdot (U_{P', S'})_{\alpha'} \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\ &= \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) (\bar{U}_{P', S'})_\alpha \left( {}_r\Delta_\mu^n \frac{\not{P} + M}{2M} {}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'} \right)_{\alpha\alpha'} (U_{P', S'})_{\alpha'} \\ &\quad \cdot \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\ &= \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \left( {}_r\Delta_\mu^n \frac{\not{P} + M}{2M} {}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'} \right)_{\alpha\alpha'} \underbrace{(\bar{U}_{P', S'})_\alpha (U_{P', S'})_{\alpha'}}_{\Sigma_{S'}} \\ &\quad \cdot \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\ &= \sum_{s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \left( {}_r\Delta_\mu^n \frac{\not{P} + M}{2M} {}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'} \right)_{\alpha\alpha'} \left( \frac{\not{P}' + M}{2M} \right)_{\alpha'\alpha} \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\ &= \sum_{s_+, s_-} \text{Sp} \left( {}_r\Delta_\mu^n \frac{\not{P} + M}{2M} {}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'} \frac{\not{P}' + M}{2M} \right) \cdot \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n'). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Analog dazu findet man für den elektronischen Anteil mit der Matrix

$$\begin{aligned}
 {}_r\Gamma_n^\mu = & \left[ \left( \gamma^\mu - \frac{e^2 a^2 k^\mu \not{k}}{2(kp_+)(kp_-)} \right) B_n + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \gamma^\mu \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \gamma^\mu \right) C_n \right. \\
 & \left. + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \gamma^\mu \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \gamma^\mu \right) D_n \right] \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

und unter Ausnutzung der Gleichungen (D.11) und (D.12):

$$\sum_{s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') = \text{Sp} \left( {}_r\Gamma_n^\mu \frac{\not{p}_+ - m}{2m} {}_r\bar{\Gamma}_{n'}^\nu \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right). \quad (4.61)$$

Also ist die Spinsumme (4.55)

$$\begin{aligned}
 T_r^{nn'} = & \sum_{S, S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | r - n) \mathcal{M}_\nu^\dagger(\mu, \mu' | r - n') \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') \\
 = & \text{Sp} \left( {}_r\Gamma_n^\mu \frac{\not{p}_+ - m}{2m} {}_r\bar{\Gamma}_{n'}^\nu \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \cdot \text{Sp} \left( {}_r\Delta_\mu^n \frac{\not{P} + M}{2M} {}_r\bar{\Delta}_\nu^{n'} \frac{\not{P}' + M}{2M} \right). \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Diese beiden Faktoren enthalten jeweils Spuren über Produkte aus bis zu acht Gamma-Matrizen. Die Berechnung dieser Spuren ist in Anhang E zu finden. Die Resultate sind sehr lang; entsprechend werden hier sehr lange Ausdrücke multipliziert. Dies ist analytisch kaum noch zu bewerkstelligen und wurde daher in einer numerischen Berechnung der Paarerzeugungsraten durchgeführt.

### 4.3 Die Integration über das Amplitudenquadrat

In Gleichung (4.46) wurde die differentielle Übergangsrate  $dR$  eingeführt. Wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, kann man die Spinsumme über das Amplitudenquadrat auseinanderziehen und erhält so für die Gesamtzahl  $r$  absorbierter Photonen (an beiden Übergangsvertizes zusammen) jeweils einzelne Übergangswahrscheinlichkeiten.

Im folgenden soll mit  $R_r$  die *Partialrate für ein festes  $r$*  bezeichnet werden, mit  $dR_r$  die differentielle Partialrate. Die Gesamtrate für Elektron-Positron-Paarerzeugung setzt sich dann aus den Beiträgen der jeweiligen

Photonenzahlen zusammen:

$$R = \sum_r R_r \quad \text{bzw.} \quad dR = \sum_r dR_r. \quad (4.63)$$

Die vollständig differentielle Partialrate  $d^9 R_r$  berechnet sich nach den Gleichungen (4.46) und (4.51) zu

$$\begin{aligned} d^9 R_r &= \frac{1}{2T} \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} |\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}^{(r)}|^2 \frac{V d^3 \vec{q}_+}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \vec{q}_-}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \vec{Q}'}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{1}{2T} \frac{4(2\pi)^6 \alpha_f^2 m^2 M^2}{V^4 (q_+^0 q_-^0 Q^0 Q'^0)} \\ &\quad \cdot \sum_{n, n'} T_r^{nn'} \frac{VT \delta^{(4)}(q_+ + q_- + Q' - Q - rk)}{(q_+ + q_- - nk)^2 \cdot (q_+ + q_- - n'k)^2} \cdot \frac{V^3}{(2\pi)^9} d^3 \vec{q}_+ d^3 \vec{q}_- d^3 \vec{Q}' \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit der Spinsumme  $T_r^{nn'}$  aus Gl. (4.62). Wie man sieht, ist  $d^9 R_r$  von der Wahl des Normierungsvolumens unabhängig. Durch die Normierung der Volkov-Zustände tritt ein Quotient  $1/V^4$  auf, der sich mit einem Faktor  $V^3$  von den Differentialen und einem weiteren Faktor  $V$  vom Quadrat der  $\delta$ -Funktion (Gl. (4.53)) aufhebt. Die Division durch den Zeitfaktor  $T$  (vgl. (4.46)) hebt sich mit dem Faktor  $T$  aus dem Quadrat der Delta-Funktion auf. Somit ist (4.64) auch von der Wahl dieses Faktors unabhängig.

Über einen der Dreierimpulse in (4.64) kann man mit Hilfe der Ortskomponenten der Delta-Funktion integrieren. Dies legt o.B.d.A. den Impulsvektor des erzeugten Positrons fest. Damit erhält man für die differentielle Partialrate

$$\begin{aligned} d^6 R_r &= \left( \frac{2\alpha_f^2 m^2 M^2}{(2\pi)^3 \cdot q_+^0 q_-^0 Q^0 Q'^0} \cdot \sum_{n, n'} T_r^{nn'} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\delta^{(1)}(q_+^0 + q_-^0 + Q^0 - Q'^0 - rk^0)}{(q_+ + q_- - nk)^2 (q_+ + q_- - n'k)^2} d^3 \vec{q}_- d^3 \vec{Q}' \right) \Bigg|_{\vec{q}_+ = \vec{Q} + r\vec{k} - \vec{Q}' - \vec{q}_-}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Für die weiteren Integrationen müssen zwei Transformationen vorgenommen werden. Zunächst wird ins Schwerpunktsystem transformiert, weil dort die Kinematik in der Delta-Funktion weniger kompliziert ist. Anschließend wird noch eine Koordinatendrehung vollzogen.

### 4.3.1 Transformation ins Schwerpunktsystem

Für jede Anzahl absorbierten Photonen  $r$  lässt sich ein Schwerpunktsystem finden, in dem die Summe aus den Dreierimpulsen des einlaufenden Myons und der  $r$  Laserphotonen 0 ist, also

$$\vec{Q}_{cm,r} = \begin{pmatrix} Q_{cm,r}^1 \\ Q_{cm,r}^2 \\ Q_{cm,r}^3 \end{pmatrix} = -r \cdot \vec{k}_{cm,r} = -r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{cm,r} \end{pmatrix}, \quad (4.66)$$

wobei die mit dem Index  $cm, r$  gekennzeichneten Größen sich auf das Schwerpunktsystem bezüglich der Photonenzahl  $r$  beziehen.

Vom Ruhesystem des einlaufenden Myons transformiert sich die Laserfrequenz  $\omega$  zu

$$r\omega_{cm,r} = r\omega \sqrt{\frac{1 - \beta_{cm,r}}{1 + \beta_{cm,r}}}, \quad \beta_{cm,r} = \frac{|\vec{Q}_{cm,r}|}{Q^0}. \quad (4.67)$$

Wegen (4.66) sind dann

$$\beta_{cm,r} = \frac{r\omega}{M_* + r\omega} \quad (4.68)$$

und

$$r\omega_{cm,r} = r\omega \sqrt{\frac{M_*}{M_* + 2r\omega}}. \quad (4.69)$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also vom Projektilsystem aus betrachtet mit dem Lorentzfaktor

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{cm,r}^2}}. \quad (4.70)$$

Aus der Schwerpunktsbedingung

$$\vec{Q}_{cm,r} + r\vec{k}_{cm,r} = 0 \quad (4.71)$$

folgt für den effektiven Impuls des erzeugten Positrons, der durch das Integral über die Ortskomponenten der Delta-Funktion in (4.64) festgelegt wurde:

$$(\vec{q}_+)_{cm,r} = -\vec{Q}'_{cm,r} - (\vec{q}_-)_{cm,r}. \quad (4.72)$$

Mit der Abkürzung

$$E := Q_{cm,r}^0 + rk_{cm,r}^0 \quad (4.73)$$

folgt für die differentielle Partialrate  $d^6 R_r^{cm,r}$  im Schwerpunktsystem

$$d^6 R_r^{cm,r} = \left( \frac{2\alpha_f^2 m^2 M^2}{(2\pi)^3 \cdot q_{cm,r+}^0 q_{cm,r-}^0 Q_{cm,r}^0 Q_{cm,r}^0} \cdot \sum_{n,n'} T_{cm,r}^{nn'} \right. \\ \cdot \frac{\delta^{(1)}(E - (q_+^0)_{cm,r} - (q_-^0)_{cm,r} - Q_{cm,r}^0)}{((q_+)_{cm,r} + (q_-)_{cm,r} - n k_{cm,r})^2 ((q_+)_{cm,r} + (q_-)_{cm,r} - n' k_{cm,r})^2} \\ \left. \cdot d^3(\vec{q}_-)_{cm,r} d^3 \vec{Q}'_{cm,r} \right) \Big|_{(\vec{q}_+)_{cm,r} = -\vec{Q}'_{cm,r} - (\vec{q}_-)_{cm,r}}. \quad (4.74)$$

Da die weitere Rechnung im Schwerpunktsystem stattfinden wird, wird der Index  $cm, r$  von hier ab weggelassen.

### 4.3.2 Koordinatentransformation

Für die Integration über die beiden verbleibenden Impulse im Schwerpunktsystem wird eine Transformation in Kugelkoordinaten durchgeführt. Das Volumenelement  $d^3 \vec{q}_- d^3 \vec{Q}'$  transformiert sich zunächst wie üblich

$$d^3 \vec{q}_- \cdot d^3 \vec{Q}' = |\vec{q}_-|^2 d|\vec{q}_-| \sin(\vartheta_-) d\vartheta_- d\varphi_- \cdot |\vec{Q}'|^2 d|Q'| \sin(\theta') d\theta' d\phi'. \quad (4.75)$$

Die Integration über die Impulsbeträge wird noch auf die Energiekomponente transformiert:

Wegen

$$|\vec{q}_-| = \sqrt{q_0^2 - m_*^2} \quad (4.76)$$

ist

$$d|\vec{q}_-| = \frac{q_0}{|\vec{q}_-|} dq_0. \quad (4.77)$$

Für die Integration über den Myonenimpuls nach dem Stoß wird von der Symmetrie des Prozesses Gebrauch gemacht: die  $x$ - $z$ -Ebene wird o.B.d.A. so gelegt, dass der Azimuthwinkel des Myonimpulses nach dem Stoß  $\phi' = 0$  ist. Dann liegt der Impulsvektor des auslaufenden Myons immer in der  $x$ - $z$ -Ebene und die Integration über  $d\phi'$  liefert den konstanten Faktor  $2\pi$ .

Weiter sieht man

$$\sin(\vartheta_-) d\vartheta_- \cdot \sin(\theta') d\theta' = (-d(\cos \vartheta_-)) \cdot (-d(\cos \theta')) = d(\cos \vartheta_-) d(\cos \theta'), \quad (4.78)$$

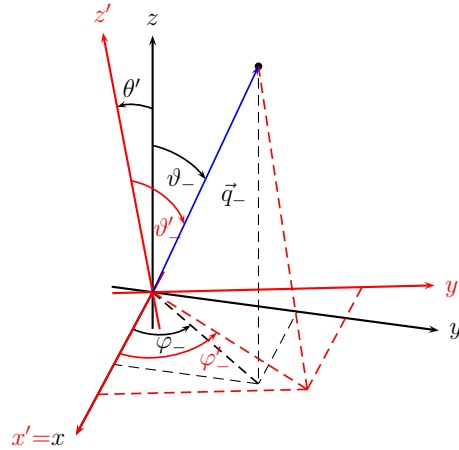
und man erhält

$$d^3 \vec{q}_- \cdot d^3 \vec{Q}' = 2\pi \cdot q_-^0 Q'^0 |\vec{q}_-| |\vec{Q}'| \cdot dq_-^0 d(\cos \vartheta_-) d\varphi_- \cdot dQ'^0 d(\cos \theta') d\phi'. \quad (4.79)$$

Also wird die Partialrate  $R_{cm,r}$  im Schwerpunktsystem für ein bestimmtes  $r$  zu

$$R_{cm,r} = \int dq_-^0 d(\cos \vartheta_-) d\varphi_- \cdot dQ'^0 d(\cos \theta') \left( \frac{\alpha_f^2 m^2 M^2 \cdot |\vec{q}_-| |\vec{Q}'|}{2\pi^2 \cdot q_+^0 Q^0} \right) \cdot \sum_{n,n'} T_r^{nn'} \cdot \frac{\delta^{(1)}(E - q_+^0 - q_-^0 - Q'^0)}{(q_+ + q_- - nk)^2 (q_+ + q_- - n'k)^2} \Big|_{\vec{q}_+ = -\vec{Q}' - \vec{q}_-} \quad (4.80)$$

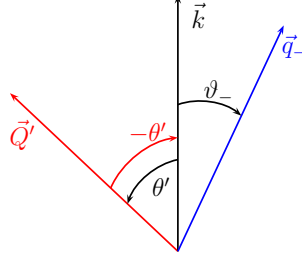
Um nun über die energierhaltende Delta-Funktion zu integrieren, bedient man sich eines Tricks [Mor71]: Für das auslaufende Elektron führt man eine weitere Koordinatentransformation durch. Man betrachtet seinen Impuls in einem Koordinatensystem, in dem der Impuls des auslaufenden Myons  $\vec{Q}'$  die polare Achse bildet. Damit wird der Impuls des Elektrons  $\vec{q}_-$  durch den Winkel mit  $\vec{Q}'$ , also den neuen Polarwinkel  $\vartheta'_-$ , und einen entsprechenden Azimutwinkel  $\varphi'_-$  beschrieben.



**Abbildung 4.1:** Skizze der Koordinatentransformation. Im ursprünglichen System (schwarz) ist die polare Achse in Richtung des Wellenvektors des Lasers. Im gestrichenen System, in rot dargestellt, ist die Richtung des gestreuten Myons die Polarachse.

Da der Azimutwinkel des auslaufenden Myons  $\phi' = 0$  gesetzt wurde, entspricht diese Transformation einer Drehung des ursprünglichen Koordinatensystems, in dem der Wellenvektor des Lasers die  $z$ -Achse festlegt, um die  $y$ -Achse um den Winkel  $\theta'$ , also den von  $\vec{Q}'$  und  $\vec{k}$  eingeschlossenen Winkel (Abb. 4.1). Bei der Rotation muss man die Richtungen beachten, in die die Winkel gemessen werden: im jeweiligen Koordinatensystem werden die Polarwinkel *von der  $z$ -Achse aus* gemessen. Wie man in der folgenden Abbildung sieht, bedeutet dies, dass im gestrichenen System *im mathematischen Sinne*

*negative* Winkel auftreten (Abb. 4.2). Man kann die Drehmatrix  $D$  daher



**Abbildung 4.2:** Veranschaulichung des Auftretens negativer Winkel bei der Rotation des Koordinatensystems.

schreiben als

$$D = \begin{pmatrix} \cos \theta' & 0 & -\sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Somit lauten die Vektoren  $\vec{k}'$ ,  $(\vec{Q}')'$  und  $\vec{q}'_-$  im gestrichenen System mit  $\vec{Q}'$  als  $z$ -Richtung

$$\begin{aligned} \vec{k}' &= D\vec{k} = \begin{pmatrix} \cos \theta' & 0 & -\sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{k}| \end{pmatrix} = |\vec{k}| \begin{pmatrix} -\sin \theta' \\ 0 \\ \cos \theta' \end{pmatrix}, \\ (\vec{Q}')' &= D\vec{Q}' = |\vec{Q}'| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \text{und } \vec{q}'_- &= D\vec{q}'_- = |\vec{q}'_-| \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_- \\ \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \\ \cos \vartheta'_- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.82)$$

und im Ausgangs-System mit  $\vec{k}$  als  $z$ -Achse

$$\begin{aligned} \vec{k} &= |\vec{k}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{Q}' &= |\vec{Q}'| \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta' \\ 0 \\ \cos \theta' \end{pmatrix}, \\ \vec{q}'_- &= D^{-1}\vec{q}'_- = |\vec{q}'_-| \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta' & 0 & \sin \theta' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta' & 0 & \cos \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_- \\ \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \\ \cos \vartheta'_- \end{pmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= |\vec{q}_-| \begin{pmatrix} \sin \theta' \cos \vartheta'_- - \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_- \cos \theta' \\ - \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \\ \sin \vartheta'_- \sin \theta' \cos \varphi'_- + \cos \theta' \cos \vartheta'_- \end{pmatrix} \\
 &= |\vec{q}_-| \begin{pmatrix} \sin \vartheta_- \cos \varphi_- \\ \sin \vartheta_- \sin \varphi_- \\ \cos \vartheta_- \end{pmatrix}. \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Zeilen in Gleichung (4.83) kann man ablesen, wie sich die Richtung des Elektronenimpulses transformiert und daraus die Jacobi-Matrix erstellen:

$$\cos \vartheta_- = \sin \vartheta'_- \sin \theta' \cos \varphi'_- + \cos \theta' \cos \vartheta'_-, \tag{4.84}$$

$$\varphi_- = \arctan \left( \frac{- \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_-}{\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_- \cos \theta'} \right) \tag{4.85}$$

und

$$J = \begin{pmatrix} \frac{d\varphi_-}{d\varphi'_-} & \frac{d\varphi_-}{d(\cos \vartheta'_-)} \\ \frac{d(\cos \vartheta_-)}{d\varphi'_-} & \frac{d(\cos \vartheta_-)}{d(\cos \vartheta'_-)} \end{pmatrix}. \tag{4.86}$$

Das Differential kann man dann substituieren:

$$d\varphi_- d \cos \vartheta_- = |\det J| d\varphi'_- d \cos \vartheta'_-. \tag{4.87}$$

Wir zeigen nun, dass für diese Transformation die Jacobi-Determinante identisch 1 ist. Für die partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varphi_-}{d\varphi'_-} &= \frac{d\varphi_-}{d \tan \varphi_-} \frac{d \tan \varphi_-}{d\varphi'_-} \\
 &= \frac{\cos^2 \varphi_- (\sin^2 \varphi'_- \cos \theta' - \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_- \sin \theta')}{(\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \cos \theta' \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_-)^2}, \tag{4.88}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi_-}{d\vartheta'_-} = \frac{\cos^2 \varphi_- (\sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- + \cos \vartheta'_- \sin \theta' \sin \varphi'_- / \tan \vartheta'_-)}{(\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \cos \theta' \sin \vartheta'_- \cos \varphi'_-)^2}, \tag{4.89}$$

$$\frac{d \cos \vartheta_-}{d \cos \vartheta'_-} = \cos \theta' - \frac{\sin \theta' \cos \varphi'_-}{\tan \vartheta'_-} \quad \text{und} \tag{4.90}$$

$$\frac{d \cos \vartheta_-}{d\varphi'_-} = - \sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_-. \tag{4.91}$$

(4.92)

Somit ist die Jacobi-Determinante

$$\begin{aligned}
 \det J &= \frac{d\varphi_-}{d\varphi'_-} \frac{d \cos \vartheta_-}{d \cos \vartheta'_-} - \frac{d\varphi_-}{d \cos \vartheta'_-} \frac{d \cos \vartheta_-}{d\varphi'_-} \\
 &= \frac{\cos^2 \varphi_-}{(\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \sin \vartheta'_- \cos \theta' \cos \varphi'_-)^2} \\
 &\quad \cdot \left( (\sin^2 \vartheta'_- \cos \theta' - \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_- \sin \theta') \left( \cos \theta' - \frac{\sin \theta' \cos \varphi'_-}{\tan \vartheta'_-} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \left( -\sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \left( \frac{\cos \vartheta'_- \sin \theta' \sin \varphi'_-}{\tan \theta'_-} + \sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \right) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Wegen

$$\cos^2 \varphi_- = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi_-} \tag{4.94}$$

wird der erste Faktor in (4.93) zu

$$\begin{aligned}
 &\frac{\cos^2 \varphi_-}{(\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \sin \vartheta'_- \cos \theta' \cos \varphi'_-)^2} \\
 &= \frac{1}{(\sin \theta' \cos \vartheta'_- - \sin \vartheta'_- \cos \theta' \cos \varphi'_-)^2 + \sin^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_-} \\
 &= (\sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- + \cos^2 \theta' \sin^2 \varphi'_- \cos^2 \varphi'_- \\
 &\quad - 2 \sin \theta' \cos \theta' \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_- + \sin^2 \vartheta'_- \sin^2 \varphi'_-)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Der zweite Faktor in (4.93) lässt sich ausschreiben und wird

$$\begin{aligned}
 &(\sin^2 \vartheta'_- \cos \theta' - \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_- \sin \theta') \left( \cos \theta' - \frac{\sin \theta' \cos \varphi'_-}{\tan \vartheta'_-} \right) \\
 &\quad - \left( -\sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \left( \frac{\cos \vartheta'_- \sin \theta' \sin \varphi'_-}{\tan \theta'_-} + \sin \theta' \sin \vartheta'_- \sin \varphi'_- \right) \right) \\
 &= \sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta' - 2 \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \sin \theta' \cos \theta' \cos \varphi'_- + \cos^2 \vartheta'_- \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \theta' \\
 &\quad + \sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- \sin^2 \varphi'_- + \sin^2 \theta' \sin^2 \vartheta'_- \sin^2 \varphi'_-.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta' &= (1 - \cos^2 \vartheta'_-) (1 - \sin^2 \theta') \\ &= 1 - \sin^2 \theta' - \cos^2 \vartheta'_- + \sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_-, \end{aligned} \quad (4.97a)$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \varphi'_- \cdot \sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- &= \cos^2 \varphi'_- \cdot (1 - \cos^2 \theta') (1 - \sin^2 \vartheta'_-) \\ &= \cos^2 \varphi'_- (1 - \cos^2 \theta' - \sin^2 \vartheta'_- + \sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta') \end{aligned} \quad (4.97b)$$

$$\text{und} \quad \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi'_- = (1 - \cos^2 \theta') \sin^2 \varphi'_-. \quad (4.97c)$$

Die Anteile (4.97a), (4.97b) und (4.97c) addieren sich zu

$$\begin{aligned}&\underbrace{\sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- + \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta'}_{=:A} \\ &\quad + 1 + \cos^2 \vartheta'_- - \cos^2 \varphi'_- (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta'_-) + (1 - \cos^2 \theta') \sin^2 \varphi'_- \\ &= A + 2 - \sin^2 \theta' - \cos^2 \vartheta'_- - \underbrace{\cos^2 \varphi'_- \cos^2 \theta' - \sin^2 \varphi'_- \cos^2 \theta' - \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_-}_{=-\cos^2 \theta'} \\ &= A + 2 - \cos^2 \vartheta'_- - \underbrace{(\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' - \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_-)}_{=1} \\ &= A + 1 - \cos^2 \vartheta'_- - (1 - \sin^2 \varphi'_-) \sin^2 \vartheta'_- \\ &= A + 1 - \underbrace{\cos^2 \vartheta'_- - \sin^2 \vartheta'_- + \sin^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_-}_{=0} \\ &= \sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- + \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta' + \sin^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_-. \end{aligned} \quad (4.98)$$

Setzt man (4.95) und (4.98) in (4.93) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\det J &= (\sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- + \cos^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_- \cos^2 \theta' \\ &\quad + \sin^2 \varphi'_- \sin^2 \vartheta'_- - 2 \sin \theta' \cos \theta' \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_-) \\ &\quad \cdot (\sin^2 \theta' \cos^2 \vartheta'_- + \cos^2 \theta' \sin^2 \varphi'_- \cos^2 \vartheta'_- \\ &\quad - 2 \sin \theta' \cos \theta' \sin \vartheta'_- \cos \vartheta'_- \cos \varphi'_- + \sin^2 \vartheta'_- \sin^2 \varphi'_-)^{-1} \\ &\equiv 1. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Damit ist das Differential aus (4.75)

$$d^3 \vec{q}_- d^3 \vec{Q}' = 2\pi \cdot q_-^0 |\vec{q}_-| dq_-^0 d\varphi'_- d(\cos \vartheta'_-) \cdot Q'^0 |\vec{Q}'| dQ'^0 d(\cos \theta') \quad (4.100)$$

und die differentielle Partialrate im Schwerpunktsystem wird

$$\begin{aligned}
d^5 R_{cm,r} = & \left( \frac{\alpha_f^2 m^2 M^2 |\vec{q}_-| |\vec{Q}'|}{2\pi^2 \cdot q_+^0 Q^0} \cdot \sum_{n,n'} T^{nn'} \right. \\
& \cdot \frac{\delta^{(1)}(E - q_+^0 - q_-^0 - Q^0)}{(q_+ + q_- - nk)^2 (q_+ + q_- - n'k)^2} \\
& \left. \cdot d(\cos \vartheta'_-) d\varphi'_- d(\cos \theta') dq_-^0 dQ^0 \right) \Big|_{\vec{q}_+ = -\vec{Q}' - \vec{q}_-}. \quad (4.101)
\end{aligned}$$

### 4.3.3 Durchführung der verbleibenden Integrale

Aufgrund der Setzung (4.72) für den effektiven Impulsvektor des erzeugten Positrons im Schwerpunktsystem ist

$$\begin{aligned}
q_+^0 &= \sqrt{m_*^2 + (\vec{Q}' + \vec{q}_-)^2} \\
&= \sqrt{|\vec{Q}'|^2 + |\vec{q}_-|^2 + 2|\vec{Q}'||\vec{q}_-| \cos \vartheta'_- + m_*^2}. \quad (4.102)
\end{aligned}$$

Nun wird gemäß

$$\int f(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{g(x_i)=0} \frac{f(x_i)}{|g'(x)|_{x=x_i}} \quad (4.103)$$

zunächst über den Kosinus des von  $\vec{q}_-$  und  $\vec{Q}'$  eingeschlossenen Winkels integriert. Hier ist

$$g(\cos \vartheta'_-) := E - Q^0 - q_-^0 - \sqrt{|\vec{Q}'|^2 + |\vec{q}_-|^2 + 2|\vec{Q}'||\vec{q}_-| \cos \vartheta'_- + m_*^2} \quad (4.104)$$

mit der Ableitung

$$g'(\cos \vartheta'_-) = \frac{|\vec{Q}'||\vec{q}_-|}{\sqrt{|\vec{Q}'|^2 + |\vec{q}_-|^2 + 2|\vec{Q}'||\vec{q}_-| \cos \vartheta'_- + m_*^2}} = \frac{|\vec{Q}'||\vec{q}_-|}{q_+^0}. \quad (4.105)$$

Diese Funktion besitzt genau eine Nullstelle bei

$$\cos \vartheta'_0 = \frac{(E - Q^0)^2 - |\vec{Q}'|^2 - 2q_-^0 (E - Q^0)}{2|\vec{Q}'||\vec{q}_-|}. \quad (4.106)$$

Aus der Bedingung

$$|\cos \vartheta_-^0| \leq 1 \quad (4.107)$$

folgen die Grenzen für die Integration über die Elektronenenergie  $q_-^0$ :

$$\begin{aligned} & |\cos \vartheta_-^0| \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \left| (E - Q^0)^2 - |\vec{Q}'|^2 - 2q_-^0 (E - Q^0) \right| \leq 2|\vec{Q}'||\vec{q}_-| \\ \Leftrightarrow & \left( (E - Q^0)^2 - |\vec{Q}'|^2 - 2q_-^0 (E - Q^0) \right)^2 \leq 4|\vec{Q}'|^2 ((q_-^0)^2 - m_*^2). \end{aligned} \quad (4.108)$$

Dies führt nach einigen Umformungen zu

$$\left( q_-^0 - \frac{1}{2} (E - Q^0) \right)^2 \leq |\vec{Q}'|^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{m_*^2}{(E - Q^0)^2 - |\vec{Q}'|^2} \right). \quad (4.109)$$

Den Quotienten auf der rechten Seite von (4.109) kann man mit Hilfe der Relationen (4.71) und (4.73) umformen

$$(E - Q^0)^2 - |\vec{Q}'|^2 = E^2 - 2EQ^0 + M_*^2 = 2E(Q^0 - Q'^0). \quad (4.110)$$

Damit folgen aus (4.109) die Grenzen  $\varepsilon^\pm$  für die Elektronenenergie  $q_-^0$

$$\varepsilon^\pm = \frac{1}{2} \left( E - Q^0 \pm |\vec{Q}'| \sqrt{1 - \frac{2m_*^2}{E(Q^0 - Q'^0)}} \right). \quad (4.111)$$

Aus der Forderung, dass sich die Energie des auslaufenden Elektrons innerhalb reeller Schranken bewegen soll, wird nun die obere Schranke  $Q'_{\max}$  für die Energie des gestreuten Myons festgelegt.

$$E(Q^0 - Q'^0) \geq 2m_*^2 \quad \Leftrightarrow \quad Q'^0 \leq Q^0 - \frac{2m_*^2}{E}. \quad (4.112)$$

Die rechte Seite kann man umformen:

$$\begin{aligned}
Q^0 - \frac{2m_*^2}{E} &= Q^0 - 2m_*^2 \left( \frac{M_*^2}{M_*^2 E} \right) \\
&= Q^0 - 2m_*^2 \left( \frac{Q_0^2 - |\vec{Q}|^2}{M_*^2 (Q^0 + rk^0)} \right) \\
&= Q^0 - 2m_*^2 \left( \frac{(Q^0 - |\vec{Q}|)(Q^0 + |\vec{Q}|)}{M_*^2 (Q^0 + |\vec{Q}|)} \right) \\
&= Q^0 - \frac{m_*^2}{M_*^2} (2Q^0 - 2|\vec{Q}|) . \tag{4.113}
\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Ungleichung (4.112)

$$Q'^0 \leq \frac{m_*^2}{M_*^2} \left( 2|\vec{Q}| - Q^0 \left( 2 - \frac{M_*^2}{m_*^2} \right) \right) =: Q'_{\max} . \tag{4.114}$$

Die untere Schranke für die Myonenenergie ist  $M_*$ .

Damit kann man die Partialrate im Schwerpunktsystem schreiben

$$\begin{aligned}
R_{cm,r} &= \int_{M_*}^{Q'_{\max}} dQ'^0 \int_{\varepsilon^-}^{\varepsilon^+} dq_-^0 \int_{-1}^{+1} d \cos \theta' \int_0^{2\pi} d\varphi'_- \frac{\alpha_f^2 m^2 M^2}{2\pi^2 \cdot Q^0} \\
&\cdot \left( \sum_{n,n'} \frac{T^{nn'}}{(q_+ + q_- - nk)^2 (q_+ + q_- - n'k)^2} \right) \Big|_{\vec{q}_+ = -\vec{Q}' - \vec{q}_-} . \tag{4.115}
\end{aligned}$$

Diese Integration wurde numerisch durchgeführt.

#### 4.3.4 Rücktransformation in das Ruhesystem des einlaufenden Myons

Die Partialraten  $R_{cm,r}$  im Schwerpunktsystem für die jeweilige Photonenzahl  $r$  mit den Lorentzfaktoren  $\gamma_r$  werden wieder ins Ruhesystem des einlaufenden Myons zurücktransformiert und addieren sich dort auf zur Gesamtrate  $R$ :

$$R = \sum_{r=r_0}^{\infty} R_r = \sum_{r=r_0}^{\infty} \gamma_r R_{cm,r} = \sum_{r=r_0}^{\infty} \frac{R_{cm,r}}{\sqrt{1 - \beta_{cm,r}^2}} . \tag{4.116}$$

Bei der Rücktransformation differentieller Paarerzeugungsraten muss neben der Zeitdilatation auch die Transformation der Differentiale berücksichtigt werden. Die sechsfach differentielle partielle Paarerzeugungsrate trans-

formiert sich wie [EM95, Mü03]

$$\begin{aligned} \frac{d^6 R_r}{dQ'^0 d(\cos \theta') d(\phi') dq_-^0 d(\cos \vartheta'_-) d\varphi'_-} &= \gamma_{cm,r} \frac{|\vec{q}_-|}{|(\vec{q}_-)_{cm,r}|} \frac{|\vec{Q}'|}{|\vec{Q}'_{cm,r}|} \\ &\times \frac{d^6 R_{cm,r}}{dQ_{cm,r}^0 d(\cos \theta'_{cm,r}) d\phi'_{cm,r} d(q_-^0)_{cm,r} d(\cos \vartheta'_-)_{cm,r} d(\varphi'_-)_{cm,r}}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Um experimentell überprüfbare Ergebnisse zu erhalten, muss man noch ins Laborsystem zurücktransformieren. Bewegt sich das Myon dort mit einem Lorentzfaktor  $\gamma_{\text{Lab}}$ , so lautet die totale Paarerzeugungsrate  $R_{\text{Lab}}$  im Laborsystem

$$R_{\text{Lab}} = \frac{R}{\gamma_{\text{Lab}}}. \quad (4.118)$$

Die differentielle Paarerzeugungsrate transformiert sich analog zu 4.117.





# Kapitel 5

## Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Resultate der Rechnungen vorgestellt und diskutiert. Der erste Abschnitt befasst sich mit dem Vergleich der totalen Paarerzeugungsraten für Myonen und Protonen als Projektilteilchen. Im ersten Abschnitt wird zunächst als analytisches Ergebnis gezeigt, wie die Rechnung für Myonen als Projektile im Multiphotonenregime in diejenige für Protonen übergeht. Anschließend werden die Resultate der oben beschriebenen numerischen Rechnung für Myonen (Gl. (4.115)) mit denen für Teilchen unendlicher Ruhemasse (Gl. (3.17)) verglichen. Die Ergebnisse dieses ersten Abschnitts beziehen sich alle auf das Ruhesystem des einlaufenden Projektils.

Im zweiten Abschnitt wird die Massenabhängigkeit des Rückstoßeffectes untersucht. Anschließend werden noch weitere differentielle Paarerzeugungsraten diskutiert. Die in diesen beiden Abschnitten vorgestellten Ergebnisse sind alle nicht auf das Ruhesystem des einlaufenden Myons rücktransformiert, sondern gelten für das Schwerpunktsystem.

Für den vierten Abschnitt wurde noch das Verhalten der Paarerzeugungsrate für Projektile mit unendlicher Ruhemasse im Above-Threshold-Regime untersucht. Hierfür wurde in der numerischen Rechnung für unendlich schwere Teilchen der Intensitätsparameter  $\xi = 1$  gesetzt.

### 5.1 Totale Paarerzeugungsraten im Multiphotonenregime

#### 5.1.1 Grenzwert für kleinen Intensitätsparameter

Unter der Annahme eines sehr kleinen Intensitätsparameters  $\xi$  lässt sich eine Näherung für den myonischen Vertex finden. Wegen  $\Xi \ll \xi \ll 1$ , kann man die effektive Masse des Projektilteilchens ungefähr gleich der Ruhemas-

se setzen. Außerdem ist der effektive Impuls dann gleich dem eigentlichen Impuls:

$$M_* = M\sqrt{1 + \Xi^2} \approx M \quad \text{und} \quad Q^\nu = P^\nu + \Xi^2 \frac{M^2}{2kP} k^\nu \approx P^\nu. \quad (5.1)$$

Nimmt man nun noch nicht-relativistische Impulsänderungen durch den Stoß mit den Laserphotonen an, so ist die Energie des gestreuten Myons im Ruhesystem des einlaufenden Myons ( $P^\mu = (M, \vec{0})$ )

$$P'^0 = \sqrt{M^2 + |\vec{P}'|^2} = M \left( 1 + \underbrace{\frac{|\vec{P}'|^2}{M^2}}_{\ll 1} \right)^{\frac{1}{2}} \approx M \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{|\vec{P}'|^2}{M^2} \right) = M + \frac{|\vec{P}'|^2}{2M} \approx M. \quad (5.2)$$

Betrachten wir nun das Argument der Besselfunktionen in der Entwicklung (4.39). Im Ruhesystem des einlaufenden Myons ist  $\bar{\beta}$

$$\begin{aligned} \bar{\beta} &= \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} = e \sqrt{\frac{(a_1 P')^2}{(kP')^2} + \frac{(a_2 P')^2}{(kP')^2}} = e \frac{a |\vec{P}'_\perp|}{(kP')} = \underbrace{ea}_{=m\xi} \underbrace{\omega}_{\approx M} \underbrace{\left( \frac{P'_0}{\omega} - \frac{P'_z}{\omega} \right)}_{\ll M} \\ &\approx \underbrace{\xi}_{\ll 1} \underbrace{\frac{m}{\omega}}_{\sim 1} \underbrace{\frac{|\vec{P}'_\perp|}{M}}_{< 1} \ll 1. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die gewöhnlichen Bessel-Funktionen wachsen für sehr kleine Argumente gemäß dem Potenzgesetz (B.9) aus Anhang B an:

$$J_N(\bar{\beta}) \propto \bar{\beta}^N \quad \text{für } \bar{\beta} \ll 1. \quad (5.4)$$

Somit sind in (4.39) alle Entwicklungskoeffizienten mit hoher Photonenordnung vernachlässigbar, nur die Terme mit  $N = 0$  sind relevant. Das bedeutet, dass die Doppelsumme  $\sum_{nn'}$  in (4.54) verschwindet und nur Summanden mit  $n = n' = r$  in die Übergangsrate eingehen. Damit kann die Summe über das Spurprodukt in Gleichung (4.115) geschrieben werden als

$$\sum_{nn'} \frac{T^{nn'}}{(q_+ + q_- - nk)^2 (q_+ + q_- - n'k)^2} \approx \frac{T^{rr}}{(q_+ + q_- - rk)^4}. \quad (5.5)$$

Das heißt, dass am Myonenvertex keine Absorption oder Emission von Photonen stattfindet.

Die einzelnen Summanden der in (4.56) definierten Matrixelemente  ${}_r\Delta_\nu^n$  kann

man dann abschätzen:

$$\begin{aligned}
& \left( \gamma_\mu + \underbrace{\frac{e^2 a^2 k_\mu \not{k}}{2(kP_-)(kP'_-)}} \right) F_0 \\
& \frac{e^2 a^2 k_\mu \not{k}}{2 \underbrace{(kP_-)}_{\approx \omega M} \underbrace{(kP'_-)}_{\approx \omega M}} \approx \frac{1}{2} \frac{e^2 a^2}{M^2 \omega^2} \underbrace{k_\mu \not{k}}_{\sim \omega^2} \sim \frac{1}{2} \Xi^2 \lll 1. \\
& -\frac{e}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{(kP_-)} \gamma_\mu}_{\approx \omega M} \underbrace{\not{k}}_{\sim \omega} \underbrace{\not{q}_1}_{\sim a} + \underbrace{\frac{1}{kP'_-}}_{\approx \omega M} \underbrace{\not{q}_1}_{\sim a} \underbrace{\not{k}}_{\sim \omega} \gamma_\mu \right) G_0 \sim \frac{a}{2M} \Xi \ll 1 \\
& -\frac{e}{2} \left( \underbrace{\frac{1}{(kP_-)} \gamma_\mu}_{\approx \omega M} \underbrace{\not{k}}_{\sim \omega} \underbrace{\not{q}_2}_{\sim a} + \underbrace{\frac{1}{kP'_-}}_{\approx \omega M} \underbrace{\not{q}_2}_{\sim a} \underbrace{\not{k}}_{\sim \omega} \gamma_\mu \right) H_0 \sim \frac{a}{2M} \Xi \ll 1. \quad (5.6)
\end{aligned}$$

Somit ist der einzige wichtige Term  $\gamma_\mu F_0$ . Die Spur für den Projektilvertex (E.2) wird zu

$$\text{Sp} \left( {}_r \Delta_\mu^n \frac{\not{P}_- + M}{2M} {}_r \bar{\Delta}_\nu^{n'} \frac{\not{P}'_- + M}{2M} \right) \approx \text{Sp} \left( \gamma_\mu \frac{\not{P}_- + M}{2M} \gamma_\nu \frac{\not{P}'_- + M}{2M} \right) |F_0|^2. \quad (5.7)$$

Für die reguläre Besselfunktion  $J_0$  gilt  $J_0(0) = 1$  (vgl. Anhang B, Abb. B.1). Weil  $\bar{\beta} \ll 1$  ist, kann man daher  $|F_0|^2 \approx 1$  annehmen. Mit Hilfe der Definition der Dirac'schen Gamma-Matrizen aus Anhang C lautet die Spur in (5.7) ausgeschrieben

$$\text{Sp} \left( \gamma_\mu \frac{\not{P}_- + M}{2M} \gamma_\nu \frac{\not{P}'_- + M}{2M} \right) = 2\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}. \quad (5.8)$$

Wegen (D.13) aus Anhang D bedeutet dies, dass die Spinquantenzahl des Projektils beim Stoß mit dem Laser erhalten bleibt. Eine Umkehrung des Vorzeichens ist nicht erlaubt. Daher spielt der Spin des einlaufenden Projektils in dieser Näherung keine Rolle.

Mit (5.8) findet man für das Betragsquadrat der Spinsumme (4.55)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- |n) \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' |r - n) \mathcal{M}_\nu^\dagger(\mu, \mu' |r - n') \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- |n') \\
& = \frac{1}{2} \sum_S \sum_{S', s_+, s_-} \mathcal{M}^0(e^+ e^- |r) \mathcal{M}_0(\mu, \mu' |0) \mathcal{M}_0^\dagger(\mu, \mu' |0) \mathcal{M}^{\dagger 0}(e^+ e^- |r) \\
& \approx \text{Sp} \left( \Gamma_r^0 \frac{\not{P}'_+ - m}{2m} \bar{\Gamma}_r^0 \frac{\not{P}'_- + m}{2m} \right), \quad (5.9)
\end{aligned}$$

was gerade der Spur aus Gleichung (3.17) für Projektilteilchen mit unendlicher Ruhemasse entspricht.

Zwei weitere Unterschiede treten zwischen der Rechnung für Protonen in Kapitel 3 und der Rechnung für Myonen in Kapitel 4 auf: zum einen wird für die Protonen durch das Quadrat des Dreierimpulses, für Myonen dagegen durch das Quadrat des Viererimpulses des virtuellen Photons geteilt. Zum anderen tritt in der Rechnung für Myonen eine zusätzliche Integration über den Dreierimpuls des auslaufenden Projektilteilchens auf. Berücksichtigt man bei der Integration über die Ortskoordinate des Myons (Gleichung (4.42)), dass am Myonenvertex nach (5.5) keine Photonen absorbiert oder emittiert werden, so erhält man eine vierdimensionale Deltafunktion

$$\delta^{(4)}(Q + q - Q');$$

mit den Näherungen (5.1) und (5.2) für die 0-Komponenten des einlaufenden und gestreuten Myons bleibt für die 0-Komponente der Delta-Funktion nur

$$\delta(q^0).$$

Das bedeutet, dass die 0-Komponente des Viererimpulses des virtuellen Photons 0 sein muss und daher gilt

$$\left| \frac{1}{q^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{-|\vec{q}|^2} \right|^2 = \left| \frac{1}{|\vec{q}|^2} \right|^2.$$

Also hebt sich auch dieser Unterschied zwischen den Ergebnissen für Myonen und Protonen weg.

Die verbleibende dreidimensionale Delta-Funktion

$$\delta(\vec{Q} + \vec{q} - \vec{Q}')$$

erlaubt es nun noch, das Integral über  $d^3\vec{Q}'$  auszuführen (siehe auch [PS95], S. 125).

Nach diesem analytischen Ergebnis müssen also im hier untersuchten Multiphotonenregime ( $\xi \ll 1$ ) die Paarerzeugungsraten für Myonen näherungsweise mit den Paarerzeugungsraten für Projektilteilchen mit unendlicher Masse übereinstimmen.

### 5.1.2 Vergleich mit Ergebnissen für Protonen als Projektilteilchen

Die im vorigen Abschnitt gefundene Äquivalenz der Ergebnisse für Myonen und schwerere Projektilteilchen im Multiphotonenregime lässt sich numerisch überprüfen. Zu diesem Zweck wurden ein Ein-Photonen-Prozess bei einer Photonenenergie von  $\omega = 2\text{MeV}$  und einem Intensitätsparameter von  $\xi = 10^{-3}$  sowie ein Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900\text{keV}$  und  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$  untersucht. Der letztere Zwei-Photonen-Prozess wurde in [Mül03] ausführlich behandelt. Das erlaubt einen direkten Vergleich der Ergebnisse für diese Parameterkombination.

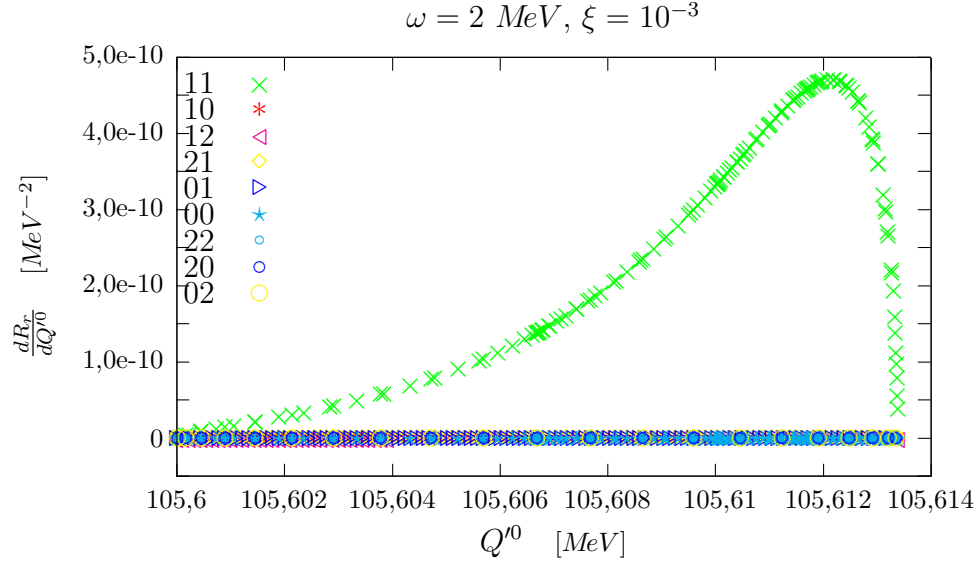
Zunächst wird der Ein-Photonen-Prozess besprochen, anschließend der Zwei-Photonen-Prozess.

#### Ein-Photonen-Prozess

Zunächst werden die Beziehungen (5.5) und (5.9) überprüft, und anschließend das Ergebnis für die totale Rate mit dem für Projektile unendlicher Masse verglichen.

Wie in Kapitel 4 erwähnt, sprechen wir von einem *Ein-Photonen*-Prozess, wenn die Gesamtzahl der aus dem Laserfeld absorbierten Photonen  $r = 1$  ist, und von einem *Zwei-Photonen*-Prozess, wenn  $r = 2$  ist. Die Anzahl der an den einzelnen Vertizes absorbierten Photonen kann sich durchaus von  $r$  unterscheiden, sie darf sogar an einem Vertex negativ werden. Die Gesamtzahl  $r$  absorbiert Photonen setzt sich aus der Summe der an beiden Vertizes absorbierten bzw. emittierten Photonenanzahlen zusammen. Daher können verschiedene Kombinationen  $\{n, n'\}$  zu einem  $r$ -Photonen-Prozess führen. Gleichung (5.5) besagt, dass in unserem Fall alle Terme in der Spinsumme vernachlässigt werden können, die die Absorption oder Emission von Photonen im Myonenvertex beinhalten. Dann müssen am Elektronenvertex  $n = n' = r$  Photonen absorbiert werden. Um dies zu überprüfen, wurde der Beitrag von verschiedenen Photonennordnungen untersucht. Abbildung 5.1 zeigt das Ergebnis für den Ein-Photonen-Prozess. Es sind alle Terme mit  $0 \leq n, n' \leq 2$  dargestellt, das heißt Fälle, in denen am Myonenvertex entweder keine Absorption oder Emission stattfindet, oder höchstens ein Photon absorbiert oder emittiert wird.

Für die betrachteten Parameter sind alle Kombinationen von  $n$  und  $n'$ , die die Absorption oder Emission von Laserphotonen am Myonenvertex zulassen, mindestens drei Größenordnungen kleiner als der Beitrag von  $n = n' = 1$ .



**Abbildung 5.1:** Beiträge der verschiedenen Photonennordnungen für den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2 \text{ MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$ . Deutlich dominant ist der Term mit  $n = n' = 1$ , bei dem im Myonenvertex keine Photonenumwechslung stattfindet.

Man darf also die Näherung annehmen, dass  $n = n' = r = 1$  für den Ein-Photonen-Prozess ist. Unter dieser Annahme ergibt die numerische Berechnung der Paarproduktionsrate für den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2 \text{ MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$

$$R_{m_\mu}^{(r=1)} = 3,814 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}. \quad (5.10)$$

Desweiteren impliziert (5.9), dass in der Spinsumme nur die Terme mit  $\mu = \nu = 0$  wesentliche Beiträge zur Erzeugungsrate liefern dürfen. Auch das wurde numerisch überprüft. Für den Ein-Photonenprozess liefert der Term mit  $\mu = \nu = 0$

$$R_{m_\mu}^{(r=1)}(\mu = \nu = 0) = 3,705 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}, \quad (5.11)$$

also etwa 97,1% der ermittelten Totalrate.

Auch die Beziehung (5.9) konnte also für den untersuchten Ein-Photonen-Prozess numerisch bestätigt werden. Es wurden dennoch in den weiteren Berechnungen die anderen  $\mu$ - $\nu$ -Kombinationen auch mitgenommen.

Die Rechnung für unendliche Projektilmasse liefert für den Ein-Photonen-Prozess im Ruhesystem des einlaufenden Projektils eine Paarproduktionsrate

von

$$R_{m \rightarrow \infty}^{(r=1)} = 3,903 \cdot 10^9 s^{-1}. \quad (5.12)$$

Das Ergebnis für Projektile mit Myonenmasse liegt daher mit dem Wert von  $3,814 \cdot 10^9 s^{-1}$  (Gl. (5.10)) bei ca. 94,7% der Rate für unendliche Projektilmasse.

### Zwei-Photonen-Prozess

Für den Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900 keV$ ,  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$  erhält man unter der Annahme (5.5), also für  $n = n' = 2$  eine Paarerzeugungsrate von

$$R_{m_\mu}^{(r=2)} = 187,526 s^{-1}. \quad (5.13)$$

Der untersuchte Zwei-Photonen-Prozess ergibt im Falle der unendlichen Masse

$$R_{m \rightarrow \infty}^{(r=2)} = 192,899 s^{-1}, \quad (5.14)$$

somit beträgt die Partialrate für Myonen als Projektilteilchen etwa 97,2% der Partialrate für Projektile mit unendlicher Ruhemasse. Auch hier kann man den Anteil des Spinsummen-Terms mit  $\mu = \nu = 0$  untersuchen, um die Relation (5.9) zu überprüfen. Für den Zwei-Photonen-Prozess beträgt besagter Term mit

$$R_{m_\mu}^{(r=2)}(\mu = \nu = 0) = 183,392 s^{-1} \quad (5.15)$$

etwa 97,8% der totalen Rate.

Bei der Betrachtung der Relation (5.5) stellte sich ein überraschender Effekt ein: Im Falle von  $n = n' = 1$ , also wenn eines der beiden insgesamt absorbierten Laserphotonen am Myonenvertex, das andere am Vertex des erzeugten Paares absorbiert wird, so treten Singularitäten auf und die Integration divergiert. Eine genauere Untersuchung zeigte, dass der im freien Photonenpropagator (4.13) auftretende Faktor  $q^{-2}$ , der sich in Gleichung (4.115) in quadrierter Form  $(q_+ + q_- - nk)^{-2}(q_+ + q_- - n'k)^{-2}$  wiederfindet, an einigen Stellen singularär wird. Also verschwindet an diesen Stellen das Quadrat des Viererimpulses des zwischen den beiden Vertizes propagierten Photons. Das bedeutet, dass dieses Photon masselos ist. Es handelt sich also nicht um ein virtuelles, sondern um ein reales Photon. Der Paarerzeugungsprozess lässt sich in diesen Fällen in zwei Prozesse zerlegen: zunächst absorbiert das Myon ein Photon aus dem Laserfeld und emittiert ein reales Photon. Dieses wiederum zerfällt beim Stoß mit einem Photon aus dem Laserfeld in ein Elektron-Positron-Paar. Es tritt hier also ein Breit-Wheeler

Prozess (1.1) auf.

Wie man sieht, ist die Aussendung eines realen Photons nur in einem Laserfeld möglich: nur hier wird von der Summe der Viererimpulse des erzeugten Paares noch ein endlicher Impuls  $nk$  abgezogen, so dass das Viererquadrat des Photonenimpulses  $q^2 = (q_+ + q_- - nk)^2 = 0$  werden kann. Dieses Phänomen wurde in anderen Konfigurationen zur Paarerzeugung hauptsächlich für große Intensitätsparameter  $\xi$  gefunden. Dass es hier, bei einem Intensitätsparameter von weniger als  $10^{-3}$  auftritt, ist daher überraschend. Andererseits ist sein Auftreten physikalisch durchaus erlaubt.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Rechnung berücksichtigt nicht, dass der Paarerzeugungsprozess sich unter realen Bedingungen in einem endlichen Laservolumen abspielt. Daher hat ein reales Photon, dessen Existenz im Gegensatz zu einem virtuellen Photon nicht durch die Unschärferelation eingeschränkt ist, quasi ein unendliches Volumen zur Verfügung, um in ein Elektron–Positron–Paar zu zerfallen. Die Paarerzeugungsrate wird also hier unnatürlich groß. Zur exakten Behandlung dieses realen Photons darf man nicht länger den freien Photonenpropagator (4.13) verwenden, sondern muss stattdessen auf einen sogenannten Volkov–Propagator zurückgreifen. Es gibt auch eine Methode, um das zur Verfügung stehende Phasenraumvolumen abzuschätzen und die Singularitäten „auszuschalten“. Hierbei wird den Viererimpulsen des erzeugten Elektron–Positron–Paares noch ein kleiner imaginärer Anteil hinzuaddiert, der für eine gewisse Dämpfung sorgt. Damit erhält man dann einen sogenannten Dirac–Volkov–Propagator. Bei der Integration über den Phasenraum treten damit aufgrund der sehr geringen Breite der Singularitäten nur sehr kleine totale Beiträge hiervon auf. Eine genauere Untersuchung würde über den Rahmen dieser Diplomarbeit hinausgehen. Wir verweisen auf [Löt08] und [NVR07], wo diese Methode ausführlich diskutiert wird.

Um dennoch ein Gefühl für die Wahrscheinlichkeit dieses Prozesses zu bekommen, führen wir folgende Überlegungen durch: die Fourier–Entwicklungen (4.23) für den Elektronen- und (4.35) für den Myonenvertex sind unabhängig von der Wahl des Photonenpropagators. Wie wir unten sehen werden, skaliert die Paarerzeugungsrate für  $r$  am Vertex des erzeugten Paares absorbierte Laserphotonen mit  $\xi^{2r}$ . Dies liegt an dem in Abschnitt 5.1.1 erwähnten Verhalten der Bessel–Funktionen (vgl. Anhang B). Werden nicht alle  $r$  Photonen am Elektronenvertex absorbiert, sondern wie in unserem Fall  $N = N' = 1$  Photon am Myonenvertex und  $n = n' = 1$  Photon am Elektronenvertex, so skaliert die Rate mit  $\xi^2 \Xi^2$ , was wegen (4.3) um einen Faktor  $m^2/M^2 \sim 10^{-5}$  kleiner ist als  $\xi^{2r} = \xi^4$ . Man kann daher davon ausgehen, dass der Beitrag des Breit–Wheeler–Prozesses gegenüber den anderen Beiträgen vernachlässigt werden kann. Im Weiteren wird angenommen, dass im vorliegenden Zwei–



Photonen-Prozess der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate von dem Summanden mit  $n = n' = 2$  herrührt. Die Beiträge der anderen Photonennordnungen (außer  $n = n' = 1$ ) erwiesen sich in der numerischen Überprüfung tatsächlich als mindestens sieben Größenordnungen kleiner als der Beitrag von  $n = n' = 2$ .

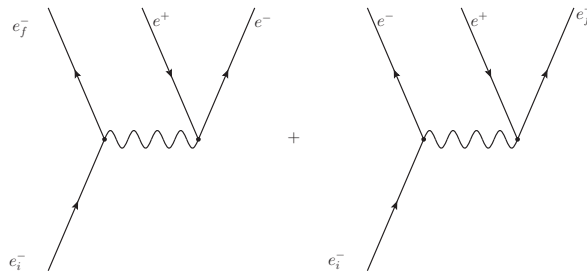
Sowohl im Ein-Photonen- als auch im Zwei-Photonen-Prozess ist die Paarerzeugungsrate für das Projektil mit endlicher Masse etwas kleiner als für unendlich schwere Projektilteilchen. Dies liegt an der höheren Rückstoßenergie, die bei Myonen als Projektilteilchen zum Tragen kommt. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ist der Rückstoß für Protonen um etwa zwei Größenordnungen kleiner als für Myonen; das macht sich in dem numerischen Ergebnis für die Paarerzeugungsrate bemerkbar.

Für beide Prozesse wurde außerdem die Abhängigkeit vom Intensitätsparameter untersucht. Es zeigte sich, dass bei Veränderung des Intensitätsparameters der numerische Vorfaktor der Paarerzeugungsrate in beiden Fällen gleich blieb, wohingegen sich die Größenordnung veränderte. Setzt man etwa im Ein-Photonen-Prozess  $\xi = 10^{-4}$ , so wird die Paarerzeugungsrate um zwei Größenordnungen kleiner. Im Zwei-Photonen-Prozess liefert ein um eine Größenordnung verkleinertes  $\xi$  eine um vier Größenordnungen verringerte Paarerzeugungsrate. Die Paarerzeugungsrate für einen  $r$ -Photonen-Prozess skaliert also im Multiphotonen-Regime mit  $\xi^{2r}$ . Dies wird durch das Verhalten der Bessel-Funktionen (Anh. B) verständlich.

## 5.2 Massenabhängigkeit der Rückstoßverteilung

Die oben vorgestellte Rechnung ist exakt für elementare Spin- $1/2$ -Teilchen, mit der Einschränkung, dass für Elektronen als Projektilteilchen der untersuchte Feynman-Graph nicht ausreichend ist. Durch die Ununterscheidbarkeit von gestreutem und erzeugtem Elektron müsste hier noch ein Austauschterm berechnet werden; die vollständige Rate (ohne Breit-Wheeler-Paarerzeugung) wäre durch die Feynman-Diagramme in Abb. 5.2 beschrieben.

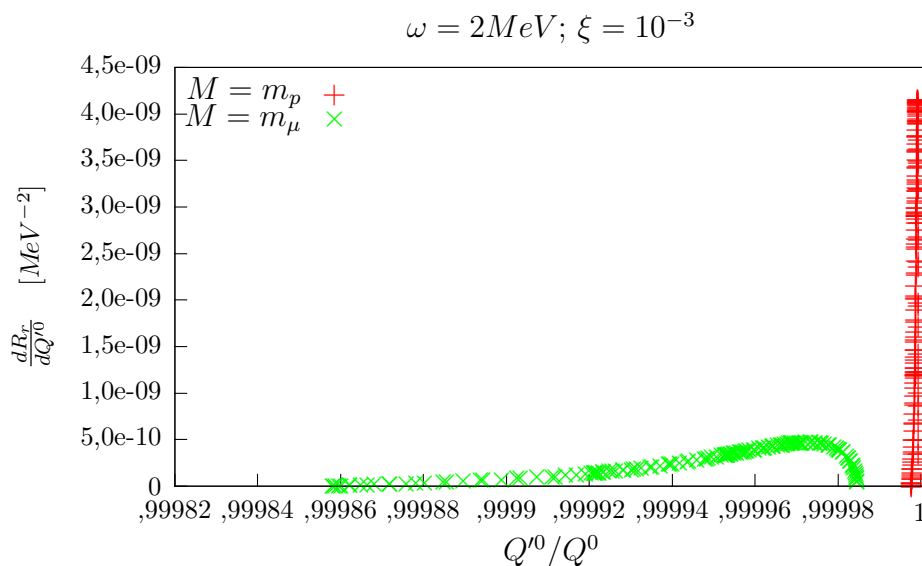
Für Protonen, die ja keine elementaren Teilchen sind, sondern aus Quarks zusammengesetzt, müsste man eigentlich ein Feynman-Diagramm berechnen, das den Paarerzeugungsprozess auf Quark-Ebene widerspiegelt. In Abschnitt 5.1.2 wurde gezeigt, dass im Multiphotonenregime die numerischen Resultate für die Paarerzeugungsrate aus der Myonen- und der Protonenrechnung



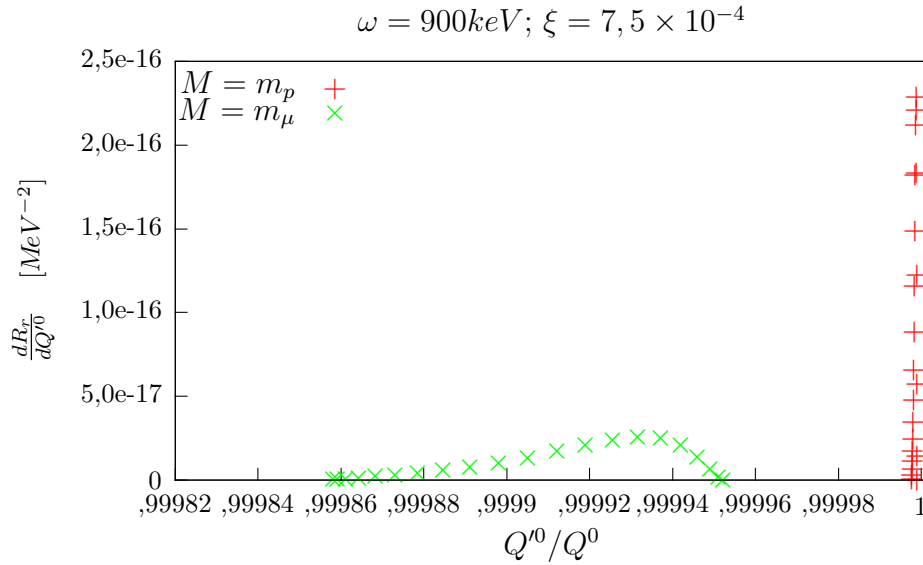
**Abbildung 5.2:** Feynman-Diagramm für den Prozess mit Elektron als Projektil.

ineinander übergehen. Protonen sind wie Myonen Spin- $1/2$ -Teilchen, so dass die Spinsumme über die Spins der auslaufenden Teilchen mit der Mittelung über die möglichen Anfangsspinzustände ebenfalls  $\frac{1}{2} \sum_S \sum_{S', s_+, s_-}$  lautet. Man kann die Protonen also als *effektive* Dirac-Teilchen behandeln.

Ein Einsetzen der Protonenmasse in den Programmcode für die Myonenrechnung dürfte also insbesondere im Multiphotonenregime zu keinen groben Unstimmigkeiten mit dem tatsächlichen Sachverhalt führen. Dies erlaubt es, einen Vergleich der Rückstoßverteilungen für Myonen und Protonen als Projektil vorzunehmen.



**Abbildung 5.3:** Vergleich der auf die Anfangsenergie skalierten Rückstoßenergie für Myonen- bzw. Protonenmasse für einen Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2\text{ MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$ .



**Abbildung 5.4:** Vergleich der auf die Anfangsenergie skalierten Rückstoßenergie für Myonen- bzw. Protonenmasse für einen Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900\text{ keV}$ ,  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$ .

Es werden wie im vorigen Abschnitt ein Ein-Photonen-Prozess bei der Photonenenergie  $\omega = 2\text{MeV}$  und dem Intensitätsparameter  $\xi = 10^{-3}$ , sowie ein Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900\text{keV}$  und  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$  untersucht. Allerdings sind die folgenden Betrachtungen im Schwerpunktsystem aufzufassen und nicht wie oben im Ruhesystem des einlaufenden Myons. Gleichung (4.114) für die maximale Energie des gestreuten Teilchens liefert im betrachteten Ein-Photonen-Prozess einen minimalen Rückstoß des Myons von ca.  $2 \cdot 10^{-5}Q^0$ . Beim Proton liegt die maximale Energie  $4,6 \cdot 10^{-7}Q^0$  unterhalb der ursprünglichen Gesamtenergie. Im Zwei-Photonen-Prozess liegt die maximale erlaubte Energie des gestreuten Myons ca.  $4,7 \cdot 10^{-5}Q^0$  unter der Anfangsenergie. Das Proton muss hier mindestens  $3,2 \cdot 10^{-6}Q^0$  verlieren.

In den Abbildungen 5.3 und 5.4 sind die auf die Anfangsenergie skalierten Rückstoßverteilungen für ein Myon und für ein Proton zu sehen. Für den Ein-Photonen-Prozess (Abb. 5.3) wurden eine Photonenenergie von  $2\text{MeV}$  und ein Intensitätsparameter  $\xi$  von  $10^{-3}$  angenommen. Im Schwerpunktsystem bewegt sich das einlaufende Myon dann mit einer Energie von  $105,618\text{MeV}$ ; das Projektil mit der Ruhemasse eines Protons ( $938,272\text{MeV}$ ) hat im Schwerpunktsystem die Energie  $938,274\text{MeV}$ . Die effektive Bewegungsenergie der

Teilchen ist, wenn man die Lichtgeschwindigkeit weiterhin  $c = 1$  setzt,

$$E_{kin} = Q^0 - M_*, \quad (5.16)$$

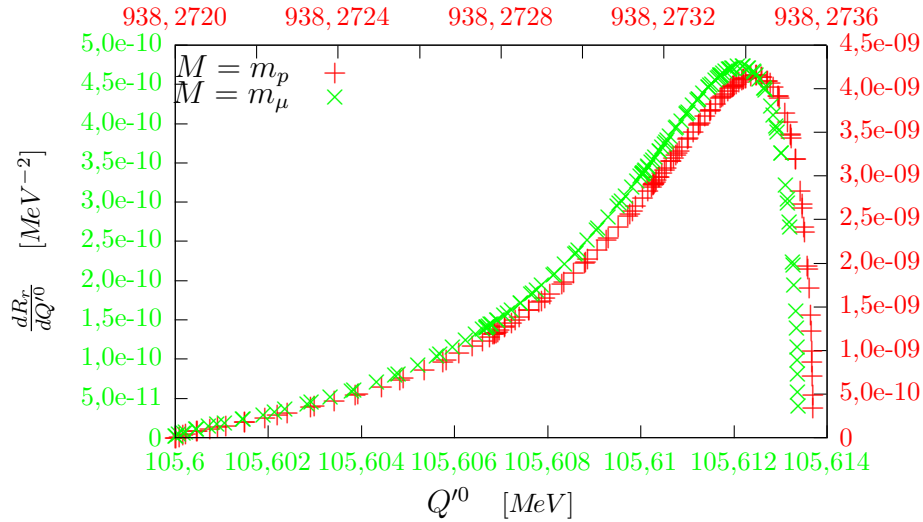
also ca.  $18keV$  für Myonen und ca.  $2keV$  für Protonen.

Wie man sieht, liegt die wahrscheinlichste Rückstoßenergie für das Myon bei etwa  $105,612MeV$ . Nach Gl. (5.16) hat das gestreute Myon daher eine Bewegungsenergie von ca.  $12keV$ ; es hat also ein Drittel seiner ursprünglichen Bewegungsenergie beim Stoß verloren. Für Protonen liegt die wahrscheinlichste Energie nach der Wechselwirkung mit den Laserphotonen bei etwa  $938,2734MeV$ , was einer Bewegungsenergie von  $1,4keV$  entspricht. Das Proton verliert also ebenfalls etwa ein Drittel seiner anfänglichen Bewegungsenergie. Gemessen an der ursprünglichen Gesamtenergie verliert das Proton mit einer Differenz von  $0,6keV$  nur einen Anteil von ca.  $6,4 \cdot 10^{-7}Q^0$ . Das Myon dagegen verliert mit ungefähr  $6keV$  einen Anteil von etwa  $5,7 \cdot 10^{-5}Q^0$ . Der relative Verlust für ein Teilchen der Protonenmasse ist also um zwei Größenordnungen kleiner als für ein Myon. Das Projektil mit der Protonenmasse verliert relativ zu seiner Gesamtenergie nahezu keine Energie, im Vergleich dazu spürt das Myon einen deutlichen relativen Rückstoß.

Der gleiche Effekt ist für den Zwei-Photonen-Prozess in Abb. 5.4 zu beobachten. Hier wurden eine Photonenenergie von  $900keV$  und ein Intensitätsparameter von  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$  angenommen. Die Energie der einlaufenden Projektilteilchen im Schwerpunktsystem beläuft sich damit auf  $105,615MeV$  für die Myonenmasse und  $938,274MeV$  für die Protonenmasse. Das entspricht kinetischen Energien von  $15keV$  für das Myon und  $2keV$  für das Proton. Auch in diesem Fall erfährt das Myon beim Stoß mit den Laserphotonen einen deutlich größeren relativen Rückstoß als das Proton. Das Myon wird auf eine Bewegungsenergie von ca.  $8keV$  abgebremst, verringert diese also um etwa  $46,7\%$ . Das entspricht in der Gesamtenergie einem Verlust von etwa  $6,6 \cdot 10^{-5}Q^0$ . Das Proton hat nach dem Stoß eine kinetische Energie von ca.  $0,9keV$ , verliert also etwa  $55\%$  der Bewegungsenergie vor dem Stoß. Es wird um ca.  $1,1keV$  bzw.  $1,2 \cdot 10^{-6}Q^0$  abgebremst. Also ist auch im Zwei-Photonen-Prozess der relative Rückstoßeffect für das Proton deutlich kleiner als für das Myon. Dieses Ergebnis bestätigt, dass die Näherung unendlicher Masse für Protonen tatsächlich angemessen ist.

Es fällt auf, dass der beim Stoß verlorene Anteil der Bewegungsenergie für Protonen und Myonen etwa gleich ist; beide verlieren im Ein-Photonen-Prozess etwa ein Drittel ihrer Bewegungsenergie, beim Zwei-Photonen-Prozess ca.  $55\%$ . Allerdings ist der relative Rückstoß in beiden Fällen für das Myon deutlich größer als für das Proton. Im Ein-Photonen-Prozess ist der auf die ursprüngliche Gesamtenergie bezogene Rückstoßeffect für das Myon

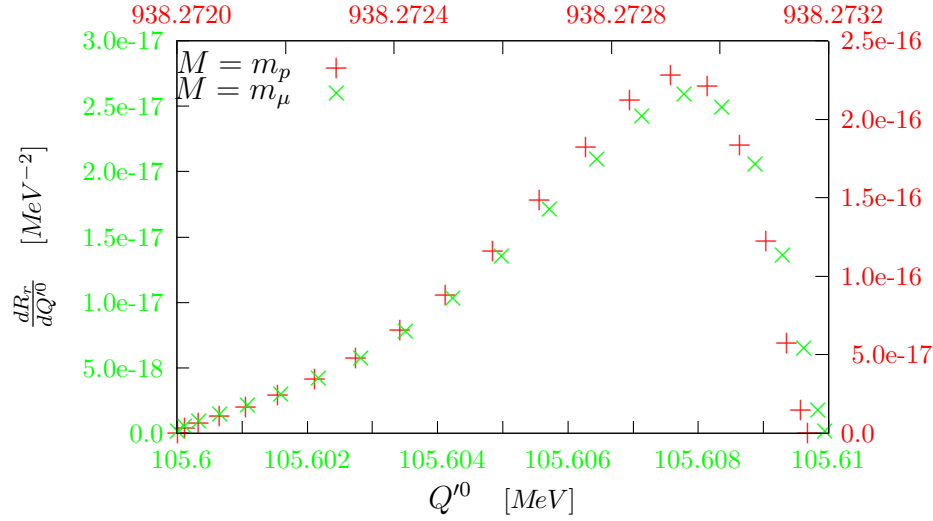
um ca. zwei Größenordnungen größer als für das Proton, im Zwei-Photonen-Prozess dagegen nur um einen Faktor 50. Dies erklärt, dass im vorigen Abschnitt die Übereinstimmung der totalen Paarerzeugungsraten im Zwei-Photonen-Fall etwas größer war als im Ein-Photonen-Fall.



**Abbildung 5.5:** Vergleich der Rückstoßverteilung für Myonen- bzw. Protonenmasse für den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2 \text{ MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$ . Die grüne Skala am linken und unteren Bildrand bezieht sich auf die grüne Kurve für Myonen als Projektilteilchen, die rote Skala am rechten und oberen Bildrand bezieht sich auf die rote Kurve für Protonen. Die Energie des einlaufenden Myons im Schwerpunktsystem beläuft sich auf  $105,618 \text{ MeV}$ , die des Protons auf  $938,274 \text{ MeV}$ .

Verzichtet man auf die Skalierung der  $x$ -Achse bei der Darstellung der Rückstoßverteilungen, so kann man die Form der Kurven für die unterschiedlichen Projektilmassen vergleichen. Dies ist für Myonen- und Protonenmasse in den Abbildungen 5.5 und 5.6 geschehen. Wie man sieht, ähneln sich die beiden Rückstoßverteilungen für Myonen und Protonen sehr. Allerdings ist die absolute Breite des Peaks im Protonen-Fall um etwas mehr als einen Faktor 10 kleiner, die Peakhöhe aber knapp um einen Faktor 10 größer als im Myonen-Fall. Dies führt dazu, dass der numerische Wert für die Paarerzeugungsrate, also das Integral über die Rückstoßverteilung, in beiden Fällen etwa gleich groß ist. Die Lage des Maximums liegt wie bereits diskutiert für Protonen ca. eine Größenordnung näher an der Anfangsenergie als für Myonen.

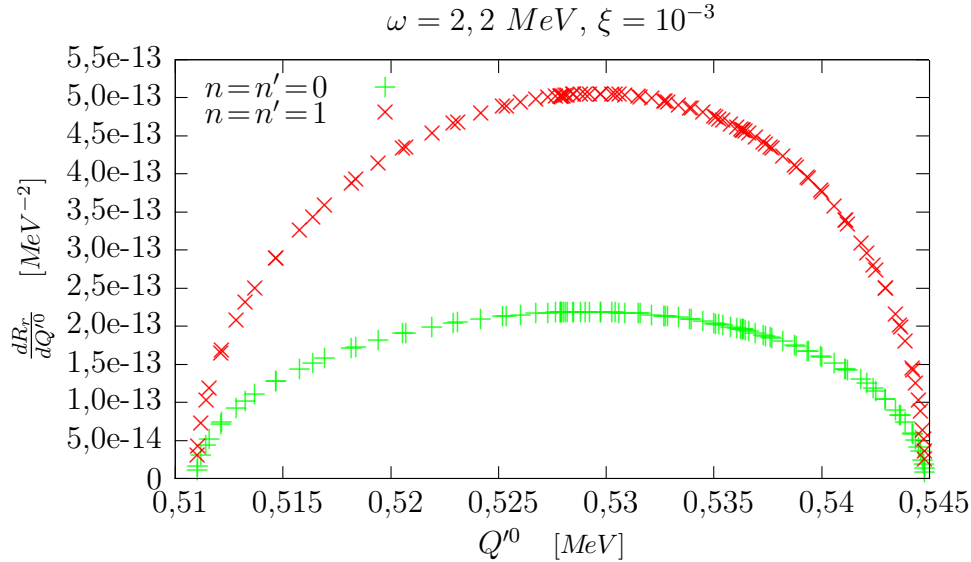
Wie oben erwähnt, kann man die Rechnung für myonische Projektile nicht einfach auf Elektronen übertragen. Man müsste hier der Vertauschbarkeit des



**Abbildung 5.6:** Vergleich der Rückstoßverteilung für Myonen- bzw. Protonenmasse für den Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900\text{keV}$ ,  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$ . Die grüne Skala am linken und unteren Bildrand bezieht sich auf die grüne Kurve für Myonen als Projektilteilchen, die rote Skala am rechten und oberen Bildrand bezieht sich auf die rote Kurve für Protonen. Die Energie des einlaufenden Myons im Schwerpunktsystem beläuft sich auf  $105,615\text{MeV}$ , die des Protons auf  $938,274\text{MeV}$ .

gestreuten Elektrons mit dem erzeugten Elektron Rechnung tragen. Im folgenden werden dennoch einige Abbildungen gezeigt, die durch Einsetzen der Elektronenmasse als Projektil in die numerische Rechnung entstanden sind. Es ist hierbei zu beachten, dass sie nur rein qualitativ die Eigenschaften des Paarerzeugungsprozesses widerspiegeln. Desweiteren ist durch den viel größeren Rückstoßeffect der untersuchte Bethe-Heitler-Prozess gegenüber dem Breit-Wheeler-Prozess möglicherweise stark unterdrückt. Dies ist ein weiterer Grund dafür, dass durch die hier durchgeführte Rechnung in diesem Fall keine direkt beobachtbaren Vorhersagen gemacht werden können. Im folgenden werden wie oben für Myonen und schwerere Teilchen ein Ein-Photonen- und ein Zwei-Photonen-Prozess untersucht. Allerdings reicht hier wegen  $r\omega \geq 4m_e$  eine Photonenenergie von  $2\text{MeV}$  zur Paarerzeugung mittels der Absorption eines einzelnen Photons nicht mehr aus. Es wurden daher als Parameter für den Ein-Photonen-Prozess  $\omega = 2,2\text{MeV}$  und  $\xi = 10^{-3}$  und für den Zwei-Photonen-Prozess  $\omega = 1,1\text{MeV}$  und  $\xi = 10^{-3}$  verwendet. Wie zu erwarten, darf man für leichte Teilchen wie Elektronen die Näherung (5.5) nicht mehr annehmen; auch Photonenordnungen, die die Absorption oder Emission von Photonen am Projektilvertex beinhalten, können sehr

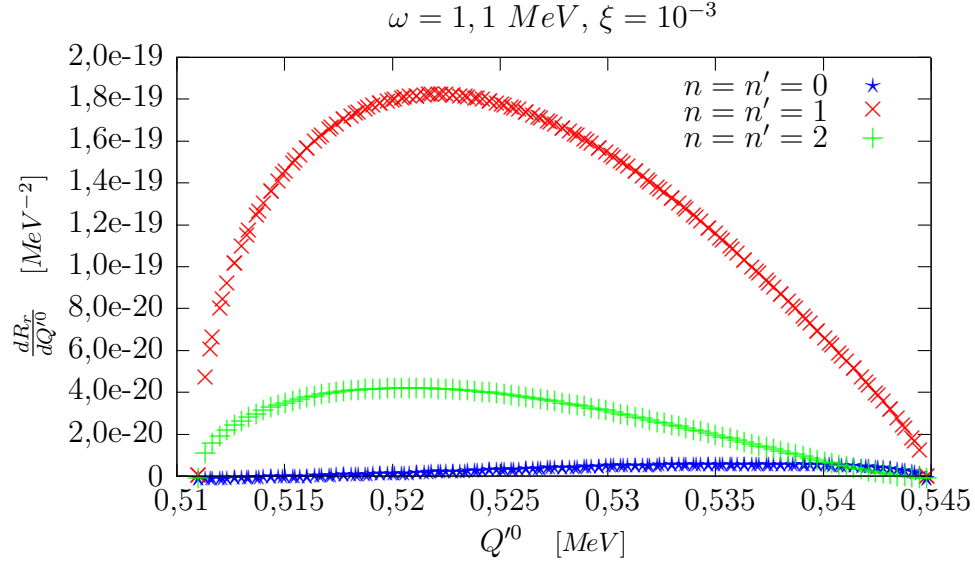
große Beiträge liefern. Abbildung 5.7 zeigt die wichtigsten Summen–Beiträge für den Ein–Photonen–, Abbildung 5.8 für den Zwei–Photonen–Prozess.



**Abbildung 5.7:** Rückstoßverteilung der wichtigsten Beiträge zur Paarerzeugung für Elektronen als Projektilteilchen für den Ein–Photonen–Prozess bei  $\omega = 2,2 \text{ MeV}, \xi = 10^{-3}$ .

Wie man im Falle der Absorption eines einzelnen Laser–Photons der Energie  $2,2 \text{ MeV}$  sieht, ist hier die Paarerzeugungsrate durch Absorption des Photons am Projektilvertex etwa halb so groß wie durch Absorption am Vertex des erzeugten Paares (Abb. 5.7). Die Beiträge anderer Photonennordnungen sind hier um mindestens 9 Größenordnungen kleiner als die des Hauptbeitrags mit  $n = n' = 1$ .

Im Vergleich zu dem 200–mal schwereren Myon erfährt das gestreute Elektron einen enormen Rückstoß. Das Myon wird beim Ein–Photonen–Prozess um etwa  $0,06\%$  der ursprünglichen Energie abgebremst. Für die betrachtete Photonenergie  $\omega = 2,2 \text{ MeV}$  beläuft sich die Energie des einlaufenden Elektrons im Schwerpunktsystem auf  $Q^0 = 874,5 \text{ keV}$ , also  $E_{kin} = 363,5 \text{ keV}$ . Die wahrscheinlichste Energie des gestreuten Elektrons liegt ca.  $352 \text{ keV}$  unterhalb der Anfangsenergie. Also verliert das Projektilektron etwa  $40\%$  der Gesamtenergie vor dem Stoß. Es hat dann eine Bewegungsenergie von ca.  $11,5 \text{ keV}$ , verliert also  $96,8\%$  seiner anfänglichen Bewegungsenergie. Wegen der Relation (4.114) für die maximale Energie des gestreuten Teilchens wird das Elektron um mindestens  $329,67 \text{ keV}$  gebremst, das sind  $37,7\%$  der Anfangsenergie und entspricht einer um  $90,7\%$  verringerten Bewegungsenergie. Auch ist die Rückstoßverteilung im Falle der Elektron–Projektildeutlich



**Abbildung 5.8:** Rückstoßverteilung der wichtigsten Beiträge zur Paarerzeugung für Elektronen als Projektilteilchen für den Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 1,1 \text{ MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$ .

breiter als für Myonen. Dort gibt es eine deutlich bevorzugte Rückstoßenergie, um die herum die Kurve ein vergleichsweise schmales Maximum bildet. Die Halbwertsbreite ist für Myonen ungefähr  $3 \text{ keV}$ , für Elektronen etwas weniger als  $30 \text{ keV}$ , also ist sie hier fast um einen Faktor 10 größer.

Der Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 1,1 \text{ MeV}$  für Elektronen als Projektile ist in Abbildung 5.8 gezeigt. Dort sind die Beiträge der drei wichtigsten Photonen-Ordnungen aufgetragen, wobei der Term mit  $n = n' = 1$  den deutlichen Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate liefert. Der Term mit  $n = n' = 2$  führt bereits zu einer um eine Größenordnung kleinere Partialrate, der Term mit  $n = n' = 0$  liefert einen um drei Größenordnungen kleineren Wert als der Hauptbeitrag. Alle anderen Terme ergeben Beiträge, die mindestens vier Größenordnungen unter dem des Hauptbeitrags liegen. Dass hier der Term den Hauptbeitrag liefert, der die Absorption eines Photons am Projektilvertex beinhaltet, scheint bei nicht-linearen Paarerzeugungsprozessen eine gewisse Regelmäßigkeit zu haben; bei der Untersuchung eines Drei-Photonen-Prozesses zeigte sich, dass dort der Beitrag der Ordnung  $n = n' = 2$  der größte ist. In diesem Fall sind auch gemischte Terme, etwa  $n = 0, n' = 2$ , zum Teil größer als Terme mit  $n = n'$ . Im vorliegenden Zwei-Photonen-Prozess sind durch die Wahl der Photonenenergie  $1,1 \text{ MeV}$  sowohl die obere Schranke für die Rückstoßenergie als auch die Anfangsenergie gleich denen



für den Ein-Photonen-Prozess bei  $2,2\text{MeV}$ . Die wahrscheinlichste Energie des gestreuten Elektrons liegt ca.  $345\text{keV}$  unterhalb der Anfangsenergie, das sind ca.  $39,4\%$  der ursprünglichen Gesamtenergie. Die Bewegungsenergie verringert sich in diesem Fall um ca.  $94,9\%$  auf  $18,6\text{keV}$ . In beiden Fällen wird das Elektron beinahe auf seine Ruheenergie abgebremst. Hier ist, anders als bei schwereren Projektilen, der relative Rückstoß für den linearen Prozess etwas größer als für den nicht-linearen.

### 5.2.1 Untersuchung der Genauigkeit der Rechnung für Elektronen als Projektil

Man kann den linearen Bethe-Heitler-Prozess (Absorption eines einzelnen Laserphotons) auch ohne die Beschreibung mit Propagatoren berechnen. In diesem Falle kann man auf die Berücksichtigung des Laserfeldes verzichten und die gewöhnliche Quantenelektrodynamik (QED) anwenden. Dies wurde auch bereits in der Literatur untersucht<sup>1</sup>. Der Vergleich mit exakten Rechnungen erlaubt es, für den betrachteten Ein-Photonen-Prozess mit Elektronen als Projektilteilchen den Fehler abzuschätzen, der durch die Vernachlässigung des Austauschtermes entsteht. Daneben existieren frühe Studien, die ebenfalls die Vertauschung des gestreuten mit dem erzeugten Elektron außer Acht lassen [Bor47a, Ghi47]. Für hohe Photonenenergien ist diese Näherung durchaus berechtigt, wie eine Untersuchung von MORK aus dem Jahre 1967 zeigt [Mor67]. Danach ist im Bereich  $\hbar\omega \geq 16m_e c^2$  die Rechnung von BORSELLINO korrekt, und der Austauschterm ist vernachlässigbar. Es findet sich dort eine Tabelle mit Werten für den Wirkungsquerschnitt für verschiedene Photonenenergien sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung des Austauschterms. Nahe der hier genauer betrachteten Photonenenergie findet man in der Tabelle I. auf S. 1067 in [Mor67] beispielsweise einen Literaturwert für eine Photonenenergie von  $2,25\text{MeV}$ , also  $4,4 \cdot m_e c^2$ . Um zu überprüfen, in wie weit die ursprünglich für Myonen konzipierte Rechnung auch auf Elektronen übertragbar ist, wurde der Wirkungsquerschnitt für diese Photonenenergie aus unserer Ein-Photonen-Rate berechnet.

Aus der Paarerzeugungsrate erhält man einen Wirkungsquerschnitt, indem man die Rate durch den einfallenden Photonenfluss dividiert. Der Photonenfluss berechnet sich als Quotient aus der Laserintensität  $I$  und der Photonenenergie  $\omega$ . Die Intensität lässt sich in unseren Einheiten mit Hilfe des in (2.17) definierten Intensitätsparameters  $\xi$  berechnen (s. Anhang A, Gl.

<sup>1</sup> Siehe z.B. [BLP91] für Atomkerne als Projektil, [MOK69] für Elektronen als Projektil.

(A.10)):

$$I = \frac{\overline{\mathcal{E}^2}}{4\pi} = \frac{a^2\omega^2}{4\pi} = \frac{m^2\xi^2\omega^2}{e^2} \frac{\omega^2}{4\pi} = \frac{m^2\omega^2}{4\pi\alpha_f} \xi^2. \quad (5.17)$$

Daraus folgt für den Photonenfluss  $j$  im Ruhesystem des Projektilteilchens (s. Anhang A, Gl. (A.11)):

$$j = \frac{I}{\omega} = \frac{\omega m^2}{4\pi\alpha_f} \xi^2. \quad (5.18)$$

Zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts für Elektronen als Projektilteilchen im untersuchten Ein-Photonen-Prozess wurden die Beiträge aller Photonennordnungen, die die Absorption oder Emission von maximal einem Photon am Projektilvertex beinhalten, berücksichtigt (vgl. die Diskussion in Abschnitt 5.1.2 auf Seite 53). Es zeigte sich, dass das Ergebnis sich nicht verändert, wenn man nur die beiden Hauptbeiträge betrachtet, also die Fälle, in denen insgesamt nur ein Laserphoton — entweder am Projektilvertex oder am Vertex des erzeugten Paares — am Prozess beteiligt ist. Umgerechnet in SI-Einheiten erhält man aus der hier durchgeführten Rechnung einen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  von

$$\sigma(\omega = 4,4 \cdot m_e) = 2,36 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2. \quad (5.19)$$

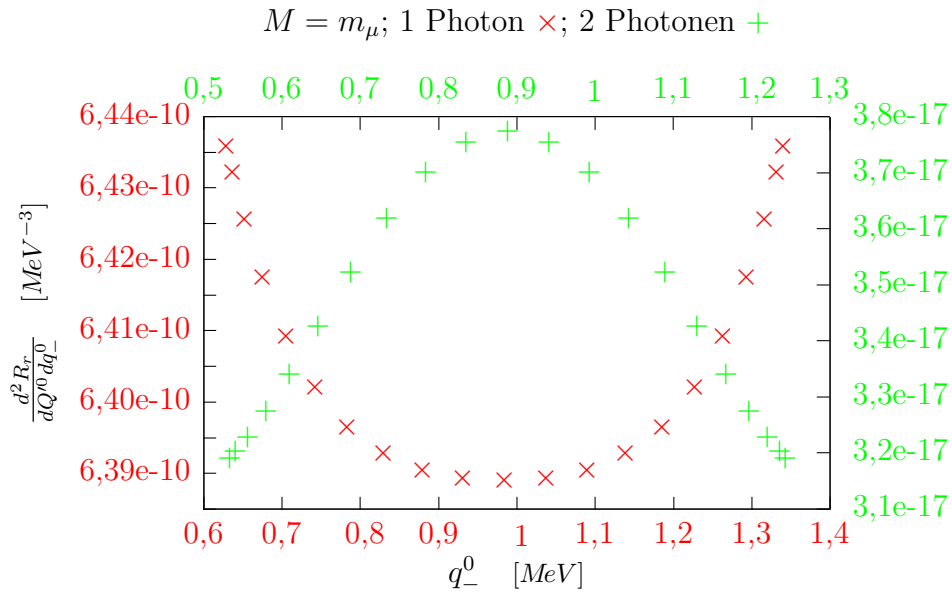
Der Tabelle in [Mor67] entnimmt man für den Borsellino-Querschnitt einen Wert von

$$\sigma_B(4,4 \cdot m_e) = 2,3 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2. \quad (5.20)$$

Es ergibt sich also eine Abweichung von ca. 3% von der analogen QED-Rechnung. Im Rahmen der Näherung liefert unsere Rechnung also korrekte Ergebnisse für den linearen Bethe-Heitler-Prozess. Unter Berücksichtigung aller relevanten Teilprozesse gibt MORK für diese Photonenenergie einen Wert von

$$\sigma_M(4,4 \cdot m_e) = 1,1 \cdot 10^{-29} \text{ cm}^2 \quad (5.21)$$

für den Wirkungsquerschnitt an. Somit führt der Austauschterm in diesem Fall zu einer destruktiven Interferenz, die den Wirkungsquerschnitt um ca. einen Faktor 2 verkleinert. Man darf den Austauschterm also in diesem Parameterbereich nicht vernachlässigen.



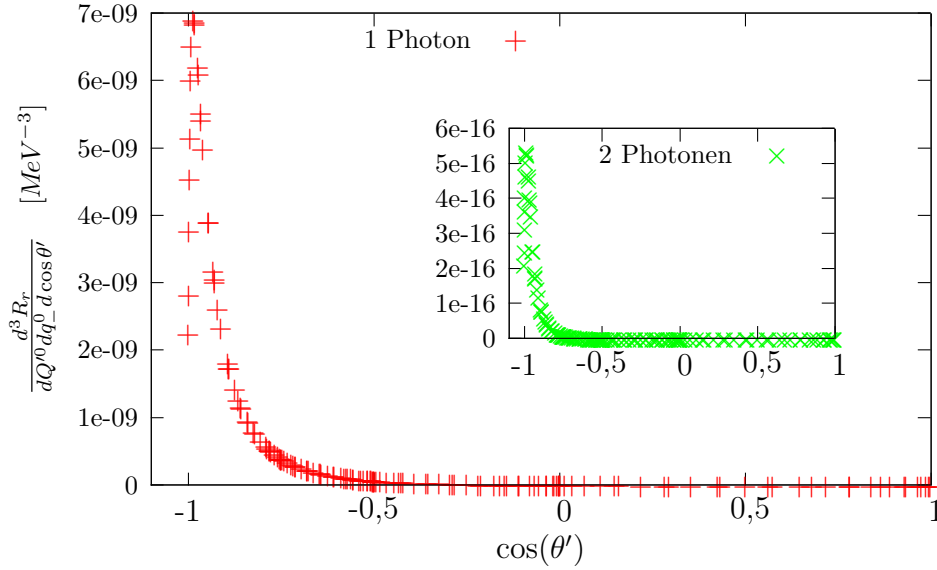
**Abbildung 5.9:** Abhängigkeit der differentiellen Paarerzeugungsrate für Myonen als Projektilteilchen von der Energie des erzeugten Elektrons. Die roten Achsen am linken und unteren Bildrand beziehen sich auf die rote Kurve für den Ein-Photonen-Prozess. Die grünen Achsen am rechten und oberen Bildrand beziehen sich auf die grüne Kurve für den Zwei-Photonen-Prozess. Für die Energie des gestreuten Myons wurde jeweils die wahrscheinlichste Energie eingesetzt, also  $105,612\text{MeV}$  im Ein-Photonen- und  $105,608\text{MeV}$  im Zwei-Photonen-Prozess. Im Ein-Photonen-Fall tritt in der Mitte des erlaubten Energiebereichs ein Minimum auf, im Zwei-Photonen-Fall ein Maximum. Beide Verteilungen sind sehr flach.

### 5.3 Differentielle Raten im Schwerpunktsystem

Im vorigen Abschnitt wurden die Rückstoßverteilungen für verschiedene Projektilmassen untersucht. Im Folgenden werden nun noch die Winkelabhängigkeiten und die Abhängigkeit von der Energie des erzeugten Elektrons diskutiert.

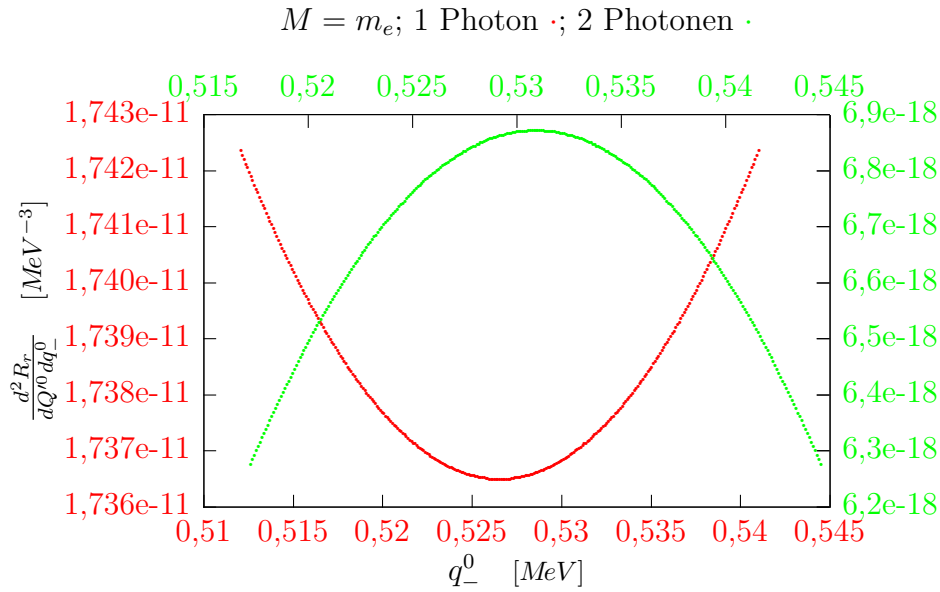
Hierfür wurde in den aufeinanderfolgenden Integrationen in Gleichung (4.115) jeweils der wahrscheinlichste Wert der darüberliegenden Integrationsvariablen eingesetzt. Das heißt, dass zunächst in die Integration über die Elektronenenergie die wahrscheinlichste Rückstoßenergie des Projektils eingesetzt wurde. Daraus wurde die Darstellung der zweifach differentiellen Partialrate  $d^2 R_r / (dQ^0 dq_-^0)$  gewonnen. Anschließend wurden dieselbe Rückstoßenergie und die wahrscheinlichste Elektronenenergie in die Integration über den Co-

sinus des Polarwinkels des gestreuten Myons eingesetzt, was zu einem Graphen für die entsprechende dreifach differentielle Partialrate führt. Setzt man nun noch die Stelle des Maximums aus der Polarwinkelverteilung in die Integration über den Azimuthwinkel  $\varphi'_-$  des Elektrons ein, so erhält man die total differentielle Paarerzeugungsrate, also das Betragsquadrat der Übergangsamplitude pro Zeiteinheit, in Abhängigkeit von diesem Winkel.



**Abbildung 5.10:** Polarwinkel-Abhängigkeit der differentiellen Paarerzeugungsrate für Myonen als Projektileilchen. Die kleine Abbildung zeigt die Verteilung für den Zwei-Photonen-Prozess bei  $\omega = 900 keV$ ,  $\xi = 7,5 \cdot 10^{-4}$ , die große für den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2,2 MeV$ ,  $\xi = 10^{-3}$ . Aufgrund der starken Ähnlichkeit wurde auf eine getrennte Darstellung verzichtet. Für die Energie des gestreuten Myons wurde im Ein-Photonen-Fall  $105,612 MeV$  und im Zwei-Photonen-Fall  $105,608 MeV$  angenommen. Für die Energie des gestreuten Elektrons wurde  $700 keV$  bzw.  $888 keV$  angenommen.

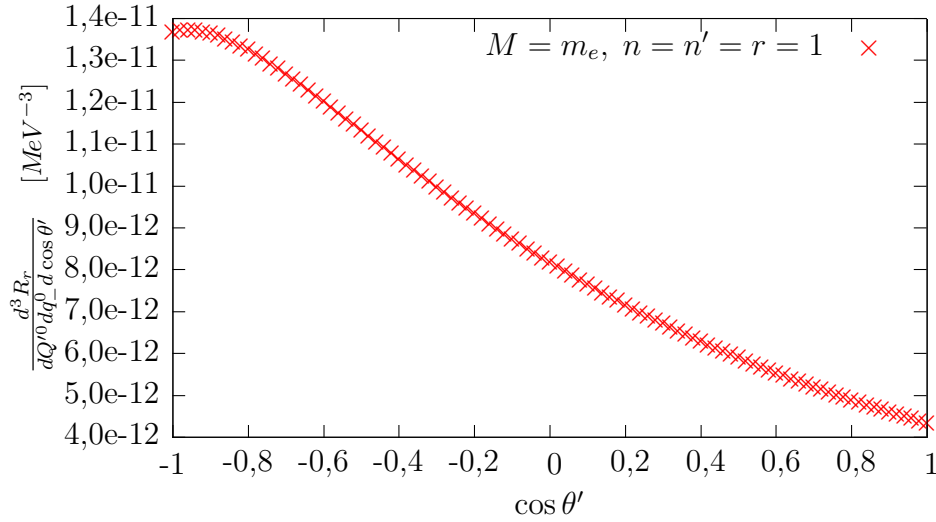
In Abbildung 5.9 ist die Abhängigkeit der differentiellen Partialrate von der Energie des erzeugten Elektrons für Myonen als Projektileilchen zu sehen. Die rote Kurve zeigt den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2 MeV$ , die grüne den Zwei-Photonen-Prozess bei  $900 keV$ . Man sieht, dass die Verteilung im Ein-Photonen-Fall ein Minimum in der Mitte des erlaubten Energiebereichs aufweist, im Zwei-Photonen-Fall dagegen ein Maximum. In beiden Fällen ist die Verteilung sehr flach; für den Ein-Photonen-Prozess beträgt die Tiefe des Minimums nur  $0,8\%$  des maximalen Werts für die zweifach differentielle Rate. Im Zwei-Photonen-Prozess beläuft sich die Höhe des Maximums



**Abbildung 5.11:** Abhängigkeit der differentiellen Paarerzeugungsrate für Elektronen als Projektilteilchen von der Energie des erzeugten Elektrons. Die roten Achsen am linken und unteren Bildrand beziehen sich auf die rote Kurve für den Ein-Photonen-Prozess. Die grünen Achsen am rechten und oberen Bildrand beziehen sich auf die grüne Kurve für den Zwei-Photonen-Prozess. Für die Energie des gestreuten Elektrons wurde jeweils die wahrscheinlichste Energie eingesetzt, also  $530\text{keV}$  im Ein-Photonen- und  $522\text{keV}$  im Zwei-Photonen-Prozess. Im Ein-Photonen-Fall tritt in der Mitte des erlaubten Energiebereichs ein Minimum auf, im Zwei-Photonen-Fall ein Maximum. Beide Verteilungen sind sehr flach. Es ist jeweils nur der Hauptbeitrag von  $n = n' = 1$  dargestellt.

auf 15% des Maximalwerts.

Betrachtet man Prozesse höherer Ordnung, so sieht man, dass das Verhalten der differentiellen Raten in nicht-linearen Prozessen qualitativ gleich ist. Außerdem steigt die relative Höhe der Verteilung mit der Photonenordnung an. So ergeben etwa ein Drei-Photonen-Prozess bei einer Photonenenergie von  $500\text{keV}$  und ein Vier-Photonen-Prozess bei  $400\text{keV}$  jeweils ein Maximum in der Mitte des erlaubten Energiebereichs. Die relative Höhe dieses Maximums der Verteilung beläuft sich im Drei-Photonen-Fall auf 35% des Maximalwerts, beim Vier-Photonen-Prozess auf 54%. Somit unterscheidet sich hier der lineare Paarerzeugungsprozess deutlich von nicht-linearen Prozessen. Abbildung 5.10 zeigt die Abhängigkeit der Partialrate vom Polarwinkel des gestreuten Myons für den Ein-Photonen-Prozess bei  $\omega = 2\text{MeV}$  und den Zwei-Photonen-Prozess bei  $900\text{keV}$ . Wie man sieht, gibt es in beiden Fällen

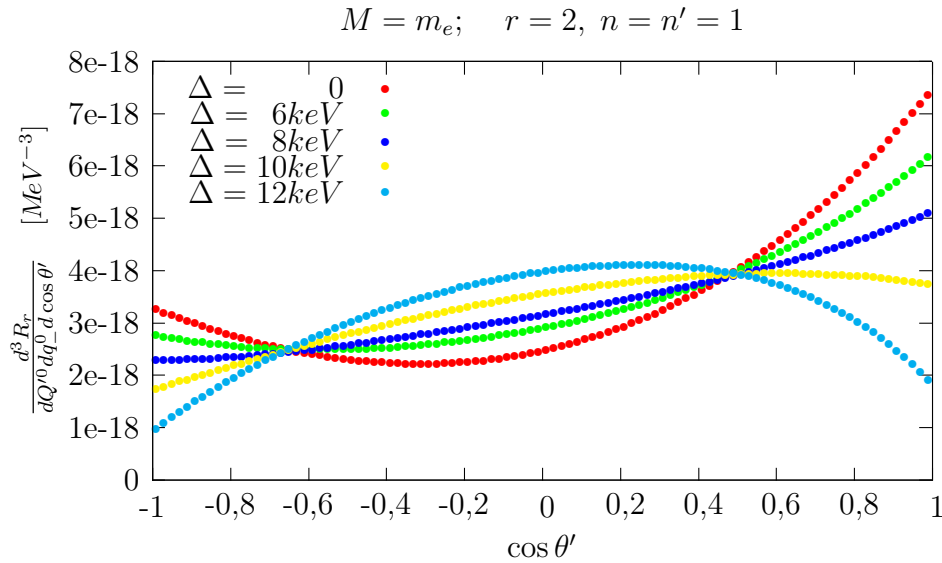


**Abbildung 5.12:** Polarwinkel–Abhängigkeit für Elektronen als Projektil beim Ein–Photonen–Prozess bei  $\omega = 2,2\text{MeV}$ ,  $\xi = 10^{-3}$ . Die eingesetzte wahrscheinlichste Energie des gestreuten Elektrons beläuft sich auf  $530\text{keV}$ , die des erzeugten wurde auf  $517\text{keV}$  gesetzt. Es ist nur der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate dargestellt ( $n = n' = 1$ ).

ein sehr scharfes Maximum bei  $\cos \theta' \approx -1$ , was dem Polarwinkel des einlaufenden Projektils entspricht. Das Myon wird also durch den Streuprozess kaum abgelenkt, es setzt seine Bewegung entgegen der Richtung der Laserphotonen fort.

Es werden nun auch differentielle Partialraten für Elektronen als Projektilteilchen gezeigt. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass diese unter Vernachlässigung des Austauschterms erhalten wurden. Wie wir in Abschnitt 5.2.1 gesehen haben, führt seine Berücksichtigung zu einer erheblichen destruktiven Interferenz. Wir können daher aus der hier durchgeführten Untersuchung allenfalls grobe qualitative Eindrücke gewinnen. In den folgenden Abbildungen ist für den jeweils betrachteten Prozess nur der Hauptanteil an der Erzeugungsrate abgebildet. Dieser stammt sowohl für den Ein–Photonen–Prozess bei  $\omega = 2,2\text{MeV}$  als auch für den Zwei–Photonen–Prozess bei  $\omega = 1,1\text{MeV}$  von der Kombination  $n = n' = 1$ .

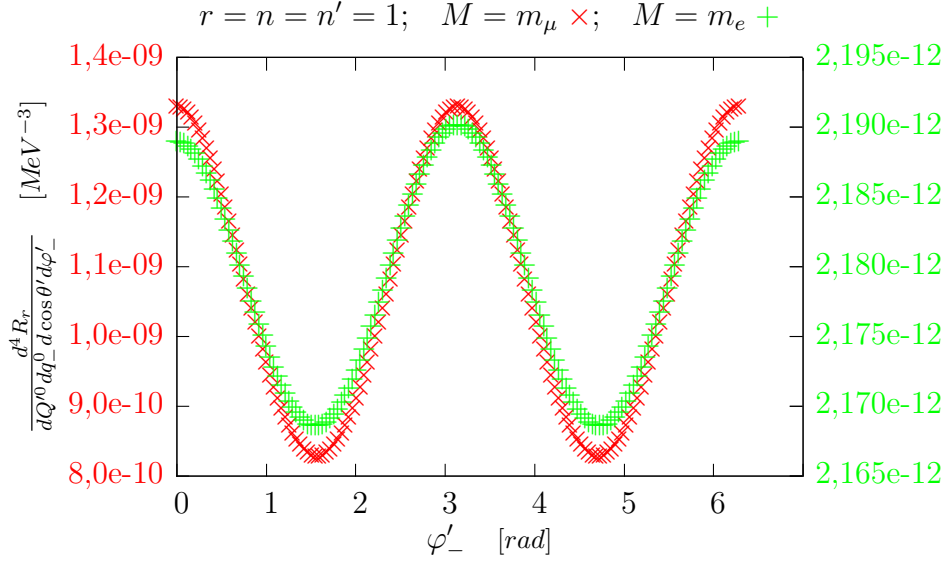
Betrachtet man nur den Hauptbeitrag, so weist die differentielle Partialrate in Abhängigkeit von der Energie des erzeugten Elektrons ein ähnliches Verhalten auf wie für Myonen als Projektile (Abb. 5.11): auch hier findet man im linearen Paarerzeugungsprozess ein Minimum bei der Hälfte der zur Verfügung stehenden Energie, wohingegen im Zwei–Photonen–Prozess dort



**Abbildung 5.13:** Polarwinkel-Verteilung für Elektronen als Projektil beim Zwei-Photonen-Prozess in Abhängigkeit der Energiedifferenz  $\Delta$  von der Maximumstelle  $q_-^0 = 531 \text{ keV}$  für das erzeugte Elektron. Es wurde die wahrscheinlichste Energie  $Q^0 = 520 \text{ keV}$  für das gestreute Projektilektron eingesetzt. Es ist nur der Hauptbeitrag zur Paarerzeugungsrate dargestellt ( $n = n' = 1$ ).

ein Maximum auftritt. Auch hier sind, wie im Falle der Myonen-Projektile, die beiden Verteilungen sehr flach: die relative Tiefe des Minimums im Ein-Photonen-Fall beträgt nur 0,3% des maximalen Werts, die relative Höhe des Maximums beläuft sich auf etwa 8% des Maximalwerts. Abbildung 5.12 zeigt die Abhängigkeit der differentiellen Partialrate vom Polarwinkel des gestreuten Projektilelektrons. Wie man sieht, ist hier die wahrscheinlichste Bewegungsrichtung nach dem Stoß ungefähr gleich der Einfallsrichtung, also der Laserpropagationsrichtung entgegengesetzt. Für die leichten Projektilelektronen tritt kein scharfes Maximum auf wie für die Myonen. Die Verteilung ist sehr breit, das Elektron kann mit gewisser Wahrscheinlichkeit in jeden Winkel gestreut werden. Wie im Falle der Myonen ist die Form dieser Verteilung unabhängig von der Energie  $q_-^0$  des erzeugten Elektrons. Für die Abb. 5.12 wurde die wahrscheinlichste Energie des gestreuten Projektils,  $Q^0 = 530 \text{ keV}$ , und willkürlich die Energie  $q_-^0 = 517 \text{ keV}$  für das erzeugte Elektron eingesetzt. Die Form der Polarwinkelabhängigkeit ist unabhängig von der Energie des erzeugten Elektrons.

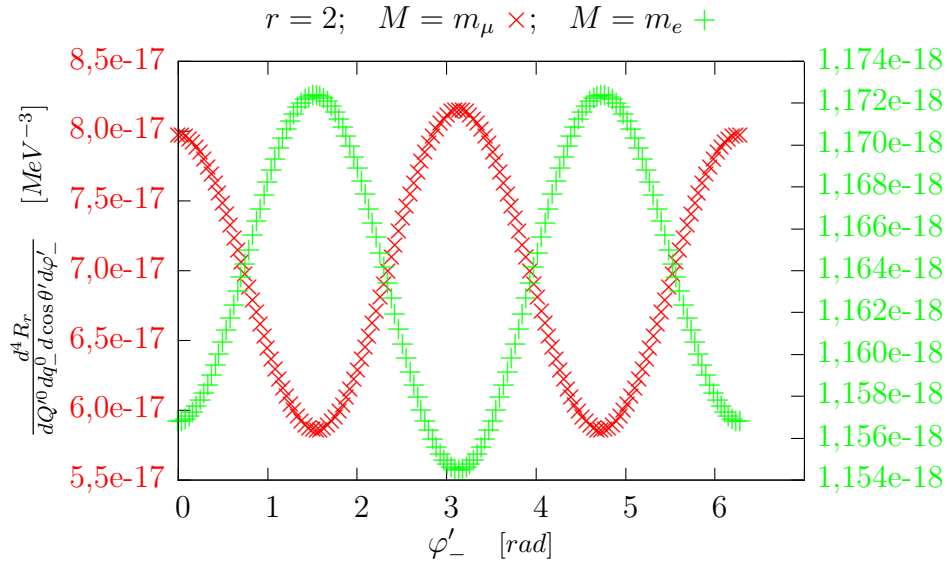
Abb. 5.13 zeigt die Polarwinkelverteilung für verschiedene Werte der Energie  $q_-^0$  des erzeugten Elektrons im Zwei-Photonen-Prozess mit Elektronen



**Abbildung 5.14:** Total differentielle Partialrate in Abhängigkeit vom Azimuthwinkel  $\varphi'_-$  des erzeugten Elektrons im Koordinatensystem mit  $\vec{Q}'$  als  $z$ -Achse für Myonen und Elektronen als Projektilteilchen beim Ein-Photonen-Prozess. Die rote Achse am linken Rand bezieht sich auf die rote Kurve für Myonen mit  $Q^0 = 105,612\text{MeV}$ ,  $q_-^0 = 985\text{keV}$  und  $\cos\theta' = -0,987$ . Die grüne Achse am rechten Bildrand bezieht sich auf die grüne Kurve für Elektronen als Projektilteilchen mit  $Q^0 = 530\text{keV}$ ,  $q_-^0 = 527\text{keV}$  und  $\cos\theta' = -0,94$ .

als Projektilteilchen bei der wahrscheinlichsten Energie  $Q^0 = 522\text{keV}$  des gestreuten Projektils. Wie man sieht, ist diese differentielle Rate von der Energie des erzeugten Elektrons abhängig. Die  $q_-^0$ -Verteilung (Abb. 5.11) hat ein Maximum bei  $q_-^0 = 531\text{keV}$ . Die Form der Polarwinkelverteilung ist symmetrisch im Abstand von dieser Extremstelle. Da dieses Verhalten weder im entsprechenden Ein-Photonen-Prozess noch für Myonenprojekte auftritt, liegt der Schluss nahe, dass es sich hierbei um eine Eigenschaft nicht-linearer Paarerzeugung mit leichten Projektilteilchen handelt. Wie man Abb. 5.13 entnimmt, ändert sich die Krümmung der Polarwinkelverteilung mit der Energie des erzeugten Elektrons. Die Kurve ist konkav für Energien nahe am Rand des erlaubten Energiebereichs für das Paarelektron und konvex für die Stelle des Maximums. Die Form verändert sich in stetiger Weise. In jedem Falle aber liegt der wahrscheinlichste Polarwinkel im Bereich  $\cos\theta' > 0$ . Dies bedeutet eine Umkehrung der Bewegungsrichtung entlang der Laserachse. Die Winkelablenkung des Projektils ist also im nicht-linearen Erzeugungsprozess deutlich stärker als im linearen Fall.





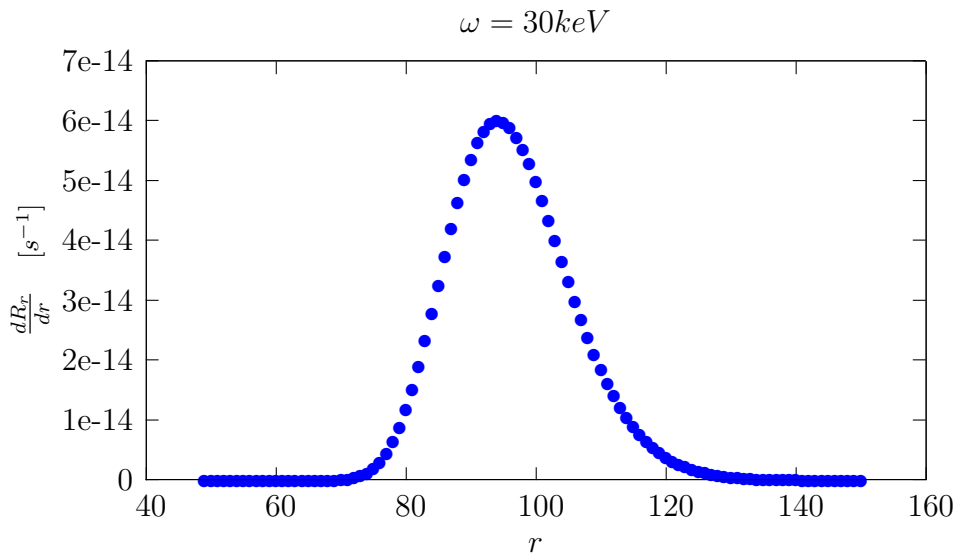
**Abbildung 5.15:** Total differentielle Partialrate in Abhängigkeit vom Azimuthwinkel  $\varphi'_-$  des erzeugten Elektrons im Koordinatensystem mit  $\vec{Q}'$  als  $z$ -Achse für Myonen und Elektronen als Projektileilchen beim Zwei-Photonen-Prozess. Die rote Achse am linken Rand bezieht sich auf die rote Kurve für Myonen mit  $Q'^0 = 105,608\text{MeV}$ ,  $q_-^0 = 888\text{keV}$  und  $\cos\theta' = -0,987$ . Die grüne Achse am rechten Bildrand bezieht sich auf die grüne Kurve für Elektronen als Projektileilchen mit  $Q'^0 = 522\text{keV}$ ,  $q_-^0 = 531\text{keV}$  und  $\cos\theta' = 1$ .

In Abbildung 5.14 ist die Abhängigkeit der differentiellen Partialrate von dem Azimuthwinkel  $\varphi'_-$  des erzeugten Elektrons im Koordinatensystem mit  $\vec{Q}'$  gezeigt (vgl. Abschnitt 4.3.2). Hier ist die Verteilung sowohl für Myonen als auch für Elektronen abgebildet. Im Ein-Photonen-Prozess hängt der wahrscheinlichste Polarwinkel des gestreuten Projektils in beiden Fällen nicht von der Energie des erzeugten Elektrons ab, und die Verteilung dieser Energie weist ein Minimum etwa in der Mitte des erlaubten Energiebereichs auf. Dies erlaubt einen direkten Vergleich der beiden Projektilspezies: es wurden jeweils die wahrscheinlichste Energie  $Q'^0$  und der wahrscheinlichste Polarwinkel  $\theta'$  des gestreuten Projektils sowie die Stelle des Minimums in der Energie des Paarelektrons in die Integration eingesetzt. Wie man sieht, weisen die beiden Kurven eine starke Ähnlichkeit auf. Die Form der Azimuthwinkelverteilung im linearen Paarerzeugungsprozess ist also unabhängig von der Projektilmasse.

Abbildung 5.15 zeigt die Abhängigkeit der differentiellen Partialrate für den Zwei-Photonen-Prozess. Auch hier sind die Verteilungen für Myonen und Elektronen als Projektileilchen dargestellt. Es wurden als Parameter jeweils

die wahrscheinlichsten Werte für die Energie des gestreuten Projektils, die Energie des erzeugten Elektrons und den Polarwinkel des gestreuten Projektils eingesetzt. Anders als im Ein-Photonen-Fall unterscheiden sich die beiden Verteilungen deutlich voneinander. Während für das Myon bei  $\varphi'_- = \pi$  ein Minimum und bei  $\varphi'_- = \pi/2$  bzw.  $3\pi/2$  lokale Maxima auftreten, treten für das Elektron bei  $\varphi'_- = \pi$  ein Maximum und bei  $\varphi'_- = \pi/2$  bzw.  $3\pi/2$  lokale Minima auf. Dieser qualitative Verlauf für das Elektron ändert sich auch nicht, wenn man für den Polarwinkel des gestreuten Projektils statt  $\cos \theta' = +1$ , was der wahrscheinlichste Wert ist,  $\cos \theta' = -1$  einsetzt, was laut Abb. 5.13 ebenfalls mit einer großen Wahrscheinlichkeit auftritt. Der qualitativ verschiedene Verlauf mag an der unterschiedlichen  $\{n, n'\}$ -Kombination liegen: betrachtet man für die Elektronen-Projektile den  $\{2, 2\}$ -Term, so findet man ebenfalls bei  $\varphi'_- = \pi$  ein lokales Minimum.

## 5.4 Above-Threshold-Regime für Projektile mit unendlicher Ruhemasse



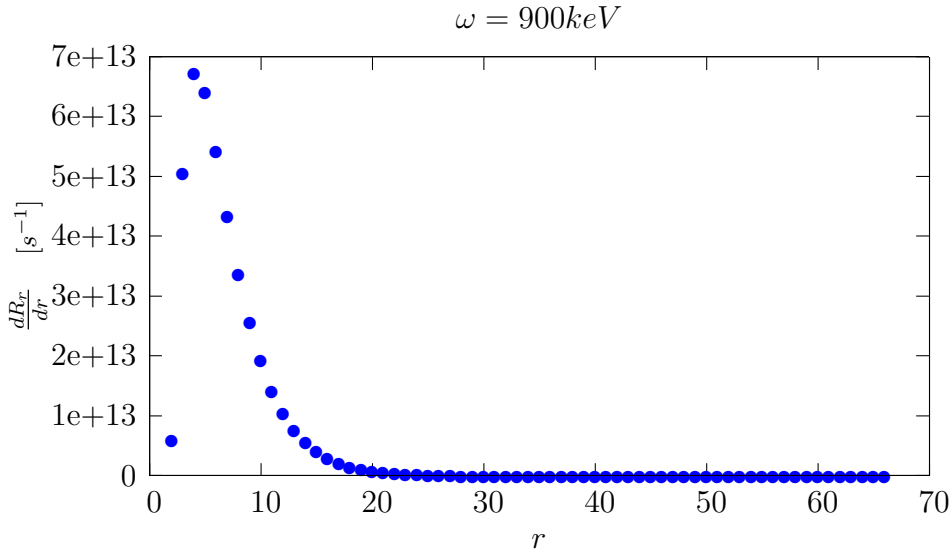
**Abbildung 5.16:** Abhängigkeit der Partialrate von der Anzahl absorbierter Photonen für die Photonenergie  $\omega = 30 \text{ keV}$ . Die minimale Anzahl absorbierter Photonen ist  $r_0 = 49$ , der Hauptbeitrag zur totalen Paarerzeugungsrate kommt von  $r_{max} = 94$  absorbierten Photonen.

Die in Kapitel 3 zusammengefasste Rechnung für Protonen als Projektilteilchen wurde bislang überwiegend für das Multiphotonen- und das Tunnel-

Regime betrachtet. Insbesondere die Abhängigkeit der totalen Paarerzeugungsrate von der Photonenenergie im Above-Threshold-Regime war bisher noch unbekannt. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde dieses Verhalten der Rate untersucht.

Hierfür wurde in einen bereits existierenden [Mül03] Programmcode zur numerischen Berechnung der Paarerzeugungsrate durch Projektile unendlicher Masse der Intensitätsparameter  $\xi = 1$  gesetzt. Außerdem wurde weiterhin eine zirkular polarisierte Laserwelle angenommen.

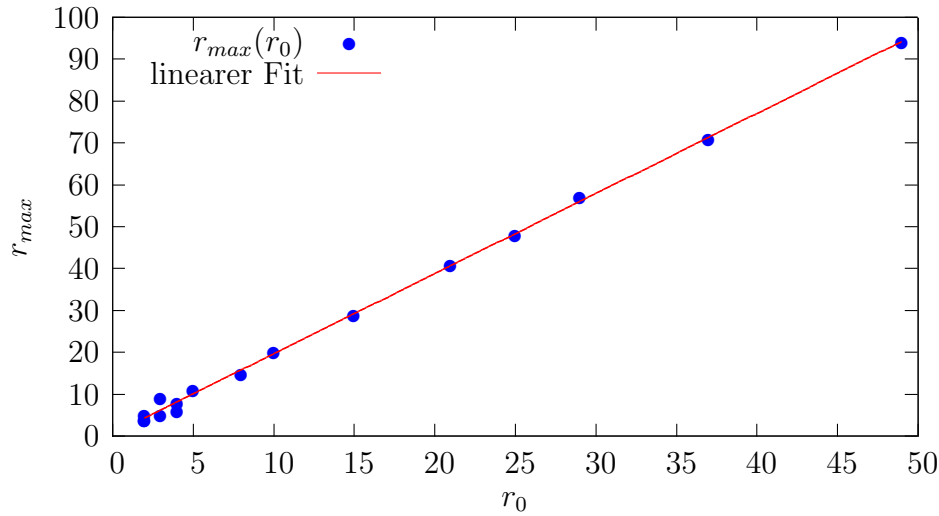
Abbildungen 5.16 und 5.17 zeigen die Abhängigkeit der Partialrate  $R_r$  von der Photonennordnung  $r$  für absorbierte Laserphotonen der Energien  $30\text{keV}$  und  $900\text{keV}$  im Ruhesystem des einlaufenden Projektils. Wie man sieht,



**Abbildung 5.17:** Abhängigkeit der Partialrate von der Anzahl absorbierter Photonen für die Photonenenergie  $\omega = 900\text{keV}$ . Die minimale Anzahl absorbierter Photonen ist  $r_0 = 2$ , der Hauptbeitrag zur totalen Paarerzeugungsrate kommt von  $r_{max} = 4$  absorbierten Photonen.

ist — wie im Falle der Photoionisation von Atomen in starken Laserfeldern (siehe z.B. [BGK02, SHHK06]) — in diesem Parameterbereich die Photonennordnung, von der der Hauptbeitrag zur totalen Paarerzeugungsrate herrührt, stets größer als die minimale Ordnung, ab der der Prozess erlaubt ist. Allerdings bewegt sie sich in der gleichen Größenordnung. So ist für  $30\text{keV}$ -Laserphotonen die minimale Anzahl absorbierter Photonen  $r_0(30\text{keV}) = 49$ , die Anzahl, die zur größten Partialrate führt ist  $r_{max}(30\text{keV}) = 94$ . Für  $900\text{keV}$ -Photonen ist  $r_0(900\text{keV}) = 2$  und  $r_{max}(900\text{keV}) = 4$ .

Abbildung 5.18 zeigt, dass die Anzahl absorbierter Photonen  $r_{max}$ , die zur



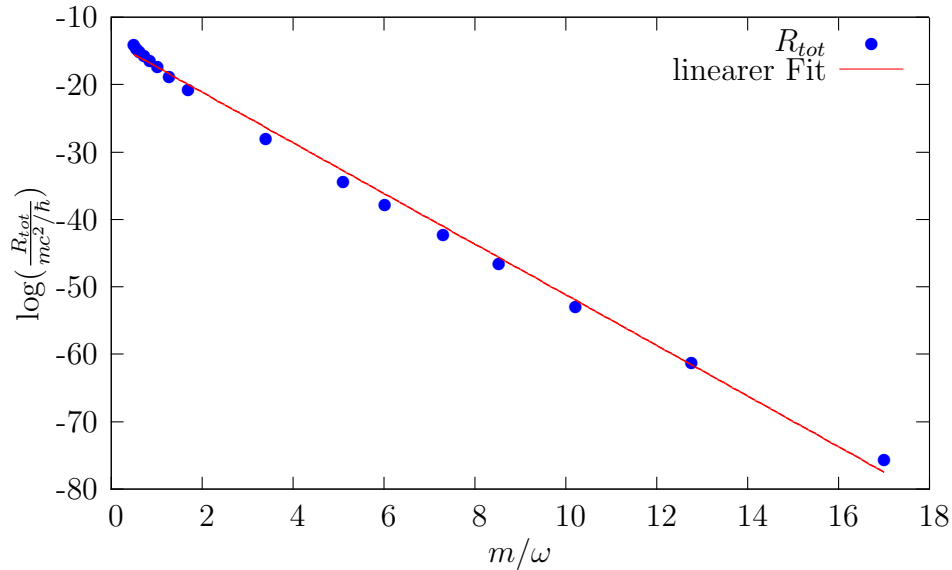
**Abbildung 5.18:** Anzahl absorbierter Photonen, die den Maximalbeitrag liefert,  $r_{max}$ , gegen die minimale Anzahl absorbierter Photonen  $r_0$ . Der lineare Parameter-Fit mit gnuplot ergibt eine Steigung von ca. 1,93.

größten Partialrate  $R_r$  führt, proportional zu der minimalen Anzahl  $r_0$  anwächst. Ein linearer Fit mit Hilfe von gnuplot führt zu einem Proportionalitätsfaktor von ca. 1,93.

$$r_{max} \sim 1,9r_0 \quad \text{für} \quad \xi = 1. \quad (5.22)$$

Gemäß Gleichung (1.3) für die Mindestanzahl absorbierter Photonen wächst  $r_0$  umgekehrt proportional zur Energie der Laserphotonen. Somit ist auch die Photonenordnung der maximalen Partialrate umgekehrt proportional zur Photonenenergie, was bedeutet, dass sie im Above-Threshold-Regime umso größer ist, je geringer die Laserintensität ist. Die lineare Abhängigkeit der Photonenordnung der größten Partialrate von der minimalen Anzahl absorbierter Photonen  $r_0$  ist mit anderer Proportionalitätskonstante aus dem Tunnelregime bekannt: dort fand YAKOVLEV den Zusammenhang [Yak65]

$$r_{max} \sim \xi r_0 \quad \text{für} \quad \xi \gg 1. \quad (5.23)$$



**Abbildung 5.19:**  $R_{tot}$  gegen  $m_e/\omega$ . Der lineare Fit an den Logarithmus der totalen Rate ergibt eine Steigung von  $-3,76$ .

Trägt man die totale Paarerzeugungsrate  $R_{tot}$  gegen das Verhältnis aus der Ruhemasse des Elektrons und der Photonenenergie auf, sieht man, dass die Totalrate exponentiell von diesem Verhältnis abhängt (Abb. 5.19). Es wurde mit Hilfe von gnuplot ein Parameter-Fit erstellt, der zeigt, dass

$$R_{tot} \propto \exp\left(-3,76 \cdot \frac{m}{\omega}\right) \quad (5.24)$$

ist.

Diese exponentielle Abhängigkeit wurde bereits für andere Paarerzeugungsprozesse gefunden, insbesondere für die Erzeugung von Elektron-Positron-Paaren beim Stoß zweier Laserfelder [HMK06]. Dort ist der Faktor in der Exponentialfunktion ebenfalls ca.  $-3$ .

Auch diese Abhängigkeit weist, wie der Zusammenhang zwischen  $r_{max}$  und  $r_0$ , formale Ähnlichkeiten mit dem Tunnelregime auf. Dort ist der Zusammenhang zwischen der totalen Paarerzeugungsrate und dem Verhältnis  $m/\omega$  gemäß der Schwinger-Gleichung (1.6)

$$R \propto \exp\left(-\frac{\pi m}{\xi \omega}\right) \quad \text{für } \xi \gg 1, \quad (5.25)$$

wobei  $\mathcal{E}_{kr} = m^2/e$  und  $e\mathcal{E} = m\omega\xi$  verwendet wurden.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der vorherigen Betrachtungen zusammengefasst. Darauf folgt eine Abschätzung der experimentellen Realisierbarkeit des untersuchten Prozesses und ein kurzer Ausblick auf mögliche weiterführende theoretische Untersuchungen.

### 6.1 Zusammenfassung

Es wurde der Bethe–Heitler–Prozess  $\mu + r\gamma \rightarrow \mu' + e^+e^-$  untersucht, bei dem ein relativistisches Projektilmyon beim Stoß mit einem Laserfeld durch die Absorption von  $r$  Laserphotonen ein Elektron–Positron–Paar erzeugt. Hierbei wurde stets ein zirkular polarisierter Laser bei kleinem Intensitätsparameter  $\xi$  betrachtet.

Ebenfalls in einem zirkular polarisierten Laserfeld wurde mit einem bereits vorhandenen Fortran–Programm für Projektile unendlicher Ruhemasse das Verhalten der Paarerzeugungsrate im Above–Threshold–Regime untersucht.

Wir haben gesehen, dass im betrachteten Multiphotonen–Regime der analytische Ausdruck für die Paarerzeugungsrate mit Myonen als Projektilteilchen strukturell in denjenigen für Teilchen unendlicher Ruhemasse übergeht. Wegen des Massenunterschieds bleibt im Rückstoßeﬀekt dennoch ein Unterschied bestehen.

Unter der Näherung, dass Protonen als eﬀektive Dirac–Teilchen behandelt werden können, wurden die Rückstoßverteilungen für Protonen und Myonen als Projektilteilchen miteinander verglichen. Für Elektronen als Projektile wurden unter Vernachlässigung des Austauschterms die Rückstoßverteilungen sowie differentielle Paarerzeugungsraten für lineare und nicht–lineare Bethe–Heitler–Prozesse mit denen für Myonen als Projektile verglichen. Bei der

Untersuchung des Rückstoßes für verhältnismäßig schwere Projektilteilchen wie Myonen oder Protonen fällt auf, dass der Rückstoßeffect für lineare Paarerzeugungsprozesse etwas kleiner ist als für nicht-lineare. In der hier durchgeführten Untersuchung für Elektronen als Projektile war dagegen der Effect im Ein-Photonen-Prozess etwas größer als im Zwei-Photonen-Prozess. Es ist allerdings möglich, dass sich dies bei Hinzunahme des Austauschgraphen wieder umkehrt.

Wie zu erwarten, erfahren leichtere Projektilteilchen einen deutlich größeren Rückstoß. Im Schwerpunktsystem ist der Energieverlust im Vergleich zu schwereren Projektilen für Elektronen enorm. Insbesondere die Winkelverteilung ist für Elektronen um einiges breiter als für Myonen. Letztere fliegen nach dem Stoß mit dem Laserfeld mit leicht verringerter Energie entlang ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung weiter, während für Elektronen jeder Streuwinkel auftreten kann. Im linearen Prozess ist die wahrscheinlichste Bewegungsrichtung weiterhin die des einlaufenden Elektrons, wohingegen im nicht-linearen Prozess weit größere Ablenkungen auftreten. Hier hängt außerdem die Polarwinkelverteilung von der Energie des erzeugten Elektrons ab. Für die wahrscheinlichste Energie ist eine Umkehrung der Bewegungsrichtung des Projektilelektrons zu erwarten.

Für lineare Paarerzeugungsprozesse sind die differentiellen Paarerzeugungsraten qualitativ kaum von der Projektilmasse abhängig. Den Hauptunterschied stellt der deutlich größere Rückstoßeffect für die leichteren Teilchen dar, der sich sowohl in der Energie des gestreuten Projektils, als auch in der Breite der Streuwinkelverteilung niederschlägt. Der wahrscheinlichste Polarwinkel des gestreuten Projektilteilchens ist sowohl für Myonen als auch für Protonen ungefähr gleich dem Polarwinkel vor dem Stoß. Desweiteren stimmen sowohl die Energieverteilung, als auch die Winkelverteilung für den Azimutwinkel des erzeugten Elektrons für beide Projekt sorts qualitativ überein.

Die Abhängigkeit der Paarerzeugungsrate von der Energie des erzeugten Elektrons weist deutliche Unterschiede zwischen linearen und nicht-linearen Prozessen auf. Im ersteren Fall tritt für Myonen als Projektilteilchen etwa bei der Hälfte der im Schwerpunktsystem noch zur Verfügung stehenden Energie ein Minimum auf, bei nicht-linearen Prozessen ein Maximum. Dieses Maximum wird immer ausgeprägter, je höher die Photonenzahl ist. Dies hängt mit der Abhängigkeit der Paarerzeugungsraten von den Besselfunktionen zusammen. Diese bevorzugen Symmetrie zwischen den Energien der erzeugten Teilchen, was sich bei höheren Ordnungen stärker auswirkt.

Im untersuchten Zwei-Photonen-Prozess trat bei einer bestimmten Konstellation ein Breit-Wheeler-Prozess auf. Dies ist zunächst überraschend, da solche Prozesse bei anderen Paarerzeugungsszenarien eher bei sehr hohen



Laserintensitäten vorkommen, hier aber immer eine sehr kleine Intensität betrachtet wurde. Der Breit–Wheeler–Prozess, der unter Aussendung eines realen Photons stattfindet, ist mit dem hier verwendeten Formalismus aufgrund der Beschreibung durch einen freien Photonen–Propagator nicht zu beschreiben. Allerdings kann man abschätzen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess geringer ist als für die untersuchte Bethe–Heitler–Erzeugung, so dass der totale Beitrag zur Paarerzeugungsrate klein ist und vernachlässigt werden kann.

Für die Projektile unendlicher Ruhemasse wurde mit Hilfe eines bereits vorhandenen Programmes ein exponentieller Zusammenhang zwischen der totalen Paarerzeugungsrate und der Photonenenergie im Above–Threshold–Regime ermittelt, der bereits für andere Paarerzeugungsprozesse in diesem Parameterbereich gefunden wurde. Er ähnelt qualitativ dem Zusammenhang im Tunnelregime. Auch der gefundene lineare Zusammenhang zwischen der Photonenordnung mit der größten Partialrate und der minimalen Photonenordnung ähnelt demjenigen im Tunnelregime [Yak65].

## 6.2 Experimentelle Realisierbarkeit

Um die Energieschwelle der Elektron–Positron–Paarerzeugung zu überwinden, muss aus dem Laserfeld mindestens die Energie  $2m_e + 2m_e^2/M_\mu$  absorbiert werden. Daher muss der Laser entweder sehr hohe Intensität besitzen, um eine möglichst große Anzahl an Photonen zur Verfügung zu stellen, oder die Photonenenergie muss sehr groß sein. In dieser Arbeit wurde der letztere Fall theoretisch untersucht. Eine mögliche experimentelle Untersuchung setzt aus zweierlei Gründen eine große kinetische Energie der einlaufenden Myonen im Laborsystem voraus: einerseits kann nur durch einen großen Lorentz–Faktor  $\gamma$  der Projektileilchen mit den heutigen Photonenenergien und Laserintensitäten die Absorption einer ausreichend großen Energie im Ruhesystem des Myons gewährleistet werden. Zum anderen sind durch ihre kurze Lebensdauer Experimente an Myonen nur sehr eingeschränkt durchführbar. Bewegen sie sich mit relativistischen Energien, so ist die Lebensdauer durch die Zeitdilatation verlängert. Es wird angenommen, dass die Lebensdauer des Myons in seinem Ruhesystem lang ist im Vergleich zur Pulsdauer des Lasers. Einen relativistischen Myonenstrahl könnte man aus Experimenten wie dem TRIUMF (TRI University Meson Facility) in Kanada erhalten [TRI]. Dort werden Myonen aus dem Zerfall von  $\pi$ –Mesonen gewonnen, die ihrerseits aus dem Stoß relativistischer Protonen mit einem Beryllium- oder Kohlenstoff–Target entstehen. Die so erhaltenen Myonen

werden dann abgebremst, um beispielsweise myonische Atome zu untersuchen. Würde man sie stattdessen nachbeschleunigen, so könnte man relativistische Energien erhalten, bei denen die Untersuchung des hier behandelten Paarerzeugungsprozesses möglich wäre. Heutige hochfrequente VUV- und Röntgenlaser, etwa der FLASH (Freie-Elektronen LASer in Hamburg) am Deutschen Elektronen-Synchrotron (DESY), erreichen Photonenenergien von um die  $100\text{eV}$  [FLA]. Um damit im Ruhesystem des Projektilmyons Photonenenergien in der Größenordnung von  $2m_e c^2$  zu erhalten, bräuchte man einen Lorentz-Faktor des Myons von etwa  $\gamma \sim 5000$ . Der geplante XFEL (X-ray Free-Electron Laser, ebenfalls am DESY in Hamburg) soll etwa im Jahre 2014 in Betrieb genommen werden und Photonenenergien um die  $10\text{keV}$  liefern [XFE]. Damit bräuchte man also etwa einen Lorentzfaktor von  $\gamma \sim 50$ . Es existieren bereits Machbarkeitsstudien über Myon-Antimyon-Collider, die Schwerpunktsenergien im  $\text{TeV}$ -Bereich erzielen sollen [BL03, CAB08]. Das entspricht Lorentzfaktoren der einzelnen Myonenstrahlen von  $\gamma > 4500$ , was für unsere Zwecke mehr als ausreichend wäre. Eine experimentelle Realisierung des hier untersuchten Paarerzeugungsprozesses ist also durchaus denkbar, wenn modernste Laser- und Beschleunigertechnologien miteinander kombiniert würden.

### 6.3 Ausblick

In einer möglichen an diese Arbeit anknüpfenden theoretischen Untersuchung könnte die Rechnung für Elektronen als Projektilteilchen verbessert werden. Berücksichtigt man alle relevanten Teilprozesse, die zur Paarerzeugung beitragen, insbesondere den Austauschterm für die Vertauschung des gestreuten mit dem erzeugten Elektron, so erweitert sich der Gültigkeitsbereich auch auf Photonenenergien nahe der Schwellenenergie. Man könnte damit das in der Einleitung erwähnte SLAC-Experiment modellieren. Es wäre interessant, wie sich der Austauschterm auf die differentiellen Paarerzeugungsraten auswirkt.

Es wurde gezeigt, dass die numerischen Werte für die totale Paarerzeugungsrate für Myonen und Protonen als Projektile im Multiphotonen-Regime ( $\xi \ll 1$ ) gleich sind. Es stellt sich nun die Frage, ab welchem Laserintensitätsparameter  $\xi$  sie sich signifikant unterscheiden. Sehr interessant wäre auch eine Untersuchung des Bereichs  $\xi \approx 200$ . Dort wird der Intensitätsparameter für die Myonen,  $\Xi = \xi m/M$ , ungefähr 1.

# Anhang A

## Festlegung der Notation

### Natürliches Einheitensystem

Abgesehen von der Einleitung wurde in der ganzen Diplomarbeit folgendes natürliche Einheitensystem benutzt:

Planck-Konstante und Lichtgeschwindigkeit:  $\hbar = c = 1$

Elektrizitätskonstante:  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$

Elementarladung:  $e = \sqrt{\alpha_f}$

Durch die Festlegung der Energieskala folgen dann die Einheiten für Masse, Länge und Zeit. Wir wählen als Einheit der Energie

$$[E] = 1\text{MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13}\text{J}.$$

Aufgrund der Setzung  $1/4\pi\epsilon_0 = 1$  lautet in diesen Einheiten das Coulomb-Potential einer Elementarladung  $e$  im Abstand  $r$

$$A_C = \frac{e}{|\vec{x}|}. \quad (\text{A.1})$$

Die Fourier-Transformierte des Coulomb-Potentials ist dann

$$\tilde{A}_C(\vec{q}) = \frac{4\pi e}{\vec{q}^2} \quad (\text{A.2})$$

im Impulsraum. Der ungewohnt wirkende Faktor  $4\pi$  findet sich auch in der Definition des freien Photon-Propagators (4.13) wieder:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{4\pi e^{\frac{i}{\hbar}q(x-y)}}{q^2} g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.3})$$

### Summenkonvention

Es wurde stets von der Einsteinschen Summenkonvention Gebrauch gemacht, die besagt, dass über doppelt auftretende Indizes zu summieren ist.

### Kovariante Darstellung

Um der speziellen Relativitätstheorie Rechnung zu tragen, wurde die Rechnung in kovarianter Form durchgeführt. Die hier verwendete Metrik lautet

$$\text{Metrik: } g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Kontravariante Vektoren berechnen sich aus den kovarianten gemäß

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu,$$

also ist für  $x^\mu = (x^0, \vec{x})$

$$x_\mu = (x^0, -\vec{x}).$$

Dann gilt für das Skalarprodukt zweier Vierervektoren

$$(xy) = x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \vec{x}\vec{y}$$

und insbesondere für das Quadrat eines Vierervektors

$$x^2 = x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - |\vec{x}|^2.$$

Die vierdimensionale Einheitsmatrix wird mit  $\mathbb{1}$  bezeichnet.

### Elektrodynamik

Die elektrische Feldstärke wird mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet, um Verwechslungen mit der Energie  $E$  vorzubeugen. Das elektrodynamische kovariante Viererpotential ist  $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ . Der Feldstärkentensor lautet  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ . Es

wurde die Strahlungseichung

$$(\partial A) = 0, \quad A^0 = 0 \quad (\text{A.4})$$

für die Laserwelle verwendet<sup>1</sup>. Somit erhält man für die elektrische Feldstärke

$$\vec{\mathcal{E}} = -\partial^0 \vec{A}. \quad (\text{A.5})$$

Daraus erhält man für die Intensität  $I$  der Laserwelle in unseren Einheiten

$$I = \frac{1}{8\pi} (\overline{\mathcal{E}^2} + \overline{\vec{B}^2}) = \frac{1}{4\pi} \overline{\mathcal{E}^2}, \quad (\text{A.6})$$

wobei der Querstrich die zeitliche Mittelung bedeutet.  $\vec{B}$  ist die magnetische Flussdichte. In dieser Arbeit kommen nur zirkular polarisierte Laserwellen mit

$$A^\mu = (0, a, 0, 0) \sin(kx) + (0, 0, a, 0) \cos(kx) \quad (\text{A.7})$$

vor. Mit  $k^\mu = \omega(1, 0, 0, 1)$  ist dann

$$\overline{\mathcal{E}^2} = \overline{(-\partial^0 \vec{A})^2} = \omega^2 a^2 \quad (\text{A.8})$$

und mit dem Intensitätsparameter  $\xi$  aus Gleichung (2.17)

$$\xi = \frac{ea}{m} \quad (\text{A.9})$$

lässt sich die Gleichung für die Intensität für eine zirkular polarisierte Laserwelle der Amplitude  $a$  umschreiben:

$$I = \frac{1}{4\pi} \frac{m^2}{e^2} \xi^2 \omega^2. \quad (\text{A.10})$$

Die zugehörige Photonendichte ist  $\rho = I/\omega$  in unseren Einheiten. Daraus berechnet sich der bei dem Stoß eines Projektils mit einem Laser auftretende Photonenfluss gemäß  $j = v_{rel}\rho$ , wobei  $v_{rel}$  die Relativgeschwindigkeit zwischen Projektil und Laser ist. Im Ruhesystem des Projektilteilchens entspricht diese Relativgeschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit, die hier  $c = 1$

---

<sup>1</sup> Eine Diskussion der Eichinvarianz des  $A^2$ -Terms im effektiven Impuls  $q$  und der effektiven Masse  $m_*$  findet sich in [Rei79]. Man beachte, dass hier nur Eichtransformationen zugelassen sind, die mit der Transversalität der Laserwelle,  $(kA) = 0$ , sowie ihrer ebenen Gestalt  $A^\mu = A^\mu(\eta)$  verträglich sind.

gesetzt wurde. Daher ist in unseren Einheiten der Photonenfluss

$$j = \frac{1}{4\pi\alpha_f} m^2 \xi^2 \omega. \quad (\text{A.11})$$

### Dirac–Formalismus

Für die Diracschen  $\gamma$ –Matrizen  $\gamma^\mu$  wird die gängige Standarddarstellung nach [BD64] verwendet. Nach FEYNMAN wird für Produkte aus Gamma–Matrizen mit Vierervektoren  $a$  die *Slash*–Schreibweise

$$\not{a} = (\gamma a) = \gamma_\mu a^\mu \quad (\text{A.12})$$

verwendet, wobei

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (\text{A.13})$$

gilt.

Adjungierte Spinoren bzw. Vierervektoren lassen sich mit Hilfe der Gamma–Matrizen darstellen:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 \quad (\text{A.14})$$

und für adjungierte Matrizen gilt

$$\bar{\Gamma} = \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0. \quad (\text{A.15})$$

Eine Beschreibung des zur Herleitung der Paarerzeugungsrate verwendeten  $S$ –Matrix–Formalismus findet sich beispielsweise in [BK64].

# Anhang B

## Gewöhnliche zylindrische Bessel–Funktionen

In der Berechnung der Paarerzeugungsrate in Kapitel 4 und auch schon in Kapitel 3 traten Bessel–Funktionen  $J_n(x)$  als Fourier–Koeffizienten auf<sup>1</sup>. Hierbei handelt es sich um gewöhnliche Bessel–Funktionen ganzzahliger Ordnung<sup>2</sup>. Diese sind Lösungen  $y(x)$  der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0. \quad (\text{B.1})$$

Es wurde bereits Gebrauch von der Tatsache gemacht, dass die gewöhnlichen Bessel–Funktionen eine erzeugende Funktion besitzen [AS65]:

$$e^{-ix \sin \eta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-in\eta}. \quad (\text{B.2})$$

Mit deren Hilfe kann man die in der Übergangsamplitude auftretenden Funktionen (4.23) und (4.35) in eine Fourier–Reihe entwickeln, deren Koeffizienten gewöhnliche Bessel–Funktionen enthalten. Dort treten die Funktionen

$$\begin{aligned} f(\eta) &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\alpha_1 \sin \eta - \alpha_2 \cos \eta)}, \\ g(\kappa) &= e^{-\frac{i}{\hbar}(\beta_1 \sin \kappa - \beta_2 \cos \kappa)} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

---

<sup>1</sup> Die Notation in diesem Abschnitt weicht teilweise von der in der übrigen Arbeit ab. Hier bezeichnet  $x$  das Argument der Bessel–Funktion und  $n$  ihre Ordnung.

<sup>2</sup> Weil die Ordnung der Bessel–Funktion der Anzahl absorbierten Photonen entspricht, muss sie ganzzahlig sein.

auf. Deren Argumente kann man jeweils mit Hilfe eines bekannten Additionstheorems gemäß

$$\begin{aligned}\alpha_1 \sin \eta - \alpha_2 \cos \eta &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} (\sin \eta \cos \eta_0 - \cos \eta \sin \eta_0) \\ &= \bar{\alpha} \sin(\eta - \eta_0)\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

umschreiben, wobei der Winkel  $\eta_0$  durch

$$\sin \eta_0 = \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}} \quad \text{und} \quad \cos \eta_0 = \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}} \quad (\text{B.5})$$

gegeben ist. Das gleiche gilt völlig analog für den Exponenten in der Funktion  $g(\kappa)$ . Es wird daher nur die Entwicklung für  $f(\eta)$  nochmals gezeigt. (B.5) hat die Form der erzeugenden Funktion (B.2). Somit ist

$$f(\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\bar{\alpha}) e^{-in(\eta-\eta_0)}. \quad (\text{B.6})$$

Wegen

$$\cos \eta = \frac{1}{2}(e^{i\eta} + e^{-i\eta}) \quad \text{und} \quad \sin \eta = \frac{1}{2i}(e^{i\eta} - e^{-i\eta}) \quad (\text{B.7})$$

gilt außerdem

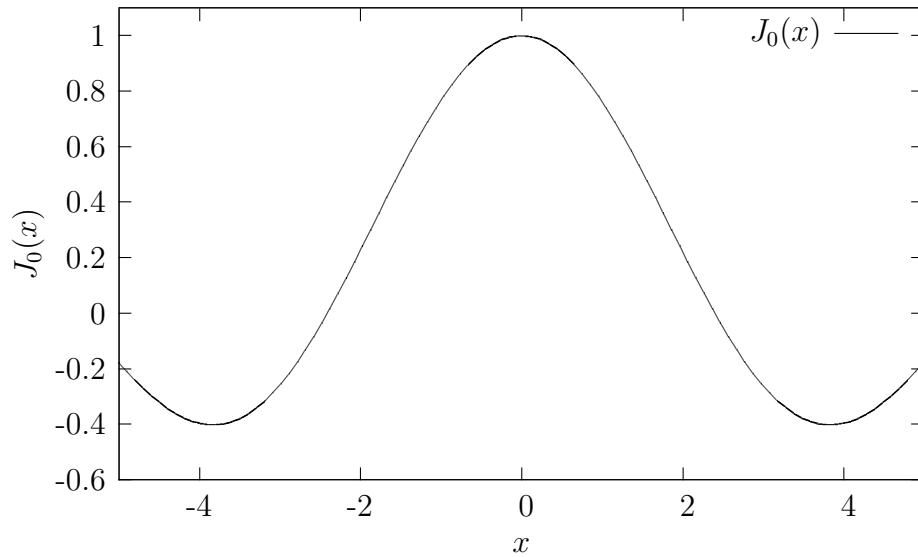
$$\begin{aligned}\cos(\eta)f(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (J_{n+1}(\bar{\alpha})e^{i(n+1)\eta_0} + J_{n-1}(\bar{\alpha})e^{-i(n-1)\eta_0}), \\ \sin(\eta)f(\eta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} (J_{n+1}(\bar{\alpha})e^{i(n+1)\eta_0} - J_{n-1}(\bar{\alpha})e^{-i(n-1)\eta_0}).\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

In Abschnitt 5.1.1 wurde gezeigt, dass für Bethe–Heitler–Paarerzeugung im Multiphotonenregime mit einem Myon als Projektil am Projektilvertex sehr kleine Argumente der Bessel–Funktionen auftreten. Abbildung B.1 zeigt die Bessel–Funktion 0-ter Ordnung. Wie man sieht, ist  $J_0(0) = 1$ . Daher konnte in der Herleitung des Grenzwerts (5.9) für kleine Argumente  $\bar{\beta} \ll 1$  der Entwicklungskoeffizient  $|F_0|^2 \approx 1$  gesetzt werden.

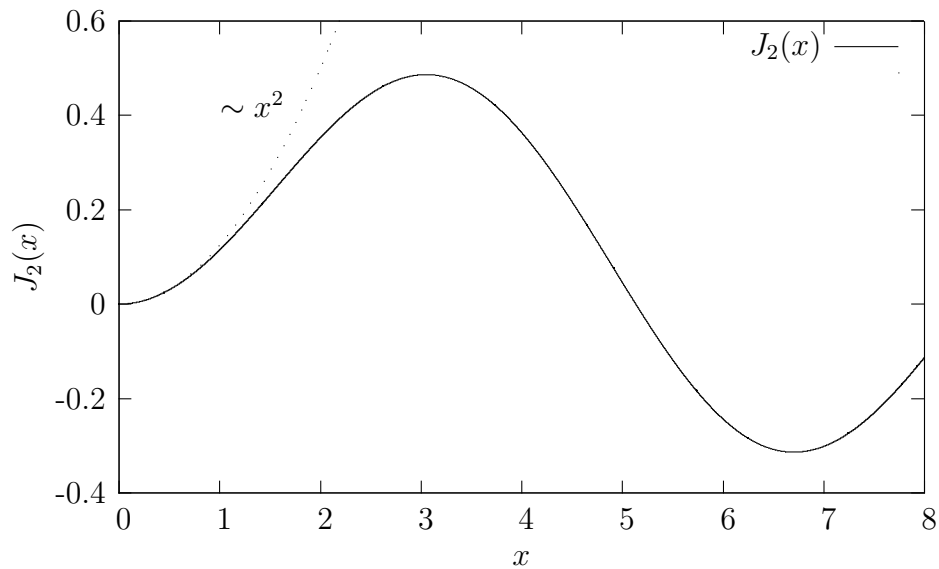
Abbildung B.2 zeigt die Funktion  $J_2(x)$ . Für sehr kleine Argumente  $x$  steigt  $J_2(x)$  proportional zu  $x^2$  an. Allgemein gilt [AS65]

$$J_n(x) \approx \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{für } x \ll 1. \quad (\text{B.9})$$

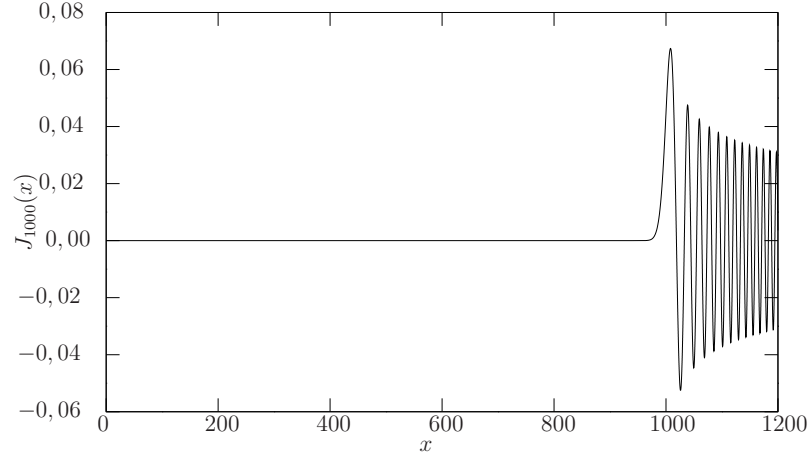




**Abbildung B.1:** Gewöhnliche Besselfunktion 0-ter Ordnung. Die Funktion ist symmetrisch um die  $y$ -Achse und  $J_0(0) = 1$



**Abbildung B.2:**  $J_2(x)$  und  $x \mapsto x^2/8$ . Wie man sieht, gibt die gestrichelte Kurve das Verhalten der Besselfunktion für kleine  $x$  an (vgl. (B.9)).



**Abbildung B.3:** Gewöhnliche Bessel-Funktion  $J_{1000}(x)$ . Wie man sieht, sind die Funktionswerte für  $x \lesssim 1000$  vernachlässigbar.

Das Argument der Besselfunktion ist in unserer Rechnung proportional zu dem Intensitätsparameter  $\xi$  bzw.  $\Xi = \xi \cdot m/M$  für den Myonenvertex. Da die Besselfunktionen jeweils quadratisch in die Paarerzeugungsrate eingehen, skalieren Partialraten der Ordnung  $n$  im Elektronenvertex mit  $\xi^{2n}$  und der Ordnung  $N$  am Projektilvertex mit  $\Xi^{2N}$ . Unter den von den Ergebnissen in Abschnitt 5.1.1 nahegelegten Näherungen für schwere Projektilteilchen skaliert also die Partialrate für einen  $r$ -Photonen-Prozess mit  $\xi^{2r}$ . Dies erklärt zum einen, warum im Multiphotonen-Regime die Absorption einer Anzahl  $r > r_0$  Photonen keinen merklichen Beitrag zur totalen Paarerzeugungsrate liefert. Zum anderen ist es der mathematische Grund für die in Abschnitt 5.1.2 gefundene Abhängigkeit der Rate vom Intensitätsparameter.

Im Hinblick darauf werden für die Untersuchung der Paarerzeugungsrate im Multiphotonen-Regime keine Bessel-Funktionen höherer Ordnung benötigt. Für die in Abschnitt 5.4 gezeigten Ergebnisse für das Above-Threshold-Regime können sie aber durchaus interessant werden. Wie Abb. B.3 für die Bessel-Funktion  $J_{1000}(x)$  demonstriert, sind für große Ordnung  $n$  die Bessel-Funktionen  $J_n(x)$  vernachlässigbar für  $x < n$  und liefern erst ab  $x \gtrsim n$  signifikante Werte.

# Anhang C

## Rechenregeln für Gamma–Matrizen

Die für die in dieser Arbeit durchgeführten Rechnungen wichtigsten Eigenschaften der Dirac’schen Gamma–Matrizen werden hier zusammengefasst. Man findet sie auch in Abschnitt 7.2 bzw. Anhang A in [BD64].

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} \quad (\text{C.1})$$

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\mathbb{1} \quad (\text{C.2})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1} - \gamma^\nu\gamma^\mu \quad (\text{C.3})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad (\text{C.4})$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu \quad (\text{C.5})$$

$$\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu \quad (\text{C.6})$$

Damit folgen für Produkte aus Gamma–Matrizen und Vierervektoren die folgenden Beziehungen:

$$\not{a}\not{b} = 2ab - \not{b}\not{a} \quad (\text{C.7})$$

$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a} \quad (\text{C.8})$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4ab \quad (\text{C.9})$$

$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{a}\not{b}\not{c} \quad (\text{C.10})$$

Einen Spezialfall der Gordon–Zerlegung des Dirac–Stroms stellt folgende Beziehung für einen freien Dirac–Spinor  $u_{p,s}$  dar [BD64]:

$$\bar{u}_{p,s}\gamma^\mu u_{p,s} = \frac{p^\mu}{m}. \quad (\text{C.11})$$

Für die Spurauswertung in Abschnitt (4.2) wurden folgende, aus obigen Beziehungen und allgemeinen Spurbildungsregeln abgeleiteten Relationen benutzt:

Die Spur über eine ungerade Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen wird 0:

$$\text{Sp}(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{2n+1}) = 0. \quad (\text{C.12})$$

Weil Spurbildung allgemein invariant gegen zyklische Vertauschung ist, folgt aus (C.1):

$$\text{Sp}(\psi_1 \psi_2) = 4(u_1 u_2), \quad (\text{C.13})$$

$$\text{Sp}(\psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4) = 4(u_1 u_2)(u_3 u_4) - 4(u_1 u_3)(u_2 u_4) + 4(u_1 u_4)(u_2 u_3) \quad (\text{C.14})$$

oder allgemein

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_{2n}) &= (u_1 u_2) \text{Sp}(\psi_3 \psi_4 \dots \psi_{2n}) \\ &\quad - (u_1 u_3) \text{Sp}(\psi_2 \psi_4 \dots \psi_{2n}) \\ &\quad \pm \dots \\ &\quad + (u_1 u_{2n}) \text{Sp}(\psi_2 \psi_3 \dots \psi_{2n-1}). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Eine weitere sehr nützliche Beziehung lautet

$$\text{Sp}(\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n) = \text{Sp}(\psi_n \dots \psi_2 \psi_1). \quad (\text{C.16})$$

Zusätzlich wurde folgende Formel häufig benutzt:

$$\overline{\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n} = \psi_n \dots \psi_2 \psi_1. \quad (\text{C.17})$$

# Anhang D

## Eigenschaften freier Dirac–Spinoren

In diesem Kapitel werden einige Eigenschaften der in den Volkov–Zuständen (2.9) auftretenden Spinoren zusammengefasst werden (vgl. Anhang A in [BD64]).

Es wird hier nicht weiter zwischen Spinoren für Elektronen und Myonen unterschieden, da beide negativ geladene Spin–1/2–Teilchen sind. Es seien  $u = u_{p_- s_-}$  der Spinor eines negativ geladenen Elementarteilchens mit Impuls  $p_-$  und Spinquantenzahl  $s_- \in \{-1/2, 1/2\}$  und  $v = v_{p_+ s_+}$  der Spinor eines positiv geladenen Antiteilchens mit Impuls  $p_+$  und Spin  $s_+ \in \{-1/2, 1/2\}$ .

Die Spinoren erfüllen die Dirac–Gleichung:

$$(\not{p}_- - m)u_{p_- s_-} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$(\not{p}_+ + m)v_{p_+ s_+} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Mit den adjungierten Spinoren

$$\bar{u} := u^\dagger \gamma^0 \quad (\text{D.3})$$

$$\bar{v} := v^\dagger \gamma^0, \quad (\text{D.4})$$

die die entsprechenden Gleichungen

$$\bar{u}_{p_- s_-} (\not{p}_- - m) = 0 \quad (\text{D.5})$$

$$\bar{v}_{p_+ s_+} (\not{p}_+ + m) = 0 \quad (\text{D.6})$$

erfüllen, lassen sich Normierungsbedingungen festlegen:

$$\bar{u}_{p_- s_-} u_{p_- s_-} = 1 \quad (\text{D.7})$$

$$\bar{v}_{p+s_+} v_{p+s_+} = -1. \quad (\text{D.8})$$

Die Vollständigkeitsbedingung lautet

$$\sum_{s_-} u_{p-s_-} \bar{u}_{p-s_-} = \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \quad (\text{D.9})$$

$$\sum_{s_+} v_{p+s_+} \bar{v}_{p+s_+} = \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \quad (\text{D.10})$$

bzw. in Komponenten, wie sie in der Berechnung des Amplitudenquadrates (4.55) bzw. (4.61) auftreten [BD64]:

$$\sum_{s_-} u_\alpha \bar{u}_\beta = \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right)_{\alpha\beta} \quad (\text{D.11})$$

$$\sum_{s_+} v_\alpha \bar{v}_\beta = \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right)_{\alpha\beta}. \quad (\text{D.12})$$

Außerdem gilt

$$u_{p-,s_-}^\dagger u_{p-,s'_-} = \delta_{s_- s'_-}. \quad (\text{D.13})$$

# Anhang E

## Spinsumme über das Amplitudenquadrat

In Kapitel (4) wurde gezeigt, dass man die Spinsumme über das Amplitudenquadrat als Produkt von Spuren über Gamma-Matrizen schreiben kann. Die Berechnung dieser Spuren wird im folgenden dargestellt. Die Anteile von Myonen- und Elektronen-Vertex werden wieder getrennt betrachtet. Es wird zunächst anhand eines Summanden exemplarisch das Vorgehen gezeigt, und anschließend das Ergebnis der Spurauswertung angegeben. Da diese Ergebnisse sowohl für den Myonen- als auch für den Elektronenvertex sehr lang sind, wurden sie mit Hilfe des Mathematica-Paketes *tracer* [tra11] überprüft. Das Produkt aus den beiden Termen wurde in der numerischen Berechnung mittels eines C++-Programms ausgewertet.

### E.1 Die Summe über die Myonenspins

Wie im Vorhergehenden sollen nun die Anteile des Myons und des Elektron-Positron-Paars getrennt untersucht werden, wobei wir nun zunächst den Myonenanteil betrachten.

Für die Summe über den Myonenspin vor und nach dem Stoß mit dem Laserfeld gilt ((4.59))

$$\sum_{s_-, s'_-} \mathcal{M}_\mu(\mu, \mu' | r - n') \mathcal{M}_\nu^\dagger(\mu, \mu' | r - n) = \text{Sp} \left( \Delta_\mu^n \frac{\not{P}_- + M}{2M} \bar{\Delta}_\nu^{n'} \frac{\not{P}'_- + M}{2M} \right) \quad (\text{E.1})$$

mit den in Gleichung (4.56) definierten Matrixelementen  $\Delta_\mu^n$ . Die hier auftretende Spur kann man mit Hilfe der Relationen aus Anhang (C) auswerten.

Zunächst lautet sie ausgeschrieben:

$$\begin{aligned}
 & \text{Sp}\left(\Delta_\mu^n \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \bar{\Delta}_\nu^{n'} \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M}\right) \\
 &= \text{Sp}\left\{ \left[ \left( \not{\mu} + \frac{e^2 a^2 k_\mu \not{k}}{2(kP_-)(kP'_-)} \right) F_{r-n} - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right) G_{r-n} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right) H_{r-n} \right] \cdot \left( \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \left( \not{\nu} + \frac{e^2 a^2 k_\nu \not{k}}{2(kP_-)(kP'_-)} \right) F_{r-n'}^* - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_1 \right) G_{r-n'}^* \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kP_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_2 \right) H_{r-n'}^* \right] \cdot \left( \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M} \right) \right\} \\
 &= F_{r-n} F_{r-n'}^* \text{Sp}\left\{ \left[ \not{\mu} + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP_-)(2kP'_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \not{\nu} + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP_-)(2kP'_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M} \right) \right\} \tag{E.2a} \\
 &+ \frac{e^2}{4} G_{r-n} G_{r-n'}^* \text{Sp}\left\{ \left[ \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{kP_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_1 \right] \left( \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M} \right) \right\} \tag{E.2b} \\
 &+ \frac{e^2}{4} H_{r-n} H_{r-n'}^* \text{Sp}\left\{ \left[ \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{kP_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_2 \right] \left( \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M} \right) \right\} \tag{E.2c} \\
 &- \frac{e}{2} F_{r-n} G_{r-n'}^* \text{Sp}\left\{ \left[ \not{\mu} + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP_-)(2kP'_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\mathcal{P}_- + M}{2M} \right) \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{kP_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_1 \right] \left( \frac{\mathcal{P}'_- + M}{2M} \right) \right\} \tag{E.2d}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{2}F_{r-n}H_{r-n'}^*\text{Sp}\left\{\left[\not{\mu} + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP_-)(2kP'_-)}\not{k}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\right. \\
& \quad \left.\cdot \left[\frac{1}{kP_-}\not{q}_2\not{k}\not{\nu} + \frac{1}{kP'_-}\not{\nu}\not{k}\not{q}_2\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{E.2e}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{2}G_{r-n}F_{r-n'}^*\text{Sp}\left\{\left[\frac{1}{kP_-}\not{\mu}\not{k}\not{q}_1 + \frac{1}{kP'_-}\not{q}_1\not{k}\not{\mu}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\right. \\
& \quad \left.\cdot \left[\not{\nu} + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP_-)(2kP'_-)}\not{k}\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{E.2f}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{e}{2}H_{r-n}F_{r-n'}^*\text{Sp}\left\{\left[\frac{1}{kP_-}\not{\mu}\not{k}\not{q}_2 + \frac{1}{kP'_-}\not{q}_2\not{k}\not{\mu}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\right. \\
& \quad \left.\cdot \left[\not{\nu} + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP_-)(2kP'_-)}\not{k}\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{E.2g}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{e^2}{4}G_{r-n}H_{r-n'}^*\text{Sp}\left\{\left[\frac{1}{kP_-}\not{\mu}\not{k}\not{q}_1 + \frac{1}{kP'_-}\not{q}_1\not{k}\not{\mu}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\right. \\
& \quad \left.\cdot \left[\frac{1}{kP_-}\not{q}_2\not{k}\not{\nu} + \frac{1}{kP'_-}\not{\nu}\not{k}\not{q}_2\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{E.2h}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{e^2}{4}H_{r-n}G_{r-n'}^*\text{Sp}\left\{\left[\frac{1}{kP_-}\not{\mu}\not{k}\not{q}_2 + \frac{1}{kP'_-}\not{q}_2\not{k}\not{\mu}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\right. \\
& \quad \left.\cdot \left[\frac{1}{kP_-}\not{q}_1\not{k}\not{\nu} + \frac{1}{kP'_-}\not{\nu}\not{k}\not{q}_1\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{E.2i}$$

Dieser Ausdruck enthält Spuren über Produkte von bis zu acht  $\gamma$ -Matrizen. Es werden zunächst nur die Spuren

$t_{ij} :=$

$$\frac{e^2}{4}\text{Sp}\left\{\left[\frac{1}{kP_-}\not{\mu}\not{k}\not{q}_i + \frac{1}{kP'_-}\not{q}_i\not{k}\not{\mu}\right]\left(\frac{\not{P}_- + M}{2M}\right)\left[\frac{1}{kP_-}\not{q}_j\not{k}\not{\nu} + \frac{1}{kP'_-}\not{\nu}\not{k}\not{q}_j\right]\left(\frac{\not{P}'_- + M}{2M}\right)\right\} \tag{E.3}$$

betrachtet, also die Anteile von (E.2b), (E.2c), (E.2h) und (E.2i). Anhand derer wird exemplarisch gezeigt, wie die Spuren berechnet wurden. Von den übrigen Termen wird nur das Ergebnis angegeben.

Nach der Relation (C.12) verschwinden Spuren über Produkte aus einer unge-

raden Anzahl von  $\gamma$ -Matrizen. Somit führt das Ausmultiplizieren der runden Klammern zu

$$t_{ij} = \frac{e^2}{16M^2} \text{Sp} \left\{ \left( \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{P}_- + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{P}_- \right) \left( \frac{1}{kP_-} \not{q}_j \not{k} \not{\nu} \not{P}'_- + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_- \right) \right\} \quad (\text{E.4a})$$

$$+ \frac{e^2}{16} \text{Sp} \left\{ \left( \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_i + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_i \not{k} \not{\mu} \right) \left( \frac{1}{kP_-} \not{q}_j \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \right) \right\}. \quad (\text{E.4b})$$

Diesen Ausdruck kann man durch geschickte Umformung und Ausnutzung der Rechenregeln aus Anhang (C), insbesondere der Relationen (C.15), (C.14) und (C.13) berechnen.

Zunächst gilt für den zweiten Term (E.4b)

$$\begin{aligned} & \frac{e^2}{16} \text{Sp} \left\{ \left( \frac{1}{kP_-} \not{\mu} \not{k} \not{q}_i + \frac{1}{kP'_-} \not{q}_i \not{k} \not{\mu} \right) \left( \frac{1}{kP_-} \not{q}_j \not{k} \not{\nu} + \frac{1}{kP'_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(kP_-)^2} \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{q}_j \not{k} \not{\nu}) + \frac{1}{(kP'_-)^2} \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(kP_-)(kP'_-)} \left( \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) + \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{q}_j \not{k} \not{\nu}) \right) \right\}. \quad (\text{E.5}) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Spuren sowie die beiden letzten Spuren sind wegen der Invarianz der Spur unter zyklischer Vertauschung und der Relation (C.16) für das Umdrehen der Reihenfolge gleich:

$$\text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{q}_j \not{k} \not{\nu}) = \text{Sp}(\not{q}_j \not{k} \not{\nu} \not{\mu} \not{k} \not{q}_i) = \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) \quad (\text{E.6})$$

und

$$\text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{q}_j \not{k} \not{\nu}) = \text{Sp}(\not{q}_j \not{k} \not{\nu} \not{q}_i \not{k} \not{\mu}) = \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j). \quad (\text{E.7})$$

Diese Spuren lassen sich mit Hilfe der Relationen (C.15) und (C.14) auswerten. (E.6) wird

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) &= (a_i)_\nu \underbrace{\text{Sp}(\not{k} \not{\mu} \not{k} \not{q}_j)}_{=0((4.5))} - (a_i)_\mu \underbrace{\text{Sp}(\not{k} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j)}_{=0((4.5))} - \delta_{ij} a^2 \text{Sp}(\not{k} \not{\mu} \not{\nu} \not{k}) \\ &= -4\delta_{ij} a^2 (k_\mu k_\nu - k_\nu k_\mu) = 0. \quad (\text{E.8}) \end{aligned}$$

Für die Spur (E.7) gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j) &= \text{Sp}(\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{\mu}) \\
&= k_\mu \underbrace{\text{Sp}(\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j)}_{=-4\delta_{ij}a^2k_\nu} - k_\nu \underbrace{\text{Sp}(\not{q}_i\not{k}\not{q}_j\not{\mu})}_{=+4\delta_{ij}a^2k_\mu} \\
&= -8\delta_{ij}a^2k_\mu k_\nu.
\end{aligned} \tag{E.9}$$

Somit ist (E.4b)

$$(E.4b) = \frac{-\delta_{ij}e^2a^2k_\mu k_\nu}{(kP_-)(kP'_-)}. \tag{E.10}$$

Den ersten Term in (E.4) kann man ganz analog behandeln. Zunächst einmal sieht man, dass in

$$\begin{aligned}
\frac{e^2}{16M^2} \text{Sp} \left\{ \frac{1}{(kP_-)^2} \not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{P}_-\not{q}_j\not{k}\not{v}\not{P}'_- + \frac{1}{(kP'_-)^2} \not{q}_i\not{k}\not{\mu}\not{P}_-\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_- \right. \\
\left. + \frac{1}{(kP_-)(kP'_-)} \not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{P}_-\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_- + \frac{1}{(kP_-)(kP'_-)} \not{q}_i\not{k}\not{\mu}\not{P}_-\not{q}_j\not{k}\not{v}\not{P}'_- \right\}
\end{aligned} \tag{E.11}$$

in den Spuren in der ersten bzw. zweiten Zeile jeweils nur die Reihenfolge von  $P_-$  und  $P'_-$  vertauscht ist. Mit (C.3) kann man sie so umformen, dass sie gleich sind:

Für die Spuren in der zweiten Zeile gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{P}_-\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) &= 2(a_iP_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - \text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{P}_-\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) \\
&= 2(a_iP_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - 2(kP_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) \\
&\quad + \text{Sp}(\not{\mu}\not{P}_-\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) \\
&= \dots \\
&= 2(a_iP_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - 2(kP_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) \\
&\quad + 2(P_-)_\mu \text{Sp}(\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - 2(P_-P'_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j) \\
&\quad + 2(P'_-)_\mu \text{Sp}(\not{k}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - 2(kP'_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{q}_i\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) \\
&\quad + 2(a_iP'_-)\text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-) - \text{Sp}(\not{\mu}\not{k}\not{q}_i\not{P}'_-\not{v}\not{k}\not{q}_j\not{P}'_-),
\end{aligned} \tag{E.12}$$

also wird die zweite Zeile

$$\begin{aligned}
 & \frac{e^2}{8M^2(kP)(kP')} \left( (a_i P_-) \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) + (a_i P'_-) \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}_-) \right. \\
 & \quad - (kP_-) \text{Sp}(\not{\mu} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) - (kP'_-) \text{Sp}(\not{\mu} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}_-) \\
 & \quad + (P_-)_\mu \text{Sp}(\not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) + (P'_-)_\mu \text{Sp}(\not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}_-) \\
 & \quad \left. - (P_- P'_-) \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) \right). \tag{E.13}
 \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen (C.15) und (C.14) aus Anhang (C) lassen sich diese Spuren auswerten:

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) &= \text{Sp}(\not{k} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_- \not{\mu}) \\
 &= k_\nu \text{Sp}(\not{k} \not{q}_j \not{P}'_- \not{\mu}) - 0 + 0 - (kP'_-) \text{Sp}(\not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{\mu}) + k_\mu \text{Sp}(\not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) \\
 &= 4(k_\nu k_\mu (a_j P'_-) - k_\nu (a_j)_\mu (kP'_-) - (kP'_-) k_\nu (a_j)_\mu + (kP'_-) k_\mu (a_j)_\nu \\
 & \quad + k_\mu k_\nu (a_j P'_-) - k_\mu (a_j)_\nu (kP'_-)) \\
 &= 8(k_\nu k_\mu (a_j P'_-) - k_\nu (a_j)_\mu (kP'_-)), \tag{E.14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(\not{\mu} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) &= \text{Sp}(\not{k} \not{q}_j \not{P}'_- \not{\mu} \not{q}_i \not{\nu}) \\
 &= k_\mu \text{Sp}(\not{q}_j \not{P}'_- \not{q}_i \not{\nu}) + k_\nu \text{Sp}(\not{q}_j \not{P}'_- \not{\mu} \not{q}_i) - (kP'_-) \text{Sp}(\not{q}_j \not{\mu} \not{q}_i \not{\nu}) \\
 &= 4k_\nu (a_{i,\nu} (a_j P'_-) + a_{j,\nu} (a_i P'_-) + \delta_{ij} a^2 P'_-) \\
 & \quad + 4k_\mu (a_{i,\mu} (a_j P'_-) - a_{j,\mu} (a_i P'_-) - \delta_{ij} a^2 P'_-) \\
 & \quad - 4(kP'_-) (a_{i,\nu} a_{j,\mu} + a_{i,\mu} a_{j,\nu} + \delta_{ij} a^2 g^{\mu\nu}) \\
 &= 4\left( \delta_{ij} a^2 (k_\mu P'_\nu - k_\nu P'_\mu - g^{\mu\nu} (kP'_-)) - (kP'_-) (a_{i,\nu} a_{j,\mu} + a_{i,\mu} a_{j,\nu}) \right. \\
 & \quad \left. + (a_j P'_-) (k_\mu a_{i,\nu} + k_\nu a_{i,\mu}) + (a_i P'_-) (k_\mu a_{j,\nu} - k_\nu a_{j,\mu}) \right), \tag{E.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(\not{k} \not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) & \\
 &= (kP'_-) \text{Sp}(\not{q}_i \not{\nu} \not{k} \not{q}_j) - k_\nu \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{q}_j \not{P}'_-) \\
 &= 4(-k_\nu \delta_{ij} a^2 (kP'_-) - k_\nu \delta_{ij} a^2 (kP'_-)) \\
 &= -8\delta_{ij} a^2 k_\nu (kP'_-) \tag{E.16}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(\mu\cancel{k}d_i\nu\cancel{k}d_j) &= \mathrm{Sp}(\cancel{k}d_i\nu\cancel{k}d_j\mu) \\
&= k_\mu\mathrm{Sp}(d_i\nu\cancel{k}d_j) - k_\nu\mathrm{Sp}(d_i\cancel{k}d_j\mu) \\
&= 4(-\delta_{ij}a^2k_\mu k_\nu - \delta_{ij}a^2k_\mu k_\nu) \\
&= -8\delta_{ij}a^2k_\mu k_\nu.
\end{aligned} \tag{E.17}$$

Eingesetzt in (E.13) ergibt sich daraus die zweite Zeile von (E.11) zu

$$\begin{aligned}
\frac{e^2}{8M^2(kP)(kP')} &\left\{ 8(kP)(kP')(a_{i,\nu}a_{j,\mu} + a_{i,\mu}a_{j,\nu} + \delta_{ij}a^2g_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad + 8k_\mu k_\nu((a_iP)(a_jP') + (a_iP')(a_jP) + \delta_{ij}a^2(PP')) \\
&\quad - 4(k_\mu a_{i,\nu} + k_\nu a_{i,\mu})((kP)(a_jP') + (kP')(a_jP)) \\
&\quad - 4(k_\mu a_{j,\nu} + k_\nu a_{j,\mu})((kP)(a_iP') + (kP')(a_iP)) \\
&\quad \left. - 4\delta_{ij}a^2((kP)(k_\mu P'_\nu + k_\nu P'_\mu) + (kP')(k_\mu P'_\nu + k_\nu P'_\mu)) \right\}.
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Die erste Zeile von (E.11) könnte man genauso behandeln. In diesem Fall ist aber der Aufwand geringer, wenn man eine der beiden Spuren berechnet und anschließend im Ergebnis  $P$  und  $P'$  gegeneinander vertauscht. Dann wird die erste Spur

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}(\mu\cancel{k}d_i\cancel{P}d_j\cancel{k}\cancel{P}') &= \mathrm{Sp}(\cancel{k}d_i\cancel{P}d_j\cancel{k}\cancel{P}'\mu) \\
&= k_\mu\mathrm{Sp}(d_i\cancel{P}d_j\cancel{k}\cancel{P}') + k_\nu\mathrm{Sp}(d_i\cancel{P}d_j\cancel{k}\cancel{P}'\mu) \\
&\quad - (kP)\mathrm{Sp}(d_i\cancel{k}d_j\cancel{k}\cancel{P}'\mu) - (kP')\mathrm{Sp}(d_i\cancel{P}d_j\cancel{k}\cancel{P}'\mu) \\
&= k_\mu(k_\nu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j) - (kP')\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j) - (kP)\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)) \\
&\quad + k_\nu(-k_\mu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j) + (kP')\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j) - (kP)\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)) \\
&\quad - (kP)(k_\nu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j) - (kP')\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j) + k_\mu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)) \\
&\quad - (kP')(k_\nu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j) - (kP)\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j) - k_\mu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)) \\
&= \mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)(k_\mu(kP') - k_\mu(kP)) + \mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j)(-k_\mu(kP) - k_\mu(kP)) \\
&\quad + \mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j)(k_\nu(kP') - k_\nu(kP)) + \mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)(-k_\nu(kP) - k_\nu(kP)) \\
&\quad + \mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j)((kP)(kP') + (kP')(kP)) + \mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j)(k_\mu k_\nu - k_\nu k_\mu) \\
&= 2(kP)((kP')\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j) - k_\mu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'d_i\cancel{P}d_j) - k_\nu\mathrm{Sp}(\cancel{P}'\mu d_i\cancel{P}d_j)).
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Wegen (C.16) ist

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{P} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}') &= \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{P}' \not{q}_j \not{k} \not{\nu} \not{P}) \\ &= 2(kP') \left( (kP) \text{Sp}(\not{\nu} \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) - k_\mu \text{Sp}(\not{\nu} \not{P} \not{q}_i \not{q}_j) - k_\nu \text{Sp}(\not{P} \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Damit lautet die erste Zeile in (E.11)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(kP)^2} \text{Sp}(\not{\mu} \not{k} \not{q}_i \not{P} \not{q}_j \not{k} \not{\nu} \not{P}') + \frac{1}{(kP')^2} \text{Sp}(\not{q}_i \not{k} \not{\mu} \not{P} \not{\nu} \not{k} \not{q}_j \not{P}') \\ &= \frac{2}{(kP)} \left( (kP') \text{Sp}(\not{\nu} \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) - k_\mu \text{Sp}(\not{\nu} \not{P}' \not{q}_i \not{q}_j) - k_\nu \text{Sp}(\not{P}' \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) \right) \\ &+ \frac{2}{(kP')} \left( (kP) \text{Sp}(\not{\nu} \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) - k_\mu \text{Sp}(\not{\nu} \not{P} \not{q}_i \not{q}_j) - k_\nu \text{Sp}(\not{P} \not{\mu} \not{q}_i \not{q}_j) \right) \\ &= \frac{8}{(kP)} \left( (kP') (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu} - \delta_{ij} a^2 g_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - k_\mu (a_{j,\nu} (a_i P') - a_{i,\nu} (a_j P') - \delta_{ij} a^2 P'_\nu) \right. \\ &\quad \left. - k_\nu (a_{i,\mu} (a_j P') - a_{j,\mu} (a_i P') - \delta_{ij} a^2 P'_\mu) \right) \\ &+ \frac{8}{(kP')} \left( (kP) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu} - \delta_{ij} a^2 g_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - k_\mu (a_{j,\nu} (a_i P) - a_{i,\nu} (a_j P) - \delta_{ij} a^2 P_\nu) \right. \\ &\quad \left. - k_\nu (a_{i,\mu} (a_j P) - a_{j,\mu} (a_i P) - \delta_{ij} a^2 P_\mu) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Zusammen mit (E.18) ergibt (E.21) in (E.11) eingesetzt

$$\begin{aligned}
(E.11) &= \frac{e^2}{2M^2} \left\{ \frac{1}{(kP_-)} \left[ (kP') (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu} - \delta_{ij} a^2 g_{\mu\nu}) \right. \right. \\
&\quad - k_\mu (a_{j,\nu} (a_i P') - a_{i,\nu} (a_j P') - \delta_{ij} a^2 P'_\nu) \\
&\quad \left. - k_\nu (a_{i,\mu} (a_j P') - a_{j,\mu} (a_i P') - \delta_{ij} a^2 P'_\mu) \right] \\
&+ \frac{1}{(kP')} \left[ (kP) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu} - \delta_{ij} a^2 g_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad - k_\mu (a_{j,\nu} (a_i P) - a_{i,\nu} (a_j P) - \delta_{ij} a^2 P_\nu) \\
&\quad \left. - k_\nu (a_{i,\mu} (a_j P) - a_{j,\mu} (a_i P) - \delta_{ij} a^2 P_\mu) \right] \\
&+ \frac{1}{(kP)(kP')} \left[ 2(kP)(kP') (a_{i,\nu} a_{j,\mu} + a_{i,\mu} a_{j,\nu} + \delta_{ij} a^2 g_{\mu\nu}) \right. \\
&\quad + 2k_\mu k_\nu ((a_i P)(a_j P') + (a_i P')(a_j P) + \delta_{ij} a^2 (PP')) \\
&\quad - (k_\mu a_{i,\nu} + k_\nu a_{i,\mu}) ((kP)(a_j P') + (kP')(a_j P)) \\
&\quad - (k_\mu a_{j,\nu} + k_\nu a_{j,\mu}) ((kP)(a_i P') + (kP')(a_i P)) \\
&\quad \left. - \delta_{ij} a^2 ((kP)(k_\mu P'_\nu + k_\nu P'_\mu) + (kP')(k_\mu P_\nu + k_\nu P_\mu)) \right] \Big\} \\
&= \dots \\
&= \frac{e^2}{2M^2} \left\{ \delta_{ij} a^2 \left[ \frac{2k_\mu k_\nu (PP')}{(kP)(kP')} - \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right)^2 g_{\mu\nu} (kP)(kP') \right. \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) (k_\mu (P'_\nu - P_\nu) + k_\nu (P'_\mu - P_\mu)) \right] \\
&\quad + \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( k_\nu a_{j,\mu} ((a_i P') - a_i P) \right. \\
&\quad \quad \left. + k_\mu a_{i,\nu} ((a_j P') - (a_j P)) \right) \\
&\quad - \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( k_\mu a_{j,\nu} ((a_i P') + a_i P) \right. \\
&\quad \quad \left. + k_\nu a_{i,\mu} ((a_j P') + (a_j P)) \right) \\
&\quad + \left( \frac{kP'}{(kP)} + \frac{kP}{(kP')} \right) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu}) + 2(a_{i,\mu} a_{j,\nu} + a_{i,\nu} a_{j,\mu}) \\
&\quad \left. + 2 \frac{k_\mu k_\nu ((a_i P)(a_j P') + (a_i P')(a_j P))}{(kP)(kP')} \right\}. \tag{E.24}
\end{aligned}$$

(E.22)

(E.23)

Mit diesem Ergebnis wird schließlich die Spur E.3 zu

$$\begin{aligned}
 t_{ij} = \frac{e^2}{2M^2} & \left\{ \delta_{ij} a^2 \left[ \frac{2k_\mu k_\nu (PP')}{(kP)(kP')} - \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right)^2 g_{\mu\nu} (kP)(kP') \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) (k_\mu (P'_\nu - P_\nu) + k_\nu (P'_\mu - P_\mu)) \right] \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( k_\nu a_{j,\mu} ((a_i P' - a_i P)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_\mu a_{i,\nu} ((a_j P') - (a_j P)) \right) \right. \\
 & \left. - \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( k_\mu a_{j,\nu} ((a_i P' + a_i P)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_\nu a_{i,\mu} ((a_j P') + (a_j P)) \right) \right. \\
 & \left. + \left( \frac{(kP')}{(kP)} + \frac{(kP)}{(kP')} \right) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu}) + 2(a_{i,\mu} a_{j,\nu} + a_{i,\nu} a_{j,\mu}) \right. \\
 & \left. + 2 \frac{k_\mu k_\nu ((a_i P)(a_j P') + (a_i P')(a_j P))}{(kP)(kP')} \right\} \tag{E.25}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( k_\mu a_{j,\nu} ((a_i P' + a_i P)) \right. \\
 & \left. + k_\nu a_{i,\mu} ((a_j P') + (a_j P)) \right) \\
 & + \left( \frac{(kP')}{(kP)} + \frac{(kP)}{(kP')} \right) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu}) + 2(a_{i,\mu} a_{j,\nu} + a_{i,\nu} a_{j,\mu}) \\
 & + 2 \frac{k_\mu k_\nu ((a_i P)(a_j P') + (a_i P')(a_j P))}{(kP)(kP')} \left. \right\} \\
 & - \frac{\delta_{ij} e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{(kP_-)(kP'_-)} \tag{E.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{(kP')}{(kP)} + \frac{(kP)}{(kP')} \right) (a_{i,\mu} a_{j,\nu} - a_{i,\nu} a_{j,\mu}) + 2(a_{i,\mu} a_{j,\nu} + a_{i,\nu} a_{j,\mu}) \\
 & + 2 \frac{k_\mu k_\nu ((a_i P)(a_j P') + (a_i P')(a_j P))}{(kP)(kP')} \left. \right\} \\
 & - \frac{\delta_{ij} e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{(kP_-)(kP'_-)} \tag{E.27}
 \end{aligned}$$

Um nun die Beiträge von (E.2b), (E.2c), (E.2h) und (E.2i) zu bestimmen, muss man in (E.22) und (E.18) für  $\{i, j\}$  die benötigten Kombinationen von  $\{1, 2\}$  einsetzen.

## E.2 Ergebnis für den Myonenvertex

Man kann mit allen Spuren in (E.2) wie oben gezeigt verfahren. Die Beiträge der einzelnen Spuren werden nun ohne weitere Rechnung angegeben. Das *Mathematica*-Paket Tracer [tra11] erlaubt es, die Richtigkeit dieses Ergebnisses zu überprüfen.

$$\begin{aligned}
 \text{(E.2a)} = & \left\{ g_{\mu\nu} + \frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} - \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) (a_{1,\mu} k_\nu - k_\mu a_{1,\nu}) \right. \\
 & + \frac{1}{M^2} \left[ P_\mu P'_\nu + P_\nu P'_\mu - g_{\mu\nu} (PP') + \frac{e^2 a^2}{2(kP)(kP')} \left( e^2 a^2 k_\mu k_\nu - 2k_\mu k_\nu (PP') \right. \right. \\
 & \left. \left. + k_\nu (P_\mu (kP') + P'_\mu (kP)) + k_\mu (P_\nu (kP') + P'_\nu (kP)) \right) \right] \left. \right\} \cdot F_{r-n} F_{r-n}^* \tag{E.28}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
(E.2b) = & \left\{ -\frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} + \frac{e^2}{2M^2} \left[ ((2a^2(PP') + 4(a_1P)(a_1P')) \frac{k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} \right. \right. \\
& - \left. \left( \frac{1}{(kP)^2} - \frac{1}{(kP')^2} \right) g_{\mu\nu} a^2(kP)(kP') + 4a_{1,\mu} a_{1,\nu} \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) a^2(k_\nu(P'_\mu - P_\mu) + k_\mu(P'_\nu - P_\nu)) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k_\mu a_{1,\nu} + k_\nu a_{1,\mu}) \left( \frac{(a_1P)}{(kP)} + \frac{(a_1P')}{(kP')} \right) \right] \right\} \cdot G_{r-n} G_{r-n'}^* \quad (E.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.2c) = & \left\{ -\frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} + \frac{e^2}{2M^2} \left[ ((2a^2(PP') + 4(a_2P)(a_2P')) \frac{k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} \right. \right. \\
& - \left. \left( \frac{1}{(kP)^2} - \frac{1}{(kP')^2} \right) g_{\mu\nu} a^2(kP)(kP') + 4a_{2,\mu} a_{2,\nu} \right. \\
& + \left. \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) a^2(k_\nu(P'_\mu - P_\mu) + k_\mu(P'_\nu - P_\nu)) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2(k_\mu a_{2,\nu} + k_\nu a_{2,\mu}) \left( \frac{(a_2P)}{(kP)} + \frac{(a_2P')}{(kP')} \right) \right] \right\} \cdot G_{r-n} G_{r-n'}^* \quad (E.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.2d) = & \left\{ -\frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) (a_{1,\mu} k_\nu - k_\mu a_{1,\nu}) \right. \\
& - \frac{e}{2M^2} \left[ \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( (P_\mu + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP')}) (k_\nu(a_1P') - a_{1,\nu}(kP')) \right) \right. \\
& + \left. \left( P'_\mu + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP)} \right) (k_\nu(a_1P) - a_{1,\nu}(kP)) + (PP') (k_\mu a_{1,\nu} - k_\nu a_{1,\mu}) \right) \\
& - \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( P_\nu (k_\mu(a_1P') - a_{1,\mu}(kP')) - P'_\nu (k_\mu(a_1P) - a_{1,\mu}(kP)) \right) \right. \\
& \left. + \left. \left( \frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{2(kP')(kP)} + g_{\mu\nu} \right) \left( (a_1P)(kP') - (a_1P')(kP) \right) \right] \right\} \cdot F_{r-n} G_{r-n'}^* \quad (E.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{E.2e}) &= \left\{ -\frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) (a_{2,\mu} k_\nu - k_\mu a_{2,\nu}) \right. \\
 &- \frac{e}{2M^2} \left[ \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( (P_\mu + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP')}) (k_\nu (a_2 P') - a_{2,\nu} (kP')) \right) \right. \\
 &+ \left. \left( P'_\mu + \frac{e^2 a^2 k_\mu}{2(kP)} \right) (k_\nu (a_2 P) - a_{2,\nu} (kP)) + (PP') (k_\mu a_{2,\nu} - k_\nu a_{2,\mu}) \right) \\
 &- \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( P_\nu (k_\mu (a_2 P') - a_{2,\mu} (kP')) - P'_\nu (k_\mu (a_2 P) - a_{2,\mu} (kP)) \right) \right. \\
 &+ \left. \left. \left( \frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{2(kP')(kP)} + g_{\mu\nu} \right) \left( (a_2 P)(kP') - (a_2 P')(kP) \right) \right] \right\} \cdot F_{r-n} H_{r-n'}^*
 \end{aligned} \tag{E.32}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{E.2f}) &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) (a_{1,\mu} k_\nu - k_\mu a_{1,\nu}) \right. \\
 &- \frac{e}{2M^2} \left[ \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( (P_\nu + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP')}) (k_\mu (a_1 P') - a_{1,\mu} (kP')) \right) \right. \\
 &+ \left. \left( P'_\nu + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP)} \right) (k_\mu (a_1 P) - a_{1,\mu} (kP)) + (PP') (k_\nu a_{1,\mu} - k_\mu a_{1,\nu}) \right) \\
 &- \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( P_\mu (k_\nu (a_1 P') - a_{1,\nu} (kP')) - P'_\mu (k_\nu (a_1 P) - a_{1,\nu} (kP)) \right) \right. \\
 &+ \left. \left. \left( \frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{2(kP')(kP)} + g_{\mu\nu} \right) \left( (a_1 P)(kP') - (a_1 P')(kP) \right) \right] \right\} \cdot G_{r-n} F_{r-n'}^*
 \end{aligned} \tag{E.33}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{E.2g}) &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) (a_{2,\mu} k_\nu - k_\mu a_{2,\nu}) \right. \\
 &- \frac{e}{2M^2} \left[ \left( \frac{1}{(kP)} + \frac{1}{(kP')} \right) \left( (P_\nu + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP')}) (k_\mu (a_2 P') - a_{2,\mu} (kP')) \right) \right. \\
 &+ \left. \left( P'_\nu + \frac{e^2 a^2 k_\nu}{2(kP)} \right) (k_\mu (a_2 P) - a_{2,\mu} (kP)) + (PP') (k_\nu a_{2,\mu} - k_\mu a_{2,\nu}) \right) \\
 &- \left. \left( \frac{1}{(kP)} - \frac{1}{(kP')} \right) \left( P_\mu (k_\nu (a_2 P') - a_{2,\nu} (kP')) - P'_\mu (k_\nu (a_2 P) - a_{2,\nu} (kP)) \right) \right. \\
 &+ \left. \left. \left( \frac{e^2 a^2 k_\mu k_\nu}{2(kP')(kP)} + g_{\mu\nu} \right) \left( (a_2 P)(kP') - (a_2 P')(kP) \right) \right] \right\} \cdot H_{r-n} F_{r-n'}^*
 \end{aligned} \tag{E.34}$$

$$\begin{aligned}
(\text{E.2h}) &= \frac{e^2}{2M^2} \left\{ ((a_1P)(a_2P') + (a_1P')(a_2P)) \frac{k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} \right. \\
&\quad - \left( \frac{1}{2(kP)} + \frac{1}{2(kP')} \right) \left( k_\mu a_{2,\nu} ((a_1P) + (a_1P')) + k_\nu a_{1,\mu} ((a_2P) + (a_2P')) \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{2(kP)} - \frac{1}{2(kP')} \right) \left( k_\nu a_{2,\mu} ((a_1P') - (a_1P)) + k_\mu a_{1,\nu} ((a_2P') - (a_2P)) \right) \\
&\quad \left. + \left( \frac{(kP')}{2(kP)} + \frac{(kP)}{2(kP')} \right) (a_{1,\mu} a_{2,\nu} - a_{1,\nu} a_{2,\mu}) \right\} \cdot G_{r-n} H_{r-n'}^* \quad (\text{E.35})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{E.2i}) &= \frac{e^2}{2M^2} \left\{ ((a_2P)(a_1P') + (a_2P')(a_1P)) \frac{k_\mu k_\nu}{(kP)(kP')} \right. \\
&\quad - \left( \frac{1}{2(kP)} + \frac{1}{2(kP')} \right) \left( k_\mu a_{1,\nu} ((a_2P) + (a_2P')) + k_\nu a_{2,\mu} ((a_1P) + (a_1P')) \right) \\
&\quad + \left( \frac{1}{2(kP)} - \frac{1}{2(kP')} \right) \left( k_\nu a_{1,\mu} ((a_2P') - (a_2P)) + k_\mu a_{2,\nu} ((a_1P') - (a_1P)) \right) \\
&\quad \left. + \left( \frac{(kP')}{2(kP)} + \frac{(kP)}{2(kP')} \right) (a_{2,\mu} a_{1,\nu} - a_{2,\nu} a_{1,\mu}) \right\} \cdot H_{r-n} G_{r-n'}^* \quad (\text{E.36})
\end{aligned}$$

### E.3 Ergebnis für den Elektronenvertex

Analog zu den obigen Betrachtungen kann man die in Abschnitt (4.2) auftretende Spinsumme (4.61)

$$\sum_{s_+, s_-} \mathcal{M}^\mu(e^+ e^- | n) \mathcal{M}^{\dagger\nu}(e^+ e^- | n') = \text{Sp} \left( \Gamma_n^\mu \frac{\not{p}_+ - m}{2m} \bar{\Gamma}_{n'}^\nu \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \quad (\text{E.37})$$

ausschreiben:

$$\begin{aligned}
&\text{Sp} \left( \Gamma_n^\mu \frac{\not{p}_+ - m}{2m} \bar{\Gamma}_{n'}^\nu \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \\
&= \text{Sp} \left\{ \left[ \left( \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu \not{k}}{2(kp_+)(kp_-)} \right) B_n + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right) C_n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right) D_n \right] \cdot \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right. \\
&\quad \cdot \left[ \left( \not{\nu} - \frac{e^2 a^2 k^\nu \not{k}}{2(kp_+)(kp_-)} \right) B_{n'}^* + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \not{q}_1 \not{k} \not{\nu} - \frac{1}{kp_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_1 \right) C_{n'}^* \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{e}{2} \left( \frac{1}{kp_+} \not{q}_2 \not{k} \not{\nu} - \frac{1}{kp_-} \not{\nu} \not{k} \not{q}_2 \right) D_{n'}^* \right] \cdot \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & B_n B_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(2kp_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 & \left. \cdot \left[ \not{p}'_- - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_+)(2kp_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e^2}{4} C_n C_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_1 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_1 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e^2}{4} D_n D_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_2 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_2 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38c})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e}{2} B_n C_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(2kp_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_1 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_1 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38d})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e}{2} B_n D_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \not{\mu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)(2kp_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_2 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_2 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38e})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e}{2} C_n B_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \not{p}'_- - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_+)(2k_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38f})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e}{2} D_n B_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \not{p}'_- - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_+)(2kp_-)} \not{k} \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38g})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e^2}{4} C_n D_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_1 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_1 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_2 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_2 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\} \quad (\text{E.38h})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{e^2}{4} D_n C_{n'}^* \text{Sp} \left\{ \left[ \frac{1}{kp_+} \not{\mu} \not{k} \not{q}_2 - \frac{1}{kp_-} \not{q}_2 \not{k} \not{\mu} \right] \left( \frac{\not{p}'_+ - m}{2m} \right) \right. \\
 \left. \cdot \left[ \frac{1}{kp_+} \not{q}_1 \not{k} \not{p}'_- - \frac{1}{kp_-} \not{p}'_- \not{k} \not{q}_1 \right] \left( \frac{\not{p}'_- + m}{2m} \right) \right\}. \quad (\text{E.38i})
 \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme kann man wie oben gezeigt berechnen. Hier wird nur das Ergebnis angegeben:

$$\begin{aligned}
(E.38a) = & B_n B_{n'}^* \left\{ -g^{\mu\nu} - \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu}{(kp_+)(kp_-)} \right. \\
& + \frac{1}{m^2} \left[ p_+^\mu p_-^\nu + p_+^\nu p_-^\mu - g^{\mu\nu} (p_+ p_-) + \frac{e^4 a^4 k^\mu k^\nu}{2(kp_+)(kp_-)} + \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu (p_+ p_-)}{(kp_+)(kp_-)} \right. \\
& \left. \left. - \frac{e^2 a^2}{2(kp_+)(kp_-)} \left( k^\nu (p_+^\mu kp_- + p_-^\mu kp_+) + k^\mu (p_+^\nu kp_- + p_-^\nu kp_+) \right) \right] \right\} \quad (E.39)
\end{aligned}$$

Man beachte die unterschiedlichen Vorzeichen im Vergleich zu dem entsprechenden Term (E.28) für den Myonenvertex, das von dem Antifermion am Vertex des erzeugten Elektron-Positron-Paars herrührt.

$$\begin{aligned}
(E.38b) = & C_n C_{n'}^* \left\{ \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu}{(kp_+)(kp_-)} \right. \\
& + \frac{e^2}{2m^2} \left[ 2(k^\mu a_1^\nu + k^\nu a_1^\mu) \left( \frac{(a_1 p_+)}{(kp_+)} + \frac{(a_1 p_-)}{(kp_-)} \right) - 4 \frac{k^\mu k^\nu (a_1 p_+) (a_1 p_-)}{(kp_+)(kp_-)} - 4 a_1^\mu a_1^\nu \right] \\
& + \frac{e^2 a^2}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( k^\nu (p_+^\mu + p_-^\mu) + k^\mu (p_+^\nu + p_-^\nu) \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 a^2 g^{\mu\nu} (kp_+)(kp_-) - 2 \frac{a^2 k^\mu k^\nu (p_+ p_-)}{(kp_+)(kp_-)} \right] \right\} \quad (E.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.38c) = & D_n D_{n'}^* \left\{ \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu}{(kp_+)(kp_-)} \right. \\
& + \frac{e^2}{2m^2} \left[ 2(k^\mu a_2^\nu + k^\nu a_2^\mu) \left( \frac{(a_2 p_+)}{(kp_+)} + \frac{(a_2 p_-)}{(kp_-)} \right) - 4 \frac{k^\mu k^\nu (a_2 p_+) (a_2 p_-)}{(kp_+)(kp_-)} - 4 a_2^\mu a_2^\nu \right] \\
& + \frac{e^2 a^2}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( k^\nu (p_+^\mu + p_-^\mu) + k^\mu (p_+^\nu + p_-^\nu) \right) \right. \\
& \left. - \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 a^2 g^{\mu\nu} (kp_+)(kp_-) - 2 \frac{a^2 k^\mu k^\nu (p_+ p_-)}{(kp_+)(kp_-)} \right] \right\} \quad (E.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E.38d)} &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) (a_1^\mu k^\nu - a_1^\nu k^\mu) \right. \\
 &+ \frac{e}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( ((a_1 p_+) k p_- - (a_1 p_-) k p_+) \left( \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu}{2(kp_-)(kp_+)} - g^{\mu\nu} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p_-^\nu (k^\mu (a_1 p_+) - a_1^\mu k p_+) - p_+^\nu (k^\mu (a_1 p_-) - a_1^\mu k p_-) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( (p_+ p_-) (k^\mu a_1^\nu - k^\nu a_1^\mu) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( p_-^\mu - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)} \right) (k^\nu (a_1 p_+) - a_1^\nu k p_+) \right. \\
 &\quad \left. + \left( p_+^\mu - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_-)} \right) (k^\nu (a_1 p_-) - a_1^\nu k p_-) \right] \left. \right\} \cdot B_n C_{n'} \quad \text{(E.42)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E.38e)} &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) (a_2^\mu k^\nu - a_2^\nu k^\mu) \right. \\
 &+ \frac{e}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( ((a_2 p_+) k p_- - (a_2 p_-) k p_+) \left( \frac{e^2 a^2 k^\mu k^\nu}{2(kp_-)(kp_+)} - g^{\mu\nu} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p_-^\nu (k^\mu (a_2 p_+) - a_2^\mu k p_+) - p_+^\nu (k^\mu (a_2 p_-) - a_2^\mu k p_-) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( (p_+ p_-) (k^\mu a_2^\nu - k^\nu a_2^\mu) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( p_-^\mu - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_+)} \right) (k^\nu (a_2 p_+) - a_2^\nu k p_+) \right. \\
 &\quad \left. + \left( p_+^\mu - \frac{e^2 a^2 k^\mu}{2(kp_-)} \right) (k^\nu (a_2 p_-) - a_2^\nu k p_-) \right] \left. \right\} \cdot B_n D_{n'} \quad \text{(E.43)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.38f) &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) (a_1^\nu k^\mu - a_1^\mu k^\nu) \right. \\
&+ \frac{e}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( ((a_1 p_+) k p_- - (a_1 p_-) k p_+) \left( \frac{e^2 a^2 k^\nu k^\mu}{2(kp_-)(kp_+)} - g^{\nu\mu} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_-^\mu (k^\nu (a_1 p_+) - a_1^\nu k p_+) - p_+^\mu (k^\nu (a_1 p_-) - a_1^\nu k p_-) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( (p_+ p_-) (k^\nu a_1^\mu - k^\mu a_1^\nu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p_-^\nu - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_+)}) (k^\mu (a_1 p_+) - a_1^\mu k p_+) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p_+^\nu - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_-)}) (k^\mu (a_1 p_-) - a_1^\mu k p_-) \right) \right] \left. \right\} \cdot C_n B_{n'} \quad (E.44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(E.38g) &= \left\{ \frac{e}{2} \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) (a_2^\nu k^\mu - a_2^\mu k^\nu) \right. \\
&+ \frac{e}{2m^2} \left[ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( ((a_2 p_+) k p_- - (a_2 p_-) k p_+) \left( \frac{e^2 a^2 k^\nu k^\mu}{2(kp_-)(kp_+)} - g^{\nu\mu} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + p_-^\mu (k^\nu (a_2 p_+) - a_2^\nu k p_+) - p_+^\mu (k^\nu (a_2 p_-) - a_2^\nu k p_-) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right) \left( (p_+ p_-) (k^\nu a_2^\mu - k^\mu a_2^\nu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p_-^\nu - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_+)}) (k^\mu (a_2 p_+) - a_2^\mu k p_+) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (p_+^\nu - \frac{e^2 a^2 k^\nu}{2(kp_-)}) (k^\mu (a_2 p_-) - a_2^\mu k p_-) \right) \right] \left. \right\} \cdot D_n B_{n'} \quad (E.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E.38h)} = & \left\{ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 \left( (k^\nu(a_1p_+) - a_1^\nu kp_+) (a_2^\mu kp_- - k^\mu(a_2p_-)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (k^\nu(a_1p_-) - a_1^\nu kp_-) (a_2^\mu kp_+ - k^\mu(a_2p_+)) \right) \right. \\
 & + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 \left( (k^\nu(a_2p_+) - a_2^\nu kp_+) (-a_1^\mu kp_- + k^\mu(a_1p_-)) \right. \\
 & \left. + (k^\nu(a_2p_-) - a_2^\nu kp_-) (-a_1^\mu kp_+ + k^\mu(a_1p_+)) \right) \\
 & + \left( \frac{1}{(kp_+)^2} - \frac{1}{(kp_-)^2} \right) \left( (a_1^\mu k^\nu - a_1^\nu k^\mu) ((a_2p_+)kp_- - (a_2p_-)kp_+) \right. \\
 & \left. + (a_2^\mu k^\nu - a_2^\nu k^\mu) (-(a_1p_+)kp_- + (a_1p_-)kp_+) \right) \left. \right\} \cdot \frac{e^2}{4m^2} C_n D_{n'}
 \end{aligned} \tag{E.46}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E.38i)} = & \left\{ \left( \frac{1}{(kp_+)} + \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 \left( (k^\nu(a_2p_+) - a_2^\nu kp_+) (a_1^\mu kp_- - k^\mu(a_1p_-)) \right. \right. \\
 & \left. \left. + (k^\nu(a_2p_-) - a_2^\nu kp_-) (a_1^\mu kp_+ - k^\mu(a_1p_+)) \right) \right. \\
 & + \left( \frac{1}{(kp_+)} - \frac{1}{(kp_-)} \right)^2 \left( (k^\nu(a_1p_+) - a_1^\nu kp_+) (-a_2^\mu kp_- + k^\mu(a_2p_-)) \right. \\
 & \left. + (k^\nu(a_1p_-) - a_1^\nu kp_-) (-a_2^\mu kp_+ + k^\mu(a_2p_+)) \right) \\
 & + \left( \frac{1}{(kp_+)^2} - \frac{1}{(kp_-)^2} \right) \left( (a_2^\mu k^\nu - a_2^\nu k^\mu) ((a_1p_+)kp_- - (a_1p_-)kp_+) \right. \\
 & \left. + (a_1^\mu k^\nu - a_1^\nu k^\mu) (-(a_2p_+)kp_- + (a_2p_-)kp_+) \right) \left. \right\} \cdot \frac{e^2}{4m^2} D_n C_{n'}
 \end{aligned} \tag{E.47}$$

Wie man sieht, sind die Spurausdrücke sowohl für den Elektronen- als auch für den Projektil-Vertex sehr lang. Sie wurden jeweils mit Hilfe des *Mathematica*-Paketes `tracer` überprüft [tra11]. Zur Berechnung der Paarerezeugungsraten müssen beide miteinander multipliziert werden, wobei hierbei auch noch über die Indizes  $\mu$  und  $\nu$  summiert wird. Dies wurde in der numerischen Berechnung in einem C++-Programm durchgeführt.



# Symbolverzeichnis

$\alpha_f$ .....	Feinstrukturkonstante.
$A$ .....	Viererpotential des elektromagnetischen Feldes des Lasers.
$a$ .....	Amplitude des Vektorpotentials des Laserfeldes.
$\mathcal{D}_{\mu\nu}$ .....	Photonenpropagator des freien Photons.
$J_n(x)$ .....	Gewöhnliche zylindrische Besselfunktion der Ordnung $n$ .
$k^\mu$ .....	Wellenzahlvektor der Laserwelle.
$M$ .....	Projektilmasse.
$m = m_e$ .....	Elektronenmasse.
$M_*$ .....	Effektive Projektilmasse.
$m_*$ .....	Effektive Elektronenmasse.
$n, n'$ .....	Anzahl absorbierter Photonen am Vertex des erzeugten Paares.
$N, N' = r - n, r - n'$ .....	Anzahl absorbierter Photonen am Projektilvertex.
$\omega$ .....	Laserfrequenz.
$\Psi$ .....	Volkov-Zustand für Myon.
$\psi$ .....	Volkov-Zustand für Elektron/Positron.
$P^\mu$ .....	Kinetischer Viererimpuls für Myonen.

$p_-^\mu$ bzw. $p_+^\mu$ .....	Kinetischer Viererimpuls für Elektron bzw. Positron.
$Q^\mu$ .....	Effektiver Viererimpuls für Myonen.
$q_-^\mu$ bzw. $q_+^\mu$ .....	Effektiver Viererimpuls für Elektron bzw. Positron.
$dR$ .....	Differentielle Übergangsrate.
$dR_r$ .....	Differentielle Partialrate.
$R$ .....	Totale Paarerzeugungsrate.
$r$ .....	Gesamtzahl absorbierter Photonen.
$r_0$ .....	Minimale Anzahl absorbierter Photonen zur Überwindung der Energieschwelle.
$R_r$ .....	Partialrate für $r$ -Photonenprozess.
$\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{S}_{\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-}$ .....	Übergangsamplitude für den Prozess $\mu^- \rightarrow \mu'^- + e^+ e^-$ .
$\mathcal{S}^{(r)}$ .....	Partialamplitude zur Gesamtzahl $r$ absorbierter Photonen.
${}_r T_{nn'}$ .....	Spinsumme für $r$ insgesamt absorbierte Photonen mit der Kombination $\{n, n'\}$ absorbierter Photonen am Elektron-Positron-Vertex.
$U_{P_- S_-}$ .....	Dirac-Spinor für Myon mit 4er-Impuls $P_-$ und Spin $S_-$ .
$u_{p_- s_-}$ .....	Dirac-Spinor für Elektron mit 4er-Impuls $p_-$ und Spin $s_-$ .
$v_{p_+ s_+}$ .....	Dirac-Spinor für Positron mit 4er-Impuls $p_+$ und Spin $s_+$ .
$\xi$ .....	Laserintensitätsparameter für die Wechselwirkung des Laserfelds mit Elektronen bzw. Positronen.
$\Xi = \frac{m}{M} \xi$ .....	Laserintensitätsparameter für die Wechselwirkung des Laserfelds mit Teilchen der Masse $M$ .

# Literaturverzeichnis

- [AS65] ABRAMOWITZ, M. ; STEGUN, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications, Inc., 1965. – XIV, 1046 S. – ISBN 0-486-61272-4, 978-0-486-61272-0.
- [BBK99] BAMBER, C. ; BOEGE, S. J. ; KOFFAS, T. et al.: Studies of nonlinear QED in collisions of 46.6 GeV electrons with intense laser pulses. In: *Phys. Rev. D* 60 (1999), Nr. 9, S. 092004-1 – 092004-43.
- [BD64] BJORKEN, James D. ; DRELL, Sidney D.: *Relativistische Quantenmechanik*. Mannheim : Bibliogr. Inst., 1964. – 312 S.
- [BFHS97] BURKE, D. L. ; FIELD, R. C. ; HORTON-SMITH, G. et al.: Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997), Nr. 9, S. 1626-1629.
- [BGK02] BECKER, W. ; GRASBON, F. ; KOPOLD, R. ; MILOSEVIC, D. B. ; PAULUS, G. G. ; WALTHER, H.: Above-Threshold Ionization: From Classical Features to Quantum Effects. In: *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* 48 (2002), S. 35-98.
- [BH34] BETHE, H. ; HEITLER, W.: On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons. In: *Proc. Roy. Soc. London A* 146 (1934), Nr. 856, S. 83-112.
- [BK64] BROWN, Lowell S. ; KIBBLE, T. W. B.: Interaction of Intense Laser Beams with Electrons. In: *Phys. Rev.* 133 (1964), Nr. 3A, S. A705-A719.
- [BL03] BOGACZ, S. A. ; LEBEDEV, V. A.: Recirculating Linac Muon Accelerator for Neutrino Factory. In: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 503 (2003), Nr. 1-2, S. 306-308.
- [BLP91] BERESTECKIJ, Vladimir B. ; LIFSIC, Evgenij M. ; PITAEVSKIJ, Lev P.: *Quantenelektrodynamik*. [Deutsch], 1991 (Lehrbuch der theoretischen Physik / L. D. Landau ; E. M. Lifschitz ; 4). – XV, 614 S.

– ISBN 3-05-500068-4, 3-8171-1329-3, 978-3-8171-1329-3, 978-3-05-500068-3.

- [BM75] BECKER, W. ; MITTER, H.: Vacuum Polarization in Laser Fields. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* (1975), Nr. 8, S. 1638–1657.
- [Bor47a] BORSELLINO, A.: Sulle coppie di elettroni create da raggi  $\gamma$  in presenza di elettroni. In: *Nuovo Cimento* 4 (1947), Nr. 112; *Rev. Univ. Nac. Tucumán A6* (1947), Nr. 7.
- [BW34] BREIT, G. ; WHEELER, John A.: Collision of Two Light Quanta. In: *Phys. Rev.* 46 (1934), Nr. 12, S. 1087–1091.
- [CAB08] C.ANKENBRANDT, C. ; ALEXAHIN, Y. ; BALBEKOV, V. et al.: Muon Collider Task Force Report. In: *FERMILAB-TM-2399-APC* (2008). – [https://mctf.fnal.gov/annual-reports/mctf-report-2007\\_v9.doc](https://mctf.fnal.gov/annual-reports/mctf-report-2007_v9.doc).
- [EM95] EICHLER, J. ; MEYERHOF, W. E.: *Relativistic Atomic Collisions*. San Diego : Academic Press, 1995. – 413 S. – ISBN 0-12-233675-5, 978-0-12-233675-1.
- [FLA] *Offizielle Website*.  
<http://flash.desy.de/>.
- [Ghi47] GHIZZETTI, A. G.: On the evaluation of an integral occurring in the theory of electron pair production. In: *Rev. Univ. Nac. Tucumán A6* (1947), Nr. 37, S. 37–50.
- [HMK06] HATSAGORTSYAN, K. Z. ; MÜLLER, C. ; KEITEL, C. H.: Nonperturbative Multiphoton Processes and Electron-Positron Pair Production. In: *AIP Conf. Proc.* 827 (2006), S. 442–447. – 3rd International Conference on Superstrong Fields in Plasmas, Varenna, ITALY, SEP 19-24, 2005.
- [Löt08] LÖTSTEDT, Erik: *Laser-assisted second-order relativistic QED processes: Bremsstrahlung and pair creation modified by a strong electromagnetic wave field*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Diss., 2008.
- [MOK69] MOTZ, J. W. ; OLSEN, Haakon A. ; KOCH, H. W.: Pair Production by Photons. In: *Rev. Mod. Phys.* 41 (1969), Nr. 4, S. 581–639.
- [Mor67] MORSE, K. J.: Pair Production by Photons on Electrons. In: *Phys. Rev.* 160 (1967), Nr. 5, S. 1065–1071.

- [Mor71] MORK, K. J.: Differential Cross Section for Pair Production by Photons on Electrons. In: *Physica Norvegica* 5 (1971), Nr. 1.
- [Mül03] MÜLLER, Carsten: *Nichtlineare Paarerzeugung im Stoß eines relativistischen Kerns mit einem intensiven Laserstrahl*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Diss., 2003.
- [NVR07] NEDORESHTA, V. N. ; VOROSHILO, A. I. ; ROSHCHUPKIN, S. P.: Nonresonant Scattering of an Electron by a Muon in the Field of Plane Electromagnetic Wave. In: *Laser Phys. Lett.* 4 (2007), Nr. 12, S. 872–879.
- [PS95] PESKIN, Michael E. ; SCHROEDER, Daniel V.: *An introduction to quantum field theory*. Reading, Ma [u.a.] : Addison-Wesley, 1995. – XXII, 842 S. – ISBN 0–201–50397–2, 978–0–201–50397–5.
- [Rei79] REISS, Howard R.: Field intensity and relativistic considerations in the choice of gauge in electrodynamics. In: *Phys. Rev. A* 19 (1979), Nr. 3, S. 1140–1150.
- [Rit72] RITUS, V. I.: Vacuum Polarization Correction to Elastic Electron and Muon Scattering in an Intense Field and Pair Electron- and Muon-production. In: *Nucl. Phys. B* 44 (1972), Nr. 1, S. 236–252.
- [Sau31] SAUTER, F.: Electron in homogeneous electric field. In: *Z. Phys.* 69 (1931), Nr. 11–12, S. 742–764.
- [Sch51] SCHWINGER, J.: On Gauge Invariance and Vacuum Polarization. In: *Phys. Rev.* 82 (1951), Nr. 5, S. 664–679.
- [SHHK06] SALAMIN, Y. I. ; HU, S. X. ; HATSAGORTSYAN, K. Z. ; KEITEL, C. H.: Relativistic high-power laser-matter interactions. In: *Physics Reports* 427 (2006), Nr. 2-3, S. 41–155.
- [tra11] *Tracer: A Package for Gamma-Algebra in Arbitrary Dimensions*.  
<http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/2987/>.  
Version: 1.1. – M. Jamin und M. E. Lautenbacher.
- [TRI] *Offizielle Website*.  
<http://www.triumf.info/>.
- [Vol35] VOLKOV, D. M.: Exact solution of Dirac's equation for a plane wave of determined frequency. In: *Z. Phys.* 94 (1935), Nr. 250.

[XFE] *Offizielle Website.*

<http://www.xfel.eu/>.

[Yak65] YAKOVLEV, V. P.: Electron-Positron Pair Production by a Strong Electromagnetic Wave in the Field of a Nucleus. In: *Sov. Phys. JETP* 22 (1965), Nr. 1, S. 223–229.

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, allen zu danken, die zu der Entstehung dieser Arbeit in welcher Form auch immer beigetragen haben.

Zu allererst möchte ich Herrn Christoph H. Keitel für die Aufnahme in die Arbeitsgruppe und das Ermöglichen dieser interessanten Diplomarbeit danken.

Meinem Betreuer Carsten danke ich für die Unterstützung und Hilfestellung bei allen großen und kleinen Problemen und dafür, dass er immer Zeit hat.

Peter danke ich für die Lösung sämtlicher Computerprobleme.

Der ganzen Arbeitsgruppe für die freundliche Aufnahme. Spezieller Dank an die Rollenspielgruppe für viele schöne Abende und anregende Diskussionen. Meinem Onkel Martin danke ich für das Binden dieser Arbeit.

Danke auch an meine Freunde, die mich während des Studiums begleitet haben, vor allem Nico, Gero, Silvia und Susanne.

Meinen Mitbewohnerinnen Lena, Katharina und Julia danke ich vor allem für die Nachsicht bezüglich der Hausarbeit in den letzten Wochen.

Meinen Schwestern und meinem Schwager danke ich dafür, dass sie da sind und für diverse Fahrzeugreparaturen.

All jenen, die ich hier nicht persönlich genannt habe, danke ich auch dafür, dass sie mir dies nachsehen.

Mein größter Dank gilt meinen Eltern und Jan, ohne deren finanzielle, ideelle, kulinarische, lektorische und sonstige Unterstützung diese Diplomarbeit nie hätte entstehen können.





**Erklärung:**

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den .....

.....

Unterschrift